

Rapport

Formation de champs fossiles dans les étoiles en rotation

Emeriau Constance
Maître de stage : Stéphane Mathis
Laboratoire : IRFU/SAp

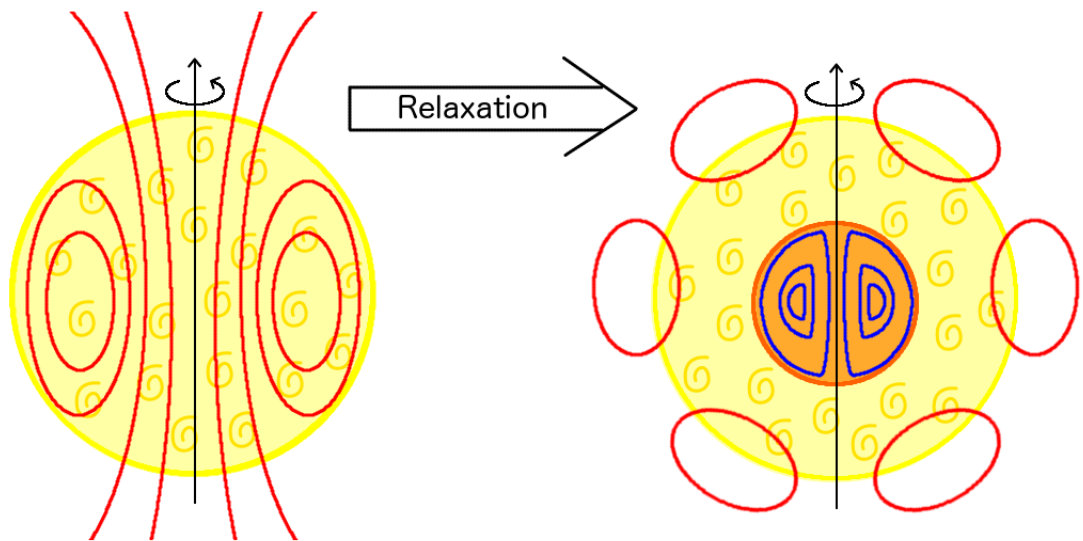


Table des matières

1	Contexte et motivations	7
1.1	Structure interne des étoiles	7
1.2	Observations des champs magnétiques stellaires	8
2	Conditions de stabilité pour les champs magnétiques en zone radiative	11
2.1	Instabilités MHD	11
2.2	Champs purement toroïdaux	11
2.3	Champs purement poloïdaux	14
2.4	Champs mixtes	17
3	Équilibre magnétique d'une zone radiative stellaire	21
3.1	Origine des champs magnétiques en zone radiative : champ dynamo ou champ fossile relaxé ?	21
3.2	Équilibre magnéto-hydrostatique non force-free relaxé	21
4	Équilibre magnéto-hydrodynamique d'une zone radiative stellaire en rotation	27
4.1	Équations de l'équilibre magnéto-hydrodynamique relaxé	27
4.2	Calcul du champ magnétique et du champ de vitesse	27
4.2.1	Les configurations magnétiques relaxées	29
4.3	Hélicités, énergies et vitesse	33
4.3.1	Hélicité magnétique poloïdale et toroïdale	33
4.3.2	Expression de la vitesse	34
4.3.3	Calcul du potentiel vecteur	35
4.3.4	Relations entre les hélicités et les énergies	35
4.3.5	Critère de stabilité	36
4.4	Conclusion et Perspectives	36

Structure du document

Dans ce rapport, je présente le travail effectué pendant mon stage au Service d'Astrophysique du CEA de Saclay. Le premier chapitre présente les connaissances actuelles sur la structure interne des étoiles ainsi que sur l'observation du magnétisme stellaire. Dans le deuxième chapitre, on effectuera un rappel sur les instabilités en magnéto- hydrodynamique (MHD) et on s'intéressera à la stabilité de champs particuliers, champs poloïdaux, situés dans le plan méridien dans le cas axisymétrique, champs toroïdaux, azimuthal dans le cas axisymétrique, et champs mixtes. Nous montrerons la nécessité d'étudier ces derniers pour les champs magnétiques stables en zone radiative. Le troisième chapitre concernera l'étude effectuée par Duez et Mathis sur la relaxation des champs magnétiques dits fossiles pour un équilibre magnétohydrostatique sans rotation. Le quatrième chapitre concernera les résultats que j'ai obtenus lors de ce stage dans le cadre de l'étude d'une relaxation magnétohydrodynamique avec rotation. Enfin, dans le cinquième chapitre, je montrerai l'influence de l'obliquité, non alignement entre l'axe de rotation et l'axe du champ magnétique, sur les résultats obtenus précédemment.

Chapitre 1

Contexte et motivations

1.1 Structure interne des étoiles

La structure interne des étoiles, du fait de leur opacité, nous a longtemps été inconnue. Les seules variables pouvant être mesurées étaient des caractéristiques de surface (vitesse de rotation, composition chimique, champ magnétique ...). Cependant l'émergence d'une nouvelle discipline, nommée *héliosismologie* lorsqu'elle concerne le Soleil et *astérosismologie* pour les autres étoiles, a permis d'avoir une idée plus précise de la structure interne de ces astres. Cette discipline se base sur l'analyse du spectre en fréquence des oscillations des étoiles. En effet, en tant que cavités fermées, les étoiles vibrent. Ces vibrations se traduisent en surface par des oscillations ou par des variations de température et leur spectre révèle la structure des régions internes dans lesquelles elles se propagent. Cette méthode a permis de reconstituer précisément l'intérieur du Soleil et de mieux comprendre la structure des autres étoiles.

Dans les étoiles de la *séquence principale*, les étoiles brûlent leur hydrogène en hélium et sont à l'équilibre hydrostatique. Ces réactions de fusion génèrent de l'énergie qui doit être évacuée vers la surface de l'étoile. Dans les *zones radiatives*, elle est transportée sous forme de rayonnement, par absorption puis émission de photons dans le milieu. Lorsque le gradient de température devient supérieur au gradient adiabatique, ce mode de transport n'est plus suffisamment efficace. Il se forme alors des mouvements de matière et l'énergie thermique est alors transférée via des mouvements turbulents, la convection, et l'on obtient donc des régions convectives.

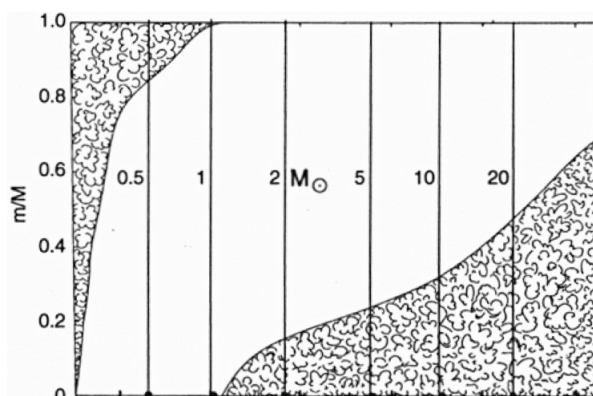


FIGURE 1.1 – Extension des zones radiatives et convectives (en fraction de la masse de l'étoile) en fonction de la masse de l'étoile (en masse solaire). Crédit : R.Kippenhahn et A. Weigert

On peut voir sur la figure 1.1 que ces zones se répartissent différemment en fonction de la masse. Dans les étoiles de type solaire, le coeur de l'étoile est ainsi radiatif et l'enveloppe externe est convective. Les étoiles massives, au contraire, possèdent un extérieur radiatif et un coeur convectif.

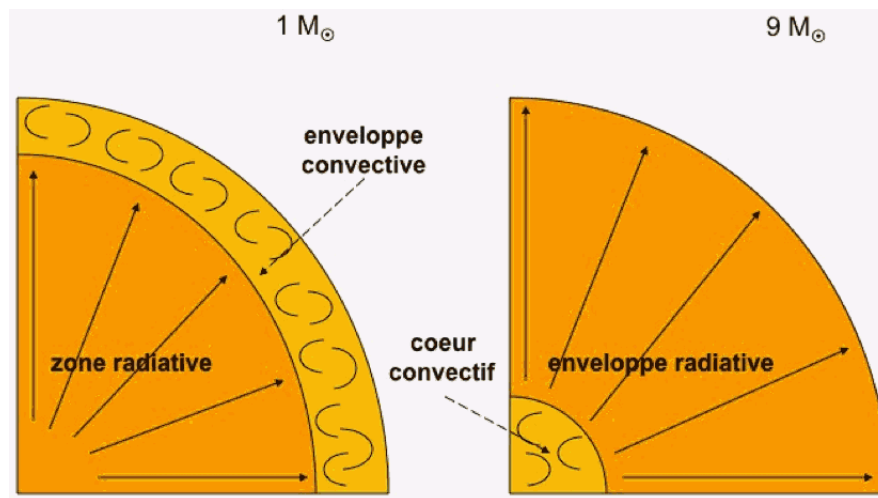


FIGURE 1.2 – Représentation de la structure d'une étoile de type solaire (à gauche) et d'une étoile de masse intermédiaire (à droite)

1.2 Observations des champs magnétiques stellaires

Les champs magnétiques ont une influence sur la structure interne de l'étoile. Bien que les échelles de temps des phénomènes intervenant dans les étoiles puissent être complètement différentes, un phénomène se déroulant sur un temps court, par exemple un temps d'Alfvén, caractéristique du champ magnétique, peut influencer toute l'évolution de l'étoile. La compréhension de ces champs est donc essentielle pour pouvoir comprendre complètement l'évolution de la structure des étoiles.

Les observations actuelles nous montrent essentiellement le champ magnétique en surface. On voit alors que les étoiles à enveloppe convective présentent des champs magnétiques dont la topologie varie avec la vitesse de rotation et la masse. Au contraire, les étoiles à enveloppe radiative ont des topologies de champ stables sur de grandes échelles de temps semblant ne pas être corrélées avec la rotation et la masse. Elles présentent aussi le plus souvent une géométrie dipolaire. Cette différence de comportement est certainement expliquée par la manière dont se forme et s'entretient le champ magnétique dans ces deux types de région. De plus, grâce à l'étude de la structure interne du Soleil, on a pu se rendre compte d'une autre différence existant entre la zone radiative et la zone convective. Lorsque l'on observe le profil de vitesse angulaire en fonction du rayon et de la latitude, on remarque un profil plat dans la zone radiative (cf figure 1.2). Ce plateau s'explique par un transport de moment cinétique qui doit être très efficace en région radiative.

