

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a prises.

Exercice 1

On rapporte le plan à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On considère les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$. Déterminer une équation du second degré en z dont les solutions sont z_1 et z_2 .
2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1 et z_2 , puis écrire ces nombres sous forme exponentielle.
3. Montrer que les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 sont sur le cercle de centre O et de rayon 1. En déduire une construction de ces points.
4. Calculer : $\alpha = z_1 + z_2$ $\beta = z_1^2 + z_2^2$ $\gamma = z_1^3 + z_2^3$.

Exercice 2

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{9}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{9}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{3}}{(x+1)^2}$$

Calculer ensuite $\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)^2} dx$

Exercice 3

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = 2e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur \mathbb{R} , et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

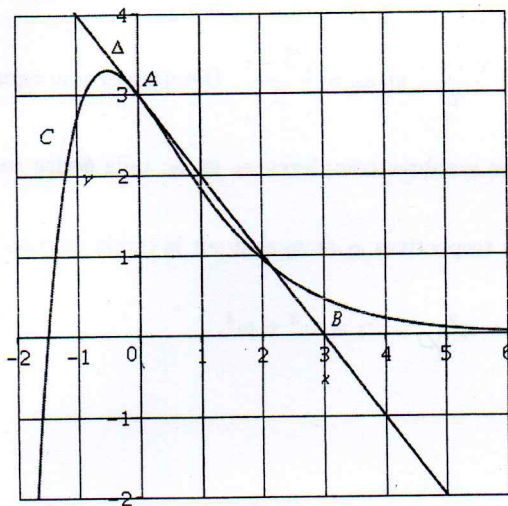
$$(E_0) : y' + y = 0$$

- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2xe^{-x}$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées $(0, 3)$.

B. Étude d'une fonction

- La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.

La droite Δ est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3, 0)$.



- Déterminer graphiquement $f(0)$.
- Déterminer, graphiquement ou par le calcul, $f'(0)$.
- Déterminer les valeurs des nombres réels a et b .

Dans la suite, on admet que f est définie par :

$$f(x) = (2x + 3)e^{-x}$$

- Calculer $f'(x)$.
 - Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f'(x) \geq 0$.
 - En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .
- Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

- En déduire une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de cette tangente et C au voisinage de ce point.

C. Calcul intégral

1. La fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A . Donc, pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$.
En déduire une primitive F de f sur \mathbb{R} .
2. Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$
3. Calculer $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$
4. Montrer que I et J diffèrent de moins de 10^{-2} . On donne $0,6065 < e^{-\frac{1}{2}} < 0,6066$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = x$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x , où y' est la fonction dérivée de y et où y'' est la fonction dérivée seconde de y .

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(e) \quad y'' + 2y' + y = 0$$

2. Déterminer les réels a et b tels que $g(x) = ax + b$ soit une solution de (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
4. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point, l'axe des abscisses pour tangente.

Exercice 5

Calcul de $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} dx$.

1. A l'aide du changement de variable $x + u = \sqrt{x^2 + x + 2}$, montrer que $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2u^2 - 4}{(1 - 2u)^2} du$.

2. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$:

$$\frac{2u^2 - 4}{(1 - 2u)^2} = a + \frac{b}{u - \frac{1}{2}} + \frac{c}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2}$$

3. Calculer I .

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○

○

FIN.

Formules form

1. Relations fonctionnelles

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

$$a^t = e^{t \ln(a)}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} [e^{it} + e^{-it}], \quad \cosh t = \frac{1}{2} [e^t + e^{-t}]$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} [e^{it} - e^{-it}], \quad \sinh t = \frac{1}{2} [e^t - e^{-t}]$$

$$e^{a+ib} = e^a (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2. Calcul différentiel et intégral

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t) = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^\alpha) = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^\alpha) = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t^\alpha}\right) = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t^\alpha}\right) = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\ln t) = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} (t^\alpha) = 0$$

$$\text{Si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} (t^\alpha) = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} (t^\alpha \ln(t)) = 0$$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\cosh t$	$\sinh t$
e^t	e^t	$\sinh t$	$\cosh t$
$t^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\text{Arcsin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\text{Arctan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$	$e^{\alpha t}$	$\alpha e^{\alpha t}$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad u > 0$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

Intégration par parties :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-1+n)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

- $a(t)x' + b(t)x = 0$

Solutions sur un intervalle I :

$$f(t) = ke^{-G(t)} \quad \text{où } G \text{ est une primitive de } t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$$

- $ax'' + bx' + cx = 0$

Equation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ .

Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique.

Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique.

Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines de l'équation caractéristique.