

# Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$\begin{array}{l}
 f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{array} \right. \quad g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{array} \right. \quad h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 2x \end{array} \right. \quad i \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{array} \right. \quad j \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 2x-y \end{array} \right. \\
 k \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{y^2+1} \end{array} \right. \quad l \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto 2x+y+1 \end{array} \right. \quad m \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x,0) \end{array} \right. \quad n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto (1,2x+y) \end{array} \right.
 \end{array}$$

2. Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

Donner leur noyaux et images. Dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

$$\begin{array}{l}
 f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{array} \right. \quad g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longmapsto x+y \end{array} \right. \quad h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x-y, x+y) \end{array} \right. \\
 m \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto (x+y, x-y, x+2y) \end{array} \right. \quad \text{Pour cette dernière, on donnera une équation cartésienne de l'image.}
 \end{array}$$

3. Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

Donner leur noyaux et images. Dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.

$$\begin{array}{l}
 f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+3y, 2x+6y) \end{array} \right. \quad g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (x+y-z, x+2y) \end{array} \right. \quad (\text{MAISON})
 \end{array}$$

4. Le but de cet exercice est d'expliciter la symétrie orthogonale ( dans  $\mathbb{R}^2$  )

par rapport à la droite D d'équation  $2x + 3y = 0$

41. Trouver un vecteur directeur  $\vec{e}_1$  de D et un vecteur  $\vec{e}_2$  normal à D. Que vaut  $f(\vec{e}_1)$  et  $f(\vec{e}_2)$  ?

42. Exprimer  $\vec{i} = (1; 0)$  en fonction de  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . Idem avec  $\vec{j} = (0; 1)$ .

43. Calculer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$ . En déduire  $f(x; y)$  pour tout  $(x; y)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Conclure.

5. Le but de cet exercice est d'expliciter la projection ( dans  $\mathbb{R}^2$  ) sur la droite D d'équation  $x - y = 0$  parallèlement

à la droite D' d'équation cartésienne  $2x + 3y = 0$ .

51. Trouver un vecteur directeur  $\vec{e}_1$  de D et  $\vec{e}_2$  de D'. Que vaut  $f(\vec{e}_1)$  et  $f(\vec{e}_2)$  ?

52. Exprimer  $\vec{i} = (1; 0)$  en fonction de  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . Idem avec  $\vec{j} = (0; 1)$ .

53. Calculer  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$ . En déduire  $f(x; y)$  pour tout  $(x; y)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Conclure.

6. Le but de cet exercice est d'expliciter la symétrie orthogonale ( dans  $\mathbb{R}^2$  )

par rapport à la droite D d'équation  $x - y = 0$ .

On procède comme dans l'exercice 4. ( MAISON )

7. Expliciter la projection orthogonale sur P :  $x + y + z = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ .