
Shunts à commutation

On a pu prouver scientifiquement que le Breton était têtu. Les travaux des plus éminents chercheurs du CNRS ont démontré théoriquement que le Breton trempé est encore plus résistant aux fortes pressions que l'acier trempé. Pour passer de la théorie à la pratique, il suffirait de porter un Breton à ébullition. Mais jusqu'à ce jour aucun Breton contacté pour aider la science dans ce domaine n'a voulu prêter son concours. Donc le Breton est têtu. Par sa faute, la recherche française marque le pas.

Pierre Desproges

Shunts à commutation sur un système à un degré de liberté

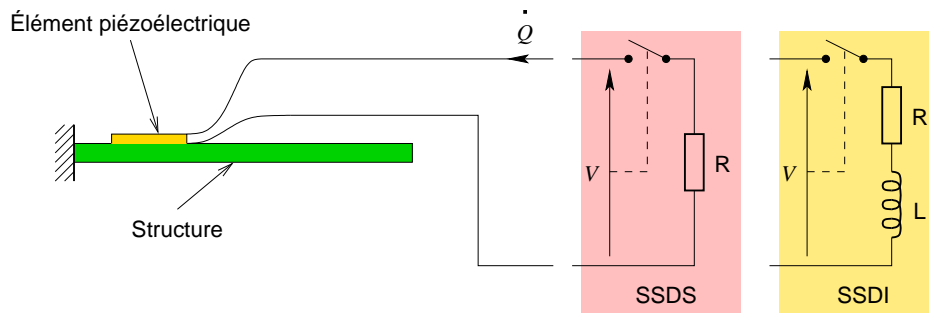


FIG. 7.1: Structure élastique couplée à des shunts commutés SSDS ou SSDI

Ce chapitre est le premier des trois chapitres de cette thèse consacrés à l'étude de la réduction des vibrations par un shunt à commutation, système dénommé “switch” dans la littérature anglo-saxonne. Notre étude est restreinte aux dispositifs dits “Synchronized Switch Damping on Short” (SSDS) et “Synchronized Switch Damping on Inductor” (SSDI). Ils consistent tous les deux à connecter les éléments piézoélectriques à un circuit résistif (technique SSDS) ou résonant (technique SSDI), muni d'un interrupteur que l'on ouvre ou ferme à certains instants choisis de l'évolution vibratoire du système. De cette manière, le shunt (c'est-à-dire le circuit électrique connecté aux éléments piézoélectriques) passe alternativement de situations en circuit ouvert à des situations en circuit fermé, et cela permet d'obtenir une réduction des vibrations.

Le présent chapitre propose en premier lieu une étude bibliographique de l'existant, qui permet de dégager les principales originalités de cette étude (§7.1). La suite du chapitre est consacré à un modèle d'un système mécanique couplé à des shunts SSDS et SSDI, dans le cas particulier où *le système mécanique est réduit à un seul mode de vibration*. Le modèle obtenu comporte alors un seul degré de liberté mécanique (§7.2). Comme dans le cas des shunts linéaires présentés au chapitre 5, ce modèle à 1 ddl permet d'obtenir des résultats analytiques intéressants et originaux sur le choix des composants du circuit électrique. Il permet aussi de quantifier la réduction des vibrations produite par le dispositif, en régime libre (§7.3) et en régime forcé (§7.4). Dans ce modèle 1 ddl, le choix des instants de commutation

(appelé stratégie de commutation) est le plus simple possible : on impose une commutation à chaque maximum du déplacement mécanique. Une dernière partie introduit des stratégies plus évoluées et permet d'en évaluer les performances (§7.5).

7.1 Shunts à commutation : concept et recherche existante

7.1.1 Principe de base

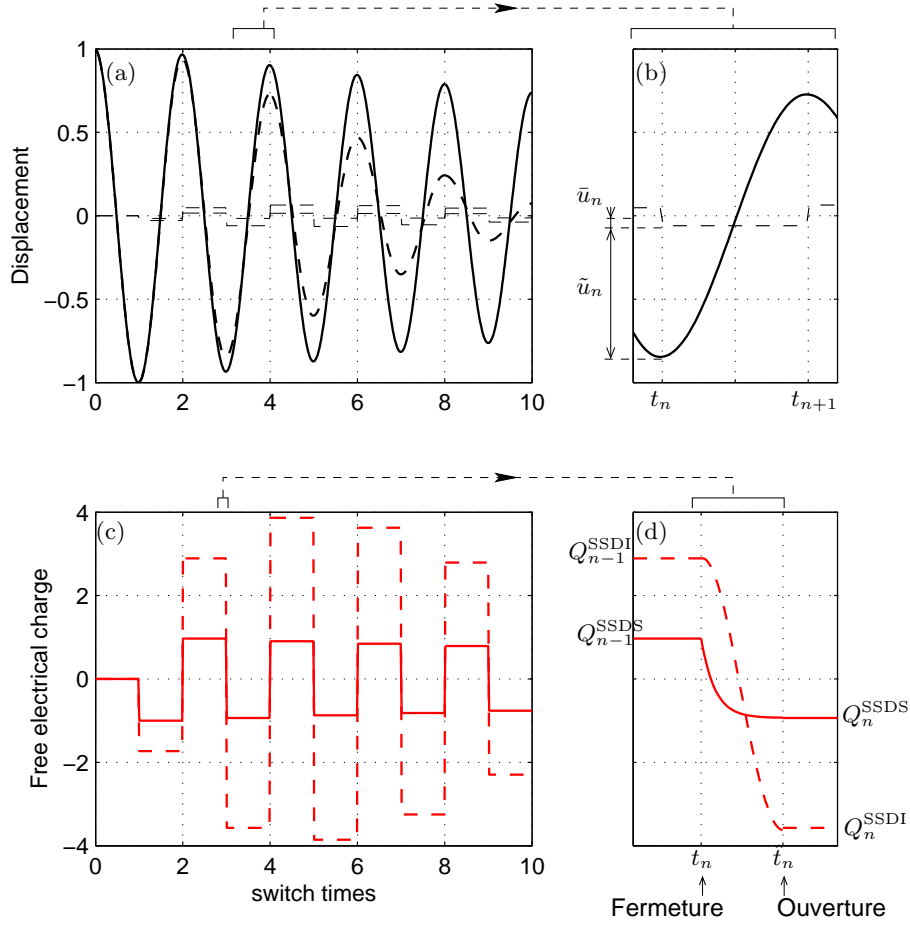


FIG. 7.2: Évolution (a) du déplacement $u(t)$ et (c) de la charge électrique libre $Q(t)$, dans un cas SSDS (trait plein) et SSDI (trait interrompu), avec zoom (b) sur un pas d'évolution mécanique et (d) sur un pas d'évolution électrique.

Le principe de base est, comme le cas des shunts résonants, d'utiliser la charge électrique afin de réduire les vibrations mécaniques. Comme il a été vu au chapitre 5.4.5 (et constaté expérimentalement §6.4.2), les systèmes linéaires sont difficiles à accorder. L'idée d'un shunt à commutation synchronisée (*synchronized switch damping*, SSD) est d'utiliser un shunt dont la constante de temps est très courte, mais d'en bloquer l'évolution une partie du temps. L'objectif est d'accumuler une charge électrique et de se servir de son effet pour s'opposer au mouvement de la structure. On changera donc le signe de la charge lorsque la vitesse change de signe, afin de toujours s'opposer au mouvement.

On peut utiliser deux types de shunt en conjonction avec cette technique :

- La technique de commutation synchronisée sur court-circuit (*synchronized switch damping on short*, SSDS) fait juste appel à un shunt de faible résistance, ou court-circuit. On bloque le courant la majeure partie du temps, et on le laisse circuler seulement lorsque le déplacement de la structure est maximal, c’est à dire aux annulations de vitesse. Cela met la tension à zéro et fait circuler une charge, qui est conservée lorsque le circuit est ouvert.
- La technique de commutation synchronisée sur inductance (*synchronized switch damping on inductor*, SSDI) s’apparente à un shunt résonant ayant une faible constante de temps mais qu’on laisse osciller d’une demi période seulement à chaque maximum du déplacement. Par rapport à la technique SSDS, cela permet d’obtenir une inversion partielle de la tension lors de la phase de fermeture, et donc un mouvement de charge plus important ; la charge plus importante permet de freiner plus efficacement le mouvement.

La réponse libre d’un système avec un mode dominant est tracée figure 7.2 ; on constate que la charge électrique avec les deux méthodes s’apparente à un signal de type créneau, de signe opposé à la vitesse - et donc exerce un effort qui dissipe l’énergie. Dans le cas de la technique SSDI l’amplitude plus importante de la charge permet un amortissement plus rapide des vibrations.

7.1.2 Origine du concept et développement

State switching

Un des premiers concepts de shunt à commutation est proposé dans [18, 19], où l’auteur étudie le cas d’un shunt résistif qui peut être ouvert ou fermé à volonté. À la différence de ce qui est décrit ci-dessus, les phases de fermeture et d’ouverture sont de durée comparable (c’est pourquoi l’on parle de “state switching”). Ce type de système peut être étudié en l’assimilant à un système mécanique à raideur variable ; le principe se décrit alors comme suit pour le cas d’un seul degré de liberté (coordonnée u) :

- Lorsque le système s’éloigne de la position d’équilibre, la raideur doit être élevée : $u\dot{u} > 0 \Rightarrow$ circuit ouvert
- Lorsqu’il se rapproche de la position d’équilibre la raideur doit être réduite : $u\dot{u} < 0 \Rightarrow$ circuit fermé.

L’optimisation d’un tel dispositif peut se faire pour un système multimode en prenant en compte la contrainte locale dans l’élément à raideur variable ; cela conduit à une variation rapide entre les états ouverts et fermés par exemple constatée dans [26]. Cette stratégie est efficace sur tous les modes mais pas optimale.

Synchronized switching

Dans [84, 83] les auteurs proposent de ne fermer le circuit qu’un très court instant et d’ajouter une inductance afin d’augmenter la charge électrique présente dans l’élément piézo-électrique. La technique est nommée “Synchronized Switch Damping” de manière générale, puis déclinée suivant le shunt utilisé :

- “Synchronized Switch Damping on Short”, SSDS, où le shunt est purement résistif ;
- “Synchronized Switch Damping on Inductance”, SSDI, avec un shunt inductif
- “Synchronized Switch Damping on Voltage source”, SSDV, où le shunt comprend un générateur de tension [50] (ce qui place alors le système dans la catégorie des contrôleurs

actifs nécessitant de l'énergie) et comporte un risque d'instabilité. Ce problème peut être mitigé par une variation lente de la tension pour suivre l'amplitude moyenne des vibrations, comme proposé dans [47, 44]

Dans les articles initiaux dédiés à cette technique, l'amortissement est estimé avec un modèle 1D très simplifié. À peu près simultanément différentes équipes travaillent sur des systèmes similaires, et se posent en particulier la question de l'efficacité multimode :

- L'équipe de William W. Clark [21, 22] compare le state switching et le synchronized switching et montre que le dernier est plus efficace ; cela fait partie du début du travail de thèse de Lawrence R. Corr [23] sur la réduction de vibration par éléments piézoélectriques commutés. Les auteurs s'intéressent particulièrement au contrôle multimode [24], en observant l'effet de la charge sur les modes visés. Ils développent alors une technique de synchronisation de la commutation basée sur plusieurs filtres modaux, chacun pouvant être pondéré afin d'obtenir les résultats visés. La technique requiert donc des filtres complexes et alimentés, mais l'efficacité est bonne. Ce type de travail est actuellement repris par une autre équipe américaine [20].
- Dans son travail de thèse [56, 57, 58], Kanjuro Makihara et ses collaborateurs utilisent une technique de type SSDI pour contrôler les modes de vibration d'un treillis métallique dont une des barres est un actionneur (stack) piézoélectrique. La spécificité de ces travaux est d'utiliser un contrôleur de type contrôle actif (LQR) afin de choisir les instants de commutation ; cela permet d'obtenir de très bons résultats, mais nécessite un contrôleur temps réel fonctionnant sur un ordinateur. L'influence du délai de déclenchement de la commutation, lié à la méthode de filtrage du signal et au taux d'échantillonnage du contrôleur est étudiée.

Un circuit actif est également utilisé pour simuler un système de commutation sans résistance interne (ce circuit compense les tensions de seuil des diodes et du transistor servant à la commutation), afin d'améliorer le stockage de la charge.

Enfin une technique simplifiée mais non optimale est proposée, qui permet un fonctionnement autonome du système. Le circuit fait d'ailleurs l'objet d'une demande de brevet d'un collaborateur de l'auteur [74].

- Dans son travail de thèse [71, 70, 68, 69], Dominik Niederberger étudie des techniques variées de shunt pour réduction de vibration, et en particulier une technique de type SSDI où la synchronisation de la commutation est obtenue en choisissant un élément piézoélectrique sélectivement couplé aux modes visés comme capteur. Cela permet d'obtenir un système autonome et visant un mode. Une réflexion sur l'efficacité multimode est également présentée mais ne fait pas l'objet d'une implémentation autonome. Enfin, une réflexion est menée sur la question du délai de déclenchement, et la proposition est faite d'un délai négatif (possible en connaissant la période du mode visé), c'est à dire une commutation "juste avant" le maximum de position. Cela peut améliorer les performances.
- L'équipe du Laboratoire de Génie Électrique et de Ferroélectricité (LGEF) à Lyon, dirigée par Daniel Guyomar, a affiné la technique SSDI [77, 78] en en proposant un circuit autonome efficace (et breveté [85]) ; cependant la méthode consistant en une détection de maximum local n'est pas optimale pour les cas multimodes. Les auteurs ont alors proposé un critère probabiliste (en pratique, une détection de maximum dépassant nettement le niveau moyen) qui donne de bons résultats [34] et peut être implémenté sur des circuits simples et autoalimentés [48]. Afin d'accélérer les simulations un modèle réduit de la partie mécanique et piézoélectrique du système est proposé [6]. Une étude de l'efficacité du système pour de la réduction de bruit transmis a aussi été proposée

d'abord avec un modèle 1D [35], puis d'un modèle de plaque rayonnante [36].

- Dans son travail de thèse en cours [15, 16, 17], Monica Ciminello étudie des formulations éléments finis de plaque adaptés à l'association de composites laminés avec des éléments piézoélectriques plus ou moins épais, en prenant en compte une déformation linéaire par morceaux dans l'épaisseur ; le couplage est optimisé avec un algorithme génétique. Ensuite, un circuit original, basé sur un tachymètre et des composants CMOS (nécessitant une alimentation de faible puissance) est utilisé pour réaliser un système SSDI. Un ou plusieurs de ces circuits sont utilisés sur une plaque munie de plusieurs éléments piézoélectriques ; de bons résultats sont obtenus pour plusieurs modes lorsque chaque élément est associé à un circuit.

7.1.3 Cas de la récupération d'énergie

Un domaine de recherche très actif et connexe à celui des éléments piézoélectriques est celui de la récupération d'énergie, où le but est d'alimenter un circuit électrique en prélevant l'énergie vibratoire. Un des effets annexes de ce prélèvement est l'amortissement des vibrations [53] ; néanmoins l'objectif final n'est pas exactement le même et l'optimisation de l'extraction d'énergie n'a pas forcément les mêmes résultats que l'optimisation de l'amortissement. Cependant, l'utilisation d'une technique SSDI, permettant d'accumuler une charge importante dans l'élément piézoélectrique, améliore l'efficacité de la récupération, comme proposé dans [51, 5]. Il faut remarquer que le concept même de commutation est peu présent en mécanique (où les grandeurs peuvent rarement varier instantanément) et qu'il s'agit d'un concept très utilisé en électronique de puissance ; d'ailleurs le brevet [85] couvre également l'utilisation d'un dispositif à commutation autonome pour tout système de transfert d'énergie, avec par exemple une utilisation possible dans un transformateur piézoélectrique.

7.1.4 Originalité de cette étude

L'étude de systèmes à switch se fera à travers quatre modèles de complexité croissante, permettant une modélisation de plus en plus pertinente.

- Un modèle analytique de la réponse libre d'un système switch avec une partie mécanique réduite à un seul ddl ;
- Un modèle semi-analytique de la réponse forcée du même système, avec un forçage sinusoïdal à la résonance ou hors-résonance ;
- Un modèle semi-analytique de la réponse libre d'un système switch avec une partie mécanique à N ddl ;
- Un modèle numérique de la réponse forcée du même système. Cet algorithme est fondé sur une intégration temporelle de la dynamique par un algorithme de Newmark, et permet un forçage quelconque (sinusoïdal, bruit aléatoire. . .).

Les deux modèles à 1 ddl sont décrits dans la suite du présent chapitre ; les deux modèles à N ddl le sont dans le chapitre suivant (chap. 8).

Les objectifs suivis lors de l'écriture de ces différents modèles ont été d'une part d'obtenir des algorithmes de simulation du comportement électromécanique du système les plus réalistes possible, et d'autre part de dégager des critères d'optimisation du dispositif, notamment pour le choix des composants électroniques et de la stratégie de commutation. Les deux modèles réduits à un seul ddl du présent chapitre répondent au second objectif : ils permettent de dégager des valeurs optimales des composants électriques ainsi qu'une évaluation

des performances des système en terme d'un seul paramètre : une réduction du maximum de vibration en régime forcé sinusoïdal et un taux d'amortissement équivalent en régime libre. En revanche, le premier objectif n'est pas atteint car la réduction à un seul degré de liberté mécanique ne permet pas de prendre en compte l'excitation multimodale qui résulte des transferts d'énergie hors de la bande fréquentielle d'excitation, liés aux non-linéarités des commutations. Les deux modèles à N ddl proposés au chapitre 8 permettent de palier à ce manque, tout en augmentant la complexité de l'optimisation du dispositif et de la caractérisation de son efficacité, éliminant du même coup des résultats simples des modèles à un ddl.

7.2 Modèle à un degré de liberté

7.2.1 Équations générales

Le système dont on se propose d'étudier l'évolution est obtenu à partir des équations (3.69), tronquées en ne gardant qu'un seul mode. Il faut ajouter au système les équations du circuit électrique, qui alterne entre circuit ouvert et circuit fermé. Dans ce dernier cas, le circuit électrique est alors un shunt résistif (cas du SSDS) ou un shunt résonant (cas du SSDI), qui sont modélisés de la même manière qu'au chapitre 5. Pour simplifier les écritures, la seule coordonnée modale conservée (la r -ième) est notée $u(t) \equiv q_r(t)$. Les équations du problème sont alors :

$$\text{Partie mécanique :} \quad \ddot{u} + 2\omega_r \xi_r \dot{u} + \hat{\omega}_r^2 u = k_r \omega_r Q + \tilde{F}_r, \quad (7.1a)$$

$$\text{Tension électrique} \quad V = Q - k_r \omega_r u, \quad (7.1b)$$

$$\text{Circuit ouvert :} \quad \dot{Q} = 0, \quad (7.1c)$$

$$\text{SSDS fermé :} \quad \tau_e \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u, \quad (7.1d)$$

$$\text{SSDI fermé :} \quad \frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q} + \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u. \quad (7.1e)$$

Dans les équations ci-dessus, le mode étudié (le r -ième) est caractérisé par :

- sa pulsation propre ω_r ,
- son facteur d'amortissement ξ_r ,
- son coefficient de couplage k_r .
- sa pulsation propre en circuit ouvert : $\hat{\omega}_r = \omega_r \sqrt{1 + k_r^2}$.

L'équation (7.1b) donne l'expression de la tension électrique V aux bornes des éléments piézoélectriques en fonction de la charge Q et de u . Les équations (7.1a,b) sont valables en permanence. L'équation (7.1c) est valable pour les phases où le circuit est ouvert. Les équations (7.1d,e) caractérisent l'évolution électrique du système en circuit fermé : respectivement dans les cas SSDS et SSDI. Les paramètres sont les suivants :

- τ_e est la constante de temps du shunt SSDS, liée à la résistance R (eq. 5.5) ;
- ξ_e et ω_e sont le facteur d'amortissement et la pulsation propre, respectivement liées à la résistance R et l'inductance L du shunt SSDI (eq. 5.48).

7.2.2 Principe des simulations

Le principe des shunts à commutation est d'utiliser la charge Q pour "freiner" les oscillations mécaniques. Il s'agit pratiquement de faire en sorte que le terme $k_r \omega_r Q$ dans l'équation (7.1a) soit toujours de signe opposé à la vitesse et le plus grand possible en valeur absolue.

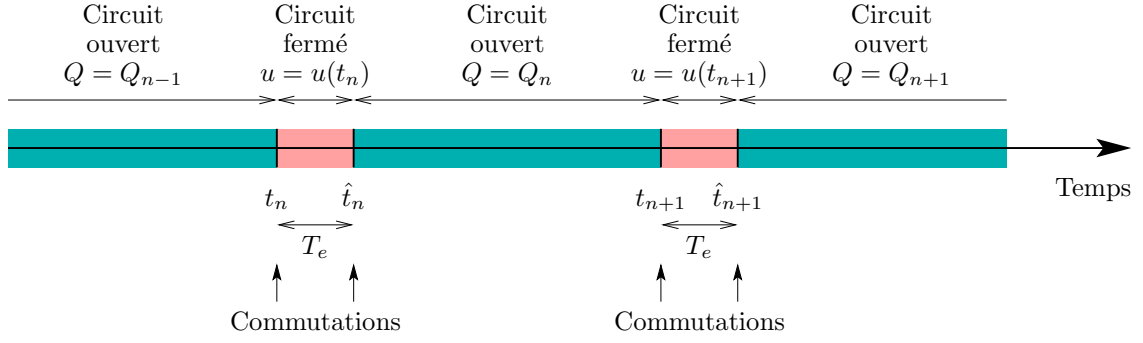


FIG. 7.3: Succession des commutations

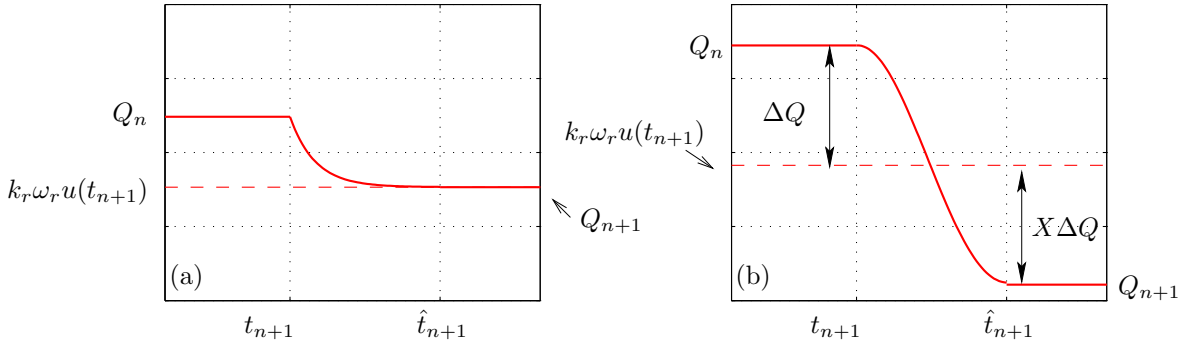


FIG. 7.4: Évolution de la charge électrique pendant une phase circuit fermé. (a) : technique SSDS; (b) : technique SSDI.

Pour réaliser cela, à chaque fois que la vitesse \dot{u} de la partie mécanique change de signe (c'est à dire lorsqu'elle s'annule, $\dot{u} = 0$), on ferme le circuit électrique un bref instant. En faisant cela, on espère que l'évolution électrique du shunt va changer le signe de Q au moment où \dot{u} change de signe. En choisissant de plus la constante de temps du shunt très petite devant celle du mode mécanique, le changement de signe de Q est vu de manière quasiment instantanée par la partie mécanique, si bien que du point de vue de la structure le terme $k_r \omega_r Q$ change de signe à chaque demi-oscillation de la partie mécanique. Ce comportement s'apparente à du frottement sec, à la différence que le terme $k_r \omega_r Q$, équivalent de la force de frottement, change d'intensité en valeur absolue d'une oscillation à l'autre.

Le choix de l'instant de fermeture, crucial pour le bon fonctionnement du dispositif, peut se faire de plusieurs manières, exposées au paragraphe 7.5. Ici, pour obtenir un modèle semi-analytique simple, on choisit de fermer le circuit *chaque fois* que la vitesse s'annule, soit $\dot{u} = 0$.

On représente l'évolution de la partie mécanique par une succession d'états en circuit ouvert, entre lesquels des phases d'évolution en circuit fermé, de durée négligeable devant la période mécanique, sont intercalées (voir figure 7.2). On note t_n l'instant de la n -ième fermeture du circuit et \hat{t}_n l'instant de la n -ième ouverture, qui suit donc t_n ; on note T_e la durée de fermeture du circuit, si bien que $T_e = \hat{t}_n - t_n$ (Voir Fig. 7.3). Cette durée T_e vérifie les propriétés suivantes.

- Dans le cas d'un shunt résistif (technique SSDS), T_e est grande devant τ_e , ce qui permet d'atteindre le régime établi de l'équation électrique (7.1d). Cela est représenté sur la

figure 7.4(a) où τ_e est de l'ordre de grandeur du temps de décroissance de la charge, pour passer de Q_n à Q_{n+1} .

- Dans le cas d'un shunt résonant (technique SSDI), T_e est exactement la demi-période de l'oscillateur électrique de l'équation (7.1e) : $T_e = \pi/\omega_e$ (Voir fig. 7.4(b)). C'est ce choix qui permet d'assurer une inversion de charge maximale.
- Dans les deux cas, T_e est négligeable devant la période mécanique, ce qui fait que la charge électrique varie rapidement entre t_n et \hat{t}_n tandis que la partie mécanique ne change pas (voir figure 7.2).

7.2.3 Hypothèses des modèles 1 ddl

On propose par la suite deux modèles à un ddl mécanique pour simuler l'évolution temporelle du système, en régime libre (§ 7.3) et en régime forcé par un effort sinusoïdal (§ 7.4). Ils consistent à raccorder, à chaque commutation, par continuité, les solutions analytiques des équations (7.1a-e) :

1. pour les phases de circuit ouvert (entre \hat{t}_n et t_{n+1} par exemple), on résout les équations (7.1a) avec $Q = \text{cte} = Q_n$ (c'est l'équation (7.1c)). Cela permet de calculer $u(t)$, $\forall t \in [\hat{t}_n, t_{n+1}]$.
2. pour les phases de circuit fermé, (entre t_{n+1} et \hat{t}_{n+1} par exemple), on résout les équations (7.1d) (cas SSDS) ou (7.1e) (cas SSDI) avec $u = \text{cte} = u(t_{n+1})$ (c'est l'hypothèse T_e négligeable devant la période mécanique). Cela permet de calculer Q_{n+1} pour la phase suivante de circuit ouvert.
3. Pour chacun de ces deux modèles, on suppose que T_e est *infinitement court* par rapport à l'évolution mécanique ($T_e = \hat{t}_n - t_n \ll \pi/\hat{\omega}_r$ (fig. 7.2(d))). De ce fait, on supposera que les grandeurs mécaniques ne changent pas pendant la phase de circuit fermé, si bien que : $\dot{u}(\hat{t}_n) = \dot{u}(t_n)$ et $u(\hat{t}_n) = u(t_n)$.

7.3 Réponse libre

7.3.1 Modèle SSDS sans amortissement

Phase de circuit ouvert Entre \hat{t}_n et t_{n+1} , $u(t)$ est solution de l'équation (7.1b), avec $F_r = 0$ (régime libre) et $\xi_r = 0$ (pas d'amortissement mécanique) :

$$\ddot{u} + \hat{\omega}_r^2 u = k_r \omega_r Q_n, \quad (7.2)$$

qui est une branche de sinusoïde. Comme les commutations se produisent à chaque annulation de vitesse, celle-ci est nulle à toute les fins de phase de circuit ouvert ($\dot{u}(t_n) = 0$). Avec l'hypothèse 3 ci dessus, on montre que la vitesse est également nulle au début des phases de circuit ouvert. Leur durée est alors exactement une demi-période mécanique :

$$t_{n+1} = \hat{t}_n + \pi/\hat{\omega}_r, \quad (7.3)$$

et la solution de (7.2) est la demi période de cosinus (voir fig. 7.2(b)) :

$$u(t)|_{\hat{t}_n < t < t_{n+1}} = \bar{u}_n + \tilde{u}_n \cos(\hat{\omega}_r(t - t_n)), \quad (7.4)$$

avec \bar{u}_n la partie constante

$$\bar{u}_n = \frac{k_r \omega_r}{\hat{\omega}_r^2} Q_n, \quad (7.5)$$

et \tilde{u}_n l'amplitude de la partie oscillante, qui est calculée par continuité avec la commutation précédente. Ce point est expliqué ci-après.

Phase de circuit fermé Entre t_{n+1} et \hat{t}_{n+1} , dans le cas SSDS, la partie électrique est solution de l'équation (7.1d) avec le déplacement u constant et égal à sa valeur au début de la phase de circuit fermé $u = u(t_{n+1})$:

$$\tau_e \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u(t_{n+1}). \quad (7.6)$$

La solution est une exponentielle décroissante (voir Fig. 7.4(a)). Comme on suppose que le temps de circuit fermé T_e est grand devant la constante de temps électrique τ_e , la valeur de Q à la fin de la phase de circuit fermé est sa valeur asymptotique, soit :

$$Q(\hat{t}_{n+1}) = Q_{n+1} = k_r \omega_r u(t_{n+1}). \quad (7.7)$$

En prenant en compte les équations (7.3) et (7.4), on obtient le déplacement à la fin de la phase de circuit ouvert précédente : $u(t_{n+1}) = \bar{u}_n - \tilde{u}_n$. On a alors :

$$Q_{n+1} = k_r \omega_r (\bar{u}_n - \tilde{u}_n). \quad (7.8)$$

Raccordement de $u(t)$ En insérant l'équation (7.8) dans (7.5), on obtient la partie constante \bar{u}_{n+1} pour la $n + 1$ -ième phase de circuit ouvert en fonction des parties constantes \bar{u}_n et \tilde{u}_n de la phase précédente :

$$\bar{u}_{n+1} = \frac{k_r^2 \omega_r^2}{\hat{\omega}_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n). \quad (7.9)$$

Comme le déplacement est considéré constant pendant les phases de circuit fermé, on a :

$$u(\hat{t}_{n+1}) = u(t_{n+1}). \quad (7.10)$$

Avec l'équation (7.5) écrite en fin de la n -ième phase de circuit ouvert (à l'instant t_{n+1}) et au début de la suivante (à l'instant \hat{t}_{n+1}) et la condition de continuité (7.10), on obtient :

$$u(\hat{t}_{n+1}) = \bar{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} = u(t_{n+1}) = \bar{u}_n - \tilde{u}_n. \quad (7.11)$$

Instants de commutation Avec l'hypothèse 3, on choisit de négliger la durée T_e des phase de circuit fermé par rapport aux phase de circuit ouvert, si bien que les instants de commutations arrivent à chaque demi-période mécanique, soit :

$$t_n = \frac{n\pi}{\omega_r}. \quad (7.12)$$

Cela est représenté sur les figures 7.2(a,c).

7.3.2 Modèle SSDI sans amortissement

Dans le cas de la technique SSDI, le modèle des phases en circuit ouvert est identique à celui de la technique SSDS. On obtient alors de la même manière que précédemment les équations (7.5) et (7.11). En revanche, les phases de circuit fermé dépendent du circuit résonant et donc de l'équation (7.1e). La valeur de Q_n change donc par rapport au cas SSDS, puisque la partie électrique se comporte comme un oscillateur harmonique amorti, pendant que le déplacement mécanique $u(t)$ est supposé constant et égal à sa valeur lors de la fermeture du switch. Lors de la n -ième phase de circuit fermé (entre t_n et \hat{t}_n) :

$$\frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q} + \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u(t_n), \quad (7.13)$$

La valeur initiale de la charge lors d'une phase de circuit fermé (entre t_n et \hat{t}_n) est $Q(t_n) = Q_{n-1}$. Elle évolue ensuite sous la forme d'une sinusoïde amortie (voir figure (7.4(b))) :

$$Q(t)|_{t_n < t < \hat{t}_n} = \hat{Q}_n + \tilde{Q}_n e^{-\xi_e \omega_e (t-t_n)} \left(\cos [\tilde{\omega}_e (t-t_n)] + \frac{\xi_e \omega_e}{\tilde{\omega}_e} \sin [\tilde{\omega}_e (t-t_n)] \right), \quad (7.14)$$

avec

$$\hat{Q}_n = k_r \omega_r u(t_n), \quad \tilde{Q}_n = Q_{n-1} - \hat{Q}_n, \quad (7.15)$$

et $\tilde{\omega}_e = \omega_e \sqrt{1 - \xi_e^2}$ la pseudo-pulsation de l'oscillateur. Le circuit reste fermé pendant la moitié de la période de cet oscillateur, pour obtenir une charge finale maximale en valeur absolue. L'instant d'ouverture du switch est alors $\hat{t}_n = t_n + \pi/\tilde{\omega}_e$ et avec l'équation (7.14), Q_n est :

$$\begin{aligned} Q_n &= Q(\hat{t}_n) \\ &= k_r \omega_r u(t_n) - X [Q_{n-1} - k_r \omega_r u(t_n)], \end{aligned} \quad (7.16)$$

avec X le facteur de dépassement, dont la définition est illustrée figure 7.4(b), défini par :

$$X = \exp \frac{-\pi \xi_e}{\sqrt{1 - \xi_e^2}}, \quad (7.17)$$

qui ne dépend que de ξ_e . En prenant en compte les équations (7.5), (7.11) et (7.16) on obtient :

$$\bar{u}_{n+1} = (1 - X) \frac{k_r^2}{1 + k_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) - X \bar{u}_n \quad (7.18)$$

7.3.3 Taux de décroissance

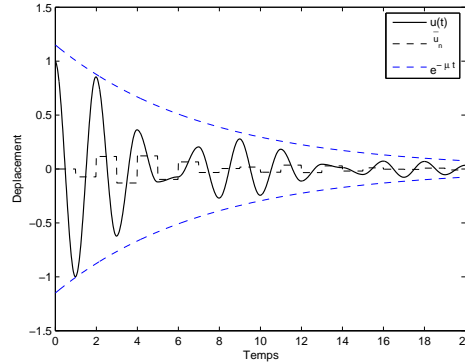


FIG. 7.5: Évolution du déplacement dans un cas SSDI, borné par une exponentielle décroissante

En résumé des paragraphes 7.3.1 et 7.3.2, on a :

$$\begin{aligned} \hat{t}_n < t < t_{n+1} &\Rightarrow \text{Circuit ouvert} \begin{cases} \dot{Q} = 0 \Rightarrow Q(t) = Q_n \\ u(t) = \bar{u}_n + \tilde{u}_n \cos(\hat{\omega}_r (t - t_n)) \\ \bar{u}_n = \frac{k_r \omega_r}{\hat{\omega}_r^2} Q_n \end{cases} \\ t_{n+1} < t < \hat{t}_{n+1} &\Rightarrow \text{Circuit fermé SSDS} \begin{cases} \dot{u} = 0 \Rightarrow \bar{u}_n - \tilde{u}_n = \bar{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} \\ Q \text{ exponentielle décroissante} \\ Q_{n+1} = k_r \omega_r (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) \end{cases} \\ t_{n+1} < t < \hat{t}_{n+1} &\Rightarrow \text{Circuit fermé SSDI} \begin{cases} \dot{u} = 0 \Rightarrow \bar{u}_n - \tilde{u}_n = \bar{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} \\ Q \text{ oscillation amortie} \\ Q_{n+1} = k_r \omega_r (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) (1 + X) - X Q_n \end{cases} \end{aligned}$$

Les valeurs de $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peuvent être obtenues en écrivant une relation de récurrence à partir des équations (7.11)-(7.9) pour le cas SSDS et les équations (7.11)-(7.18) dans le cas SSDI. Ainsi, pour le cas SSDS on a :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{n+1} &= \frac{k_r^2 \omega_r^2}{\hat{\omega}_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) = \frac{k_r^2}{1 + k_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n), \\ \tilde{u}_{n+1} &= \bar{u}_n - \tilde{u}_n - \bar{u}_{n+1} = \frac{1}{1 + k_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n)\end{aligned}$$

tandis que pour le cas SSDI on a :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{n+1} &= \frac{k_r^2 \omega_r^2}{\hat{\omega}_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) (1 + X) - X \bar{u}_n \frac{\hat{\omega}_r^2}{k_r \omega_r} = \frac{1 + X}{1 + k_r^2} \bar{u}_n - \frac{1 - k_r^2 X}{1 + k_r^2} \tilde{u}_n, \\ \tilde{u}_{n+1} &= \bar{u}_n - \tilde{u}_n - \bar{u}_{n+1} = -\frac{(1 + X) k_r^2}{1 + k_r^2} \bar{u}_n + \frac{k_r^2 - X}{1 + k_r^2} \tilde{u}_n\end{aligned}$$

On peut alors écrire les relations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A} \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{A}^n \mathbf{u}_0, \quad (7.19)$$

avec $\mathbf{u}_n = (\tilde{u}_n \ \bar{u}_n)^\top$ et la matrice d'amplification \mathbf{A} donnée par :

$$\mathbf{A}^{\text{SSDS}} = \frac{1}{1 + k_r^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -k_r^2 & k_r^2 \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{A}^{\text{SSDI}} = \frac{1}{1 + k_r^2} \begin{pmatrix} X k_r^2 - 1 & 1 + X \\ -k_r^2 (1 + X) & k_r^2 - X \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Si λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de \mathbf{A} , alors :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{P}, \quad (7.22)$$

avec \mathbf{P} la matrice de passage. Par suite, on a :

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \mathbf{P}. \quad (7.23)$$

ce qui permet de réécrire l'équation (7.19) sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{u}_n = \bar{a}_1 \lambda_1^n + \bar{a}_2 \lambda_2^n \\ \tilde{u}_n = \tilde{a}_1 \lambda_1^n + \tilde{a}_2 \lambda_2^n \end{cases}, \quad (7.24)$$

avec $\bar{a}_1, \tilde{a}_1, \bar{a}_2, \tilde{a}_2$ dépendant des conditions initiales et de \mathbf{P} . On montre alors que $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'écrivent comme la somme de deux suites géométriques.

En ordonnant les valeurs pour avoir $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, on peut montrer d'après les équations (7.4) et (7.24) que :

$$\begin{aligned}|u(t_n)| &\leq |\bar{u}_n| + |\tilde{u}_n| \\ &\leq \left(|\bar{a}_1| + |\tilde{a}_1| + (|\bar{a}_2| + |\tilde{a}_2|) \frac{|\lambda_2|^n}{|\lambda_1|^n} \right) |\lambda_1|^n \\ &\leq a |\lambda_1|^n.\end{aligned}$$

avec $a = |\bar{a}_1| + |\tilde{a}_1| + |\bar{a}_2| + |\tilde{a}_2|$. Les inégalités ci-dessus montrent que $u(t)$ est bornée par une enveloppe exponentielle décroissante (voir par exemple la figure 7.5) de taux de décroissance μ , défini par :

$$ae^{-\mu t_n} = a|\lambda_1|^n, \quad (7.25)$$

soit encore

$$\mu = -\frac{\hat{\omega}_r}{\pi} \ln(|\lambda_1|). \quad (7.26)$$

On obtient alors que μ est positif quand $|\lambda_1| < 1$ et décroît quand $|\lambda_1|$ décroît. Par conséquent, *il faut minimiser le module de la valeur propre de \mathbf{A} de plus grand module afin de maximiser le taux de décroissance de la réponse de la structure et ainsi augmenter l'amortissement apporté.* Comme l'évolution de $u(t)$ est quasiment une oscillation de fréquence $\hat{\omega}_r$, il est pratique de définir le coefficient d'amortissement ξ de la réponse libre de la structure avec SSD par :

$$\mu = \xi^{\text{SSD}} \hat{\omega}_r \implies \xi^{\text{SSD}} = -\frac{\ln(|\lambda_1|)}{\pi}. \quad (7.27)$$

7.3.4 Optimisation de la technique SSDS

Dans le cas SSDS, avec l'équation (7.20) on obtient

$$|\lambda_1| = \frac{1 - k_r^2}{1 + k_r^2}, \quad \lambda_2 = 0.$$

Le coefficient d'amortissement équivalent est alors (Eq. (7.27)) :

$$\xi^{\text{SSDS}} = -\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1 - k_r^2}{1 + k_r^2} \right). \quad (7.28)$$

Le coefficient d'amortissement équivalent ne dépend pas de τ_e et est donc indépendant de la résistance. Il faut juste s'assurer que celle-ci est assez petite afin que les hypothèses soient vérifiées : une évolution de la partie électrique bien plus rapide que la partie mécanique ($T_e \ll \pi/\hat{\omega}_r$), et une durée de fermeture suffisante pour atteindre la valeur asymptotique de la charge. Le coefficient d'amortissement équivalent ξ^{SSD} est tracé figure (7.6) ; on constate que pour le maximiser il faut augmenter k_r , en choisissant et en plaçant des éléments piézoélectriques adaptés. C'est un résultat similaire au cas des shunts R et RL (§5.3.4 et 5.4.4).

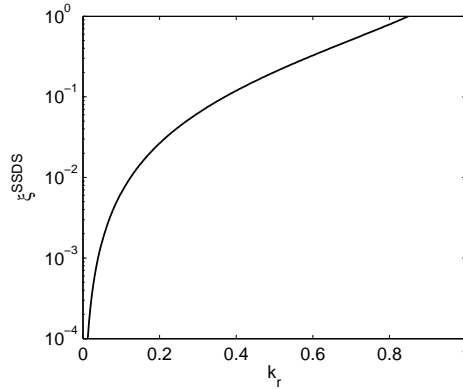


FIG. 7.6: Coefficient d'amortissement équivalent apporté par la technique SSDS

7.3.5 Optimisation de la technique SSDI

Dans le cas SSDI, λ_1 et λ_2 dépendent de ξ_e , coefficient d'amortissement du circuit électrique, via X facteur de dépassement. La figure (7.7, à g.) montre les modules des valeurs propres $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$ de \mathbf{A}^{SSDI} en fonction de ξ_e pour un coefficient de couplage donné. Pour de faibles valeurs de ξ_e ces valeurs propres sont complexes conjuguées et pour de grandes valeurs de ξ_e des réels distincts. On souhaite minimiser le module de la valeur propre de plus grand module; cela est obtenu pour la valeur d'amortissement ξ_e optimale, notée ξ_e^{opt} , qui permet d'avoir des valeurs propres égales :

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{1 - |k_r|}{1 + |k_r|}, \quad (7.29)$$

Ce qui donne la valeur optimale de X et ξ_e :

$$X^{\text{opt}} = \frac{(1 - |k_r|)^2}{(1 + |k_r|)^2}, \quad \xi_e^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\ln(X^{\text{opt}})^2}{\ln(X^{\text{opt}})^2 + \pi^2}}, \quad (7.30)$$

L'amortissement équivalent de la structure avec shunt SSDI est alors

$$\xi_{\text{tot}}^{\text{SSDI}} = -\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1 - |k_r|}{1 + |k_r|} \right). \quad (7.31)$$

La figure (7.7, à dr.) montre l'évolution de ξ_e^{opt} en fonction de k_r , et la figure (7.8) montre l'amortissement ajouté par le système lorsque cette valeur est choisie.

La figure (7.9) montre l'évolution temporelle de $u(t)$ pour trois valeurs de ξ_e et confirme le résultat : pour $\xi_e < \xi_e^{\text{opt}}$ un phénomène de battement lié aux valeurs propres complexes conjuguées apparaît; pour $\xi_e > \xi_e^{\text{opt}}$ la décroissance (liée à la plus grande valeur propre qui augmente de module) est plus lente; la valeur optimale de ξ_e permet d'avoir une décroissance rapide.

Afin d'optimiser le système il convient donc tout d'abord de maximiser k_r en choisissant les éléments piézoélectriques et leur position, car l'amortissement équivalent croît avec k_r ; ensuite il faut choisir la valeur appropriée de ξ_e . On peut remarquer qu'avec ce modèle, ω_e , lié à l'inductance L , n'a aucune influence sur le résultat. La seule contrainte est de choisir L faible pour avoir ω_e grand et que l'évolution de la partie électrique soit bien plus rapide que l'évolution mécanique ($T_e \ll \pi/\omega_r$).

Le résultat d'optimisation de la résistance est nouveau. Dans sa thèse [56], Makihara compare des amplitudes RMS de réponse libre d'une structure complète sur un intervalle de temps précis et déduit une valeur optimale de résistance; néanmoins cette valeur dépend de tous les paramètres de son modèle et peut être de l'intervalle de temps choisi. Le fait d'avoir ici adimensionné et simplifié le problème permet d'obtenir un résultat bien plus général. De plus, la dépendance au coefficient de couplage (qui peut être du même ordre de grandeur sur plusieurs modes) laisse présager d'une optimisation facile, contrairement à une dépendance à la pulsation mécanique (qui aurait rendu l'optimisation forcément associée à un mode). À la connaissance de l'auteur il n'existe pas d'autre étude systématique de l'effet de l'amortissement, bien que la plupart des équipes étudiant la question aient testé diverses valeurs.

7.3.6 Effet de l'amortissement mécanique

Les résultats précédents ont été obtenus en négligeant l'amortissement mécanique ξ_r . En le prenant en compte le déplacement vérifie :

$$\ddot{u} + 2\xi_r\omega_r\dot{u} + \omega_r^2u - k_r\omega_rQ_n = 0, \quad (7.32)$$

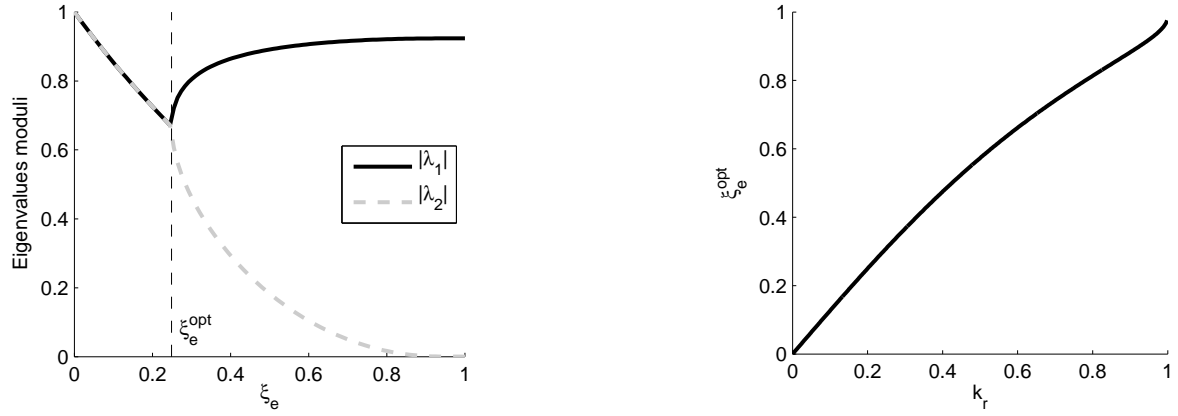


FIG. 7.7: (à g.) Module des valeurs propres de \mathbf{A}^{SSDI} pour $k_r = 0.2$. (à dr.) Valeur optimale de l'amortissement électrique ξ_e^{opt} en fonction de k_r

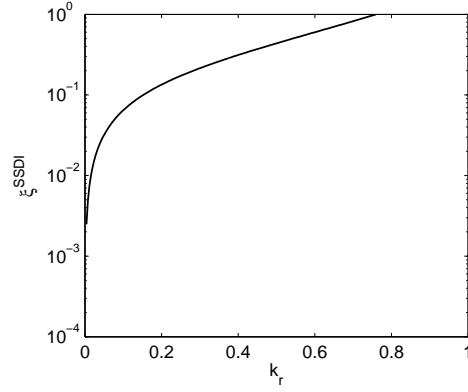


FIG. 7.8: Coefficient d'amortissement équivalent apporté par la technique SSDI lorsque l'amortissement électrique optimal est choisi

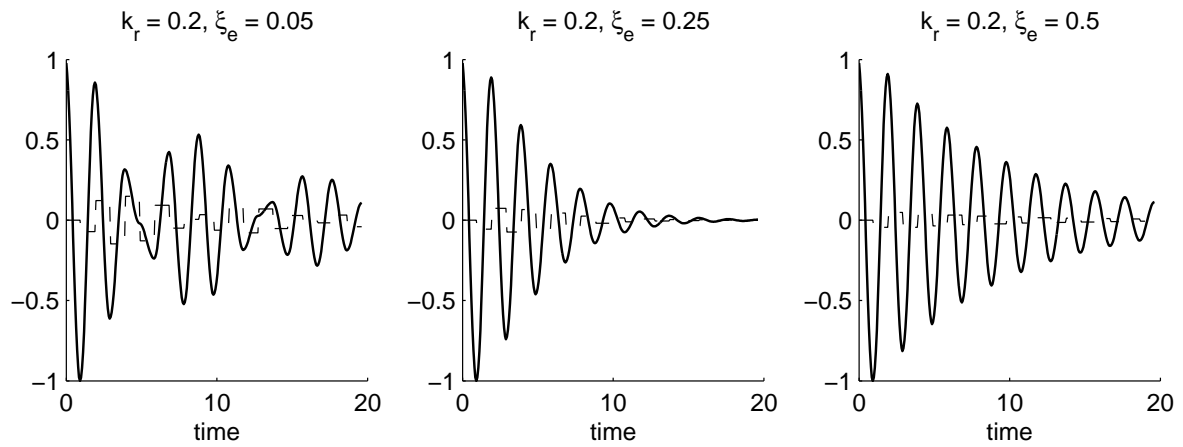


FIG. 7.9: Évolution temporelle de $u(t)$ (trait plein) et de \bar{u}_n (pointillés) avec SSDI, pour trois valeurs de ξ_e . (à g.) : ξ_e bas ; (centre) : ξ_e^{opt} ; (à dr.) ξ_e élevé.

dont la solution est

$$u(t)|_{t_n < t < t_{n+1}} = \bar{u}_n + \tilde{u}_n e^{-\xi_r \tilde{\omega}_r t} (\cos(\tilde{\omega}_r(t - t_n)) + \frac{\xi_r \hat{\omega}_r}{\tilde{\omega}_r} \sin(\tilde{\omega}_r(t - t_n))), \quad (7.33)$$

avec $\tilde{\omega}_r = \hat{\omega}_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$. La valeur de u lorsqu'elle atteint son premier extremum (annulation de vitesse) est donc caractéristique du premier dépassement :

$$u(t_{n+1}) = \bar{u}_n - X_r \tilde{u}_n, \quad (7.34)$$

où $X_r = \exp[-\pi \xi_r / ((1 - \xi_r^2) \sqrt{1 + k_r^2})]$ est le facteur de dépassement de l'oscillateur mécanique amorti. Il faut remarquer que la période des commutations est légèrement modifiée et dépend de la pseudo-pulsation $\tilde{\omega}_r$. La relation (7.19) peut être réécrite pour prendre en compte l'amortissement :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}_{n-1} = (\mathbf{A} \mathbf{B})^n \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} X_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

Où la matrice \mathbf{B} représente les pertes mécaniques. Avec la même démarche qu'aux parties 7.3.4 et 7.3.5, nous pouvons obtenir les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice $\mathbf{A} \mathbf{B}$ et obtenir les résultats suivants :

- Dans le cas SSDS on obtient $|\lambda_1| = (X_r - k_r^2)/(1 + k_r^2)$ et $\lambda_2 = 0$. Le taux d'amortissement équivalent de la réponse s'écrit alors :

$$\xi_{\text{tot}}^{\text{SSDS}} = -\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{X_r - k_r^2}{1 + k_r^2} \right). \quad (7.36)$$

- Dans le cas SSDI, la valeur optimale de ξ_e dépend de k_r et ξ_r :

$$X^{\text{opt}} = \frac{\sqrt{X_r k_r^4 + k_r^2 + X_r^2 k_r^2 + X_r + 4k_r^2 X_r - 2(X_r(1 + X_r)^2(1 + k_r^2)^2 k_r^2)}}{X_r^2 k_r^4 - 2k_r^2 X_r + 1},$$

$$\xi_e^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\log(X^{\text{opt}})^2}{\log(X^{\text{opt}})^2 + \pi^2}}. \quad (7.37)$$

Pour simplifier on peut remarquer en observant les valeurs pour de faibles amortissements mécaniques - ce qui est souvent le cas - que la valeur de ξ_e^{opt} est toujours très proche de la valeur optimale sans amortissement donnée par l'équation (7.30) ajoutée à l'amortissement mécanique (éq. 7.38) , ce qui est représenté sur la figure (7.10) :

$$\xi_e^{\text{opt}}|_{\xi_r \neq 0} \simeq \xi_e^{\text{opt}}|_{\xi_r = 0} + \xi_r. \quad (7.38)$$

- Dans les deux cas (SSDS et SSDI) on peut définir l'amortissement ajouté $\xi_{\text{add}} = \xi_{\text{tot}} - \xi_r$. La figure (7.11) montre que ξ_{add} est pratiquement indépendant de ξ_r . Cela signifie qu'en première approximation *l'amortissement total est la somme de l'amortissement mécanique ξ_r et de l'amortissement ajouté par le switch, calculé d'après les expressions (7.28) et (7.31).*

$$\xi_{\text{tot}}^{\text{SSDS}} \simeq \xi^{\text{SSDS}}|_{\xi_r = 0} + \xi_r, \quad \xi_{\text{tot}}^{\text{SSDI}} \simeq \xi^{\text{SSDI}}|_{\xi_r = 0} + \xi_r. \quad (7.39)$$

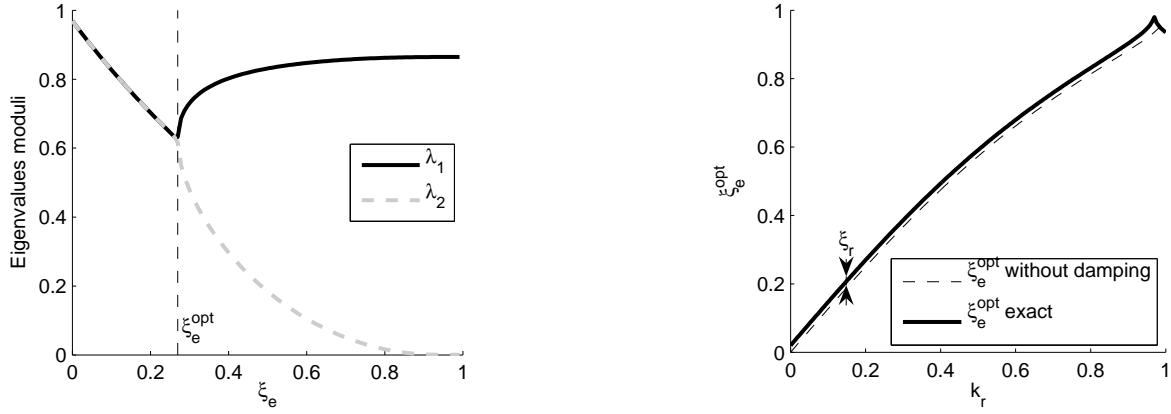


FIG. 7.10: (à g.) Module des valeurs propres de $\mathbf{A}^{SSDI}\mathbf{B}$ pour $k_r = 0.2$ et $\xi_r = 2\%$; (à dr.) amortissement électrique optimal ξ_e^{opt} en fonction de k_r avec amortissement mécanique

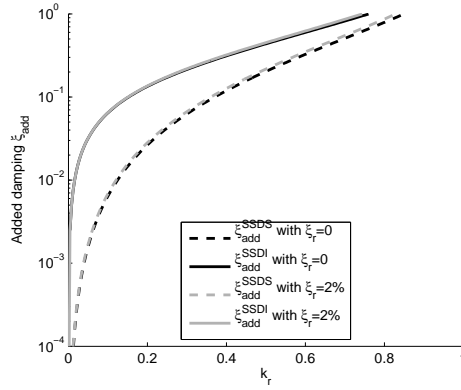


FIG. 7.11: Amortissement ajouté k_r avec et sans amortissement mécanique.