Dans ces régions, on peut définir quatre processus de transport principaux :

- la circulation méridienne
- la turbulence de cisaillement
- les ondes internes
- le champ magnétique en zone radiative

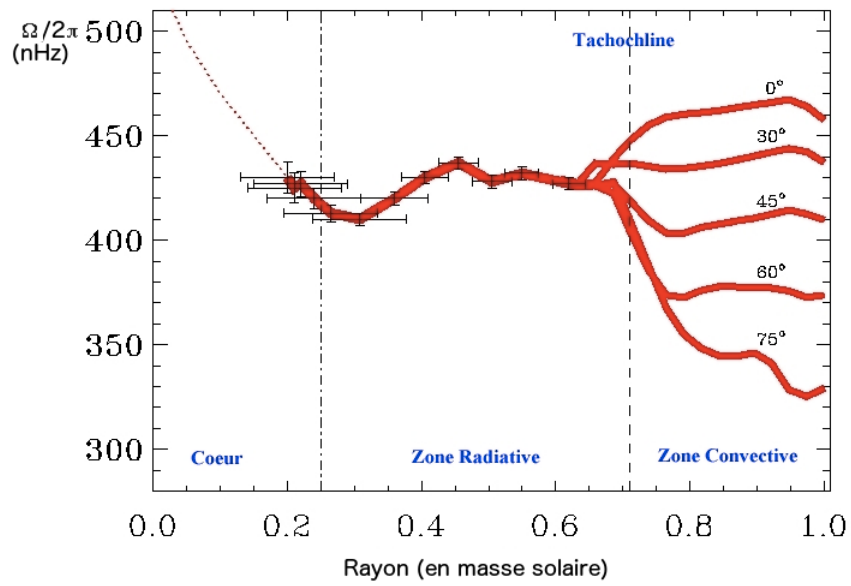


FIGURE 1.3 – Profil de vitesse angulaire en fonction du rayon et de la latitude. Crédit : Garcia et al. 2007

La compréhension du fonctionnement du champ magnétique dans les zones radiatives nous permettrait donc à la fois d'expliquer des observations en surface des étoiles de masse intermédiaire ou massives et de mieux comprendre le transport de moment cinétique dans les étoiles de type solaire.

Chapitre 2

Conditions de stabilité pour les champs magnétiques en zone radiative

Les observations nous montrent que les champs observés dans les zones radiatives sont stables. Nous allons donc commencer par étudier l'équilibre des champs magnétiques les plus simples, un champ purement toroïdal et un champ entièrement poloïdal. Pour cela nous ferons tout d'abord un rappel sur les instabilités existant dans les plasmas constituant les zones radiatives.

2.1 Instabilités MHD

Les zones radiatives magnétisées sont constituées de plasma chaud, milieu pouvant être très organisé mais aussi très instable. Il existe deux instabilités principales, l'instabilité "sausage" et l'instabilité "kink" (cf figure 2.1).

Elles proviennent toutes les deux de la même famille : les instabilités "pinch". Considérons un cylindre de plasma soumis à un champ magnétique. On se place en coordonnées cylindriques usuelles (ϖ, θ, z) avec le repère usuel associé $(\hat{e}_\varpi, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$ et on prend un champ de la forme $\mathbf{B} = B_\theta \hat{e}_\theta$. On considère le cas où il n'y a pas de gravité. On peut alors mener une étude de la stabilité du système en considérant des déplacements infinitésimaux $\boldsymbol{\xi}(\varpi, \theta, z) = \boldsymbol{\xi}(\varpi) e^{i(m\theta + kz)}$ exprimés sous forme de série de Fourier avec m et k nombres d'onde azimuthal et vertical. Cette étude nous amène à conclure que la configuration est instable pour tous les modes m (voir la thèse de Vincent Duez [8]). En particulier

- Pour $m = 0$, on trouve l'instabilité "sausage"
- Pour $m = 1$, on trouve l'instabilité "kink"

Il existe donc des instabilités qui peuvent se développer et annihiler les champs magnétiques dans les zones radiatives stellaires. Nous allons maintenant regarder si les champs toroïdaux peuvent être stables dans des zones radiatives.

2.2 Champs purement toroïdaux

D'après Bernstein ([2]), si on ne s'intéresse qu'à la stabilité de l'équilibre d'un système et non à son évolution, le problème de stabilité se simplifie en l'étude de l'évolution de l'énergie potentielle en fonction de $\boldsymbol{\xi}$, le déplacement. Ainsi, *un équilibre est instable si, et seulement si, il existe un déplacement tel que l'énergie potentielle diminue.*

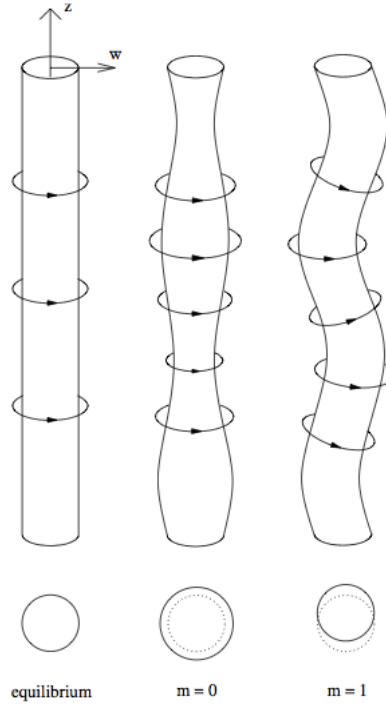


FIGURE 2.1 – Présentation des instabilités, au centre l’instabilité “sausage” et à gauche l’instabilité “kink”. Crédit : Braithwaite 2006 [11]

L’équilibre des champs purement toroïdaux a été étudié par Tayler ([14]) en appliquant le principe d’énergie énoncé par Bernstein. On obtient le changement de signe de l’énergie potentielle via la formule :

$$\delta W = \frac{1}{2} \int d\tau \left[\mathbf{Q}^2 - \mathbf{j} \cdot (\mathbf{Q} \times \boldsymbol{\xi}) + \gamma P (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Phi) \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{\xi}) \right] \quad (2.2.1)$$

avec $\mathbf{Q} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})$. P , ρ , \mathbf{B} et \mathbf{j} représentent la pression d’équilibre, la densité, le champ magnétique et la densité de courant, $\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{\rho, s}$ et Φ sont respectivement le coefficient adiabatique et le potentiel gravitationnel.

Le champ magnétique est supposé axisymétrique et purement toroïdal. Il peut donc être écrit sous la forme

$$\mathbf{B} = (0, B(\varpi, z), 0) \quad (2.2.2)$$

avec le courant associé

$$\mathbf{j} = \left(-\frac{\partial B}{\partial z}, 0, \frac{1}{\varpi} \frac{\partial(\varpi B)}{\partial \varpi} \right). \quad (2.2.3)$$

On obtient alors une expression de δW qui ne dépend pas de ϕ . Dans ce cas, on peut faire une analyse de Fourier des composantes de $\boldsymbol{\xi}$ en $\exp(im\phi)$.

Dans le cas où $\underline{m=0}$, on obtient une expression de δW

$$\begin{aligned}
\delta W \propto \int \varpi d\varpi dz & \left[(B^2 + \gamma P) \left(D + \left[\rho g_z \xi_z + \left(\rho g_\varpi - \frac{2B^2}{\varpi} \right) \xi_\varpi \right] \frac{1}{(B^2 + \gamma P)} \right)^2 \right. \\
& - \left[\rho g_z \xi_z + \left(\rho g_\varpi - \frac{2B^2}{\varpi} \right) \xi_\varpi \right]^2 \frac{1}{(B^2 + \gamma P)} - \frac{2B\xi_\varpi}{\varpi} \left(\xi_z \frac{\partial B}{\partial z} + \xi_\varpi \frac{\partial B}{\partial \varpi} - \frac{\xi_\varpi B}{\varpi} \right) \\
& \left. + (\xi_\varpi g_\varpi + \xi_z g_z) \left(\xi_\varpi \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} + \xi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right] \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

où $D \equiv \text{div} \xi$. Dans cette équation, le premier terme est positif et les termes restants forment une forme quadratique en ξ_ϖ et ξ_z : $a\xi_\varpi^2 + b\xi_\varpi\xi_z + c\xi_z^2$. Une condition suffisante pour la stabilité est que cette forme quadratique soit positive en tout point. Le système est alors stable sous les trois conditions suivantes

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b^2 < 4ac \end{cases} \quad (2.2.5)$$

avec

$$\begin{cases} a = g_z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\rho^2 g_z^2}{(B^2 + \gamma P)} \\ b = g_\varpi \frac{\partial \rho}{\partial z} - 2 \frac{\rho g_z}{(B^2 + \gamma P)} \left(\rho g_\varpi - \frac{2B^2}{\varpi} \right) - \frac{2B}{\varpi} \frac{\partial B}{\partial z} \\ c = g_\varpi \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} - \left(\rho g_\varpi - \frac{2B^2}{\varpi} \right)^2 \frac{1}{(B^2 + \gamma P)} - \frac{2B}{\varpi} \frac{\partial B}{\partial \varpi} + \frac{2B^2}{\varpi^2} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

On passe ensuite au cas $m \neq 0$ avec

$$\xi_\varpi = \mathcal{R} [X \exp(im\phi)],$$

$$\xi_\phi = \mathcal{R} \left[\frac{iY}{m} \exp(im\phi) \right],$$

$$\xi_z = \mathcal{R} [Z \exp(im\phi)]$$

où \mathcal{R} désigne la partie réelle.

δW est donc de la forme $\delta W_1 + \delta W_2$ avec δW_1 un terme positif et δW_2 indépendant de m . Pour X, Y et Z donnés, δW_1 est minimum pour $m = 1$ donc seul ce dernier cas sera considéré. On peut ainsi expliciter X, Y et Z en fonction de leurs parties réelles et imaginaires, dans ce cas on obtient deux intégrales (en partie réelle et imaginaire) de même forme.

$$\begin{aligned}
\delta W \propto \int \varpi d\varpi dz & \left[\frac{B^2}{\varpi^2} (X^2 + Z^2) + \left(\frac{\partial ZB}{\partial \varpi} + \frac{\partial XB}{\partial \varpi} \right)^2 \right. \\
& - \left(\frac{\partial B}{\partial z} Z + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \varpi B}{\partial \varpi} X \right) \left(\frac{\partial ZB}{\partial z} + \frac{\partial XB}{\partial \varpi} \right) - \frac{B}{\varpi^2} \frac{\partial \varpi B}{\partial \varpi} YX \\
& - \frac{B}{\varpi} \frac{\partial B}{\partial z} YZ + \gamma P \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial \varpi X}{\partial \varpi} - \frac{Y}{\varpi} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)^2 + (Xg_\varpi + Zg_z) \left(X \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} + Z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \\
& \left. + \left(X \left[\frac{\partial P}{\partial \varpi} + \rho g_\varpi \right] \right) \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi X) - \frac{Y}{\varpi} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right] \quad (2.2.7)
\end{aligned}$$

Cette expression se minimise de façon explicite en Y . Une fois cette minimisation effectuée, δW est alors de la forme $C + FQ$ avec C un terme positif et FQ une forme quadratique en X et Z : $aX^2 + bXZ + cZ^2$.

Les conditions de stabilité sont alors de la même forme que celles trouvées dans le cas $m = 0$

$$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ b^2 < 4ac \end{cases} \quad (2.2.8)$$

avec

$$\begin{cases} a = g_z \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\rho^2 g_z^2}{\gamma P} + \frac{B^2}{\omega^2} \\ b = g_\omega \frac{\partial \rho}{\partial z} + g_z \frac{\partial \rho}{\partial \omega} - \frac{2\rho^2 g_\omega g_z}{\gamma P} - \frac{2B}{\omega} \frac{\partial B}{\partial z} \\ c = g_\omega \frac{\partial \rho}{\partial \omega} - \frac{\rho^2 g_\omega^2}{\gamma P} - \frac{B^2}{\omega^2} - \frac{2B}{\omega} \frac{\partial B}{\partial \omega} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Le système est donc stable si les conditions 2.2.5, 2.2.6, 2.2.8 et 2.2.9 sont satisfaites. Ces conditions sont contraignantes et il y a peu de chances pour qu'une étoile puisse les satisfaire exactement.

