

CONTINUITE

1. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = |x|^{1/(x-1)}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

2. Donner l'ensemble de déf de $f(x) = \frac{\ln|x|}{1-x-\ln|x|}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

3. Montrer que l'application : $f : \begin{cases}]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln^2(1+x)}{(1-\cos x)} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 2 \end{cases}$ est continue sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

4. Montrer que l'appl $f : \begin{cases}]-1/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin^3 x}{\ln(1+2x)\tan^2 x} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 1/2 \end{cases}$ est continue sur $] -1/2, \pi/2[$. (MAISON)

5. Montrer que, lorsque x tend vers 2, la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$ est négligeable devant la fonction $g(x) = x-2$.

6. Montrer que, lorsque x tend vers 1, la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ est négligeable devant la fonction $g(x) = 3x-3$. (MAISON)

7. Donner l'ensemble de déf de $f(x) = (1+x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$. Peut-on prolonger f là où elle n'est pas définie ?

8. Donner l'ensemble de déf de $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$. Peut-on prolonger f là où elle n'est pas définie ? (MAISON)

9. Deux fonctions f et g sont définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ f(x) = 0 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ g(x) = x - 1/2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a Les fonctions f , g , $f+g$ et $f.g$ sont-elles continues sur $[0,1]$?

b Expliciter gof et fog . Qu'en est-il de leur continuité ?

10. On définit deux fonctions f et g par :

$$\begin{cases}]0,2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x \mapsto -x+2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} [0,2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x-1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x \mapsto x-2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

a Les fonctions f et g sont-elles continues ?

b Expliciter gof

c Continuité de gof ?

d Qu'en est-il pour fog ?

11. a et b sont deux réels tels que : $0 < a < b$. Soit f une application définie sur $[a,b]$, continue, et telle que $a < f(a)$ et $b > f(b)$. Montrer qu'il existe au moins un c tel que : $f(c) = c$.

(indication : On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - x$)

12. a Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}$

b En déduire que, si f est continue sur $[0,1]$, alors $\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} t^n f(t) dt$ est négligeable devant $\frac{1}{n}$.