7.4 Réponse forcée avec commutation synchronisée

7.4.1 Réponse temporelle du système

On étudie une structure avec SSDS ou SSDI en oscillations forcées autour du r -ième mode ; on reprend donc le système (7.1) en prenant maintenant en compte le forçage modal. Celui-ci est harmonique, et s'écrit $\tilde{F}_r(t) = F_r \cos \Omega t$. On utilise la même démarche que pour le modèle en réponse libre (§7.3.1). Les phases en circuit fermé sont modélisées de manière identique. Pendant la phase de circuit ouvert comprise entre \hat{t}_n et t_{n+1} , le déplacement vérifie :

$$\ddot{u} + 2\xi_r \hat{\omega}_r \dot{u} + \hat{\omega}_r^2 u = k_r \omega_r Q_n + F_r \cos(\Omega t), \quad (7.40)$$

avec Q_n la charge finale de la phase de circuit fermé précédente. On a alors :

$$u(t)_{\hat{t}_n < t < t_{n+1}} = \bar{u}_n + u_T(t) + u_F(t), \quad (7.41)$$

où :

- \bar{u}_n est la réponse statique du système avec une charge appliquée Q_n , donc un décalage qui s'écrit comme à l'équation (7.2) :

$$\bar{u}_n = \frac{k_r \omega_r}{\hat{\omega}_r^2} Q_n.$$

- $u_F(t)$ est la réponse (harmonique) forcée du système, qui s'écrit indépendamment de l'intervalle de temps :

$$u_F(t) = \frac{\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2}{d(\Omega)} \cos \Omega t - \frac{2\xi_r \omega_r \Omega}{d(\Omega)} \sin \Omega t, \quad (7.42)$$

avec $d(\Omega) = (\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_r^2 \omega_r^2 \Omega^2$; $u_F(t) + \bar{u}_n$ constitue une solution particulière de l'équation (7.40) ;

- $u_T(t)$ est la solution générale de l'équation homogène associée à (7.40) sur l'intervalle de temps de \hat{t}_n à t_{n+1} . $u_T(t)$ s'écrit :

$$u_T(t) = e^{-\xi_r \hat{\omega}_r \hat{t}} [\tilde{u}_n \cos(\tilde{\omega}_r \hat{t}) + \tilde{u}'_n \sin(\tilde{\omega}_r \hat{t})], \quad (7.43)$$

avec \tilde{u}_n et \tilde{u}'_n deux coefficients dépendant des conditions initiales sur cet intervalle de temps, donc des valeurs de u et \dot{u} à \hat{t}_n .

Les valeurs de $(t_n, Q_n, \bar{u}_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettent de décrire l'évolution du système. On utilise les mêmes hypothèses que précédemment, c'est à dire une phase circuit fermé très courte devant l'évolution mécanique ; alors la transition entre deux phases d'évolution en circuit ouvert est décrite de la manière suivante, en reprenant les équations (7.7), (7.16) et la continuité du déplacement :

$$u(\hat{t}_{n+1}) = u(t_{n+1}) \quad (7.44)$$

$$\dot{u}(\hat{t}_{n+1}) = \dot{u}(t_{n+1}) = 0 \quad (7.45)$$

$$\text{switch SSDS } Q_{n+1} = k_r \omega_r u(t_{n+1}) \quad (7.46)$$

$$\text{switch SSDI } Q_{n+1} = k_r \omega_r u(t_{n+1}) - X [Q_n - k_r \omega_r u(t_{n+1})]. \quad (7.47)$$

La stratégie de commutation est conservée, c'est à dire que le switch se ferme à l'annulation de la vitesse (maximum de position). Alors que dans le cas du régime libre (§7.3) les instants de commutation sont connus analytiquement, ici, on ne connaît pas d'expression analytique de l'annulation de la vitesse (le déplacement $u(t)$ étant donné par (7.41)). On cherche donc numériquement l'annulation de $\dot{u}(t)$ pour obtenir l'instant t_n de fin de chaque phase de circuit ouvert.

Comme la durée des phases de circuit ouvert n'est a priori pas constante, même si le forçage est sinusoïdal, la réponse du système n'est pas périodique. Il est donc nécessaire de simuler son évolution temporelle complète pour en déduire son comportement. On n'a donc pas accès à des valeurs analytiques de ses caractéristiques. D'autres travaux de la littérature, faisant l'hypothèse restrictive d'une réponse périodique, obtiennent des valeurs analytiques de la réduction des vibrations [36]. Ce cas sera évoqué au paragraphe 7.4.5.

7.4.2 Réponse en SSDS

Avec la technique SSDS, on ne constate pas d'autre comportement qu'une réponse qui se stabilise sur un régime périodique de pulsation Ω , la fréquence d'excitation (Fig. 7.12). Afin d'évaluer la réponse du système en fonction de la fréquence d'excitation, la valeur efficace (*Root Mean Square*) u^{RMS} est utilisée¹ ; elle est calculée pour différentes fréquences d'excitation Ω autour de la fréquence de résonance $\hat{\omega}_r$ avec la formule suivante :

$$u^{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}, \quad (7.48)$$

¹En effet le signal n'est pas strictement harmonique et le critère RMS permet de se ramener à une valeur unique

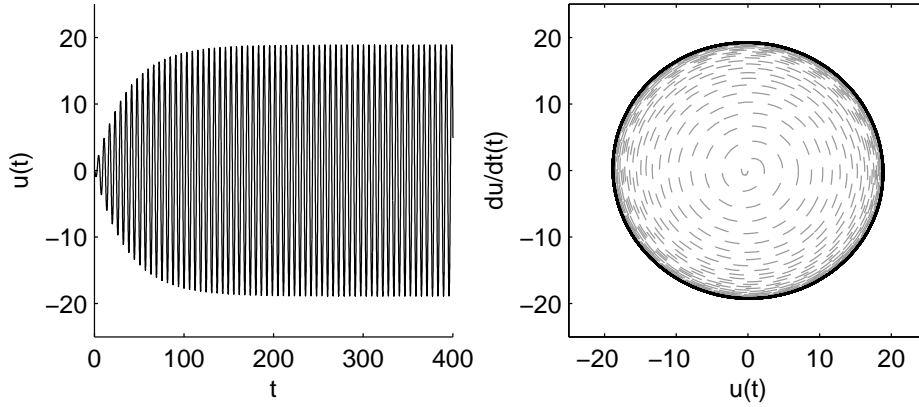


FIG. 7.12: Évolution temporelle du déplacement $u(t)$ avec SSDS et espace des phases, pour $k_r = 0.2$ et $\xi_r = 0.1\%$; système forcé près de la résonance ($\Omega \simeq \omega_r$)

calculée pour T suffisamment grand afin que le régime établi soit atteint. On obtient le résultat de la figure 7.13, similaire à une fonction réponse en fréquence mais tenant compte des différentes composantes spectrales de $u(t)$ sur un seul pic.

L'amplitude maximum est observée à la résonance; pour évaluer l'efficacité du système on définit l'atténuation A_{dB}^{SSDS} apportée par le système comme la différence (en dB) entre l'amplitude du pic de résonance en circuit ouvert et avec SSDS. On peut alors calculer cette atténuation pour différentes valeurs de k_r et ξ_r , présentée Fig. 7.13 et l'on constate que une fois de plus, k_r doit être maximisé. Aussi, comme dans le cas de la réponse libre (paragraphe 7.3.4), il n'y a pas de paramètre électrique à régler autre que de choisir une résistance faible permettant une évolution électrique rapide par rapport à la partie mécanique.

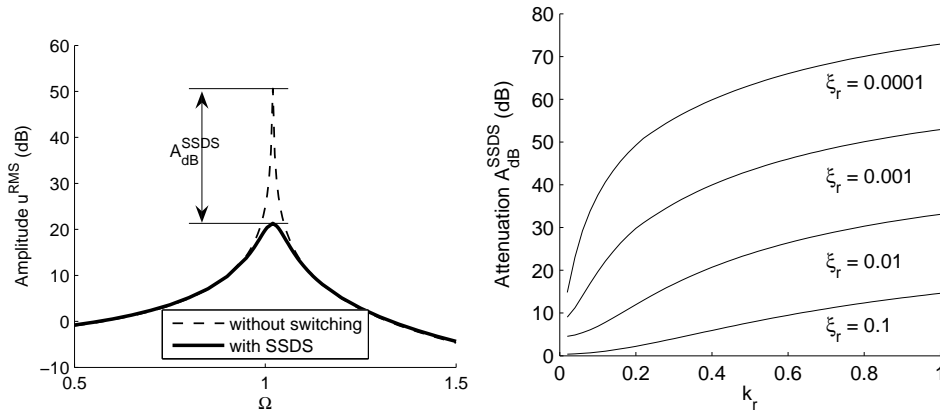


FIG. 7.13: (à g.) amplitude RMS u^{RMS} de la réponse $u(t)$ en fonction de Ω fréquence d'excitation, pour $k_r = 0.2$ et $\xi_r = 0.1\%$. (à dr.) A_{dB}^{SSDS} en fonction de k_r , pour différents coefficients d'amortissement mécanique ξ_r

7.4.3 Réponse en SSDI

En observant la réponse d'un système SSDI on constate que pour des valeurs élevées de ξ_e la réponse converge vers un régime périodique à la fréquence d'excitation, comme pour la technique SSDS. On constate aussi que des valeurs décroissantes de ξ_e permettent de mieux réduire l'amplitude des vibrations, comme montré figure 7.14 (à droite et au centre).

Finalement, il existe une valeur critique de ξ_e en dessous de laquelle l'évolution temporelle ne converge pas vers un régime périodique, comme on peut le voir par exemple sur la figure 7.14 (à gauche) où la trajectoire dans l'espace des phases est complexe et s'apparente à celle d'un système chaotique. Dans certains cas, l'évolution converge vers un régime dont la période est un multiple de celle de l'excitation. Dans les deux derniers cas, l'amplitude est souvent importante.

D'une manière similaire à ce qui a été fait pour le cas SSDS (section 7.4.2), on peut tracer la valeur efficace² u^{RMS} en fonction de la fréquence d'excitation et définir l'atténuation $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$ (Fig. 7.15) apportée par le système SSDI. On constate alors que décroître la valeur de ξ_e augmente l'atténuation tant que le système est en régime synchronisé sur la fréquence d'excitation. Pour la valeur critique de ξ_e et toutes les valeurs inférieures, il n'y a plus de synchronisation et l'atténuation est considérablement plus faible. On peut donc définir une valeur optimal ξ_e^{opt} de ξ_e maximisant l'atténuation apportée par le système, qui est aussi la valeur critique.

On constate en réglant la précision numérique de Matlab (pour la détection de l'annulation de vitesse) que le résultat varie faiblement, c'est à dire que la valeur de ξ_e^{opt} fluctue un peu. Il y a donc une dépendance à la précision de calcul ; cependant il n'est pas possible de changer complètement le comportement ou la valeur de ξ_e^{opt} . L'instabilité observée correspond à une caractéristique du système.

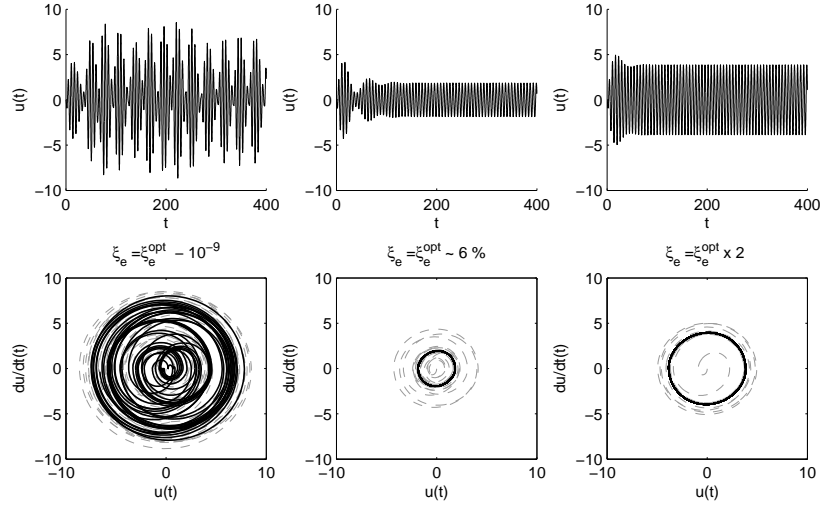


FIG. 7.14: Évolution temporelle du déplacement $u(t)$ avec technique SSDI et espace des phases, pour $k_r = 0.2$ et $\xi_r = 0.1\%$; système forcé près de la résonance ($\Omega \simeq \hat{\omega}_r$) avec amortissement électrique ξ_e trop faible (à g.), optimal (au centre) et élevé (à dr.).

La figure 7.16 (à g.) montre l'évolution de ξ_e^{opt} en fonction de k_r , pour deux valeurs de ξ_r . On constate que ξ_e^{opt} dépend principalement de k_r , et la valeur trouvée pour le régime forcé est à peu près la moitié de la valeur optimale pour le régime libre (chapitre 7.3.5) ; c'est un résultat un peu similaire à ce qu'on a vu pour les shunts RL, où la valeur optimale pour le régime forcé est plus faible que pour le régime libre. Finalement, l'atténuation $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$ obtenue pour chaque coefficient de couplage avec l'amortissement électrique optimal ($\xi_e = \xi_e^{\text{opt}}$) est tracée, pour diverses valeurs de ξ_r .

²Obtenue par intégration sur un temps assez long, y compris dans le cas de l'absence de régime établi cette valeur est significative

Optimisation On constate qu'une fois de plus, k_r est le paramètre à maximiser. La valeur de l'inductance doit être choisie pour être suffisamment petite³. La valeur de la résistance doit être choisie pour assurer un amortissement électrique optimal $\xi_e = \xi_e^{\text{opt}}$ qui dépend de k_r .

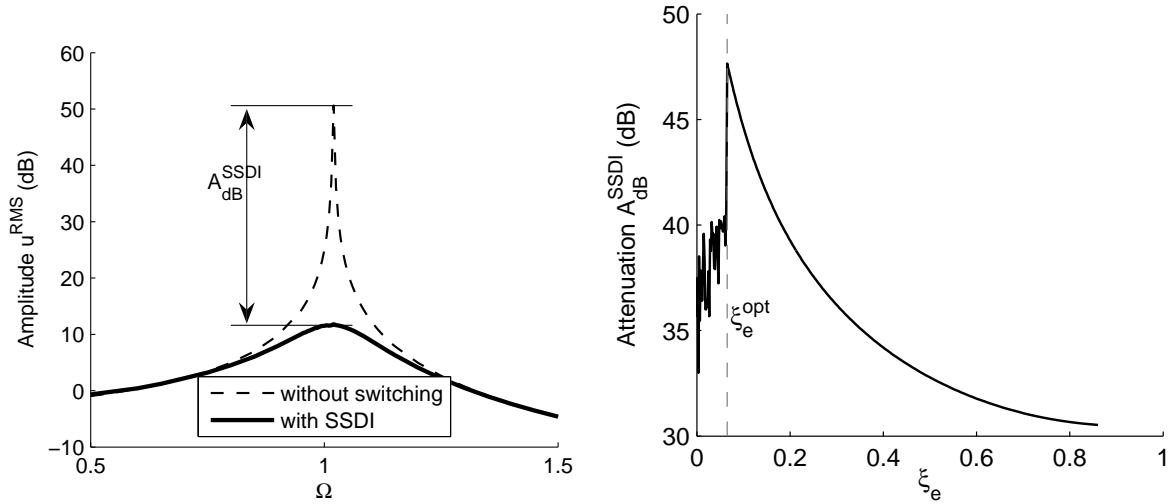


FIG. 7.15: (à g.) Amplitude RMS u^{RMS} du déplacement $u(t)$ en fonction de la fréquence d'excitation Ω . (à dr.) Atténuation $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$ en fonction de ξ_e ; remarquer la valeur critique de ξ_e pour laquelle l'atténuation varie brusquement. Paramètres : $k_r = 0.2$ et $\xi_r = 0.1\%$

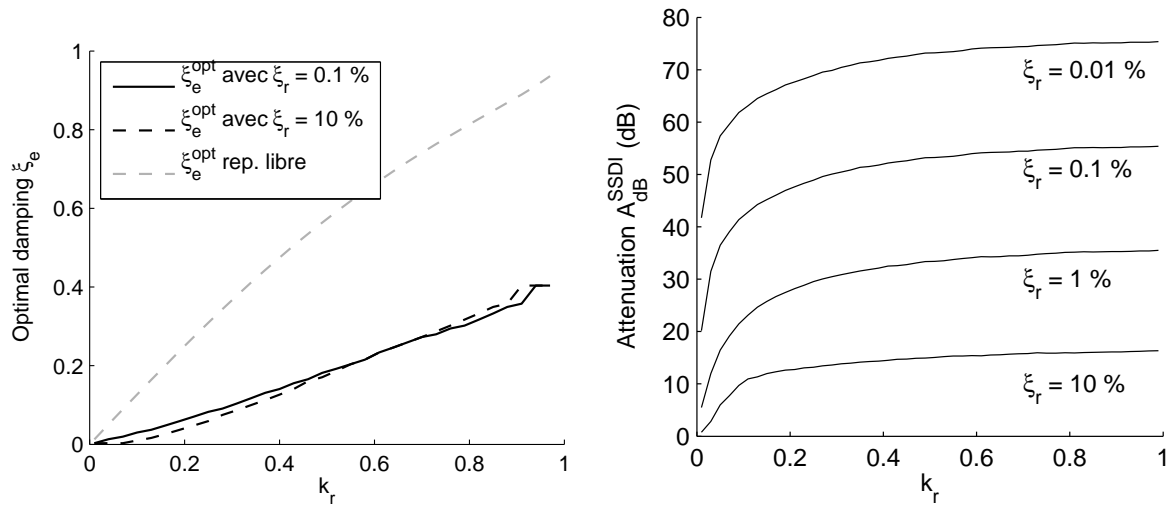


FIG. 7.16: (à g.) ξ_e^{opt} en fonction de k_r pour différentes valeurs d'amortissement, et rappel du résultat analytique pour la réponse libre; (à dr.) $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$ en fonction de k_r , pour différentes valeurs de l'amortissement mécanique ξ_r .

³Le modèle 1 DDL utilisé ici ne prend pas en compte la constante de temps électrique et ne permet donc pas de quantifier ce choix - ce qui est fait plus tard (§8.4.2, 8.5.1)

7.4.4 Comparaison avec les shunts linéaires

À ce stade, il est intéressant de comparer les résultats obtenus avec ce qui a été calculé pour les shunts linéaires. Sur la figure (7.17) on trace les atténuations calculées pour l'amortissement mécanique du premier mode de la poutre symétrique utilisée expérimentalement (§6.4.2); cela permet de comparer les shunts R, RL, SSDS et SSDI, dans un cas réaliste et avec des points expérimentaux pour les shunts linéaires.

