

INTEGRALES GENERALISEES.

1. Soit $F(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{4X^2 - 2}{X(1-X^2)}$.

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes: $\int_0^{0.5} F$; $\int_{-1}^{-0.5} F$; $\int_1^2 F$; $\int_2^3 F$; $\int_2^{+\infty} F$.

2. $F(x) = \frac{2x^2 - x + 2}{x^4 + x^3 - 2x^2}$.

Étudier les différents problèmes d'intégrale impropre liés à F .

3. Convergence des intégrales : $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sin x} dx$. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

4. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. $B = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1 + \cos x + e^x} dx$. $D = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx$. ($a \neq 0$).

5. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t^2 - 1)^x} dt$.

6. Nature de la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n \ln^\beta n}$.

7. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ est elle convergente ?

8. Les intégrales suivantes sont elles convergentes ? Si oui, les calculer.

$A = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$. $B = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. $C = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$. $D = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$.

$E = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$. $F = \int_{-1}^1 x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$. $G = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$. $H = \int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x-2}} dx$.

9. Convergence et valeur de l'intégrale : $\int_0^1 x^{n-1} \ln x dx$. ($n \in \mathbb{N}^*$)

10. a. Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ ont un sens.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$.

c. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a$. ($a > 0$)

11. a. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ est elle convergente ?

b. Calculer $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{-X}^X \frac{1+x}{1+x^2} dx$.