

Calculs algébriques

1. $7 + 8 + 9 + \dots + 37 = \sum_{k=?}^? k = ?$ $7 + 9 + 11 + \dots + 37 = \sum_{k=?}^? k = ?$ $7 + 10 + 13 + \dots + 37 = \sum_{k=?}^? k = ?$

$8 + 10 + 12 + \dots + 38 = \sum_{k=?}^? k = ?$ 2. $2^4 + 2^5 + \dots + 2^{10} = \sum_{k=?}^? k = ?$

3. Calculer $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 - \sum_{k=1}^n k^3$ grâce à un changement d'indice. (k+1 devient k dans la première somme)

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

Développer $(k+1)^3$ à l'aide de la formule du binôme ; puis exprimer $\sum_{k=1}^n (k+1)^3$ en fonction de $\sum_{k=1}^n k^3$; de S_n et de n.

En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

4. Calculer $A_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$. (télescopage)

5. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$. $B_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$. $C_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$.

6. Calculer $A_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k}$. (télescopage)

7. Calculer $A_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$ et $B_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j$.

8. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}; \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}, \forall p \leq n$.

9. $n \in \mathbb{N}^*$. $f(x) = (1+x)^n$. Déterminer deux expressions pour $f'(x)$.

En déduire la valeur de $A_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ en fonction de n.

10. Calculer $A_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 16^{k-1}$. En déduire que $17^n - 1$ est divisible par 16 ; pour tout entier n.

11. $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. En effectuant le changement d'indice $j = n-k$; trouver une autre expression de S_n .

En déduire la valeur de $2 S_n$; puis celle de S_n .

12. Réduire en éléments simples la fraction $\frac{1}{4k^2-1}$.

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{k=?}^? \frac{1}{4k^2-1} = ?$ (télescopage)

13. $u_0 \in \mathbb{R}$. $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Montrer par récurrence que $u_n = u_0 e^{-\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$; pour tout $n > 0$.

14. $A_n = \prod_{k=0}^n e^{2k} = ?$ $B_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2 = ?$ $C_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = ?$ (MAISON)

15. Simplifier l'expression $\frac{\prod_{k=1}^n (2k+1)}{\prod_{k=1}^n (2k)}$ à l'aide de puissances de 2 et de factoriels.

16. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ est croissante.

17. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ de terme général $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ est décroissante.