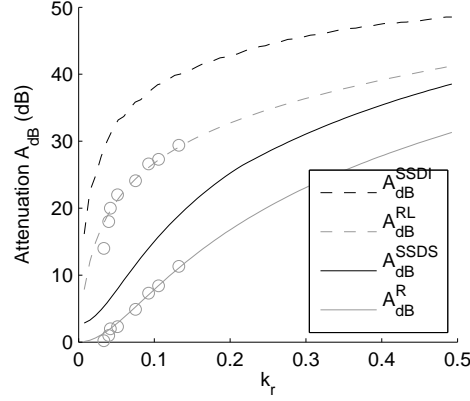


FIG. 7.17: Atténuation calculée A_{dB} en fonction du coefficient de couplage k_r pour les shunts R, RL, SSDS et SSDI; $\xi_r = 0.17\%$. '—', '— · —' : résultats théoriques; 'o' : résultats expérimentaux pour les shunts R et RL

On peut remarquer que les valeurs théoriques d'atténuation sont très élevées, avec en plus l'avantage d'avoir un système ne nécessitant théoriquement pas de réglage fin.

7.4.5 Comparaison avec un modèle existant

Une comparaison avec l'atténuation prévue par un des modèles de l'équipe du LGEF [36, 86] peut être faite, à condition de se fixer une valeur de ξ_e . On utilise la formule :

$$A_{dB}^{LGEF} = 20 \log_{10} \left[1 + k_r^2 \frac{1}{2\xi_r} \frac{4}{\pi} \frac{1+X}{1-X} \right]$$

avec X premier dépassement calculé d'après l'équation (7.17), dépendant de ξ_e . En traçant l'atténuation obtenue pour un coefficient de couplage (fig. 7.18 à g.), on constate qu'on peut arbitrairement mettre une valeur basse de ξ_e et faire tendre l'atténuation à l'infini. En effet, dans ce modèle, on suppose que le système est toujours synchronisé, et la réponse sinusoïdale. Si on tient compte de l'amortissement critique trouvé avec le modèle développé au chapitre précédent, alors on peut tracer l'atténuation en fonction de k_r (fig. 7.18 à dr.); on constate un bon accord des valeurs. L'écart de 2 dB observé peut s'expliquer par la comparaison entre l'amplitude d'un signal sinusoïdal (modèle LGEF) et l'amplitude efficace d'un signal périodique mais pas forcément sinusoïdal.

7.5 Modèle 1 ddl avec stratégie évoluée

En observant la réponse libre du système avec la technique SSDI, comme par exemple illustré figure (7.9), on constate que dans certains cas il y a un phénomène de battement. Ce qui se passe dans ce cas est qu'une charge électrique importante a été stockée dans l'élément

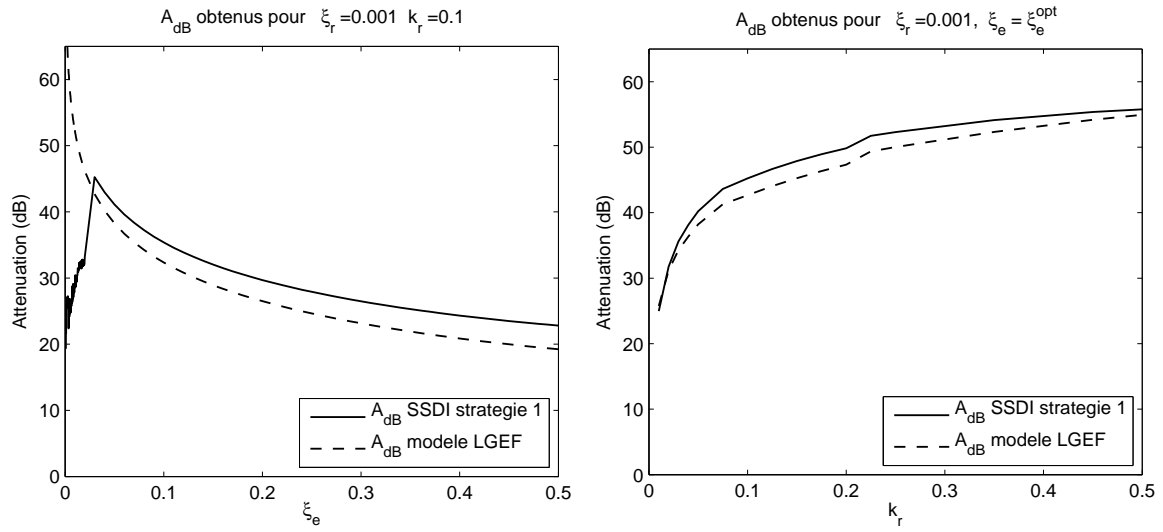


FIG. 7.18: Atténuation calculée comparée à l’atténuation prévue par le modèle du LGEF pour un coefficient de couplage donné (à g.) ; même comparaison en tenant compte de l’amortissement critique, en fonction du coefficient de couplage (à dr.).

piézoélectrique, ce qui réduit rapidement les vibrations ; ensuite cette charge électrique excessive remet la structure en mouvement.

Dans le cas de la réponse forcée et avec un amortissement électrique bas, comme par exemple illustré figure (7.14), la commutation peut devenir erratique. On se propose de modifier les instants auxquels le switch se ferme et d’évaluer les gains qui peuvent être obtenus. On rappelle l’équation (7.40) ; dans cette équation l’effet de la charge est similaire à un effort constant entre les commutations :

$$\ddot{u} + 2\xi_r \hat{\omega}_r \dot{u} + \hat{\omega}_r^2 u \Big|_{\hat{t}_n < t < \hat{t}_{n+1}} = k_r \omega_r Q_n + F_r \cos(\Omega t).$$

L’objectif est alors, en choisissant les instants de commutation, d’obtenir les valeurs de $k_r \omega_r Q_n$ permettant de réduire le plus possible l’amplitude de u . Il faudrait conserver $k_r \omega_r Q_n$ de signe opposé à \dot{u} et de grande amplitude.

Comme le modèle analytique présenté repose sur des instants de commutation réguliers, il ne peut pas représenter de choix différent de commutation. On procèdera uniquement à des simulations avec le modèle semi-analytique du paragraphe 7.4. Trois stratégies sont ainsi définies afin de choisir les instants de commutation.

Stratégie 1 : Annulation de vitesse

Il s’agit du critère déjà utilisé : le switch se ferme aux extrema de déplacement (annulations de vitesse, repérées par l’annulation de \dot{V} d’après l’équation (7.1)). En procédant ainsi, on inverse la charge au moment où la vitesse change de signe, gardant ainsi en théorie le signe de $k_r \omega_r Q_n$ opposé à \dot{u} ; néanmoins il arrive que la charge ne change pas de signe, et $k_r \omega_r Q_n$ prend alors le même signe que \dot{u} . À ce moment, l’effet du switch est d’augmenter la vitesse de la structure, et l’objectif de réduction de vibrations n’est pas rempli.

Stratégie 2 : Force toujours opposée à la vitesse

Afin d'améliorer l'efficacité du système, on souhaite conserver $k_r\omega_r Q_n$ de signe opposé à \dot{u} ; pour ce faire on ferme le circuit uniquement dans les conditions suivantes :

- Lorsque la vitesse atteint une valeur nulle (ce qui est repéré par l'annulation de \dot{V}) ; on s'attend à ce que la vitesse change de signe ; il est donc possible de prévoir le signe de la vitesse après le switch.
- Lorsque la vitesse prédite immédiatement après le switch et la charge prédite immédiatement après le switch permettent d'assurer que la force sera bien opposée à la vitesse. Afin de vérifier cela on calcule la charge immédiatement après le switch d'après l'équation (7.16). Le signe de la vitesse est supposé opposé à ce qu'il était juste avant le switch. Si $k_r\omega_r Q_{n+1}\dot{u}(\hat{t}_{n+1})$ est positif, le switch reste ouvert jusqu'à la prochaine annulation de vitesse ; sinon il se ferme.

En théorie, on devrait ainsi garder le signe de l'effort exercé par la charge toujours opposé à la vitesse, et donc freiner le mouvement en permanence.

Stratégie 3 : Force de grande amplitude

Une autre manière d'améliorer l'efficacité du système est de maximiser l'amplitude de Q , sans vérifier son signe ; on suppose que spontanément le terme $k_r\omega_r Q_n$ aura un signe opposé à la vitesse et que le système réduira les vibrations. On peut remarquer que l'équation électrique (7.13), pendant que le switch est fermé, est celle d'un système du second ordre avec un effet extérieur (force électromotrice) $k_r\omega_r u$ supposé constant pendant l'évolution électrique :

$$\frac{1}{\omega_e^2}\ddot{Q} + \frac{2\xi_e}{\omega_e}\dot{Q} + Q = k_r\omega_r u$$

On peut distinguer deux cas lors de l'inversion, suivant le signe de $k_r\omega_r u$, illustrés sur la figure (7.19) :

- Si la charge initiale et $k_r\omega_r u$ sont de même signe, (figure (7.19) à gauche) la valeur finale de la charge électrique est plus faible qu'avant le switch ;
- Si leurs signes sont opposés (figure (7.19) à droite) , une évolution importante de la charge se produira et la valeur finale de la charge devrait être importante , en particulier dans le cas d'un amortissement électrique faible.

Le critère choisi pour fermer le switch ($n + 1$ -ème fermeture, t_{n+1}) est donc le suivant :

- Il faut atteindre un extremum de position afin que $k_r\omega_r u$ soit grand, ce que l'on repère avec $\dot{u}(t_{n+1}) = 0$;
- Il faut que les signes de la charge initiale et celui de $k_r\omega_r u$ soient opposés, pour obtenir une inversion satisfaisante : $Q_n k_r\omega_r u(t_{n+1}) < 0$

7.5.1 Comparaison sur un cas

Comme introduit au début du chapitre 7.5, pour des valeurs faibles de ξ_e et en régime forcé, la stratégie 1 peut entraîner une commutation erratique et les performances en terme d'amortissement de vibrations sont très fortement dégradées (fig. 7.14) ; en appliquant une des stratégies proposées ci-dessus on espère améliorer les performances. On se place dans le cas du forçage à résonance d'un mode de fréquence propre $\omega_r = 1$, coefficient de couplage

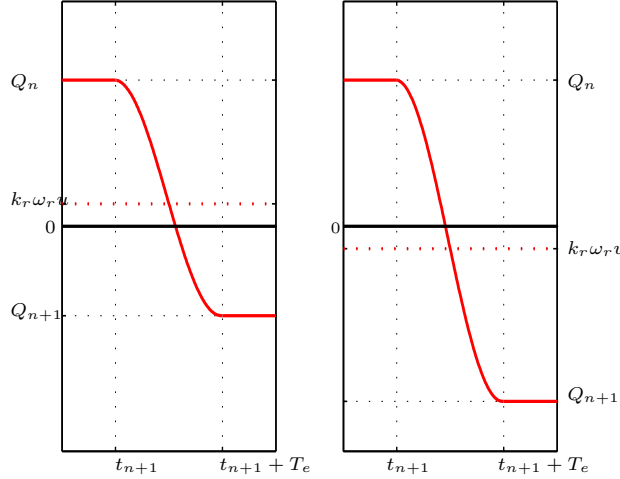


FIG. 7.19: Évolution de la charge électrique lors d'un switch dans deux cas (à g.) charge et $k_r \omega_r u$ de même signe (à dr.) charge et $k_r \omega_r u$ de signe opposé ; on suppose que le deuxième cas est favorable.

$k_r = 0.1$, amortissement mécanique $\xi_r = 0.001$ et on procède à des simulations du système avec chacune des stratégies possibles, que l'on peut résumer ainsi :

- Stratégie 1 : fermeture quand $\dot{u}(t) = 0$ (Critère habituel)
- Stratégie 2 : fermeture quand $\dot{u}(t) = 0$ et $Q_{n+1} k_r \dot{u}(\hat{t}_{n+1}) < 0$
- Stratégie 3 : fermeture quand $\dot{u}(t) = 0$ et $Q_n k_r u(t_{n+1}) < 0$

Pour un tel système, on a vu qu'avec la stratégie 1 la commutation devient erratique lorsque l'amortissement électrique passe en dessous d'une valeur critique, ici à peu près égale à 3.5 % (fig. 7.16). On simule l'évolution temporelle du système pour différentes valeurs de cet amortissement ; les résultats font apparaître les tendances suivantes :

- Pour un amortissement électrique $\xi_e = 5\%$ (fig. 7.20), supérieur à la valeur critique, les trois stratégies donnent des résultats identiques.
- Pour un amortissement $\xi_e = 2\%$ (fig. 7.21) , inférieur à la valeur critique, les stratégies 2 et 3 permettent de conserver une synchronisation correcte des commutations, et les performances sont alors nettement meilleures que ce qu'on obtient avec la stratégie 1. On peut remarquer que les régimes transitoires sont différents entre les stratégies 2 et 3.
- Si l'on réduit encore l'amortissement, par exemple avec $\xi_e = 1\%$ (fig. 7.22), on observe que la stratégie 2 permet au système de rester synchronisé tandis que la stratégie 3 le fait rentrer sur un cycle limite (dont la période varie, mais est ici de 4 périodes mécaniques) ; l'amplitude est supérieure, mais toujours inférieure à ce que permet la stratégie 1 ;
- Enfin pour un amortissement électrique très bas (partie électrique pratiquement conservative, $\xi_e = 0.1\%$) (fig. 7.23) toutes les stratégies conduisent à des commutations erratiques ; cependant, il apparaît que la stratégie 2 permet de garder une amplitude plus réduite que la stratégie 3, elle même plus efficace que la stratégie 1.

Comme remarqué précédemment, il est toujours bénéfique de diminuer ξ_e , jusqu'à l'apparition du régime critique ou non synchronisé. L'utilisation des critères avancés semble permettre de retarder cette apparition.

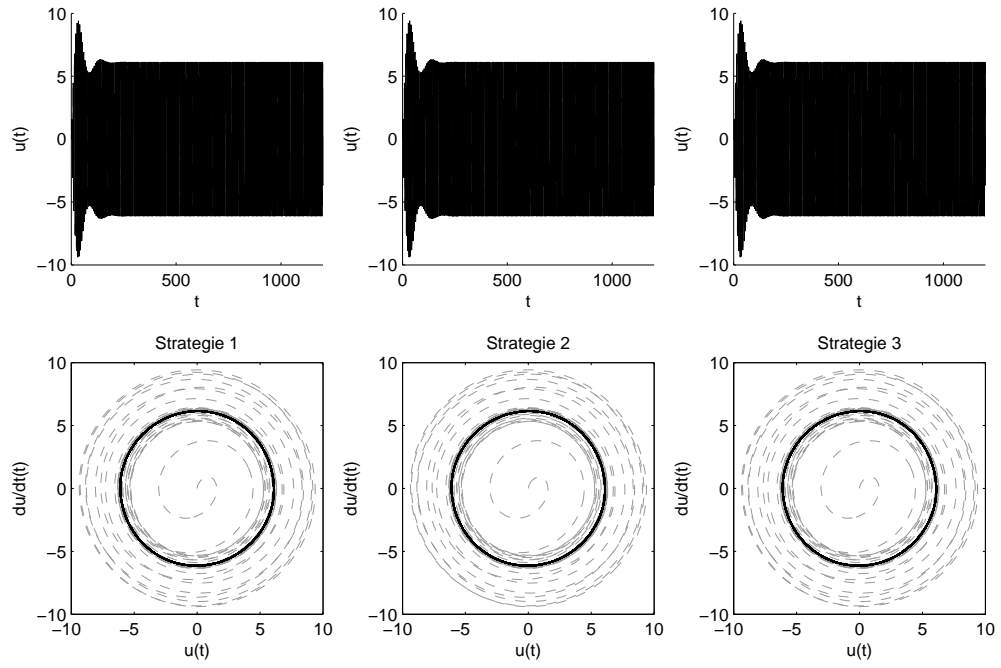


FIG. 7.20: Évolution temporelle du déplacement $u(t)$ avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 5 % et différentes stratégies.

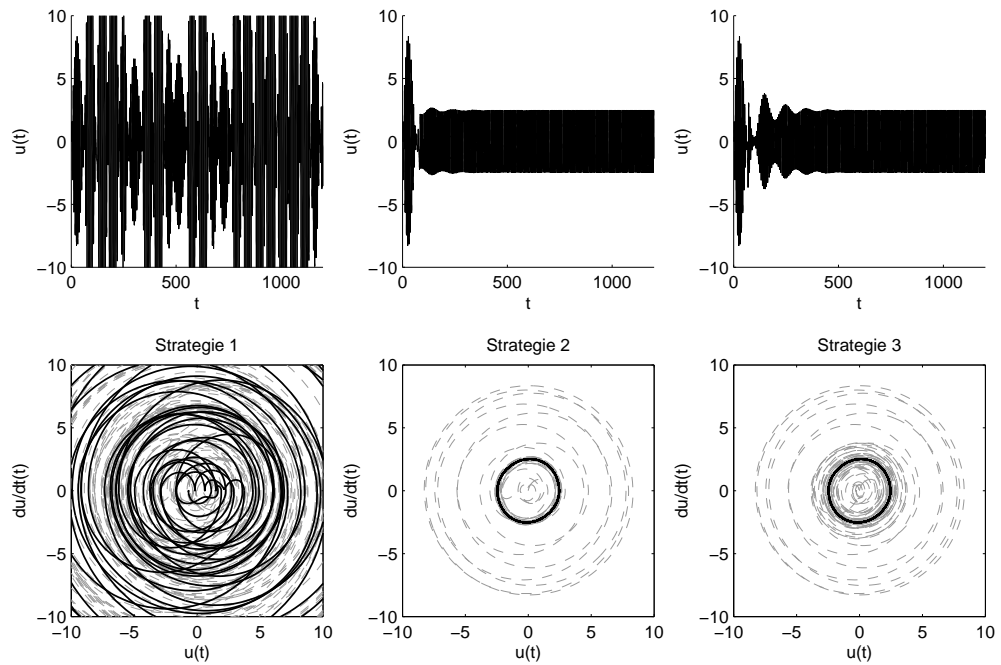


FIG. 7.21: Évolution temporelle du déplacement $u(t)$ avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 2 % et différentes stratégies.

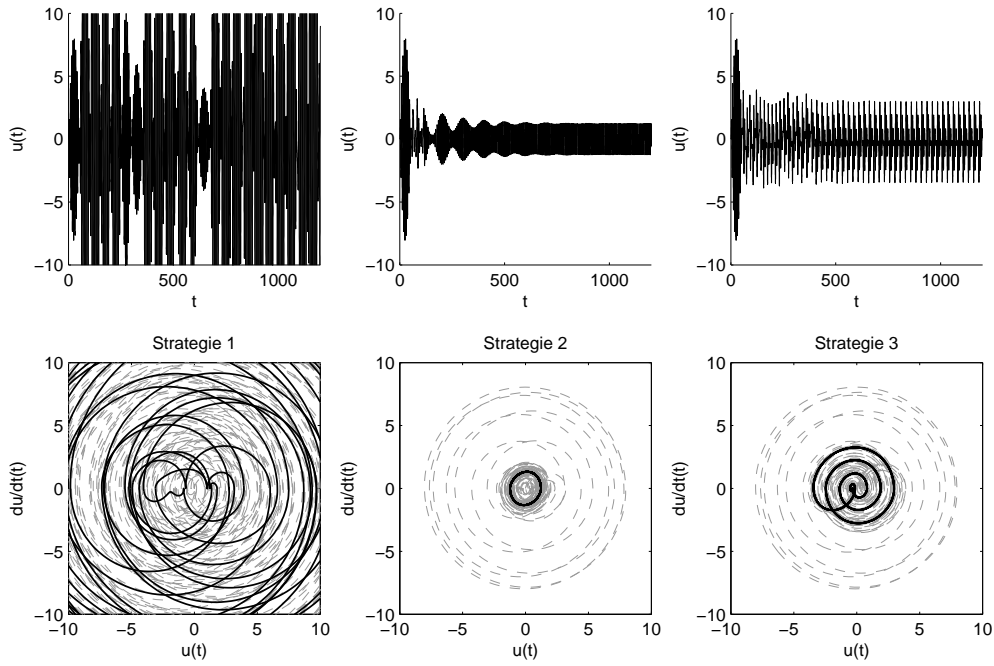


FIG. 7.22: Évolution temporelle du déplacement $u(t)$ avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 1 % et différentes stratégies.