On peut avancer un autre argument en faveur des instabilités dans ce milieu. En effet, si l'on se place proche de l'axe z , le champ magnétique se retrouve proche de la configuration dans laquelle apparaissent les instabilités *pinch*. Sans la présence de la gravité, un tel système est instable pour les types $m = 0$ et $m = 1$ (Tayler 1957 [13]). En présence de gravité, le type $m = 0$ ne produit que des mouvements le long de l'axe qui seront donc atténués par la force de rappel de la stratification. Cependant, il est possible de trouver des perturbations de type $m = 1$ qui engendrent des mouvements le long des surfaces de gravité constante. Ces mouvements sont perpendiculaires à la force de rappel et ne seront donc pas atténués. On peut alors conclure qu'il y a de fortes chances pour que des instabilités de type $m = 1$ perturbent le champ magnétique au niveau de l'axe z .

On peut aussi noter que la stabilité des champs toroïdaux a été étudiée par Braithwaite en 2006 ([11]) avec des simulations numériques. Les conclusions obtenues à partir des travaux analytiques sont alors confirmés, on peut voir que ce type de champ est instable autour de l'axe (cf figure 2.2).

On peut alors dire que les champs toroïdaux sont instables en zone radiative.

2.3 Champs purement poloïdaux

Nous nous intéressons maintenant à un deuxième type de champ simple, les champs purement poloïdaux. L'instabilité de tels champs dans les intérieurs stellaires a été étudiée par Markey et Tayler ([12]) et par Van Assche, Tayler et Goossens ([15]). Dans ces deux articles, cette instabilité est recherchée près de la *ligne neutre*. Cette ligne est un cercle, situé autour de l'axe de symétrie, où le champ magnétique est nul. Elle existe dans le cas d'un champ poloïdal qui possède des lignes de champ fermées dans l'étoile (voir figure 2.3).

On considère tout d'abord une étoile axisymétrique contenant un champ purement poloïdal et des déplacements autour de la position d'équilibre tels que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Phi = 0. \quad (2.3.1)$$

Avec de tels déplacements, on a une variation de l'énergie potentielle de l'étoile de la forme

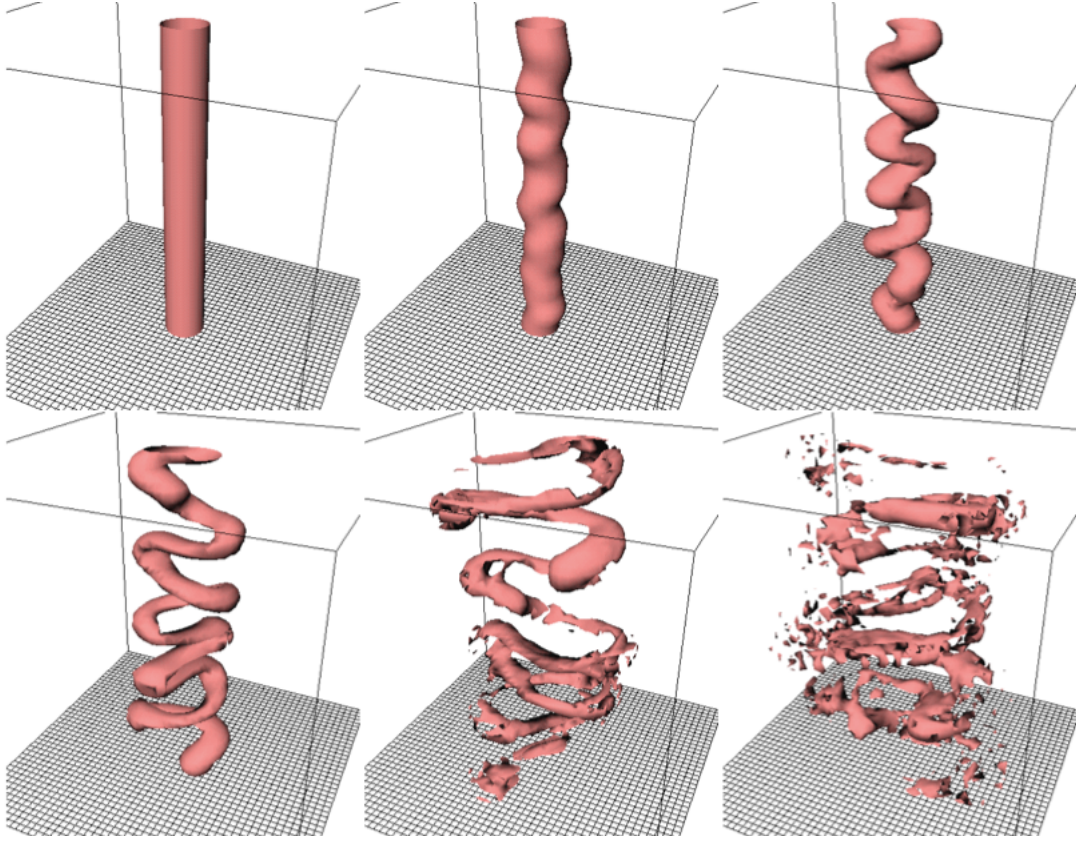


FIGURE 2.2 – Évolution de l'instabilité sur un champ magnétique toroïdal. Crédit : Braithwaite 2006

$$\delta W = \frac{1}{2} \mathcal{R} \left[\int \frac{\mathbf{Q}}{4\pi} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \times \boldsymbol{\xi}^* + \frac{Q^2}{4\pi} dV \right], \quad (2.3.2)$$

où \mathbf{B} est le champ non-perturbé et \mathbf{Q} est le champ perturbé donné par $\mathbf{Q} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})$. Les variations du champ gravitationnel dues à la perturbation sont négligées ce qui induit une sur-estimation de la stabilité, d'après l'approximation de Cowling. L'équilibre étant axisymétrique, on peut effectuer une analyse de Fourier des composantes de $\boldsymbol{\xi}$

$$\begin{cases} \xi_r &= R(r, \theta) \exp(im\phi) \\ \xi_\theta &= S(r, \theta) \exp(im\phi) \\ \xi_\phi &= \frac{i}{m} T(r, \theta) \exp(im\phi) \end{cases} . \quad (2.3.3)$$

Cette analyse a été effectuée par Markey et Tayler en coordonnées cylindriques. En coordonnées sphériques, on obtient grâce aux équations 2.3.2 et 2.3.3 que l'on peut écrire δW en fonction de R , S et T . On sépare ensuite ces variables en partie réelle et partie imaginaire ce qui nous donne deux intégrales de formes identiques : on peut écrire : $\delta W_m = \pi \iint dr d\theta q_m r^2 \sin\theta$. On pourrait étudier ces intégrales et obtenir un critère de stabilité pour chaque m . Cependant, l'expression de q_m montre que les perturbations avec $m \rightarrow \infty$ sont les plus instables. Dans ce cas, le système sera instable si q_∞ est négatif. On se concentrera sur ce cas dans la suite. On regarde donc la valeur de q_∞ au voisinage de la ligne neutre. On obtient alors

$$4\pi q_\infty = aR^2 + bRS + cS^2 \quad (2.3.4)$$

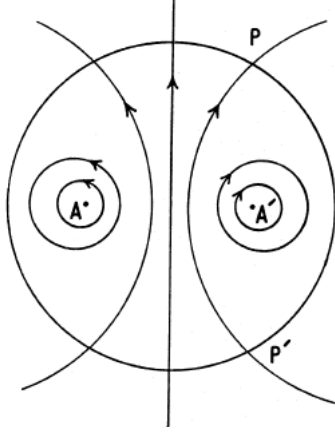


FIGURE 2.3 – Un champ magnétique poloïdal avec des lignes de champ fermées dans l'étoile. Les flèches indiquent le sens du champ. La ligne neutre passe par A et A'. Crédit Markey et Tayler 1973

où

$$\begin{cases} a = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{B_\theta}{r} \\ b = - \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right) \left(\frac{B_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \\ c = \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial r} \right)^2 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Comme on sait que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, on peut écrire les composantes du champ sous la forme

$$\begin{cases} B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ B_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

ce qui nous donne $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$ quand on est sur un point neutre. Dans ce cas

$$\begin{cases} a = \frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial \Psi^2}{\partial r^2} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta^2} \right] \\ b = 0 \\ c = a \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Le système est instable si a est négatif. On sait qu'il existe plusieurs sortes de points neutres, ceux qui nous intéressent étant les points neutres de type O, c'est-à-dire les points neutres simples. La condition pour qu'un point neutre soit simple est

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial \Psi^2}{\partial r^2} \frac{\partial \Psi^2}{\partial \theta^2} < 0. \quad (2.3.8)$$

On constate alors que la condition pour qu'un point neutre soit simple est strictement équivalente à la condition de non-stabilité en ce point. On peut donc conclure que tout champ purement poloïdal contenant une ligne neutre est instable sur celle-ci.

Ceci est confirmé par l'étude numérique de Braithwaite ([3]) et de Brun ([6]) en 2007. Ces études confirment l'instabilité des champs poloïdaux (voir figure 2.3).

Les champs poloïdaux sont instables dans les zones radiatives

Nous avons vu que les champs les plus simples ne sont pas stables dans les zones radiatives. Nous allons donc nous intéresser à des champs plus complexes, des champs mixtes poloïdaux-toroïdaux, afin de voir si un équilibre magnétique peut exister dans ces régions.

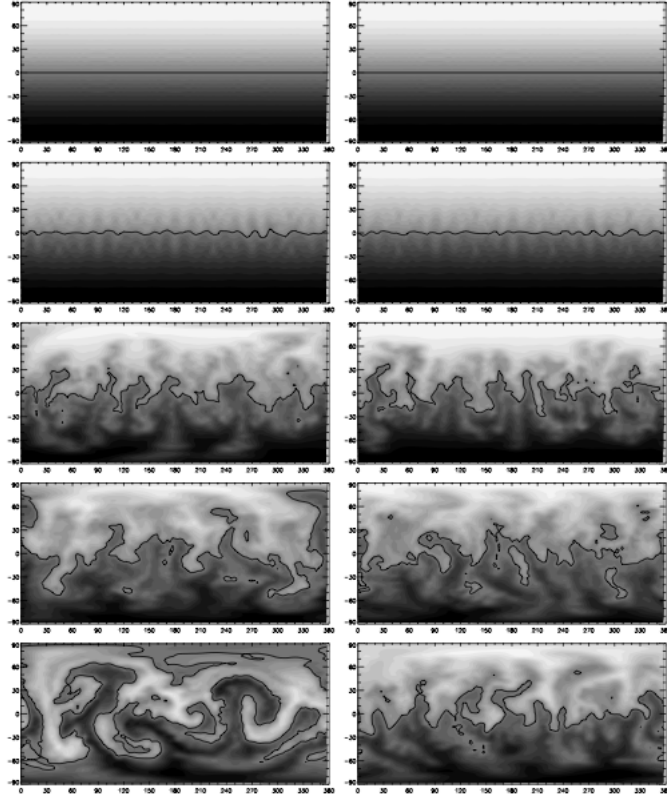


FIGURE 2.4 – Illustration de l’instabilité du champ poloïdal. On représente ici la composante radiale du champ B_r . Le blanc représente $B_r > 0$ et le noir $B_r < 0$. À gauche la rotation Ω est nulle et à droite $\Omega = 0.5$. Crédit : Braithwaite 2007

2.4 Champs mixtes

Les champs mixtes ont été étudiés par Braithwaite en 2009 ([5]) par des expériences numériques. Braithwaite a construit ces expériences en partant d’un champ magnétique initial aléatoire et en le laissant relaxer jusqu’à une position d’équilibre ([4]). Comme prévu par les articles de Tayler et Markey et par les expériences numériques précédemment menées par Braithwaite, ces états d’équilibre sont mixtes poloïdal-toroïdal.

