

Séries de Fourier

1. Concours ATS 2016

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie sur $] -\pi, \pi[$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } t \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \pi[\end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction g entre -3π et 3π

2. Quelle est la parité de g ? Justifier votre réponse.

3. La série de Fourier de g est notée : $S_g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$

Donner les coefficients b_n pour tout entier $n > 0$. Calculer a_0 et a_1 .

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ on a $a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

En déduire que si n est impair et différent de 1, alors $a_n = 0$

Montrer que si $n = 2p$ est un entier pair non nul, alors $a_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$

4. On s'intéresse maintenant à la convergence de la série de Fourier de g .

A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$ $g(t) = S_g(t)$? Justifier précisément votre réponse.

Montrer que $\forall t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1} \cos(2pt)$

En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{4p^2-1}$

5. Appliquer l'identité de Parseval à la fonction g . En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$.

2. Concours ATS 2013. Partie 1.

1. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer $e^{in\pi}$ à l'aide d'une puissance de -1 .

2. On pose pour tout entier naturel p , $I_{p,n} = \int_0^\pi t^p e^{int} dt$. Montrer que $I_{0,n} = \frac{-((-1)^n - 1)i}{n}$.

3. Montrer que $\forall (p; n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $I_{p,n} = \frac{i(-1)^{n+1}\pi^p}{n} + \frac{ip}{n} I_{p-1,n}$

4. Soient quatre nouvelles intégrales définies respectivement par :

$$C_{1,n} = \int_0^\pi t \cos(nt) dt; S_{1,n} = \int_0^\pi t \sin(nt) dt; C_{2,n} = \int_0^\pi t^2 \cos(nt) dt \text{ et } S_{2,n} = \int_0^\pi t^2 \sin(nt) dt$$

Calculer $I_{1,n} = \int_0^\pi t e^{int} dt$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $C_{1,n} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$ et $S_{1,n} = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$

Calculer $I_{2,n} = \int_0^\pi t^2 e^{int} dt$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $C_{2,n} = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$ et $S_{2,n} = \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) - \frac{(-1)^n \pi^2}{n}$

Partie 2.

Soit une fonction f **impair**, continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} définie sur $]0; \pi[$ par $f(t) = \pi t - t^2$

1. Représenter la fonction f sur $[-2\pi; 2\pi]$. Déterminer la série de Fourier de f .

Préciser la valeur des termes d'indice pair et des termes d'indice impair.

2. Etudier la convergence de la série de Fourier et donner sa somme.

3. Énoncer la relation de Parseval. Appliquer la à la fonction f et en déduire la valeur de $S = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^6}$.

4. Soit $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$. Trouver une expression de T de la forme $T = S + bT$. En déduire la valeur de T .

3. Concours ATS 2015.

Soit $u \in [0; 1]$ un paramètre. On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique telle que :

$\forall t \in [-\pi; \pi]$, $f(t) = \cos(ut)$

1. Etudier la parité de f . Représenter f pour $t \in [-3\pi; 3\pi]$ et pour $u = \frac{2}{3}$.

2. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$ pour $u = \frac{1}{2}$.

Dans les questions suivantes, u est un réel quelconque de $]0; 1[$.

3. La série de Fourier de f est notée : $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$

(a) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$. On rappelle que $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

(b) Que valent les coefficients $b_n(f)$? Déduire des questions précédentes $S_f(t)$.

4. (a) Etudier la série de Fourier de f en énonçant le théorème utilisé.

(b) Calculer $S_f(\pi)$ puis donner la valeur de l'expression $\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u \sin(\pi u)}{n^2 - u^2}$

5. Dans cette question, on considère le cas $u = \frac{1}{2}$.

Appliquer l'identité de Parseval à f . En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} \right)^2$.

4. Concours ATS 2014.

On considère les fonctions 2π -périodiques f et g définies par : $\forall x \in]-\pi; \pi[$ $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$

1. Préciser la parité de f . Déterminer la série de Fourier de f . On note S_f la somme de la série de Fourier.

2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f sur \mathbb{R} en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

En calculant $S_f(0)$, trouver la somme de la série numérique $T = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

3. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b non nuls tels que $S = aS + bT$

4. A l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique S .

5. Appliquer la relation de Parseval à S_f et trouver la somme de la série numérique $V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

6. Soit $U = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer qu'il existe deux réels c et d non nuls tels que $U = cU + dV$. En déduire U .

