

## Espaces vectoriels et applications linéaires. Cas général.

1 Montrer que l'ensemble des suites vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$  est un esp vect sur  $\mathbb{R}$ .  
Donner sa dimension.

2 Montrer que l'ensemble  $\wp$  des fonctions paires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .  
Idem avec l'ensemble  $\mathfrak{I}$  des fonctions impaires.

Que vaut  $\wp \cap \mathfrak{I}$ ? On note  $\mathfrak{N}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\mathfrak{N} = \wp + \mathfrak{I}$ .  
(indication : On utilisera le fait que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$  )

3 Montrer que  $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) \mapsto XP'(X) + 2P(X) \end{array} \right.$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

Quel est son noyau et son image? Quelle est la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ ?

4 Montrer que  $\psi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) \mapsto XP'(X) - 2P(X) \end{array} \right.$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

Quel est son noyau? Quel est la dimension de  $\text{Im}\psi$ ? L'application  $\psi$  est-elle injective, surjective?  
Trouver une base de  $\text{Im}\psi$ . (**maison**)

5 F désigne l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . G désigne l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que l'application  $\varphi \left| \begin{array}{l} F \rightarrow G \\ f \mapsto f'' - 2f' + 5f \end{array} \right.$  est linéaire. Quel est son noyau?

6 Soit  $f \in L(F, G)$  et  $g \in L(E, F)$ . (E, F, et G sont trois espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$ )

a Montrer que si  $fg$  est injective, alors  $g$  est injective.

b Montrer que  $fg$  est injective  $\Leftrightarrow g$  est injective et  $\text{Im}g \cap \text{Ker}f = \{\vec{0}\}$

c Montrer que  $fg$  est surjective  $\Leftrightarrow f$  est surjective et  $\text{Im}g + \text{Ker}f = F$ .

7 L'ensemble des fonctions périodiques de période  $37$  est-il un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ?

8 La famille de polynômes  $(1+X+X^2+X^3, 2X+X^2, 1+2X-X^2)$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_3[X]$ ?

Même question avec la famille  $(1+X+X^2, X+2X^2, 1+2X-X^2, X^2-1)$ .

9 Dans  $\mathbb{R}_3[X]$ , Trouver le rang de la famille  $F = (1+X+2X^2+X^3, 2-X, X+X^2-X^3, 3+X+3X^2)$ .

Trouver alors un espace vectoriel supplémentaire à  $\text{Vect}(F)$ .

10 Dans F (l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ), montrer que  $x+1$ ;  $e^{2x}$  et  $xe^x$  sont libres.

11 Dans F (l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ), montrer que  $x^2-x+1$ ;  $-x^2+2x$  et  $x^2+1$  sont libres.

12 Soit  $E = \{\text{fonctions numériques deux fois dérivables telles que } f''+2f'+f=0\}$

a Montrer que E est un espace vectoriel.

b Donner la dimension et une base de E.

13 On rappelle que l'ensemble des suites forme un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

a Montrer que les suites vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$  forment un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

b Donner la dimension et une base de cet ensemble de suites. (**maison**)

14 Dans F (l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ), montrer que  $x$ ;  $x^2$  et  $\cos x$  sont libres. (**maison**)

15 On rappelle que  $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  est l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par :  $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}(\vec{u}) = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  vérifiant  $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ .

On note  $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$  et  $F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{x}) = \vec{x}\}$ .

Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sev de  $\mathbb{R}^2$ . Calculer  $E \cap F$ .

Vérifier que  $\vec{x} - f(\vec{x}) \in E$  et que  $\vec{x} + f(\vec{x}) \in F$ . En déduire que  $\mathbb{R}^2 = E + F$ .

Construire une telle application.

16 Soit  $f \in L(\mathbb{R}^3)$  vérifiant  $f \circ f = f$ . On note  $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{x}) = \vec{0}\}$  et  $F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{x}) = \vec{x}\}$ .

Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sev de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer  $E \cap F$ .

Vérifier que  $\vec{x} - f(\vec{x}) \in E$  et que  $f(\vec{x}) \in F$ . En déduire que  $\mathbb{R}^3 = E + F$ .

Construire une telle application.

(MAISON)

17 (un morceau du concours ATS 2005)

La trace d'une matrice est la somme des termes de sa diagonale.

Montrer que l'ensemble des matrices de  $M_2(\mathbb{R})$  dont la trace est nulle

est un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{R})$ .

Donner sa dimension.

Soient les matrices :  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$   $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que  $(J, K, L)$  est une base de cet espace vectoriel.

18 Soit  $M(a, b)$  la matrice de  $M_3(\mathbb{R})$  définie par  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

a) On note  $F$  l'ensemble  $F = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ .

Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

b) Montrer que  $F$  est de dimension 2.

c) Soient les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que  $((A+I), (A-2I))$  est une base de  $F$ .

d) Donner les coordonnées de  $M(a, b)$  dans cette base.

19 Montrer que l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a+b & a \\ a-2b & a-b \end{pmatrix}$  est un sev de  $M_2(\mathbb{R})$ .

Donnez en une base et la dimension

20 Montrer que l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & a+b-c & 2b \\ b-2c & a+c & a+b \\ 3a+b & a-b & c \end{pmatrix}$

est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$ .

Donnez en une base et la dimension.

(maison)