En 2013, Reisenegger et al. ([1]) ont étudié analytiquement les conditions d’existence de champs mixtes et ont déterminé une condition numérique sur le ratio $\frac{E_{mag,P}}{E_{mag,T}}$ que doit satisfaire un champ poloïdal pour stabiliser un champ toroïdal :

$$\boxed{\frac{E_{mag,P}}{E_{mag,T}} \geq 2a \frac{E_{mag,T}}{E_{grav}}} \quad (2.4.1)$$

avec

$$a \approx \frac{1.8}{\Gamma/\gamma - 1}$$

où $\Gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ et $\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_s |_{\rho,s}$.

Pour les étoiles de la séquence principale, Reisenegger et al. trouvent $a \approx 7.4$. Ce résultat peut être comparé au facteur $a \approx 10$ trouvé par Braithwaite en 2009 ([5]) par simulation numérique. À titre indicatif, on peut remarquer que pour des étoiles à neutrons, on a $a \approx 200$.

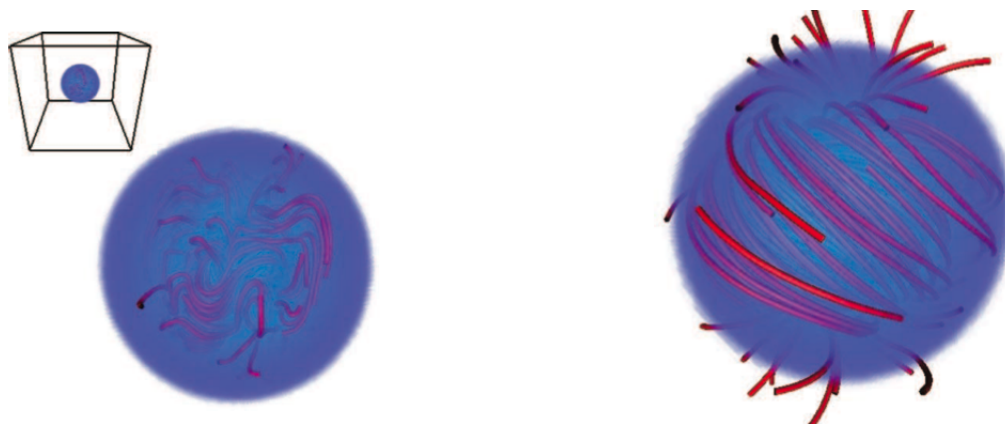


FIGURE 2.5 – À gauche, on peut voir les conditions initiales, les lignes de champ étant représentées en rouge et l'étoile en bleu. À droite, on observe l'équilibre le plus simple, qui se forme lorsque le champ magnétique initial est suffisamment concentré au centre de l'étoile. La configuration est presque axisymétrique avec un tube de flux twisté enroulé autour de l'équateur et un flux poloidal passant par le milieu de l'étoile. Crédit Braithwaite 2008

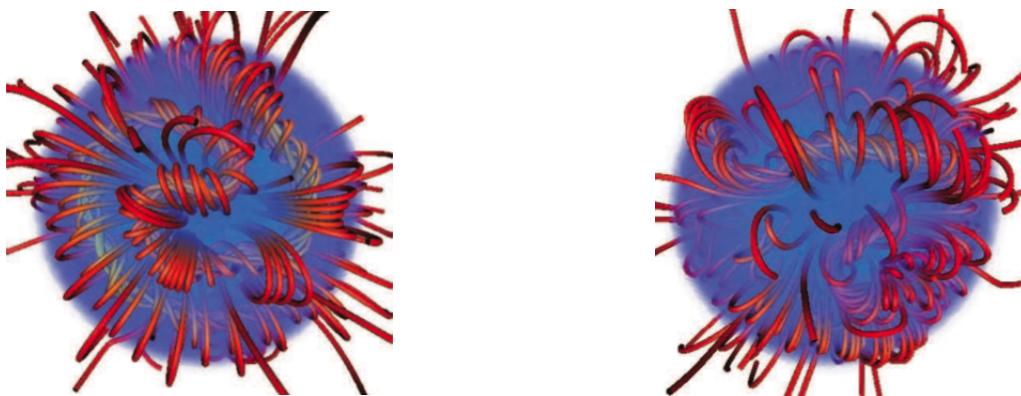


FIGURE 2.6 – Équilibre non axisymétrique vu de deux côtés opposés de l'étoile. L'équilibre est constitué d'un ou plusieurs flux twistés situés juste sous la surface de l'étoile. Ce type d'équilibre se forme lorsque le champ magnétique initial n'est pas suffisamment concentré au centre de l'étoile. Crédit Braithwaite 2008

Les deux résultats concernant les étoiles de la séquence principale sont donc du même ordre de grandeur.

Ces articles de Braithwaite et Reisenegger apportent une confirmation sur l'existence de champs magnétiques stables dans les zones radiatives stellaires. Les deux sections suivantes seront donc consacrées à la caractérisation de ces équilibres et de leur géométrie. Dans un premier temps, nous rappellerons les résultats obtenus par Duez et Mathis ([10]) pour un équilibre magnéto-hydrostatique relaxé sans rotation et dans un deuxième temps nous expliciterons les premiers résultats obtenus pour une zone radiative en équilibre relaxé magnéto-hydrodynamique en rotation.

Chapitre 3

Équilibre magnétique d'une zone radiative stellaire

3.1 Origine des champs magnétiques en zone radiative : champ dynamo ou champ fossile relaxé ?

Nous savons que dans les zones convectives, le champ magnétique est entretenu par une dynamo du fait de l'action combinée de la rotation différentielle et de la turbulence convective. Ce modèle a été appliqué au Soleil et il permet de rendre compte des phénomènes qui y sont observés comme par exemple la cyclicité solaire. Cependant, il n'est pas certain qu'un mécanisme dynamo soit à l'origine des champs observés dans les zones radiatives externes des étoiles de masse intermédiaire et massives et des zones radiatives en général. En effet, les champs magnétiques ayant pour origine une dynamo, tels que celui du Soleil, sont dépendants de la masse et de la rotation ce qui est contraire aux observations que l'on a pu faire sur les étoiles à enveloppe radiative.

En 2002, Hendrik Spruit a montré que la première instabilité se créant dans une zone radiative sous l'effet d'un champ magnétique azimuthal est l'instabilité de Pitts-Taylor, étudiée au chapitre 2. Il a donc proposé un modèle de dynamo basé sur cette instabilité, modèle mis en évidence par une expérience numérique de Braithwaite en 2006. Cependant, en 2007, J.-P. Zahn, A.-S. Brun et S. Mathis ont remis en question la capacité de cette instabilité à entretenir une dynamo. Ils ont montré que le processus de génération imaginé par Spruit ne fonctionne pas conceptuellement.

On peut alors supposer que le champ magnétique dans ces zones ne soit pas entretenu. Il peut être de nature *fossile*, un champ magnétique qui aurait été emprisonné lors de la formation de l'étoile. Son origine peut aussi venir du retrait de la zone convective où prend place une dynamo, rappelons en effet qu'au début de son existence l'étoile est entièrement convective (voir figure 3.1), et de la naissance de la zone radiative et donc de l'ajustement correspondant du champ magnétique.

Cette théorie implique la stabilité du champ magnétique car, sans dynamo pour l'entretenir, il peut être détruit par l'existence d'instabilités. L'étude des champs magnétiques dans les zones radiatives posent donc deux questions : celle de leur origine et de leur stabilité.

3.2 Équilibre magnéto-hydrostatique non force-free relaxé

Le champ magnétique dans les zones radiatives peut donc être le résultat de l'ajustement du champ précédemment généré dans l'étoile complètement convective. Le champ se transforme

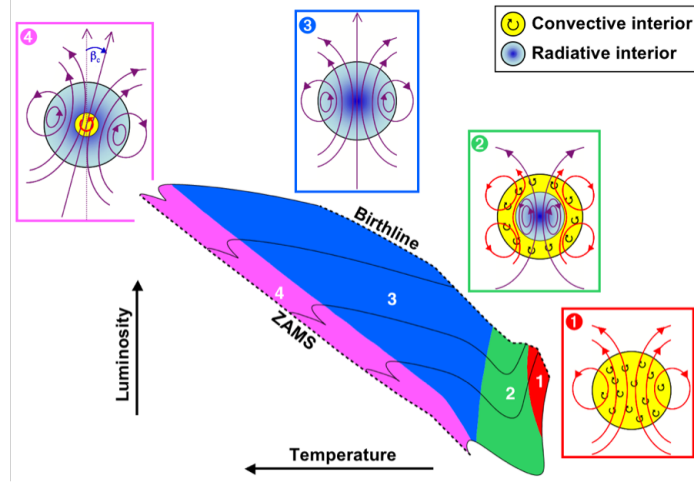


FIGURE 3.1 – Représentation de l'évolution d'une étoile massive. Celle-ci naît convective (1), puis il apparaît un coeur radiatif (2). Cette zone s'étend alors à toute l'étoile qui devient purement radiative (3). Finalement un coeur convectif apparaît (4) .

lors du passage d'une zone turbulente, zone convective, à une zone stable, zone radiative. C'est le processus de relaxation (cf figure 3.2).

Au cours de cette relaxation, dans le cas où on ne prend pas en compte la rotation, certaines quantités demeurent conservées comme la masse dans un tube de flux ou l'hélicité magnétique $\mathcal{H} = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV$, tandis que l'énergie magnétique, $E_{mag} = \int_V \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV$, décroît plus vite. On parle de décroissance sélective (voir Biskamp). Le champ magnétique fossile sera donc caractérisé par des quantités physiques liées à l'état initial de l'étoile, celui sans zone radiative et donc aux propriétés du progéniteur convectif. Les invariants X conservés seront alors notés X^i pour indiquer qu'ils ne dépendent que de l'état purement convectif initial.