7. Préciser la parité de g . Déterminer la série de Fourier de g . On note S_g la somme de la série de Fourier.

8. Etudier la convergence de la série de Fourier de g sur \mathbb{R} en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

9. En calculant $S_g\left(\frac{\pi}{2}\right)$, trouver la somme de la série numérique $S = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

10. Appliquer la relation de Parseval à S_g et retrouver la valeur de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

11. Montrer que $\forall x \in [0; \pi[$, $-2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$

On considère la fonction 2π -périodique h définie par $h(x) = 0$ sur $]-\pi; 0]$ et $h(x) = x$ sur $]0; \pi]$

12. Exprimer h à l'aide de f et g . En déduire sans aucun calcul la série de Fourier de h .

Concours ATS 2017

Soit c un nombre réel non nul.

On considère les fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , toutes deux 2π -périodiques et définies sur $[-\pi; \pi[$ par :

$$\forall t \in [-\pi; \pi[, \quad f(t) = e^{ct} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} = ch(ct).$$

1. Dans cette question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

On précisera sur cette figure les valeurs de f aux points de discontinuité.

On donne $e^{-\pi} \simeq 0.04$ et $e^{\pi} \simeq 23,14$.

2. On note $Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$ et $Sg(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b'_n \sin(nt)$ les séries de Fourier de f et g .

(a) Calculer le coefficient a_0 .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a_n = \frac{2c(-1)^n sh(c\pi)}{\pi(c^2+n^2)}$

Indication : On pourra utiliser $\cos(nt) = \operatorname{Re}(e^{int})$.

On rappelle que $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b_n = \frac{2n(-1)^{n+1} sh(c\pi)}{\pi(c^2+n^2)}$.

3. (a) Quelle est la parité de g ?

(b) g est-elle continue sur \mathbb{R} ?

(c) Montrer que la série de Fourier de g est convergente.

On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.

(d) Déduire à l'aide des coefficients de Fourier a_n et b_n de f les coefficients de Fourier a'_n et b'_n de la fonction g .

4. (a) Dans cette sous-question seulement, on suppose $c = 1$.

Représenter graphiquement g sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

(b) Calculer $Sf(0)$ et $Sg(0)$ et en déduire l'expression $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{c^2 + n^2}$.

(c) Calculer $Sg(\pi)$ et en déduire l'expression $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c^2 + n^2}$.

5. En appliquant la relation de Parseval à g , calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{c^2 + n^2} \right)^2$.

Concours ATS 2018

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur $[-\pi; \pi]$ par

$$\forall t \in [-\pi; \pi], \quad f(t) = \pi^2 t - t^3.$$

Partie A

Pour k entier naturel impair et n entier naturel non nul, on considère les intégrales $I_{k,n} = \int_0^\pi t^k \sin(nt) dt$.

1. Calculer $I_{1,n}$.

2. Montrer que pour $k \geq 3$, $I_{k,n} = \frac{\pi^k (-1)^{n+1}}{n} - \frac{k(k-1)}{n^2} I_{k-2,n}$.

3. En déduire que $I_{3,n} = \frac{\pi^3 (-1)^{n+1}}{n} + \frac{6\pi (-1)^n}{n^3}$.

4. En utilisant ce qui précède, montrer que $\int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt = \frac{6\pi (-1)^{n+1}}{n^3}$.

Partie B

1. Etudier la parité de la fonction f .

2. Etudier les variations de f sur le segment $[-\pi; \pi]$.

3. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier.

4. On note $S_f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$ la série de Fourier de la fonction f.

(a) Déterminer les coefficients a_n .

(b) Montrer en utilisant la question A4 et en précisant les étapes du calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = 12 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

5. Montrer que la série de Fourier S_f converge vers f en précisant le théorème utilisé.

6. Calculer $S_f(\pi/2)$ et en déduire la valeur de $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

7. Montrer que $\int_0^\pi f^2(t) dt = \frac{8\pi^7}{105}$.

8. En appliquant la relation de Parseval à f, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

9 (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que $\frac{1}{n^6} = \int_{n-1}^n \frac{1}{t^6} dt \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^6} dt$.

(b) Soit N un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} \leq \frac{1}{5N^5}$.

La partie C est faite en info.

Concours ATS 2020

On rappelle que la **partie entière** d'un nombre réel x, notée $[x]$, est l'unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - [x]$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, exprimer $[x+1]$ en fonction de x.

(b) Montrer que la fonction f est périodique de période 1.

(c) Exprimer $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$ préciser la valeur de $f(1)$.

(d) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$.

(e) La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier.

On note $S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x))$ la série de Fourier de f.

2. (a) Calculer le coefficient a_0 .

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $a_n = 0$.

(c) Calculer les coefficients b_n .

(d) Montrer que la série de Fourier de f est convergente.

Enoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.

3. (a) Justifier la convergence de la série numérique $U = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

(b) Trouver une relation entre U et $S_f(1/4)$.

(c) Montrer que $U = \frac{\pi}{4}$.

4. (a) Enoncer le théorème de Parseval.

(b) Calculer la somme $V = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.