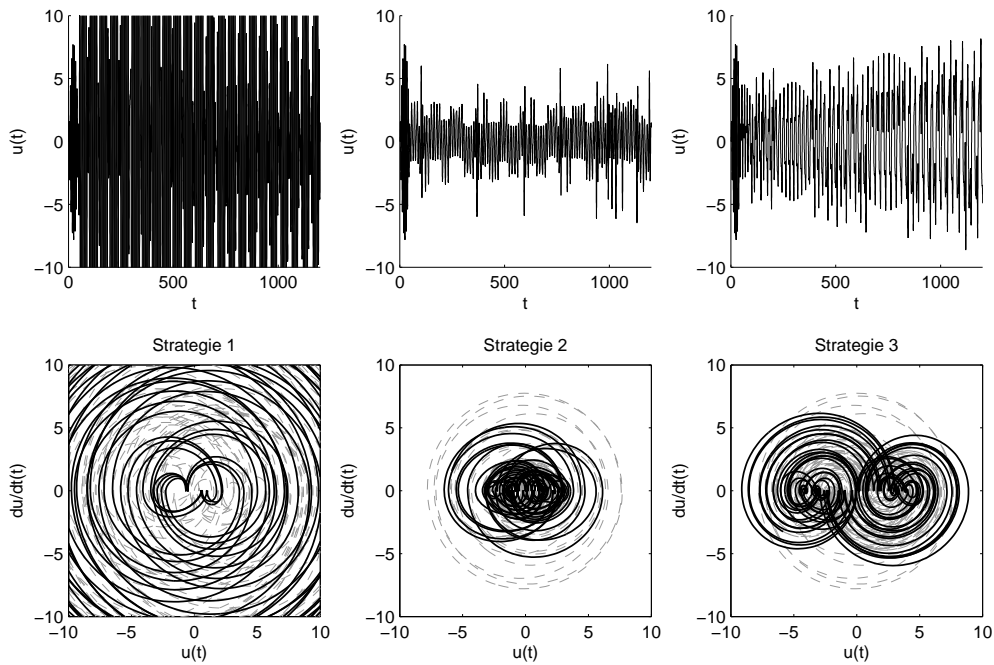


FIG. 7.23: Évolution temporelle du déplacement $u(t)$ avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 0.1 % et différentes stratégies.

7.5.2 Évaluation de l'atténuation

On procède à un grand nombre de simulations, pour diverses valeurs du coefficient de couplage, de la fréquence d'excitation et de ξ_e . L'amplitude efficace du signal est utilisée comme indice de performance du système, comme aux paragraphes 7.4.2 et 7.4.3. On a vu avec les comparaisons sur un cas particulier que la différence entre stratégies s'observait surtout quand l'amortissement électrique est très faible ; cette tendance est explorée ; on procède à des simulations du système étudié au paragraphe précédent en variant plusieurs paramètres et l'on trace l'amplitude efficace de u en fonction de la fréquence d'excitation. En observant les résultats, présentés figure 7.24 pour des valeurs d'amortissement décroissantes, on constate que l'instabilité apparaît plus tôt avec la stratégie 1, et ce sur une plage de fréquence plus étendue que les autres stratégies. La stratégie 2 permet de conserver la synchronisation plus longtemps, et permet aussi de conserver une bonne atténuation lorsque la synchronisation ne se fait plus. La stratégie 3 offre des résultats intermédiaires.

De la même manière qu'aux chapitres 7.4.2 et 7.4.3 on définit l'atténuation apportée par les différentes stratégies par rapport à la situation circuit ouvert ; on peut alors tracer dans le cas étudié l'atténuation en fonction de ξ_e (figure 7.25) et définir le taux d'amortissement électrique ξ_e optimal ainsi que l'atténuation maximale possible.

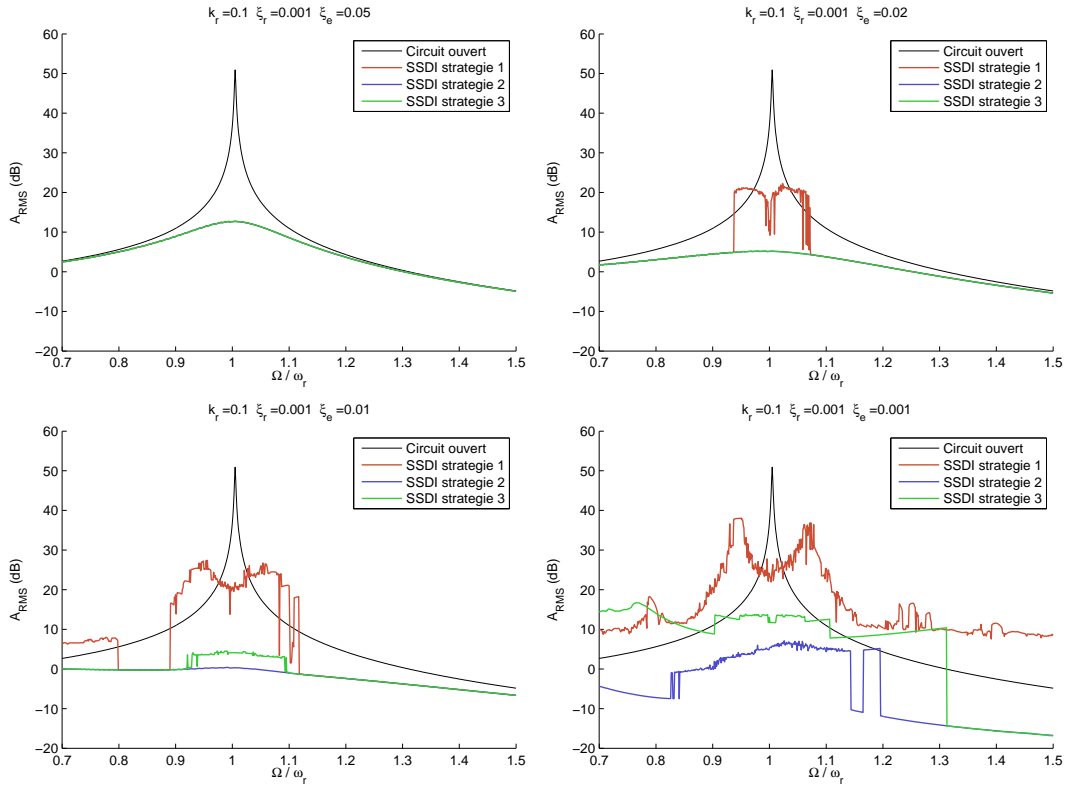


FIG. 7.24: Amplitude RMS en fonction de la fréquence d'excitation pour des amortissements électriques décroissants $\xi_e = 5\%$, 2% , 1% , 0.1%

On étudie alors le cas de tous les coefficients de couplage k_r avec un amortissement mécanique de 0.1% ; on obtient trois valeurs optimales de ξ_e , dépendant de la stratégie mise en œuvre, tracées figure (7.26) à gauche ; et on obtient avec ces paramètres l'atténuation maximale possible avec la stratégie en fonction du coefficient de couplage (fig. 7.26) à droite. On peut constater ainsi que :

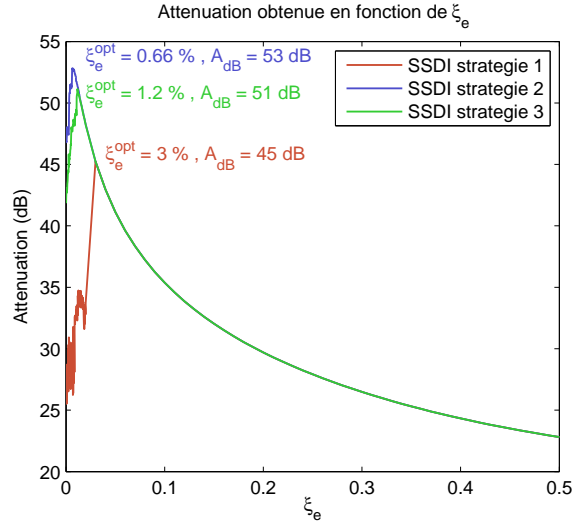


FIG. 7.25: Amplitude de l'atténuation apportée par la technique SSDI en fonction de ξ_e dans le cas étudié. Une stratégie adaptée permet de baisser la valeur critique.

- L'amortissement optimal est plus bas avec les stratégies évoluées ;
- Les stratégies sont de la plus efficace à la moins efficace dans l'ordre 2, 3, 1 ;
- Si l'amortissement électrique utilisé est trop important (au dessus de la valeur critique pour la stratégie 1), la stratégie utilisée n'a plus d'importance car la synchronisation du système se fait toujours.

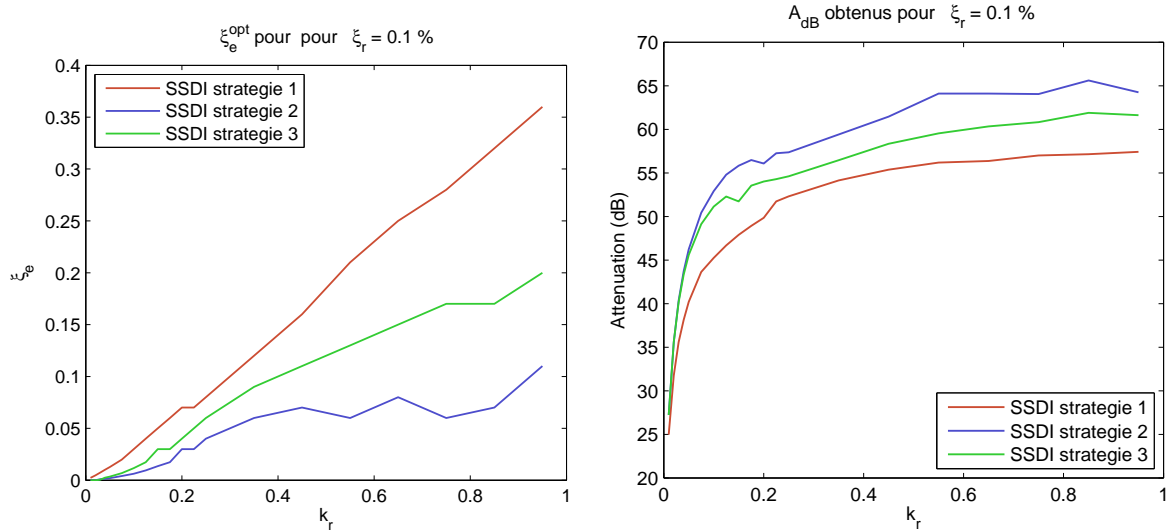


FIG. 7.26: (à g.) ξ_e^{opt} en fonction de k_r pour les trois stratégies ; (à dr.) A_{dB}^{SSDI} en fonction de k_r , pour $\xi_r = 0.1\%$

7.6 Conclusion sur le modèle 1 DDL

7.6.1 Cas de la technique SSDS

Le modèle des réponse libres et forcées permettent d'obtenir le résultat suivant : l'efficacité (amortissement ajouté en régime libre et atténuation en régime forcé) ne dépend que du coefficient de couplage. On ne constate pas d'instabilité de la synchronisation dans les cas étudiés, il n'y a pas besoin de stratégie de commutation évoluée.

7.6.2 Cas de la technique SSDI

À l'issue de cette étude sur des modèles 1 DDL, trois résultats ont été obtenus :

- Un modèle analytique de la réponse libre permet d'obtenir un amortissement électrique optimal ξ_e^{opt} ne dépendant que du coefficient de couplage k_r et un amortissement ajouté par le système ne dépendant lui aussi que de k_r . L'objectif est ici de dissiper l'énergie le plus rapidement possible.
- Un modèle semi-analytique de la réponse forcée permet de constater qu'un amortissement électrique très bas permet d'obtenir une meilleure atténuation ; en effet l'objectif n'est plus de dissiper l'énergie, mais de contrer les vibrations de la structure. Pour ce faire, il convient donc de stocker le plus possible d'énergie électrique, comme on le montre au chapitre 8.2.1. Cela est déjà perceptible dans les modèles existants de la réponse forcée [83] où l'on peut arbitrairement augmenter l'atténuation en diminuant ξ_e , car la synchronisation est supposée parfaite. Une analyse énergétique précisera cette notion (§8.2.1).
- Néanmoins, et à la différence des modèles 1 DDL déjà existants, près de la résonance et pour ξ_e très bas, les commutations peuvent devenir erratiques, et l'amplitude remonte brusquement ; ce phénomène est retardé par des stratégies évoluées.
- On définit ainsi un amortissement électrique critique, qui est le plus bas auquel la synchronisation se fait bien ; c'est la valeur optimale. On peut ainsi déduire l'atténuation maximale possible avec la technique SSDI, qui ne dépend que du coefficient de couplage, de la stratégie et de l'amortissement initial (mécanique) de la structure. Le choix d'une stratégie évoluée permet d'obtenir un amortissement électrique optimal (différent, plus bas) et une atténuation apportée par le système plus élevée, ne dépendant aussi que de k_r .

7.6.3 Limites du modèle

Les stratégies avancées qui ont été proposées pour la commutation ne nécessitent de connaître que des données disponibles immédiatement, et ne requièrent pas de calcul complexe. Néanmoins, il est difficile de mesurer simultanément la charge électrique et la force électromotrice dans l'élément piézoélectrique. L'objectif de l'étude sur les stratégies est plutôt une base d'optimisation qu'une solution pratique. De plus, les atténuations attendues même avec la stratégie de base sont très élevées, on remarque même pour certains paramètres une atténuation de la réponse hors-résonance (fig. 7.24). Il est probable que le passage au modèle multimode permette de calculer des performances plus réalistes.

Shunt à commutation sur un système à plusieurs degrés de liberté

On se propose dans ce chapitre de simuler la réponse dynamique d'un système à plusieurs ddl dont les vibrations sont réduites avec un shunt à commutation. À la différence des shunts linéaires (chapitre 5) pour lesquels les résultats obtenus avec le modèle 1 ddl s'appliquent facilement au cas N ddl, le comportement des shunts à commutation peut changer nettement en présence de plusieurs modes. En effet, sur un système multimode, lorsqu'on cherche à réduire les vibrations d'un mode donné, à chaque commutation, des variations brutales de charge dans l'élément piézoélectrique vont exciter les autres modes. Cela va perturber la tension dans l'élément piézoélectrique ; or, justement, la commutation est déclenchée lorsque cette tension passe par un maximum. Ainsi, la présence de composantes de fréquence élevée dans le signal de tension peut perturber la commutation et réduire l'efficacité du dispositif. Un des objectifs de ce chapitre est de vérifier si les résultats du chapitre 7 peuvent s'extrapoler aux cas N ddl, on simule donc un système à plusieurs ddl mécaniques. Un autre objectif est de prendre en compte l'effet de l'inductance. Il est donc nécessaire de prendre en compte le ddl électrique, et non plus de négliger la durée des commutations.

Tout d'abord, les équations du modèle sont posées, réutilisant le modèle électromécanique des chapitres 3 et 4. Ensuite, une étude énergétique du système est proposée (§8.1.4) ; cette étude permet de redéfinir les stratégies de commutation étudiées dans le chapitre précédent pour le cas 1 ddl. En particulier, on explique chacune des stratégies en terme d'optimisation de puissance (§8.2).

Au paragraphe 8.3, on expose les deux modèles à N ddl mis en place : un modèle semi-analytique de la réponse libre (basé sur des exponentielles matricielles) et un modèle numérique de la réponse forcée (faisant appel à un schéma de Newmark). Ils sont ensuite utilisés pour réaliser plusieurs simulations. On étudie ainsi l'influence de divers paramètres et de la stratégie de commutation sur l'efficacité de la réduction de vibration :

- Aux paragraphes 8.4.2 et 8.5.1 on étudie l'effet de l'inductance du shunt sur la réponse libre et forcée ;
- Aux paragraphes 8.4.3 et 8.5.2 on étudie l'influence d'un mode voisin lorsqu'on réduit les vibrations d'un mode donné. On constate que la synchronisation est perturbée, en particulier lorsque les modes ont des pulsations en rapport entier, et que la réduction de vibrations est alors moins efficace. On observe aussi l'effet du choix de l'inductance sur ce phénomène.

- Au paragraphe 8.5.2 on étudie également l'effet de l'amortissement mécanique d'un mode élevé ; la question est de savoir si un système à commutation pourrait être complété par un amortissement de type visqueux sur les modes élevés.

Ces résultats permettent de définir de nouvelles pistes pour optimiser le système.

Finalement, au paragraphe 8.5.3 une simulation à trois modes mécaniques est présentée, les transferts d'énergie entre les différentes parties du système sont étudiés, et les mécanismes de réduction de vibration sont analysés. On peut alors commenter les choix qui ont été faits pour les stratégies. L'ensemble de ces résultats constituent une étude originale sur le sujet des shunts à commutation.

Une des spécificités de la présente étude est d'avoir utilisé un grand nombre de simulations pour évaluer la dépendance entre plusieurs paramètres, pour une plage complète de valeurs. Beaucoup des études de la littérature se limitent à un jeu de paramètres réduit (par exemple, en s'intéressant à un seul coefficient de couplage, ou à une seule structure ; puis en l'excitant avec un seul type de signal).

Une autre spécificité est l'utilisation de stratégies de commutation fondées sur des critères uniquement instantanés (du moins pour les simulations). Cette approche n'est pas la plus efficace, mais permet de mettre en valeur des comportements limite du système : instabilité, commutation mal synchronisée... Il est important de remarquer que c'est une approche complémentaire à celles des autres équipes, basées sur des critères de temps ou de niveau.

8.1 Modèle utilisé

Le modèle retenu dans ce chapitre est le système (3.69) tronqué aux N premiers modes. On rappelle que les paramètres du modèle ont été obtenus par calcul semi-analytique (§3), par éléments finis (§4.3) ou encore expérimentalement (§6.4.1). Il est nécessaire de prendre en compte les deux états possibles du switch : ouvert ou fermé, et de décrire les transitions entre ces états.