En premier lieu, les champs devant être stables, on s'intéresse à l'équilibre d'une sphère auto-gravitante en équilibre magnéto-hydrostatique sans rotation. Celui-ci a été étudié par Woltjer ([18], [16], [17]) et Chandrasekhar ([7]) à la fin des années 1950 et il a été décrit par Duez et Mathis ([10]) en 2010. Pour étudier cet équilibre, qui peut modéliser les champs fossiles dans les intérieurs d'étoiles, on part tout d'abord de l'équation d'équilibre magnéto-hydrostatique dans un plasma infiniment conducteur

$$\mathbf{0} = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \mathbf{F}_{\mathcal{L}}, \quad (3.2.1)$$

ainsi que des équations de Maxwell flux et Maxwell Ampère

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.2.3)$$

et de l'équation de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (3.2.4)$$

Dans ces équations, \mathbf{B} est le champ magnétique, \mathbf{j} est le courant associé, P , ρ et Φ représentent la pression, la densité et le potentiel gravitationnel, μ_0 est la perméabilité magnétique du plasma et $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ représente la force magnétique de Lorentz,

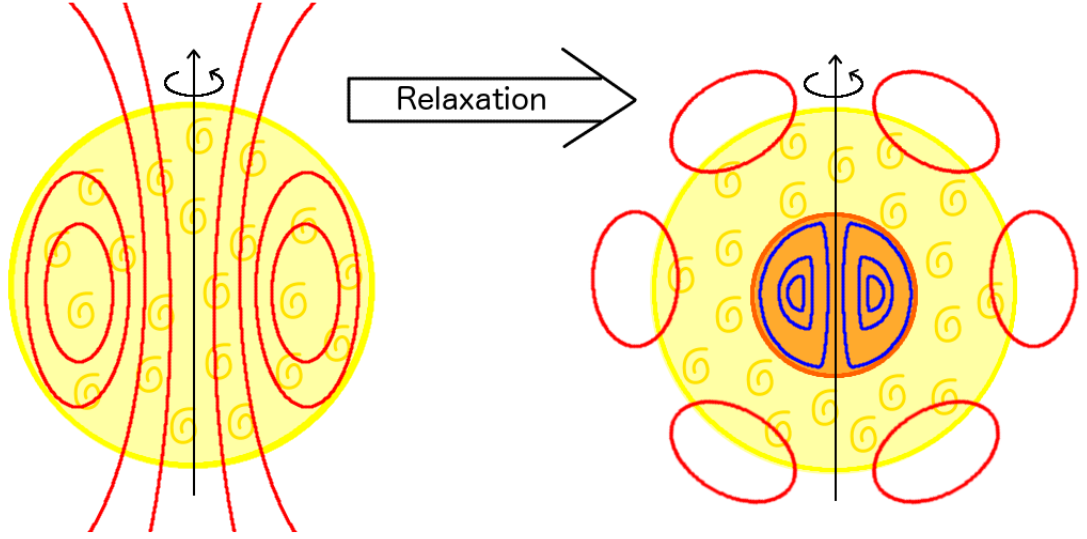


FIGURE 3.2 – Relaxation du champ magnétique durant la naissance de la zone radiative interne de l'étoile

$$\mathbf{F}_{\mathcal{L}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.2.5)$$

Dans cet article, les champs étudiés sont axisymétriques et la rotation de l'étoile ainsi que les vitesses du fluide sont négligées. On peut alors écrire le champ magnétique sous la forme

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \Psi(r, \theta) \times \hat{\mathbf{e}}_{\phi} + \frac{1}{r \sin \theta} F(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \quad (3.2.6)$$

où Ψ et F sont la fonction de flux poloïdale et le potentiel toroïdal, (r, θ, ϕ) étant les coordonnées sphériques et $\{\hat{\mathbf{e}}_k\}_{k=r,\theta,\phi}$ leurs vecteurs unitaires.

Les équations (3.2.1) et (3.2.6) montrent que $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ compense les différents gradients. Or ces derniers sont des vecteurs purement poloïdaux ce qui nous permet de dire que la composante toroïdale de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ s'annule, la force de Lorentz n'applique donc pas de couple. De plus, la composante poloïdale de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ n'ayant aucune raison de s'annuler, \mathbf{B} est *non force-free*. Duez et Mathis s'intéressent, en particulier, à la famille des équilibres *barotropes*, au sens hydrodynamique, pour lesquels les configurations de champs possibles et la structure stellaire sont explicitement liées. Un fluide est dans un état di *barotrope* si

$$\nabla \rho \times \nabla P = 0 \quad (3.2.7)$$

Cette définition ne doit pas être confondue avec celle de la *barotropie* en thermodynamique où une équation d'état barotrope est de la forme $P = f(\rho)$. En hydrodynamique, la barotropie n'implique rien sur l'équation d'état du fluide qui peut prendre la forme la plus générale possible : $P = f(\rho, T, \dots)$ ni sur l'état de stratification du fluide qui peut être stablement stratifié ou non (voir Zahn 1992).

Il existe une infinité de champs qui peuvent être stables dans de telles conditions. On étudie la relaxation d'un champ magnétique avec la conservation de l'hélicité et de la masse dans un tube de flux. Le deuxième invariant, dit de structure, est lié à la stratification stable des

zones radiatives. La relaxation permet alors de lever la dégénérescence sur le nombre de champs stables. On cherche donc les équilibres vérifiant :

$$\delta E + a_1 \delta M_\Psi + a_2 \delta \mathcal{H} = 0. \quad (3.2.8)$$

Ces hypothèses conduisent alors à l'équation régissant Ψ

$$\Delta^* \Psi + \frac{\lambda_1^2}{R^2} \Psi = -\mu_0 \bar{\rho} r^2 \sin^2 \theta \beta_0, \quad (3.2.9)$$

avec $a_1 = -\beta_0$ et $a_2 = -\frac{1}{\mu_0} \lambda_1 R$. Cette équation ressemble à celle de Grad-Shafranov utilisée pour trouver les équilibres des plasmas confinés par un champ magnétique, comme les tokamaks ou les spheromaks. La solution générale de cette équation est calculée en faisant la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière obtenue grâce à la méthode de Green.

L'hélicité $\mathcal{H} = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV$ est une quantité qui est conservée au cours de la relaxation. On la notera donc \mathcal{H}^i . Avec la conservation de la masse, elle permet de calculer λ_1 et β_0 dans l'équation 3.2.9 et donc de déterminer complètement \mathbf{B} . Cette quantité peut être décomposée en une partie poloïdale $\mathcal{H}_P^i = \int_V \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{B}_P \, dV$ et une partie toroïdale $\mathcal{H}_T^i = \int_V \mathbf{A}_\phi \cdot \mathbf{B}_\phi \, dV$ telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P^i &= \mathcal{H}_T^i \\ \mathcal{H}^i &= \mathcal{H}_T^i + \mathcal{H}_P^i \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

De plus, cette hélicité peut être exprimée en fonction de l'énergie magnétique E_{mag}

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P^i &= \frac{2\mu_0 R}{\lambda_1^{0,i}} \left(E_{mag,P} - \frac{1}{2} \beta_0 M_\Psi \right), \\ \mathcal{H}_T^i &= \frac{2\mu_0 R}{\lambda_1^{0,i}} E_{mag,T} \end{aligned}$$

et l'on obtient donc l'énergie magnétique de l'équilibre final

$$E_{mag} = \frac{\lambda_1^{0,i}}{2\mu_0 R} \mathcal{H}^i + \frac{1}{2} \beta_0 M_\Psi. \quad (3.2.11)$$

On peut reconnaître la contribution non force-free dans le second terme de cette équation.

D'autre part, on peut en déduire la ratio $\frac{E_{mag,P}}{E_{mag,T}}$ qui est très important pour la stabilité des champs

$$\frac{E_{mag,P}}{E_{mag,T}} = \frac{\mathcal{H}^i + \frac{\beta_0 \mu_0 R}{\lambda_1^{0,i}} M_\Psi}{\mathcal{H}_T^i}. \quad (3.2.12)$$

Une étude numérique a été menée en 2010 par Duez, Braithwaite et Mathis ([9]). Cette étude nous montre que la configuration semi-analytique prédite par Duez et Mathis est proche de la configuration obtenue par les simulations numériques de relaxation (voir figure 3.3). De plus, la simulation 3D a montré la stabilité inconditionnelle de cette configuration.

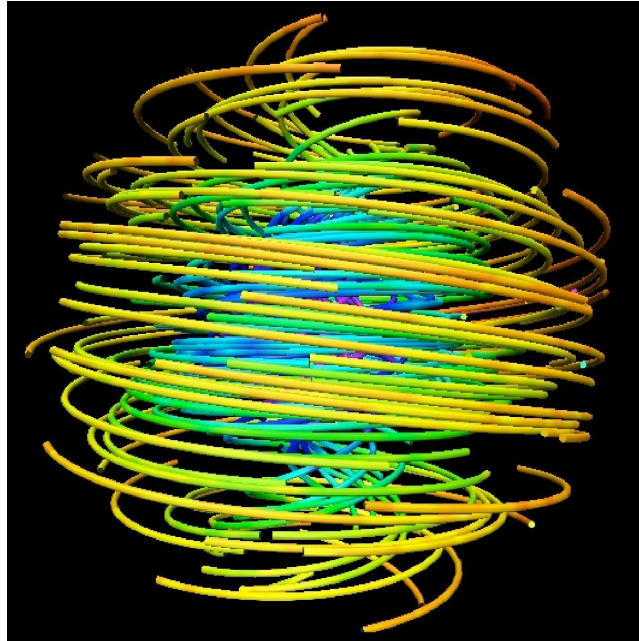


FIGURE 3.3 – Simulation représentant les lignes de champ magnétique. L'échelle de couleur évolue en fonction de la densité. Le champ représenté est le champ mixte : composante polôïdale et composante toroïdale. Crédit : Duez, Braithwaite et Mathis [9]

Comme on sait qu'une des caractéristiques des étoiles à enveloppe radiative est de présenter un champ magnétique ayant des propriétés semblant être indépendantes de la rotation, il est intéressant de généraliser maintenant les résultats que nous avons obtenus pour un équilibre magnéto-hydrodynamique en rotation.

Chapitre 4

Équilibre magnéto-hydrodynamique d'une zone radiative stellaire en rotation

?? Chapeau

4.1 Équations de l'équilibre magnéto-hydrodynamique relaxé

Nous avons étudié un fluide magnétisé dans l'approximation MHD magnétisée incluant la vitesse du fluide et la rotation. En l'absence de processus dissipatifs, on peut écrire à l'équilibre

$$0 = \underbrace{-\nabla P - \rho \nabla \left[\Phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right]}_{\text{purement poloïdaux}} + \mathbf{F}_{\mathcal{L}} + \rho (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}, \quad (4.1.1)$$

$$0 = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.1.2)$$

La première remarque que nous pouvons faire est que l'ajout de la vitesse et de la rotation implique que la force de Lorentz induit maintenant un couple. En effet, lorsque la vitesse est non nulle, la force de Lorentz doit équilibrer les différents gradients, qui sont purement poloïdaux, mais aussi $\rho (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$. Or ce dernier n'a aucune raison d'avoir une composante toroïdale nulle.

Le calcul de la composante poloïdale de $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ reste le même que pour l'équilibre magnéto-hydrostatique. Elle n'a donc également aucune raison d'être nulle. On peut donc conclure ici que le champ magnétique est *non force-free* et que la force de Lorentz associée *induit un couple*.

4.2 Calcul du champ magnétique et du champ de vitesse

Pour simplifier le problème, nous considérerons dans la suite de notre étude que $\rho = cst$ et nous nous placerons toujours dans le cas axisymétrique. Sous ces hypothèses, on peut exprimer le champ magnétique et le champ de vitesse en fonction de quatre scalaires, comme nous avons pu le voir dans la section précédente,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r \sin\theta} \nabla \Psi(r, \theta) \times \hat{e}_\phi + \frac{1}{r \sin\theta} F(r, \theta) \hat{e}_\phi, \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r \sin\theta} \nabla \Pi(r, \theta) \times \hat{e}_\phi + \frac{1}{r \sin\theta} G(r, \theta) \hat{e}_\phi, \quad (4.2.2)$$

avec $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho}}$, (r, θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques usuelles et $\{\hat{e}_k\}_{k=r,\theta,\phi}$ la base de vecteurs unitaires.

