

Complexes

1. Donner la forme trigonométrique de $e^{2i\pi}$; $e^{3i\pi}$; $2e^{i\pi/3} \times 3e^{i\pi/6}$; $2e^{i2\pi/3} \times 5e^{i\pi}$
2. Donner le module et l'argument de $3-3i$; $-2e^{i\pi/2}$; $-\sqrt{3} + i$; $-2e^{2i\pi/3}$
3. Donner le produit de $-2e^{i\pi/2}$ et de $2e^{3i\pi/2}$ sous forme exponentielle
4. Même question avec $2e^{5i\pi/6}$ et $-2e^{2i\pi/3}$ (MAISON)
5. Mettre sous forme algébrique $2e^{3i\pi/2}$; $e^{2-i\pi/3}$
6. Calculer $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}$ puis $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2020}$ puis $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$
7. Déterminer la forme cartésienne des complexes : $\frac{3-4i}{7+5i}$; $\frac{(3-2i)(5+i)}{5-i}$; $\frac{1-e^{ix}}{1+e^{ix}}$ où x est réel ; $e^{xe^{i\theta}}$
8. Forme trigonométrique des complexes suivants : $1 - i\sqrt{3}$; -2 ; $\sqrt{3} + 3i$; $\frac{\sqrt{2}}{1-i}$; $5+3i$; $1 + \cos x + i \sin x$
9. Que vaut $\arctan(4)+\arctan(1/5)$? Que vaut $\arctan(4)+\arctan(3/2)$? Contrôler avec la calculette
10. Montrer que $\arctan(1/2)+\arctan(1/5)+\arctan(1/8) = \pi/4$ (MAISON)
11. Trouver l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition suivante :
(1) $|z-4| = |z+2i|$; (2) $|z+1+i|=|z-3|$; (3) $|\bar{z} + 5 - i| = |z - 4i|$
12. Résoudre les systèmes : (1) $\begin{cases} z + z' = 3 \\ 2z - z' = i \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z - 2iz' = 5i \\ 2z - (1+i)z' = -2 + 6i \end{cases}$
13. Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que les points J(i) ; M(z) et M'(iz) soient alignés
14. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $(1-z)(1+iz)$ soit réel (ou imaginanire pur)
15. Résoudre dans \mathbb{C} les équations $z^2 - 5z + 9 = 0$; $2z^2 - 3z + 3 - i = 0$; $z^2 - (1 - 2i)z + 1 - 7i = 0$
16. Résoudre les équations (1) $z^4 - z^2 - 2 = 0$; (2) $z^6 = -8$; (3) $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
17. Trouver les complexes z tels que : $z^2 + (2 + 2i)z + 3 - 2i = 0$

18. Trouver les complexes z tels que : $iz^2 + (-4 + 3i)z - 5 - i = 0$ (MAISON)

19. Résoudre les équations (1) $z^5 = -1$; (2) $z^8 = i$; (3) $z^7 = 8 + 8i$ (MAISON)

20. Résoudre les équations (1) $e^z = 2i$; (2) $e^{2z} - 3e^z + 2 = 0$

21. Résoudre les équations suivantes : (1) $1 + \cos(3x) + \cos(6x) = 0$; (2) $\sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$

22. Soit $A_n = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$; $B_n = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1}$ et $C_n = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}$

Montrer que $A_n = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos(n\pi/3))$; $B_n = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos((n+1)\pi/3))$ et $C_n = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos((n+2)\pi/3))$

Indication : On pourra calculer $A_n + B_n + C_n$; $A_n + jB_n + j^2C_n$ et $A_n + j^2B_n + j^4C_n$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

23. On considère l'équation (1) $z^4 + 8iz^3 - 22z^2 - 24iz + 17 = 0$

Former l'équation (2) déduite de (1) en faisant le changement de variable $Z=z+2i$

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z^2 - 2z + 3)(z^2 + 2z + 3) = 0$ et en déduire les solutions de (1)

24. Soit $h(z) = z^3 - 3(1-i)z^2 - 8z + 4i(1-i)$

Mettre $h(z)$ sous la forme $A(x)+iB(x)$ dans le cas où z est un réel x

En déduire que l'équation $h(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $h(z) = 0$

25. On considère le polynôme défini par $P(z) = z^3 - iz^2 + (1 + 2i)z + 10 - 5i$

Calculer $P(1 + 2i)$ et résoudre l'équation $P(z) = 0$

Représenter les images respectives $M_1; M_2; M_3$ des solutions $z_1; z_2; z_3$ dans un repère orthonormé

Montrer que l'origine O est le centre du cercle circonscrit au triangle $(M_1; M_2; M_3)$

26. Mettre $3\cos x + 4\sin x$ sous la forme $A\cos(x + b)$

27. Même question avec $5\cos x + 12\sin x$

28. Même question avec $9\cos x + 40\sin x$ (MAISON)

29. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z - i)^7 = (z + i)^7$ (MAISON)

30. L'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} - \{2i\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{z+1-3i}{z-2i} \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

31. L'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z^2 + 2i \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?