8.1.1 Comportement en circuit ouvert

Pendant la majeure partie du temps, le switch est ouvert : le courant ne circule pas. On note ici $\chi_r = \omega_r k_r$ pour alléger les notations¹ ; on a alors à partir de (3.69) :

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \chi_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - \chi_r Q = F_r(t) & \forall r \in [1, N] \\ \dot{Q} = 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

ce qui donne sous forme matricielle, avec la charge électrique Q constante,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\xi_N \omega_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix} + \\ & \left(\begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\chi_i \chi_j] \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_N \end{pmatrix} Q, \end{aligned} \quad (8.2)$$

¹C'est un facteur différent du $\chi_r^{(p)}$ du chapitre 4 qui, lui n'est pas adimensionné.

ou encore

$$\mathbf{M}_{co}\ddot{\mathbf{q}}_{co} + \mathbf{C}_{co}\dot{\mathbf{q}}_{co} + \mathbf{K}_{co}\mathbf{q}_{co} = \mathbf{F}_{co} + \chi Q, \quad (8.3)$$

avec :

- \mathbf{M}_{co} matrice de masse pour les N modes (ici la matrice identité) ;
- \mathbf{C}_{co} matrice des amortissement modaux ;
- \mathbf{K}_{co} matrice de raideur en circuit ouvert ;
- \mathbf{q}_{co} vecteur des N coordonnées modales ;
- \mathbf{F}_{co} vecteur des forçages modaux ;
- χ vecteur des couplages électromécaniques (adimensionné ici à la différence du §4.4.2)

Pendant cette phase, la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique est donnée par la dernière ligne de (3.69) :

$$V = Q - \sum_{r=1}^N \chi_r q_r = Q - \chi^\top \mathbf{q}_{co}. \quad (8.4)$$

8.1.2 Comportement en circuit fermé

Pendant que le switch est fermé, le courant peut circuler dans le shunt, qu'on modélise avec une inductance et une résistance². On utilise donc un modèle identique à celui d'un shunt résonant :

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \chi_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - \chi_r Q = F_r(t) & \forall r \in [1, N] \\ \frac{\ddot{Q}(t)}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\dot{Q}(t)}{\omega_e} + Q(t) - \sum_{r=1}^N \chi_r q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (8.5)$$

avec $\omega_e = \sqrt{LC}/\tau_m$ et $\xi_e = \frac{RC}{2\omega_e \tau_m}$ respectivement les pulsations propres adimensionnées et coefficient d'amortissement de l'association shunt / éléments piézoélectriques (5.48). On écrit les équations (8.5) sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1/\omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 2\xi_N \omega_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\xi_e/\omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ [\chi_i \chi_j] \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_N \\ \chi_1 \dots \chi_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

ou encore

$$\mathbf{M}_{cf}\ddot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{C}_{cf}\dot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{K}_{cf}\mathbf{q}_{cf} = \mathbf{F}_{cf}, \quad (8.7)$$

avec des matrices et vecteurs de dimension $N + 1$:

²une modélisation plus détaillée devrait prendre en compte la nature des composants électroniques utilisés, qui n'ont pas des résistances pures mais plutôt des tensions de seuil ou autres non-linéarités.

- \mathbf{M}_{cf} matrice masse comprenant le terme d'inductance $1/\omega_e^2$;
- \mathbf{C}_{cf} matrice d'amortissement y compris le terme de résistance $2\xi_e/\omega_e$;
- \mathbf{K}_{cf} matrice de raideur, de couplage électromécanique et de capacité des éléments piézoélectrique ;
- \mathbf{q}_{cf} vecteur des N coordonnées modales et de la charge électrique Q ;
- \mathbf{F}_{cf} vecteur des forçages modaux prolongé d'un zéro (pas de forçage sur la partie électrique).

Une remarque importante est que l'étude de la technique SSDS peut se faire avec ce modèle, en prenant une valeur faible de L et $\xi_e = 1$; c'est pourquoi cette technique ne fait pas l'objet d'un traitement à part.

8.1.3 Transitions entre états

Pour simuler la réponse du système on considère une suite de phases d'évolution (circuit ouvert ou circuit fermé) qui nécessite d'écrire la continuité des grandeurs aux instants de commutation. On rappelle que le switch se ferme à une suite d'instants $t_n, n \in \mathbb{N}$ puis s'ouvre à une suite d'instants $\hat{t}_n, n \in \mathbb{N}$ ($t_n \leq \hat{t}_n$) ; la simulation débute switch ouvert. Lors des transitions on suppose qu'il y a continuité des déplacements et de leurs dérivées, ainsi que de la charge et du courant :

$$\begin{aligned} q_r(\hat{t}_n^-) &= q_r(\hat{t}_n^+) ; \dot{q}_r(\hat{t}_n^-) = \dot{q}_r(\hat{t}_n^+) ; Q(\hat{t}_n^-) = Q(\hat{t}_n^+) ; \dot{Q}(t = \hat{t}_n^-) = \dot{Q}(\hat{t}_n^+), \\ q_r(t_n^-) &= q_r(t_n^+) ; \dot{q}_r(t_n^-) = \dot{q}_r(t_n^+) ; Q(t_n^-) = Q(t_n^+) ; \dot{Q}(t_n^-) = \dot{Q}(t_n^+). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Le courant circule entre t_n et \hat{t}_n pendant un intervalle de temps le plus souvent assez court.

Fermeture du switch

L'instant t_n de fermeture du switch doit être choisi afin d'optimiser l'atténuation des vibrations. Une étude énergétique ci-après permet de proposer quelques stratégies pour effectuer ce choix.

Ouverture du switch

L'ouverture du switch se fait à \hat{t}_n lorsque le courant s'annule (c'est à dire lorsque $\dot{Q} = 0$). En pratique, les systèmes à commutation sont souvent réalisés avec deux branches munies de diodes "anti-retour" : celles-ci bloquent effectivement le courant dans une direction, même si la branche du switch reste fermée plus longtemps. L'effet est bien celui de l'arrêt total du courant à sa première annulation.

8.1.4 Aspects énergétiques

Énergie mécanique

En multipliant (8.3) par $\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top$, on obtient une expression des puissances agissant sur la partie mécanique du problème :

$$\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{M}_{co} \ddot{\mathbf{q}}_{co} + \underbrace{\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{C}_{co} \dot{\mathbf{q}}_{co}}_{\mathcal{D}_m} + \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{K}_{co} \mathbf{q}_{co} = \underbrace{\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{F}_{co}}_{\mathcal{P}_{ext}} + \underbrace{\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \chi Q}_{\mathcal{C}_m}, \quad (8.9)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathcal{E}_m = \frac{d}{dt} (\mathcal{T}_m + \mathcal{V}_m) = -\mathcal{D}_m + \mathcal{C}_m + \mathcal{P}_{ext},} \quad (8.10)$$

où :

- \mathcal{E}_m est l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique $\mathcal{T}_m = 1/2 \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{M}_{co} \dot{\mathbf{q}}_{co}$ et de l'énergie potentielle $\mathcal{V}_m = 1/2 \mathbf{q}_{co}^\top \mathbf{K}_{co} \mathbf{q}_{co}$;
- $\mathcal{P}_{ext} = \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{F}_{co}$ est la puissance mécanique des efforts extérieurs
- $\mathcal{D}_m = \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{C}_{co} \dot{\mathbf{q}}_{co}$ est la puissance mécanique dissipée, toujours positive ;
- $\mathcal{C}_m = \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} Q$ est la puissance de couplage de l'effet piézoélectrique indirect (effet de la charge électrique sur la partie mécanique).

L'expression (8.10) est également valable en circuit fermé. En effet, on obtient le même résultat en multipliant (8.7) par $\dot{\mathbf{q}}_{cc}^\top$ où on impose $\dot{Q} = 0$ afin d'éliminer les termes liés au courant.

Énergies modales

On peut séparer différents termes de (8.10) par modes. Il est ainsi possible de distinguer pour chaque mode :

- L'énergie cinétique $\mathcal{T}_r = \dot{q}_r^2$; on a $\sum_{r=1}^N \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_m$;
- L'énergie potentielle $\mathcal{V}_r = \hat{\omega}_r^2 q_r^2$; on a $\sum_{r=1}^N \mathcal{V}_r \simeq \mathcal{V}_m$; en effet la matrice de raideur \mathbf{K}_{co} n'est pas rigoureusement diagonale et un faible couplage existe entre les modes ;
- On peut alors définir l'énergie mécanique modale :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{T}_r + \mathcal{V}_r = \dot{q}_r^2 + \hat{\omega}_r^2 q_r^2, \quad (8.11)$$

La somme de ces énergies n'est pas tout à fait l'énergie mécanique ; elle constitue cependant une bonne estimation tant que \mathbf{K}_{co} est presque diagonale. On peut utiliser l'énergie de chaque mode pour avoir une idée de la répartition des énergies. On peut aussi définir les puissances dépendant de chaque mode :

- La puissance dissipée $\mathcal{D}_r = 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r^2$; on a $\sum_{r=1}^N \mathcal{D}_r = \mathcal{D}_m$;
- La puissance de couplage $\mathcal{C}_r = \dot{q}_r \chi_r Q$; on a $\sum_{r=1}^N \mathcal{C}_r = \mathcal{C}_m$.

Énergie électrique

En multipliant la ligne du degré de liberté électrique du système (8.5) par \dot{Q} on obtient une expression des puissances électriques pendant la phase circuit fermé :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathcal{E}_e = \frac{d}{dt} (\mathcal{T}_e + \mathcal{V}_e) = -\mathcal{D}_e + \mathcal{C}_e,} \quad (8.12)$$

où :

- \mathcal{E}_e est l'énergie électromagnétique, somme de l'énergie stockée dans l'inductance $\mathcal{T}_e = 1/2 \dot{Q} \frac{1}{\omega_e^2} \dot{Q}$ et de l'énergie potentielle stockée dans la capacité de l'élément piézoélectrique $\mathcal{V}_e = 1/2 Q^2$;
- $\mathcal{D}_{em} = \dot{Q}^2 \frac{2\xi_e}{\omega_e}$ est la puissance électrique dissipée par effet Joule, toujours positive ;
- $\mathcal{C}_e = \dot{Q} \boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co}$ est la puissance de couplage de l'effet piézoélectrique direct (effet de la force électromotrice sur la charge électrique).

Pendant la phase circuit ouvert, comme le courant est nul, il y a conservation de \mathcal{V}_e et (8.12) reste valable :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_e = \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\mathcal{T}_e}_{=0} + \underbrace{\mathcal{V}_e}_{\text{constante}} \right) = - \underbrace{\mathcal{D}_e}_{=0} + \underbrace{\mathcal{C}_e}_{=0}. \quad (8.13)$$

Énergie totale

En ajoutant les équations (8.10) et (8.12) on écrit toutes les puissances du système :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e) = -\mathcal{D}_m - \mathcal{D}_e + \mathcal{C}_m + \mathcal{C}_e + \mathcal{P}_{\text{ext}}, \quad (8.14)$$

or on peut remarquer que les termes $\mathcal{C}_m + \mathcal{C}_e$ dérivent d'une énergie :

$$\mathcal{C}_m + \mathcal{C}_e = \dot{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co} + \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} \mathbf{Q} = \frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} \mathbf{Q}). \quad (8.15)$$

En notant $\mathcal{E}_{em} = -\mathbf{q}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} \mathbf{Q}$ l'énergie de couplage électromécanique on peut écrire la variation d'énergie totale du système :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\underbrace{\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_{em}}_{\mathcal{E}_t}) = -\mathcal{D}_m - \mathcal{D}_e + \mathcal{P}_{\text{ext}}} \quad (8.16)$$

où l'on introduit \mathcal{E}_t l'énergie totale, somme de l'énergie mécanique, électrique et de couplage. L'énergie de couplage peut être négative ; par contre on peut remarquer que l'énergie totale peut se décomposer en deux parties toujours positives, et est donc elle aussi toujours positive :

- L'énergie cinétique totale, somme de l'énergie cinétique mécanique et de l'énergie électromagnétique stockée dans la bobine : $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_m + \mathcal{T}_e = 1/2 \dot{\mathbf{q}}_{cf}^\top \mathbf{M}_{cf} \dot{\mathbf{q}}_{cf}$;
- L'énergie potentielle totale, somme de l'énergie potentielle mécanique, électrique et de couplage : $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_m + \mathcal{V}_e + \mathcal{E}_{em} = 1/2 \mathbf{q}_{cf}^\top \mathbf{K}_{cf} \mathbf{q}_{cf}$. On peut montrer que cette énergie est toujours positive :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{q}_{cf} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \mathbf{q}_{cf}^\top \mathbf{K}_{cf} \mathbf{q}_{cf} &= \sum_{i=1}^N \omega_i^2 q_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \chi_i q_i \chi_j q_j - \sum_{i=1}^N \chi_i q_i Q - \sum_{j=1}^N \chi_j q_j Q + Q^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i^2 q_i^2 + \sum_{i=1}^N \chi_i q_i \sum_{j=1}^N \chi_j q_j - \sum_{i=1}^N \chi_i q_i Q - \sum_{j=1}^N \chi_j q_j Q + Q^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\omega_i^2 q_i^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \chi_i q_i - Q \right)^2}_{=V^2 \geq 0} \geq 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ceci permet d'ailleurs d'établir que \mathbf{K}_{cf} est définie positive ; en effet supposons une énergie potentielle totale nulle :

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}_{cf}^\top \mathbf{K}_{cf} \mathbf{q}_{cf} = 0$$

$$\text{alors } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, q_i = 0 \text{ et } V = \left(- \sum_{i=1}^N \chi_i q_i + Q \right) = 0$$

$$\text{alors } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, q_i = 0 \text{ et } Q = 0, \quad (8.18)$$

la seule solution possible est \mathbf{q}_{cf} vecteur nul. Notons que \mathbf{K}_{cf} est symétrique, définie positive et donc inversible.

On peut représenter sur un diagramme (fig. 8.1) les différentes énergies et puissances présentes dans le système.

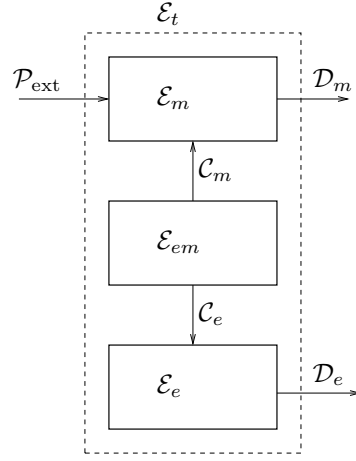


FIG. 8.1: Relations entre les énergies et puissances transférées et dissipées. Le sens des flèches représente la convention de signe adoptée aux équations (8.10) et (8.12). \mathcal{P}_{ext} , \mathcal{C}_m et \mathcal{C}_e peuvent être négatives.

8.2 Stratégies de commutation

8.2.1 Critères d'optimisation de la réduction de vibrations

Puissance mécanique transférée

Une manière d'optimiser l'effet du switch consiste à observer que dans l'équation (8.10), l'effet de la charge sur l'énergie mécanique est \mathcal{C}_m ; c'est le seul terme de puissance mécanique que l'on peut modifier par l'intermédiaire du switch. Pour diminuer l'amplitude des vibrations, on se fixe comme objectif de réduire le plus rapidement possible l'énergie mécanique, c'est-à-dire d'avoir \mathcal{C}_m grand et négatif : on fera en sorte que l'effet piézoélectrique freine la partie mécanique. Cette idée est illustrée sur la figure (8.2).

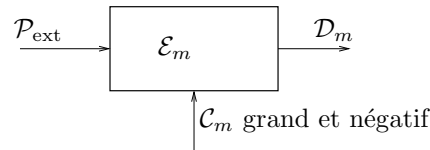


FIG. 8.2: Optimisation de l'effet de la charge sur la partie mécanique.

Puissance électrique dissipée

Une autre manière d'optimiser l'effet du switch consiste à observer que dans l'équation (8.16) les deux sources de dissipation sont la dissipation mécanique et électrique ; on peut donc chercher à optimiser l'effet du switch en choisissant les instants de commutation de telle sorte que la puissance dissipée dans la résistance soit maximale. Cette idée est illustrée sur la figure (8.3).

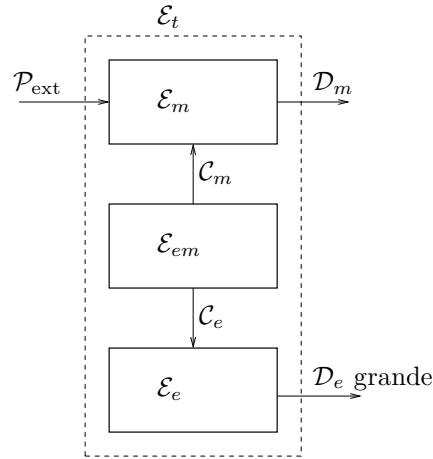


FIG. 8.3: Optimisation de la dissipation électrique.

Puissance électrique transférée

Un point de vue intermédiaire consiste à supposer que l'énergie de couplage reste bornée ; alors maximiser \mathcal{C}_e devrait permettre d'obtenir une valeur négative et élevée de \mathcal{C}_m , c'est à dire qu'on on fera en sorte que *l'effet piézoélectrique transfère le plus possible d'énergie vers la partie électrique*. Cette idée est illustrée sur la figure (8.4).

On peut aussi lier cette idée à la maximisation de la dissipation électrique en remarquant que la puissance dissipée et transférée sont liées :

$$\mathcal{D}_e = \mathcal{C}_e - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_e. \quad (8.19)$$

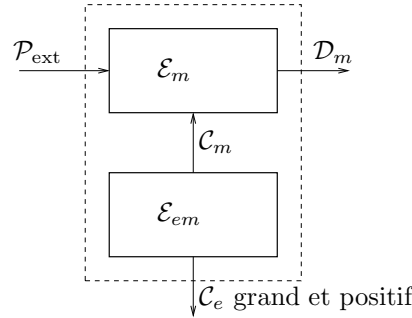


FIG. 8.4: Optimisation de l'effet de la partie mécanique sur l'énergie électrique

8.2.2 Stratégies de commutation multimode

Les remarques précédentes sur l'énergie permettent d'établir des stratégies de commutation.

Stratégie 1

Cette stratégie est celle habituellement utilisée pour la technique SSDI. Elle consiste à maximiser \mathcal{C}_m dans (8.10) (figure 8.2), en rappelant l'expression de la tension (8.4) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_m &= \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} Q \\
 &= \boldsymbol{\chi}^\top \dot{\mathbf{q}}_{co} Q \\
 &= (\dot{Q} - \dot{V})Q,
 \end{aligned}$$

ce qui en circuit ouvert, comme $\dot{Q} = 0$, donne :

$$\mathcal{C}_m|_{\text{circuit ouvert}} = -\dot{V}Q. \quad (8.20)$$

Comme on souhaite obtenir une puissance négative, il faut changer le signe de Q en fermant le switch chaque fois que $\dot{V} = 0$; cela devrait permettre d'avoir une puissance négative pendant les phases circuit ouvert, supposées les plus longues. On peut remarquer que cette stratégie est exactement la même que la stratégie 1 du paragraphe 7.5 pour un système à un ddl ; il se pourrait donc qu'elle aie les mêmes défauts, à savoir que parfois le signe de Q risque de ne pas être le bon.