Comme dans l'étude du cas magnétohydrostatique, nous étudions la relaxation du champ magnétique liée à l'évolution de la zone radiative. Nous voulons minimiser l'énergie totale

$$E = \frac{1}{2} \int \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} (-\Psi \Delta^* \Psi + F^2 + G^2 - \Pi \Delta^* \Pi) d\mathcal{V}, \quad (4.2.3)$$

où \mathcal{V} représente le volume de la zone radiative, par rapport aux intégrales du mouvement

- $M_\Psi = \int_{\mathcal{V}} \Psi d\mathcal{V}$ correspondant à la conservation de la masse dans un tube de flux décrit par $\Psi = c^{ste}$
- $\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d\mathcal{V}$ représentant la conservation de l'hélicité magnétique, qui sont les mêmes que celles prises en compte lors du chapitre précédente, auxquelles on ajoute deux nouveaux invariants liés à la vitesse et à la rotation
- $\mathcal{H}_v = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V}$ correspondant à la conservation de l'hélicité croisée
- $\mathcal{L} = \int_{\mathcal{V}} r \sin\theta v_\phi d\mathcal{V} = I_c \Omega_c$ représentant la conservation du moment cinétique avec I_c le moment cinétique et Ω_c la vitesse angulaire du progéniteur convectif.

Ces invariants X seront notés X^i puisqu'ils ne dépendent que de l'état initial du système.

La condition pour un équilibre stable avec ces conditions est

$$\delta E + a_{11} \delta M_\Psi^i + a_{21} \delta \mathcal{H}^i + a_{31} \delta \mathcal{H}_v^i + a_{40} \delta \mathcal{L}^i = 0, \quad (4.2.4)$$

avec a_{11} , a_{21} , a_{31} et a_{40} les multiplicateurs de Lagrange correspondants. Nous obtenons alors le système d'équations suivant

$$\begin{array}{l} \Delta^* \Psi + \alpha^2 \Psi = (\beta - \gamma) r^2 \sin^2\theta \\ \Pi = a_{31} \Psi \\ F = -\alpha \Psi - \frac{\gamma}{\alpha} r^2 \sin^2\theta \\ G = -a_{31} \alpha \Psi - \frac{\gamma}{a_{31} \alpha} r^2 \sin^2\theta \end{array} \quad (4.2.5)$$

où

$$\Delta^* = \partial_{rr} + \frac{\sin\theta}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{r \sin\theta} \partial_\theta \Psi \right)$$

avec

$$\alpha = \frac{a_{21}}{1 - a_{31}^2}, \beta = \frac{a_{11}}{1 - a_{31}^2} \text{ et } \gamma = \frac{a_{21} a_{31} a_{40}}{(1 - a_{31}^2)^2}.$$

Nous pouvons remarquer que l'équation qui régit Ψ est de la même forme que celle trouvée par Prendergast [?] et Duez & Mathis [?] dans le cas sans rotation : $\Delta^* \Psi + C_1 \Psi = C_2$, où C_1 et C_2 sont indépendantes de Ψ , ce qui a des conséquences importantes sur les configurations magnétiques qui en résultent.

Tout d'abord, nous pouvons dire que le mode $l = 1$, dipolaire, est le mode de plus basse énergie pour un ensemble d'invariants donnés (Broderick & Narayan [] et Duez & Mathis [?])

comme dans le cas sans rotation. Dans le cas axisymétrique, cela signifie que la géométrie horizontale du champ magnétique à la surface de l'étoile est dipolaire et indépendante du taux de rotation de l'étoile. Ce dernier n'influence que la distribution radiale du flux magnétique dans l'étoile. L'indépendance de la géométrie de surface vis-à-vis du taux de rotation est intéressante puisqu'elle correspond aux observations effectuées sur les étoiles de masse intermédiaire et massives qui montrent qu'il ne semble pas y avoir de corrélation entre la géométrie globale du champ et la rotation de l'étoile (Wade ???). Ce résultat est à mettre en parallèle avec les champs obtenus par des dynamos $\alpha - \Omega$ dont la géométrie est modifiée par la rotation (Petit ??? Brown ???)

Ensuite, nous pouvons voir que l'existence du second membre dans l'équation différentielle gouvernant Ψ implique que le champ est *non force-free* comme on s'y attend dans les intérieurs stellaires.

Finalement, contrairement au cas sans rotation, nous avons vu que l'équation de l'équilibre MHD ?? implique que la force de Lorentz associée au champ magnétique *induit un couple*.

Nous allons maintenant résoudre ce système afin de décrire complètement les champ magnétique et de vitesse.

4.2.1 Les configurations magnétiques relaxées

Avec le système 4.2.5, on peut voir que la connaissance complète des champs se résume à la résolution de l'équation régissant Ψ .

Solution générale

Considérons tout d'abord l'équation homogène associée à la première équation de 4.2.5.

$$\mathcal{L}_\alpha \Psi_h = 0, \quad (4.2.6)$$

avec $\mathcal{L}_\alpha \equiv \partial_{rr} + \frac{1-x^2}{r^2} \partial_{xx} + \alpha^2$ où $x = \cos \theta$. On effectue une séparation de variables en posant $\Psi_h = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(r) g_l(x)$ et l'équation homogène est alors équivalente à

$$\begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 g_l}{dx^2} + (l+1)(l+2) g_l(x) = 0 \\ \frac{d^2 f_l}{dr^2} + \left[\alpha^2 - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} f_l(r) \right] = 0 \end{cases}. \quad (4.2.7)$$

Les solutions de ce système sont

$$\begin{cases} g_l = (1-x^2) C_l^{3/2}(x) \\ f_l = K_1^l \alpha r j_{l+1}(\alpha r) + K_2^l \alpha r y_{l+1}(\alpha r) \end{cases}, \quad (4.2.8)$$

où j_l et y_l sont respectivement les fonctions de Bessel de première et seconde espèce et $C_l^{3/2}$ sont des polynômes de Gegenbauer. On a aussi $K_2^l = 0$ pour des raisons de divergence.

Prendergast [?] donne une solution particulière à cette équation

$$\Psi_p(r, \theta) = \frac{\beta - \gamma}{\alpha^2} r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.2.9)$$

Cela nous donne alors l'expression générale pour Ψ

$$\Psi(r, \theta) = \sin^2 \theta \times \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(K_1^l \alpha r j_{l+1}(\alpha r) C_l^{3/2}(\cos \theta) \right) + \frac{\beta - \gamma}{\alpha^2} r^2 \right] \quad (4.2.10)$$

Cette solution admet toujours des inconnues $\alpha, \beta, \gamma, a_{31}$ et $\{K_1^l\}_l$ et doit donc être contrainte par des conditions initiales et aux limites.

Conditions aux limites

Dans le cas d'une zone radiative stellaire, on a deux frontières $r = R_t$ et $r = R_i$, nous allons donc détailler quelles sont les conditions aux limites intéressantes à étudier. Tout d'abord nous regardons ce qui se passe lorsque l'on prend les deux conditions aux limites sur la même frontière $R = R_t$ ou R_i

- $B_r(R, \theta) = 0$ et $B_\theta(R, \theta) = 0$ Cet ensemble de conditions fonctionne et nous donne un champ poloïdal confiné mais un champ toroïdal ouvert sur la surface considérée.
- $B_r(R, \theta) = 0$ et $B_\phi(R, \theta) = 0$ En déroulant les calculs liés à cet ensemble de conditions on trouve le système

$$\begin{cases} \Psi = 0 \\ \Psi = -\frac{\gamma}{\alpha^2} R^2 \sin^2 \theta \end{cases}$$

ce qui est impossible. Cet ensemble de conditions ne peut donc pas être retenu.

- $B_\theta(R, \theta) = 0$ et $B_\phi(R, \theta) = 0$ Cet ensemble n'est pas admissible physiquement puisqu'il impliquerait l'existence d'un monopole magnétique.

Lorsque l'on prend une condition sur chaque frontière, on a

- $B_\phi(R_t, \theta) = 0$ et $B_\phi(R_b, \theta) = 0$ Cet ensemble de conditions confine le champ toroïdal entre les deux frontières mais laisse le champ poloïdal sans contrainte : il peut être ouvert hors de la zone radiative.
- $B_\theta(R_t, \theta) = 0$ et $B_\theta(R_b, \theta) = 0$
- $B_r(R_t, \theta) = 0$ et $B_r(R_b, \theta) = 0$

Nous avons donc décidé de nous intéresser particulièrement à l'annulation du champ magnétique toroïdal sur les deux frontières R_b et R_t

$$\begin{cases} F(R_t, \theta) = 0 \\ F(R_b, \theta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \Psi(R_t, \theta) = -\frac{\gamma}{\alpha^2} R_t^2 \sin^2 \theta \\ \Psi(R_b, \theta) = -\frac{\gamma}{\alpha^2} R_b^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Considérons alors la première équation avec la solution explicite de Ψ :

$$\sin^2 \theta \left[\sum_{l=0}^{\infty} K_1^l \alpha R_t j_{l+1}(\alpha R_t) C_l^{3/2}(\cos \theta) + \frac{\beta - \gamma}{\alpha^2} R_t^2 \right] = -\frac{\gamma}{\alpha^2} R_t^2 \sin^2 \theta$$

On voit que l'on a une décomposition sur la base des polynômes de Gegenbauer $\{C_l^{3/2}\}_l$. On peut donc identifier les coefficients pour chaque l

$$\begin{cases} 0 = K_1^l \quad \forall l > 0 \\ 0 = K_1^0 \alpha R_t j_1(\alpha R_t) + \frac{\beta}{\alpha^2} R_t^2 \\ 0 = K_1^0 \alpha R_b j_1(\alpha R_b) + \frac{\beta}{\alpha^2} R_b^2 \end{cases}$$

Nous avons donc besoin de cinq inconnues pour décrire Ψ , puisque $K_1^l = 0 \quad \forall l > 0$, et les conditions aux limites nous donnent le système

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{R_t}{R_b} &= \frac{j_1(\alpha R_t)}{j_1(\alpha R_b)} \\ 0 &= K_1^0 \alpha R_t j_1(\alpha R_t) + \frac{\beta}{\alpha^2} R_t^2 \end{aligned}} \quad (4.2.12)$$

La première équation nous permet de déterminer α et la seconde nous donne une relation entre K_1^0 et $(\beta - \gamma)$. Ces résultats nous permettent de réécrire Ψ

$$\Psi(r, \theta) = \sin^2 \theta (K_1^0 \Psi_1(r) + (\beta - \gamma) \Psi_2(r)) \quad (4.2.13)$$

avec

$$\begin{cases} \Psi_1(r) = \alpha r j_1(\alpha r) \\ \Psi_2(r) = \frac{r^2}{\alpha^2} \end{cases}$$

On peut déjà dire que le champ magnétique correspondant ??? possède une géométrie dipolaire avec $B_r \propto \cos \theta$, $B_\theta \propto \sin \theta$ et $B_\phi \propto \sin \theta$.

Pour avoir une expression complète de Ψ , nous avons encore besoin de déterminer β , γ , a_{31} et K_1^0 . Nous allons les déduire des propriétés du progéniteur initial.

