

1. Continuité, puis dérivabilité des fonctions suivantes :

$$1.1 \begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} ; \quad 1.2 \begin{cases} g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > -1 \text{ et } x \neq 0 \\ g(0) = e \end{cases} ;$$

Montrer de plus que f est de classe  $C^1$ .

$$1.3 \begin{cases} h(x) = \frac{\text{Ln}(1+x)}{x} & \text{si } x > -1 \text{ et } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{maison})$$

2. Etudier, grâce à un développement limité, les branches infinies des fonctions suivantes :

$$2.1 \sqrt{x^2 + x + 1} ; \quad 2.2 \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} \quad (\text{maison}) ; \quad 2.3 \frac{2x^2 + 1}{x + 1}.$$

3. Trouver les domaines de définition, puis les dérivées de :

$$3.1 \quad f(t) = \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) ; \quad 3.2 \quad g(t) = \arcsin(2t\sqrt{1-t^2}).$$

$$3.3 \quad h(t) = \arctan\left(\frac{1}{2t^2}\right) ; \quad 3.4 \quad k(t) = \arctan\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

4. 4.1 Dériver n fois l'équation :  $e^{4x} = e^{3x} e^x$  grâce à la formule de Leibnitz.

$$4.2 \text{ En déduire que } 4^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k. \quad (\text{maison})$$

5. variation et graphe de  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

6. variation et graphe de  $f(x) = \sin^3(2x)$

7. variation et graphe de  $g(x) = \frac{5x + 4}{x^2 - x}$

8. variation et graphe de  $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 10}{x + 3}$  (maison)

9. variation et graphe de  $f(x) = \cos^2(3x)$  (maison)

10. variation et graphe de  $g(x) = \frac{5x + 9}{x^2 + x}$  (maison)

11. variation et graphe des fonctions suivantes : 5.1  $f(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$  ; 5.2  $g(x) = \frac{\text{ch}x - 1}{x^2}$ .

12. Etude de la fonction :  $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \text{Ln}|x|$ .

13. Variation et graphe des fonctions suivantes :

$$13.1 f(t) = \arctan\left(\frac{2t}{1-t^2}\right) - 2\arctan(t) ;$$

$$13.2 g(t) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin t}{2}}\right) - \frac{t}{2}.$$

$$13.3 h(t) = \arg \text{th}\left(\frac{1+3\text{th}(t)}{3+\text{th}(t)}\right)$$

14. Soit  $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ . Montrer que les dérivées n<sup>iem</sup>es de f sont de la forme :

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n \sqrt{1+t^2}} \text{ où } P_n \text{ est un polynôme à coefficients dans } \mathbb{R}, \text{ de degré } n.$$

15. Variation et graphe des fonctions suivantes :

$$15.1 f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} ;$$

$$15.2 g(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}}.$$

$$15.3 h(t) = (t^3 - 2t^2 + t)^{\frac{1}{3}} \text{ pour } t > 0 ;$$

$$15.4 k(t) = \sqrt{t^2(t-2)}.$$

16. Etude de  $f(x) = \exp(1/x)$

17. Etude de la fonction  $f(x) = \frac{1}{\text{Ln}|x|}$ , et recherche du point d'inflexion.

18. Etude de la fonction  $f(x) = x \text{th}(x)$ . Montrer de plus que f n'admet qu'un seul point d'inflexion sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , dont on calculera l'ordonnée.