

CALCUL INTEGRAL.

Intégration par parties ou changement de variable.

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer $I = \int_1^{\alpha} \cos(\ln x) dx$.
2. Soit $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$.
a Montrer que $I_n = \frac{-2n}{2n+1} I_{n-1}$, pour tout $n > 0$.
b En déduire la valeur de I_n en fonction de n .
3. Calculer $I = \int x e^{x^2} dx$; $J = \int \frac{\ln x}{x} dx$; $K = \int \frac{dx}{x(\ln x)^n}$; $M = \int (\ln x)^2 dx$;
 $N = \int x \ln x dx$; $O = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; $P = \int \frac{x \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; $Q = \int x^2 \operatorname{ch} x dx$.
4. Soit $I_n = \int \cos^n x dx$. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} .
5. $L = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ (MAISON 1)
6. Calculer $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$ à l'aide de chacun des changements de variable $x = \tan \theta$ et $u = x^2 + 1$.
Vérifier l'accord des résultats. (MAISON 1)

Divers

7. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \operatorname{Ln}(\cos x + \sin x)$.
Quelle est la dérivée de f ?
Soit $I = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$. Calculer $I+J$ et $I-J$. En déduire I et J .
8. La fonction f étant continue, montrer que $\int_{2x}^{x^2+1} f(t) dt$ est dérivable et calculer sa dérivée.
9. a Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0$.
b Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n e^x dx = 0$.
c Soit f une fonction C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.
10. Calculer les intégrales $\int_0^{2\pi} |\cos x| dx$; $\int_{-1}^2 x|x| dx$; $\int_{-1}^1 x|x| dx$. (MAISON 1)
11. Etudier la fonction $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{(t^4 + t^2 + 1)^{1/2}} dt$. (On appellera $\alpha = \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{(t^4 + t^2 + 1)^{1/2}} dt$; et pour la limite en $+\infty$, on pourra montrer que $\forall t \geq x, \frac{1}{(t^4 + t^2 + 1)^{1/2}} \leq \frac{1}{x^2}$, et majorer ainsi $f(x)$).
12. Trouver toutes les fonctions f telles que $F(x) = \int_{x+2}^x f(t) dt$ soit constante.
13. Calculer les intégrales $C = \int e^{ax} \cos(bx) dx$ et $D = \int e^{ax} \sin(bx) dx$.

Fractions rationnelles.

14. Calculer $I = \int \frac{x^4 + 3x + 2}{(x+2)(x-1)^2} dx$ $A = \int \frac{x^3}{1-x} dx$ $B = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ $C = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} dx$
 $D = \int \frac{x+1}{x^2+4x+8} dx$ $E = \int \frac{dx}{x^2-x+1}$ $F = \int_0^1 \frac{x}{x^3+1} dx$

15. Calculer $A = \int_0^3 \frac{2x+8}{x^2-4x-5} dx$ $B = \int_0^3 \frac{2x+9}{x^2+6x+18} dx$ (MAISON 2)

16. Calculer $I = \int \frac{x}{x^4-1} dx$ (MAISON 2)

17. Posé à l'oral en 2014 :

$$A = \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx ; \quad B = \int x e^{-x^2} dx ; \quad C = \int x \sin(x^2) dx \quad \text{et} \quad D = \int \frac{x^2-1}{(x-1)(x+3)} dx$$

18. Posé à l'oral en 2017 : $F = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{x^4-1} dx$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x}{x^6+1} dx$

Polynômes trigonométriques.

19. $A = \int \sin^4 x \cos x dx$; $B = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$; $C = \int \sin^4 x \cos^4 x dx$;
 $D = \int \sin^5 x \cos^3 x dx$.

Fractions rationnelles trigonométriques.

20. $A = \int \frac{\sin x}{2 \sin^2 x - 3 \cos x} dx$; $B = \int \frac{dx}{1+2 \cos x}$;
 $C = \int \frac{dx}{2+\cos x}$; $D = \int \frac{\cos^3 x - \sin x \cos x}{\sin^3 x - 3 \sin x + 2} dx$

21. $I = \int \frac{\sin x}{2 \sin^2 x - 5 \cos x + 1} dx$ (MAISON 3)

Intégrales abéliennes.

22. $A = \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$; $B = \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; $C = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;
 $D = \int \sqrt{e^x-1} dx$. $E = \int_{-2}^0 \frac{x^2}{\sqrt{-x^2-2x}} dx$.

23. Posé à l'oral en 2016 : $F = \int_0^1 \sqrt{x^2+2x} dx$

24. $I = \int_2^{7/2} \frac{x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$. (MAISON 3)

25. Résoudre l'équa diff : $\sqrt{x+2} y' - \sqrt{1-x} y = 0$ après avoir donné le domaine d'étude.