Conditions initiales

Nous savons que pour contraindre complètement Ψ , nous avons besoin de cinq inconnues. Le paragraphe précédent nous donne la résolution de α et une équation liant K_1^0 et $(\beta - \gamma)$. Il nous reste donc quatre inconnues et nous avons une équation. Les trois équations manquantes nous sont données par les invariants

$$\begin{cases} \mathcal{L}^i = -\alpha a_{31} M_\Psi - \frac{\gamma}{\alpha a_{31}} \mathcal{I}_\Delta, \\ \mathcal{H}^i = 4\pi\rho \left[-\frac{1}{\alpha 4\pi\rho} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^2 d\mathcal{V} - \left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha} + \frac{a_{31}^2}{\alpha} \gamma \right) M_\Psi - \frac{\gamma a_{31}}{\alpha^2} \mathcal{L} \right], \\ \mathcal{H}_v^i = \sqrt{4\pi\rho} \left[\frac{a_{31}}{4\pi\rho} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^2 d\mathcal{V} + \frac{\gamma}{a_{31}} (1 - a_{31}^2)^2 M_\Psi - \frac{\gamma}{\alpha} (1 - a_{31}^2) \mathcal{L} \right]. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

qui peuvent être considérés comme des conditions initiales. Pour des raisons pratiques, à partir de maintenant nous considérerons l'ensemble d'inconnues

$$\begin{cases} X = \beta - \gamma \\ Y = a_{31} \\ Z = K_1^0 \\ T = \gamma. \end{cases}$$

Nous allons maintenant résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues. Avec l'expression explicite de Ψ et ces inconnues, on peut exprimer $M_\Psi = d_2 Z + d_3 X$ avec

$$\begin{cases} d_2 = \int_{\mathcal{V}} \sin^2 \theta \Psi_1(r) d\mathcal{V} \\ d_3 = \int_{\mathcal{V}} \sin^2 \theta \Psi_2(r) d\mathcal{V} \end{cases}$$

De plus on peut réécrire l'équation donnée par les conditions aux limites comme

$$\boxed{Z = d_1 (X + T)} \quad (4.2.15)$$

avec

$$d_1 = \frac{R_t^2}{\alpha^2} \frac{1}{\alpha R_t j_1(\alpha R_t)}$$

ce qui nous permet de réécrire $M_\Psi = e_1 X + e_2 T$ avec $e_1 = d_2 d_1 + d_3$ et $e_2 = d_2 d_1$

La première condition initiale, liée à la conservation du moment cinétique \mathcal{L}^i , nous permet de donner une expression de X

$$\boxed{X = -\frac{1}{e_1} \left[e_2 T + \frac{1}{\alpha Y^2} \left(Y \mathcal{L} + \frac{T}{\alpha} \mathcal{I}_\Delta \right) \right]} \quad (4.2.16)$$

et de nouveau, nous pouvons réécrire $M_\Psi = -\frac{1}{\alpha Y^2} \left(Y \mathcal{L} + \frac{T}{\alpha} \mathcal{I}_\Delta \right)$.

Il nous reste finalement deux inconnues, T et Y , et deux équations, les conditions initiales sur les hélicités magnétique et croisées

$$\begin{cases} \mathcal{H} = 4\pi\rho \left[-\frac{1}{\alpha} \int_{\mathcal{V}} H_T^2 + H_P^2 d\mathcal{V} - \left(\frac{X}{\alpha} + \frac{Y^2}{\alpha} T \right) M_\Psi - \frac{YT}{\alpha^2} \mathcal{L} \right] \\ \mathcal{H}_v = \sqrt{4\pi\rho} \left[Y \int_{\mathcal{V}} H_T^2 + H_P^2 d\mathcal{V} + \frac{T}{Y} (1 - Y^2)^2 \mathcal{L} \right] \end{cases}$$

Nous pouvons combiner ces deux équations et ainsi obtenir

$$\boxed{Y \frac{\mathcal{H}}{4\pi\rho} + \frac{1}{\alpha} \frac{\mathcal{H}_v}{\sqrt{4\pi\rho}} = aT^2 + bT + c} \quad (4.2.17)$$

avec

$$\begin{cases} a = \left(-\frac{1}{\alpha Y^2} \frac{\mathcal{I}_\Delta}{\alpha} \right) \left(\frac{1 - 2Y^2}{\alpha Y} + \frac{Y}{\alpha e_1} \left[e_2 + \frac{\mathcal{I}_\Delta}{\alpha^2 Y^2} \right] \right) \\ b = \left(-\frac{1}{\alpha Y^2} \frac{\mathcal{I}_\Delta}{\alpha} \right) \left(\frac{\mathcal{L}}{\alpha^2 e_1} \right) + \left(-\frac{1}{\alpha Y^2} Y \mathcal{L} \right) \left(\frac{1 - 2Y^2}{\alpha Y} + \frac{Y}{\alpha e_1} \left[e_2 + \frac{\mathcal{I}_\Delta}{\alpha^2 Y^2} \right] \right) \\ c = -\frac{1}{\alpha Y^2} Y \frac{\mathcal{L}^2}{\alpha^2 e_1}. \end{cases}$$

Cette équation du second degré nous donne T en fonction de Y .

La seule inconnue qui nous reste est donc Y que l'on peut calculer grâce à la condition initiale sur l'hélicité

$$\frac{\mathcal{H}}{4\pi\rho} = -\frac{1}{\alpha} \int H_T^2 + H_P^2 d\mathcal{V} - \left(\frac{X}{\alpha} + \frac{Y^2}{\alpha} T \right) M_\Psi - \frac{TY}{\alpha^2} \mathcal{L}$$

où l'on sait d'après les équations 4.2.16 et 4.2.17 que X et T sont des fonction de Y . Cette équation peut être résolue numériquement.

Une fois que Y est connu, on peut calculer T , X et Z grâce aux équations 4.2.17, 4.2.16 et 4.2.15. Nous pouvons donc déterminer facilement β , γ , a_{31} et K_1^0 , α étant déjà connu. On peut

aussi remonter aux multiplicateurs de Lagrange a_{11} , a_{21} , a_{31} et a_{40} . Connaissant ces valeurs, nous avons une description complète de Ψ et des champs recherchés

$$\Psi(r, \theta) = \sin^2\theta \left[K_1^0 \alpha r j_1(\alpha r) + \frac{\beta - \gamma}{\alpha^2} r^2 \right] \quad (4.2.18)$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{4\pi\rho} \left[\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \hat{e}_r - \frac{1}{r \sin\theta} \left(\alpha\Psi + \frac{\gamma}{\alpha} r^2 \sin^2\theta \right) \hat{e}_\phi - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \hat{e}_\theta \right] \quad (4.2.19)$$

$$\mathbf{v} = \frac{a_{31}}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \hat{e}_r + \left(a_{31}\alpha\Psi + \frac{\gamma}{a_{31}\alpha} \right) \hat{e}_\phi - \frac{a_{31}}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \hat{e}_\theta. \quad (4.2.20)$$

4.3 Hélicités, énergies et vitesse

La physique des plasmas et l'étude menée par Duez & Mathis nous ont montré que les équilibres relaxés sont caractérisés par des relations entre l'hélicité et l'énergie. C'est à ces relations que nous allons nous intéresser à présent. Comme nous prenons en compte la rotation et la vitesse, nous allons étudier les liens entre les deux hélicités : magnétique et croisée, et les énergies magnétique et cinétique.

4.3.1 Hélicité magnétique poloïdale et toroïdale

L'hélicité est une caractéristique globale du plasma telle que

$$\mathcal{H} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, d\mathcal{V}, \quad (4.3.1)$$

qui est conservée en MHD idéale (non-résistive). L'hélicité magnétique dans la zone radiative est donc celle qui existait dans la sphère purement convective initiale \mathcal{H}^i . Nous allons calculer ses composantes toroïdale et poloïdale.

On peut exprimer le champ magnétique \mathbf{B} et le potentiel vecteur \mathbf{A} en terme de fonctions de flux magnétiques f_P et f_T

$$\mathbf{B} = \nabla \times [\nabla \times [f_P(r, \theta) \hat{e}_r] + f_T(r, \theta) \hat{e}_r]$$

$$\mathbf{A} = \nabla \times [f_P(r, \theta) \hat{e}_r] + f_T(r, \theta) \hat{e}_r$$

Les fonctions de flux peuvent être projetées sur la base complète des harmoniques sphériques

$$f_P(r, \theta) = \sum_{l>0} f_0^l(r) Y_l^0(\theta),$$

$$f_T(r, \theta) = \sum_{l>0} g_0^l(r) Y_l^0(\theta).$$

Nous utilisons donc la base vectorielle des harmoniques sphériques ($\mathbf{R}_l^0(\theta)$, $\mathbf{S}_l^0(\theta)$, $\mathbf{T}_l^0(\theta)$) telle que

$$\mathbf{R}_l^0(\theta) = Y_l^0(\theta) \hat{e}_r,$$

$$\mathbf{S}_l^0(\theta) = \nabla_S Y_l^0(\theta),$$

$$\mathbf{T}_l^0(\theta) = \nabla_S \times \mathbf{R}_l^0(\theta),$$

avec $\nabla_S = \hat{e}_\theta \partial_\theta$. Avec la notation d'Einstein, $A^l B_l = \sum_l A^l B_l$, on obtient alors

$$\mathbf{A} = g_0^l \mathbf{R}_l^0 + \frac{f_0^l}{r} \mathbf{T}_l^0,$$

$$\mathbf{B} = \frac{l(l+1)}{r^2} f_0^l \mathbf{R}_l^0 + \frac{1}{r} \partial_r f_0^l \mathbf{S}_l^0 + \frac{g_0^l}{r} \mathbf{T}_l^0.$$

On peut maintenant calculer les composantes poloïdale et toroïdale de l'hélicité \mathcal{H}^i , puisque $(\mathbf{R}_l^0, \mathbf{S}_l^0, \mathbf{T}_l^0)$ est une base orthogonale

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P^i &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{B}_P \, d\mathcal{V} \\ &= \int_0^R \frac{l'(l'+1)}{r^2} g_0^l f_0^{l'} \left(\int_{\Omega} \mathbf{R}_l^0 \cdot \mathbf{R}_{l'}^0 \, d\Omega \right) r^2 \, dr \\ &= l(l+1) \int_0^R f_l^0 g_l^0 \, dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T^i &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}_T \cdot \mathbf{B}_T \, d\mathcal{V} \\ &= \int_0^R \frac{1}{r^2} f_0^l g_0^{l'} \left(\int_{\Omega} \mathbf{T}_l^0 \cdot \mathbf{T}_{l'}^0 \, d\Omega \right) r^2 \, dr \\ &= l(l+1) \int_0^R f_l^0 g_l^0 \, dr, \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{H}_T^i = \mathcal{H}_P^i = \mathcal{H}^i / 2}. \quad (4.3.2)$$

L'hélicité est donc équirépartie entre les composantes poloïdale et toroïdale.

