

Equations différentielles d'ordre 2

1 Coefficients constants et second membre simple :

1. Intégrer les équations diff suivantes dans \mathbb{R} : $y'' - 4y' = 0$; $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y'' - 4y' + 13y = 0$
2. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$
3. Intégrer l'équation différentielle suivante : $y'' - 3y' + 2y = e^x(1 - 2x)$ (MAISON)
4. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 4y' + 3y = 6x + 1 + 4e^x + 8e^{-x}$
5. Intégrer l'équation différentielle suivante : $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$
6. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + y' = 2x$
7. Intégrer l'équation différentielle suivante : $y'' - y' - 2y = \cos(x)$
8. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + y = \cos(x)$
9. Intégrer l'équation différentielle suivante : $y'' + 9y = \cos(3x)$
10. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 3\cos(2t) - 21\sin(2t)$
Mettre la solution périodique sous la forme : $A\cos(\omega t + \varphi)$ (MAISON)
11. Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 12x + 8 + (-2x + 4)e^{2x} - 32\cos(2x) - 4\sin(2x)$
(On trouve : $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + 2x + 3 + (x^2 - 2x)e^{2x} - \cos(2x) + 3\sin(2x)$)
12. Intégrer : $y'' + y = \sin^2 x$ puis trouver la solution telle que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$
(Commencez par transformer $\sin^2 x$ à l'aide de la formule de trigo de $\cos(2x)$)
(on trouve : $y = 2\cos(x) - \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)$)

2 Coefficients non constants ou second membre tordu :

13. On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^3$.
Vérifier que $f(x) = x$ est solution de l'équation homogène associée à (E) .
En déduire les solutions de (E) grâce à un changement de fonction adéquat.
14. On considère l'équation différentielle (E) : $x^3y'' + 4x^2y' + 2xy = 1$. (MAISON)
Vérifier que $f(x) = \frac{1}{x}$ est solution de l'équation homogène associée à (E) .
En déduire les solutions de (E) grâce au changement de fonction $y(x) = \frac{A(x)}{x}$.
15. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \tan(x)$.
Résoudre l'équation homogène associée à (E) . Résoudre (E) grâce au changement $y = A(x)\cos(x)$
Indication : Pour intégrer $\frac{1}{\cos(x)}$, on fera le changement de variable $X = \sin(x)$
16. On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + xy' - y = 0$.
Chercher les solutions de la forme $y = x^n$. En déduire toutes les solutions de (E) .

17. (ATS 2020) $y'' + xy' + y = 0$ On cherche les solutions de la forme $y(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ avec $a_1 = 0$.

Montrer que les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+2}$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} a_0$ et $a_{2n+1} = 0$.

Donner une expression simple de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en fonction de x et a_0 .

18. (ATS 2005) $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 1$