4.3.2 Expression de la vitesse

On rapelle que la vitesse s'exprime en fonction des scalaires Π et G , liés à Ψ et F , composantes du champ magnétique.

$$\begin{cases} \Pi &= a_{31} \Psi \\ G &= a_{31} F - \frac{\gamma}{a_{31} \alpha} r^2 \sin^2 \theta (1 - a_{31}^2). \end{cases} \quad (4.3.3)$$

On peut donc en conclure que la vitesse \mathbf{v} s'exprime

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + r \sin \theta \Omega_s \hat{e}_\phi} \quad (4.3.4)$$

où $v_{\parallel} = \frac{a_{31}}{\sqrt{4\pi\rho}} \mathbf{B}$ est aligné avec le champ magnétique et $\Omega_s = \frac{\gamma}{\alpha} \left(a_{31} - \frac{1}{a_{31}} \right)$ est la rotation solide. Si on annule la rotation, la vitesse est alignée avec le champ magnétique ce qui correspond bien aux résultats obtenus en physique des plasmas. ??? (article)

4.3.3 Calcul du potentiel vecteur

Nous souhaitons maintenant obtenir une relation explicite de l'hélicité. Pour cela, nous introduisons un potentiel vecteur normalisé $\mathbf{A}_H = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{4\pi\rho}}$ tel que $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}_H$ et une hélicité normalisée $\mathcal{H}_H = \int \mathbf{A}_H \cdot \mathbf{H} d\mathcal{V}$. Dans ce cas, on a $\mathcal{H} = 4\pi\rho\mathcal{H}_H$. Nous avons besoin de connaître l'expression de \mathbf{A}_H potentiel vecteur pour calculer l'hélicité normalisée. On calcule donc le produit vectoriel de \mathbf{H}_P et \mathbf{H}_T

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}_T &= -\alpha\mathbf{H}_P - \frac{\gamma}{\alpha}\nabla \times (r\sin\theta\hat{e}_\phi) \\ \nabla \times \mathbf{H}_P &= -\alpha\mathbf{H}_T - \beta\nabla \times (r^2\sin\theta\hat{e}_r) \end{cases} .$$

On a donc les composantes de l'hélicité

$$\mathbf{H}_T = -\frac{1}{\alpha}\nabla \times (\mathbf{H}_P + \beta r^2\cos\theta\hat{e}_r)$$

et

$$\mathbf{H}_P = -\frac{1}{\alpha}\nabla \times (\mathbf{H}_T + \frac{\gamma}{\alpha}r\sin\theta\hat{e}_\phi)$$

Ceci nous permet de calculer les composantes de \mathbf{A}_H

$$\mathbf{A}_{H,P} = -\frac{1}{\alpha}(\mathbf{H}_P + \beta r^2\cos\theta\hat{e}_r) + \nabla\Lambda_P, \quad (4.3.5)$$

$$\mathbf{A}_{H,T} = -\frac{1}{\alpha}(\mathbf{H}_T + \frac{\gamma}{\alpha}r\sin\theta\hat{e}_\phi) + \nabla\Lambda_T. \quad (4.3.6)$$

4.3.4 Relations entre les hélicités et les énergies

Avec les résultats précédents, nous pouvons maintenant calculer les énergies magnétique et cinétique en fonction des propriétés du progéniteur ($\mathcal{H}^i, \mathcal{H}_v^i, \mathcal{L}^i$) et des multiplicateurs de Lagrange ($a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{40}$)

$$\begin{cases} E_{\text{mag}} &= -\frac{2\alpha\pi\rho}{\mu_0} \left[\frac{\mathcal{H}^i}{4\pi\rho} + \left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}a_{31}^2 \right) M_\Psi + \frac{\gamma}{\alpha^2}\mathcal{L}^i \right] \\ E_{\text{kin}} &= \frac{\rho a_{31}}{2} \left[\frac{\mathcal{H}_v^i}{\sqrt{4\pi\rho}} - \frac{\gamma}{a_{31}\alpha} (1 - a_{31}^2) \mathcal{L}^2 \right] \end{cases} \quad (4.3.7)$$

Si l'on souhaite comparer l'énergie magnétique avec la relation trouvée dans le cas d'une étoile sans rotation et sans vitesse, il faut annuler a_{31} et a_{40} , donc γ . On obtient alors :

$$\mathcal{H}^i = -\frac{2\mu_0}{\alpha}E_{\text{mag}} - 4\pi\rho\frac{\beta}{\alpha}M_\Psi.$$

En comparant les équations (3.2.9) et (4.2.5), on identifie les coefficients $\frac{\lambda_1}{R} = -\alpha$ et $4\pi\rho\beta = -\mu_0\beta_0$ et on obtient

$$\mathcal{H}^i = \frac{2\mu_0 R}{\lambda_1} (E_{\text{mag}} - \frac{1}{2}\beta_0 M_\Psi)$$

ce qui correspond exactement au résultat trouvé pour l'équilibre magnéto-hydrostatique.

4.3.5 Critère de stabilité

Cette connaissance des composantes du champ magnétique nous permet donc d'explicitier le critère de stabilité calculé par Agkün [1]. On connaît l'énergie gravitationnelle d'une coquille sphérique : $E_{grav} = -G\frac{2\pi}{5}\rho^2\mathcal{I}_\Delta$ avec $\mathcal{I}_\Delta = \int_{\mathcal{V}} r^2 \sin^2\theta d\mathcal{V}$. On a donc finalement

$$\boxed{\frac{E_{\text{mag,P}}E_{\text{grav}}}{E_{\text{mag,T}}^2} = -\frac{(G\frac{2\pi}{5}\rho^2\mathcal{I}_\Delta)\left(\frac{\mathcal{H}}{8\pi\rho} + \frac{a_{11}}{a_{21}}\right)}{\left(\frac{\mathcal{H}}{8\pi\rho} - a_{31}a_{40}M_\Psi + \frac{a_{31}^2a_{40}}{a_{21}}\mathcal{L}\right)^2}} \quad (4.3.8)$$

ce qui va nous permettre d'explorer la stabilité des équilibres obtenus en fonction des paramètres du progéniteur.

4.4 Conclusion et Perspectives

- Nous avons remarqué que dans le cas magnéto-hydrodynamique, la force de Lorentz induit un couple ce qui est une première différence avec le cas statique.
- Nous avons pu voir que les équations régissant le champ magnétique pour les équilibres hydrostatique et hydrodynamique, avec ou sans rotation, sont de la même forme

$$\Delta^*\Psi + a\Psi = b.$$

La forme de l'équation est maintenue donc la géométrie du champ d'équilibre de plus basse énergie est maintenue. Cela correspond aux observations qui nous montrent que la signature de surface du champ magnétique ne dépend pas de la vitesse de rotation de l'étoile. Dans le cas de l'équilibre magnéto-hydrostatique, le mode dipolaire, $l = 1$, a été calculé comme celui de plus basse énergie. La forme de l'équation ne changeant pas, nous pouvons dire que dans le cas d'un équilibre magnéto-hydrodynamique, le mode dipolaire est aussi celui de plus basse énergie.

La suite de ce travail sera orientée vers l'application numérique des résultats théoriques obtenus ci-dessus via la détermination des coefficients de Lagrange (a_{11} , a_{21} , a_{31} et a_{40}) à partir des valeurs initiales des hélicités (\mathcal{H}^i , \mathcal{H}_v^i), du moment cinétique L^i et des conditions aux limites.

De plus, les résultats de ce travail seront exposés par présentation poster à IAUS 307 portant sur les étoiles massives.

Table des figures

1.1	Extension des zones radiatives et convectives (en fraction de la masse de l'étoile) en fonction de la masse de l'étoile (en masse solaire). Crédit : R.Kippenhahn et A. Weigert	7
1.2	Représentation de la structure d'une étoile de type solaire (à gauche) et d'une étoile de masse intermédiaire (à droite)	8
1.3	Profil de vitesse angulaire en fonction du rayon et de la latitude. Crédit : Garcia et al. 2007	9
2.1	Présentation des instabilités, au centre l'instabilité "sausage" et à gauche l'instabilité "kink". Crédit : Braithwaite 2006 [11]	12
2.2	Évolution de l'instabilité sur un champ magnétique toroïdal. Crédit : Braithwaite 2006	15
2.3	Un champ magnétique poloïdal avec des lignes de champ fermées dans l'étoile. Les flèches indiquent le sens du champ. La ligne neutre passe par A et A'. Crédit Markey et Tayler 1973	16
2.4	Illustration de l'instabilité du champ poloïdal. On représente ici la composante radiale du champ B_r . Le blanc représente $B_r > 0$ et le noir $B_r < 0$. À gauche la rotation Ω est nulle et à droite $\Omega = 0.5$. Crédit : Braithwaite 2007	17
2.5	À gauche, on peut voir les conditions initiales, les lignes de champ étant représentées en rouge et l'étoile en bleu. À droite, on observe l'équilibre le plus simple, qui se forme lorsque le champ magnétique initial est suffisamment concentré au centre de l'étoile. La configuration est presque axisymétrique avec un tube de flux twisté enroulé autour de l'équateur et un flux poloïdal passant par le milieu de l'étoile. Crédit Braithwaite 2008	18
2.6	Équilibre non axisymétrique vu de deux côtés opposés de l'étoile. L'équilibre est constitué d'un ou plusieurs flux twistés situés juste sous la surface de l'étoile. Ce type d'équilibre se forme lorsque le champ magnétique initial n'est pas suffisamment concentré au centre de l'étoile. Crédit Braithwaite 2008	18
3.1	Représentation de l'évolution d'une étoile massive. Celle-ci naît convective (1), puis il apparaît un coeur radiatif (2). Cette zone s'étend alors à toute l'étoile qui devient purement radiative (3). Finalement un coeur convectif apparaît (4)	22
3.2	Relaxation du champ magnétique durant la naissance de la zone radiative interne de l'étoile	23
3.3	Simulation représentant les lignes de champ magnétique. L'échelle de couleur évolue en fonction de la densité. Le champ représenté est le champ mixte : composante poloïdale et composante toroïdale. Crédit : Duez, Braithwaite et Mathis [9]	25

Bibliographie

- [1] Agkun T., Reisenegger A., Mastrano A., Marchant P. Stability of magnetic fields in non-barotropic stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433 :2445–2466, June 2013.
- [2] Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D. and Kulsrud M. An Energy Principle for Hydromagnetic Stability Problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 244 :17–40, February 1958.
- [3] Braithwaite J. The stability of poloidal magnetic fields in rotating stars. *Astronomy and Astrophysics*, 469 :275–284, March 2007.
- [4] Braithwaite J. On non-axisymmetric magnetic equilibria in stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 386 :1947–1958, June 2008.
- [5] Braithwaite J. Axisymmetric magnetic fields in stars : relative strengths of poloidal and toroidal components. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 397 :763–774, August 2009.
- [6] Brun A.S. Nonlinear simulations of magnetic instabilities in stellar radiation zones : The role of rotation and shear. *Astronomische Nachrichten*, 328, December 2007.
- [7] Chandrasekhar S. On the equilibrium configurations of an incompressible fluid with axisymmetric motions and magnetic fields. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 44 :842, 1958.
- [8] Vincent Duez. *Modélisation des champs magnétiques de grandes échelles dans les intérieurs stellaires*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2009.
- [9] Duez V., Braithwaite, J., Mathis S. On the Stability of Non-force-free Magnetic Equilibria in Stars. *The Astrophysical Journal Letter*, 724, october 2010.
- [10] Duez V., Mathis S. Relaxed equilibrium configurations to model fossil fields. *Astronomy and Astrophysics*, 517, July 2010.
- [11] Braithwaite J. The stability of toroidal fields in stars. *Astronomy and Astrophysics*, 453 :687–698, July 2006.
- [12] Markey P., Tayler R.J. The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-II. Poloidal fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 163, 1973.
- [13] Tayler R.J. Hydromagnetic Instabilities of an Ideally Conducting Fluid. *Proc. Phys. Soc.*, 70, January 1957.
- [14] Tayler R.J. The adiabatic stability of stars containing magnetic fields-I. Toroidal fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 161, 1973.
- [15] Van Assche W., Tayler R.J., Goossens M. Unstable Poloidal Magnetic Fields in Stars. *Astronomy and Astrophysics*, 109 :166–170, 1982.
- [16] Woltjer L. Hydromagnetic equilibrium III. Axisymmetric incompressible media. *Astrophysical Journal*, 130 :400, 1959.

- [17] Woltjer L. Hydromagnetic equilibrium IV. Axisymmetric compressible media. *Astrophysical Journal*, 130 :405, 1959.
- [18] Woltjer L. On Hydromagnetic equilibrium. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 44, September 1959.