Stratégie 2

En considérant l'expression (8.20), on peut améliorer la stratégie ci-dessus en vérifiant explicitement que la puissance sera négative immédiatement après le switch. Ainsi, pour fermer le switch à l'instant t_{n+1} , on vérifie :

- Le signe de \dot{V} par continuité juste après la fermeture du switch ;
- Le signe de Q en utilisant la formule (7.16), adaptée au cas multimode pour estimer sa valeur après le switch :

$$Q_{\text{est}} = \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r(t_{n+1})(1 + X) - XQ_n = (1 + X)\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co} - XQ_n \quad (8.21)$$

cette estimation repose sur l'hypothèse d'un switch très court par rapport à l'évolution mécanique ; il faut remarquer que cette hypothèse n'est ici plus forcément vraie.

Alors le switch se ferme lorsque :

- la dérivée de la tension s'annule : $\dot{V}(t_{n+1}) = 0$
- la puissance estimée immédiatement après le switch sera négative : $\mathcal{C}_m(t_{n+1}^+) \simeq -\dot{V}(t_{n+1}^+)Q_{\text{est}} \leq 0$

Cette stratégie est très similaire à la stratégie 2 du paragraphe 7.5, à la différence que la participation de tous les modes est ici prise en compte.

Stratégie 3

En considérant l'expression (8.20), on peut aussi se fixer comme objectif de maximiser Q ; alors on suppose que le signe de \mathcal{C}_m sera spontanément négatif. Cette démarche consiste aussi à maximiser \mathcal{C}_e (figure 8.4) pour avoir une charge électrique importante dans l'élément piézoélectrique. Ainsi, on s'intéresse aux phases de circuit fermé. La puissance transférée s'écrit : $\mathcal{C}_e = \dot{Q}\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co}$; on distingue deux éléments dans cette expression :

- le courant \dot{Q} ;
- la force électro-motrice de l'élément piézoélectrique $\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co} = V - Q$ (notée E_k sur la figure 3.4).

On fait l'hypothèse que la charge va diminuer ou changer de signe, donc que le courant sera de signe opposé au signe de la charge au début de la phase de commutation. Alors, en faisant l'hypothèse que la force électro-motrice $\chi^\top \mathbf{q}_{co}$ est à peu près constante pendant cette phase (c'est à dire que la partie mécanique évolue peu), on trouve deux cas possibles :

- Soit la fém est du même signe que la charge initiale et $\mathcal{C}_e < 0$; la valeur absolue de la charge décroît (cas illustré figure 7.19 à gauche, pour un système 1 ddl)
- Soit la fém est de signe opposé à la charge initiale et $\mathcal{C}_e > 0$; la valeur absolue de la charge croît (cas illustré figure 7.19 à droite, pour un système 1 ddl)

C'est une démarche identique à celle utilisée pour définir la stratégie 3 pour un seul mode (§7.5, figure 7.19). En vérifiant que le signe de $Q\chi^\top \mathbf{q}_{co}$ est négatif on devrait *s'assurer que \mathcal{C}_e soit positive, c'est à dire que de l'énergie soit transférée de la partie mécanique à la partie électrique.*³ Finalement, cela permettra de dissiper beaucoup d'énergie par effet Joule, comme expliqué au paragraphe 8.2.1.

Autres stratégies multimode

Les simulations et les expériences montrent que les critères proposés ci-dessus ont tous la même limite : l'influence de modes haute fréquence fait que \dot{V} change très souvent de signe. Ainsi, la commutation est déclenchée très fréquemment, et la charge accumulée n'est pas très importante. On peut trouver dans la littérature d'autres idées pour réduire l'énergie de plusieurs modes à la fois, dont certaines évitent cet écueil :

- dans [24] les auteurs font une analyse énergétique similaire à celle de l'énergie mécanique ci-dessus (§8.2.1) et aboutissent aux mêmes conclusions sur la stratégie à suivre (§8.2.2). Néanmoins, ils proposent de filtrer V afin de ne retenir que la participation de certains modes, au lieu de tous les prendre en compte. Cela permet d'éviter que des modes haute fréquence, peu énergétiques mais perturbant beaucoup \dot{V} , ne déclenchent trop souvent la commutation.
- Bien que les articles initiaux n'en fassent pas mention [83], les dispositifs expérimentaux de commutation de l'équipe du LGEF comprennent un filtre passe bas qui évite le problème de commutation trop fréquente [85],[48].
- Dans [34] les auteurs proposent de commuter sur les maxima de V qui dépassent significativement le niveau moyen. Ce critère a l'avantage de pouvoir être mis simplement en œuvre avec des circuits autonomes [48]. En procédant ainsi une charge importante est stockée dans l'élément piézoélectrique. L'idée des auteurs est de maximiser la puissance électrique dissipée (§8.2.1).
- Dans [16, 17], un filtrage passe-bas de la tension est utilisé pour éviter les problèmes expérimentaux, même si les simulations font appel à une mesure directe du déplacement.
- Dans [58] l'auteur utilise un contrôleur de type LQR pour déclencher la commutation, avec un nombre de modes observés ou pris en compte limité par l'électronique.

8.3 Simulation numérique

8.3.1 Simulation de la réponse libre

On se propose de calculer la réponse libre du système sous forme quasi-analytique en écrivant la solution à partir d'exponentielles de matrices après avoir écrit le système à résoudre

³Je remercie ici Gaël Sebald, qui m'a donné l'idée d'écrire cette puissance lors d'une discussion lors d'ICAST 2008.

sous forme d'équations d'état.

Équations d'état

En l'absence d'efforts extérieurs les équations (8.3,8.7) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{co}\ddot{\mathbf{q}}_{co} + \mathbf{C}_{co}\dot{\mathbf{q}}_{co} + \hat{\mathbf{K}}_{co}\mathbf{q}_{co} = \chi Q & \text{et } \dot{Q} = 0 & \text{circuit ouvert} \\ \mathbf{M}_{cf}\ddot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{C}_{cf}\dot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{K}_{cf}\mathbf{q}_{cf} = 0 & & \text{circuit fermé.} \end{cases} \quad (8.22)$$

Sous forme d'équation d'état on obtient :

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{co} & \mathbf{M}_{co} \\ \mathbf{M}_{co} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{co}} \dot{\mathbf{X}}_{co} + \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{co} & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}_{co} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_{co}} \mathbf{X}_{co} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} Q & \text{circuit ouvert} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{cf} & \mathbf{M}_{cf} \\ \mathbf{M}_{cf} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{cf}} \dot{\mathbf{X}}_{cf} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{cf} & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}_{cf} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_{cf}} \mathbf{X}_{cf} = 0 & \text{circuit fermé,} \end{cases} \quad (8.23)$$

avec $\mathbf{X}_{co} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{co} \\ \dot{\mathbf{q}}_{co} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{X}_{cf} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{cf} \\ \dot{\mathbf{q}}_{cf} \end{pmatrix}$.

La continuité (équ. (8.8)) permet de décrire les transitions entre circuit ouvert et fermé. Chacun de ces problèmes est de la forme

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{F}$$

avec l'effort extérieur nul ou constant ; on cherche la solution sous la forme d'une somme $\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_g$ avec

- \mathbf{X}_p solution particulière de l'équation complète (SPEC), donnée dans le cas \mathbf{F} constante par :

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}$$

- \mathbf{X}_g solution générale de l'équation homogène (SGEH) ; celle-ci s'écrit

$$\mathbf{X}_g(t) = e^{-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t}\mathbf{X}_g(0),$$

ou encore

$$\mathbf{X}_g(t) = \mathbf{\Phi}e^{-\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{X}_g(0)$$

avec $\mathbf{\Lambda}$ et $\mathbf{\Phi}$ matrices des valeurs propres et vecteurs propres du problème aux valeurs propres s'écrivant

$$\mathbf{B}\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}$$

On cherche donc les valeurs et vecteurs propres de \mathbf{A}_{co} et \mathbf{B}_{co} et de \mathbf{A}_{cf} et \mathbf{B}_{cf} solutions⁴ de :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{co}\mathbf{\Phi}_{co} &= \mathbf{A}_{co}\mathbf{\Phi}_{co}\mathbf{\Lambda}_{co} \\ \mathbf{B}_{cf}\mathbf{\Phi}_{cf} &= \mathbf{A}_{cf}\mathbf{\Phi}_{cf}\mathbf{\Lambda}_{cf}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

et on peut écrire directement la réponse transitoire en circuit fermé (après la n -ième fermeture) avec la solution générale, en prenant en compte les conditions initiales $\mathbf{X}_{cf}(t_n)$, calculées par continuité :

$$\mathbf{X}_{cf}(t) = \underbrace{\mathbf{\Phi}_{cf}e^{-\mathbf{\Lambda}_{cf}(t-t_n)}}_{\text{SGEH}} \underbrace{\mathbf{\Phi}_{cf}^{-1}\mathbf{X}_{cf}(t_n)}_{\text{C.I.}} \quad (8.25)$$

⁴En remarquant que l'inductance ne doit pas être nulle, sinon \mathbf{A}_{cf} est singulière.

tandis que la réponse en circuit ouvert après la n -ième ouverture dépend de la condition initiale $\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n)$ et de la charge Q_n stockée sur les électrodes, calculées par continuité. On cherche donc la solution particulière et générale et on trouve

$$\mathbf{X}_{co}(t) = \underbrace{\Phi_{co} e^{-\Lambda_{co}(t-\hat{t}_n)} \Phi_{co}^{-1}}_{\text{SGEH}} \left[\underbrace{\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n)}_{\text{C. I}} - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{co}^{-1} \chi \\ 0 \end{pmatrix} Q_n \right] + \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{co}^{-1} \chi \\ 0 \end{pmatrix} Q_n}_{\text{SPEC}}. \quad (8.26)$$

Cette réponse est la somme d'un régime établi, qui est la réponse statique à l'effet de la charge électrique, et d'un régime transitoire. Le fait d'utiliser les matrices des valeurs propres permet de calculer les exponentielles matricielles sous forme de matrice diagonale, c'est à dire que l'évolution temporelle des vecteurs propres est découplée.

Mise en œuvre numérique

Une particularité remarquable d'une simulation de réponse libre avec switch est qu'il s'agit d'une succession de régimes transitoires ; l'observation montre que chacun de ces régimes (circuit ouvert ou circuit fermé) ne dure jamais très longtemps⁵. Il serait donc très intéressant d'accélérer le plus possible chacun de ces calculs, quitte à devoir calculer préalablement quelques résultats.

Pour les phases circuit ouvert et fermé on crée un vecteur de pas de temps⁶ Δt , de longueur N_t . Ensuite les valeurs de $e^{-\Lambda_{co}t}$ et $e^{-\Lambda_{cf}t}$ sont calculées pour ces vecteurs et réarrangées en colonnes. Ce calcul est fait une seule fois ; on obtient des matrices rectangulaires qu'on peut noter \mathbf{E}_{co} et \mathbf{E}_{cf} . Chaque ligne de ces matrices représente la réponse d'un des vecteurs propres (de $\mathbf{A}_{cf}^{-1}\mathbf{B}_{cf}$ ou $\mathbf{A}_{co}^{-1}\mathbf{B}_{co}$ respectivement), qui est une exponentielle décroissante.

$$[\mathbf{E}_{co}]_{ij} = \left[e^{-[\Lambda_{co}]_{ii}(j\Delta t)} \right]_{ij}, [\mathbf{E}_{cf}]_{ij} = \left[e^{-[\Lambda_{cf}]_{ii}(j\Delta t)} \right]_{ij}. \quad (8.27)$$

Alors, à condition de réarranger les conditions initiales dans l'espace des vecteurs propres (ce qu'on obtient grâce à la matrice de passage) sous forme de matrices diagonales \mathbf{D}_{co} et \mathbf{D}_{cf} ,

$$[\mathbf{D}_{co}]_{ii} = \left[\Phi_{co}^{-1} \left(\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n) - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{co}^{-1} \chi \\ 0 \end{pmatrix} Q \right) \right]_i, [\mathbf{D}_{cf}]_{ii} = [\Phi_{cf}^{-1} \mathbf{X}_{cf}(t_n)]_i. \quad (8.28)$$

On peut obtenir la réponse du système *sur tous les pas de temps en une seule opération de multiplication* :

$$[\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n + \Delta t), \mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n + 2\Delta t), \dots, \mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n + N_t\Delta t)] = \Phi_{co} \mathbf{D}_{co} \mathbf{E}_{co} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{co}^{-1} \chi \\ 0 \end{pmatrix} Q \quad (8.29)$$

$$[\mathbf{X}_{cf}(t_n + \Delta t), \mathbf{X}_{cf}(t_n + 2\Delta t), \dots, \mathbf{X}_{cf}(t_n + N_t\Delta t)] = \Phi_{cf} \mathbf{D}_{cf} \mathbf{E}_{cf}. \quad (8.30)$$

Pour simuler le comportement du système on passe par les étapes suivantes :

- On fixe une condition initiale, puis on calcule la réponse en circuit ouvert de 0 à $N_t\Delta t$;
- On identifie le premier instant de commutation suivant la stratégie utilisée ; on tronque alors la réponse à cet instant ;
- Par continuité, on calcule la réponse en circuit fermé ; on repère l'instant d'annulation du courant et on tronque la réponse ;

⁵ pas plus de 6 périodes du mode le plus bas pour les phases circuit ouvert et 2 pour les phases circuit fermé.

⁶ Δt doit être suffisamment petit pour assurer une bonne précision du calcul.

- On alterne ensuite entre circuit ouvert et fermé, jusqu'à avoir simulé la durée requise.

Chaque étape fait donc appel à une multiplication de matrice, puis à quelques tests, et finalement à un assemblage. L'exponentielle matricielle n'est calculée qu'une seule fois, ce qui accélère les calculs. Le passage par les valeurs propres permet de réordonner les indices et d'avoir une seule multiplication à faire pour l'intervalle de temps $[0, N_t \Delta_t]$.

Comparaison avec le modèle analytique 1 DDL

Les résultats de l'expérience présentée figure 7.9, calculés avec le modèle analytique du paragraphe 7.3.2, sont comparés à des résultats obtenus avec le modèle ci-dessus. On choisit une période mécanique de 2 unités de temps et une période électrique 100 fois plus faible, afin de rester proche de l'hypothèse faite pour le modèle analytique qui est que la partie électrique réagit instantanément. Les résultats sont présentés sur la figure 8.5 où l'on constate une assez bonne superposition des tracés ; néanmoins, la coïncidence n'est pas exacte. La matrice Φ_{cf} du problème aux valeurs propres de l'équation (8.24) est en effet mal conditionnée ; la multiplication par Φ_{cf}^{-1} à chaque fermeture du switch pour calculer l'évolution du système provoque des erreurs numériques. On remarque cependant que l'évolution à long terme du système est correctement représentée - c'est à dire que les erreurs ne se cumulent pas.

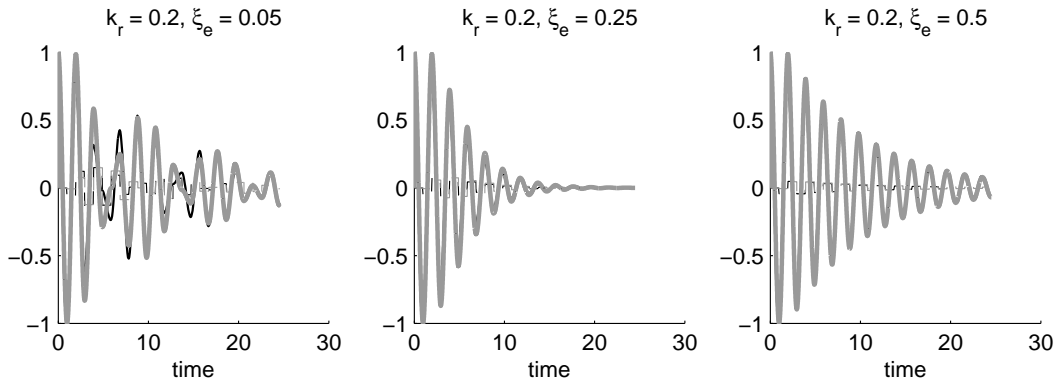


FIG. 8.5: Réponse d'un système SSDI pour trois amortissements électriques différents ; en trait plein le déplacement, pointillés, la charge ; en noir résultats analytiques, en gris résultats numériques

8.3.2 Simulation de la réponse forcée

Choix du modèle

À partir du moment où un effort extérieur (qui peut prendre une forme quelconque) s'exerce au cours du temps sur le système, sa réponse durant les phases circuit ouvert ou fermé nécessite un calcul au cours du temps, et ne peut plus être écrite immédiatement à partir des conditions initiales⁷.

On décide d'utiliser un algorithme de Newmark pour modéliser la réponse du système ; en raison de la projection sur les modes déjà effectuée la taille des matrices est réduite et les calculs sont relativement rapides. On procède par étapes :

⁷Il est probablement possible de créer un modèle semi-analytique comparable à ce qui a été fait dans le cas 1 DDL avec un régime établi en réponse à une excitation harmonique ; néanmoins la complexité des calculs en rend l'intérêt douteux par rapport à un algorithme de Newmark, plus souple

- On commence par une étape d'évolution en circuit ouvert, où l'on simule le système (8.3) ; à chaque pas de temps, on vérifie si le switch se ferme, suivant la stratégie adoptée ;
- à la fermeture du switch, les conditions initiales sont données par continuité et on simule l'évolution du système (8.7) ; à chaque pas de temps on vérifie si le courant s'annule et donc si le switch s'ouvre ;
- on alterne ensuite entre circuit ouvert et fermé, jusqu'à avoir simulé sur la durée requise.

Algorithme de Newmark

On utilise un algorithme de Newmark adapté à la simulation d'un système dynamique simple [38] ; le système étudié est (8.3) ou (8.7) que l'on met sous la forme générale :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (8.31)$$

avec les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , et \mathbf{K} constantes et le forçage \mathbf{F} dépendant du temps. Les conditions initiales $\dot{\mathbf{u}}(0)$ et $\mathbf{u}(0)$ sont connues.

On choisit d'étudier le système à des instants discrets t_n avec $n \in [0, N_t]$ séparés par un pas de temps Δt ; on cherche une approximation de la solution $\mathbf{u}(t)$ sous forme de valeurs discrètes \mathbf{d}_n , \mathbf{v}_n et \mathbf{a}_n qui sont des approximations de $\mathbf{u}(t_n)$, $\dot{\mathbf{u}}(t_n)$ et $\ddot{\mathbf{u}}(t_n)$. Le pas de temps Δt doit être choisi nettement inférieur à la constante de temps du phénomène le plus rapide à modéliser⁸. L'algorithme se présente comme suit :

- À l'instant t_n on note \mathbf{d}_n , \mathbf{v}_n et \mathbf{a}_n les positions, vitesses et accélérations, supposées connues. L'objectif est donc de calculer \mathbf{d}_{n+1} , \mathbf{v}_{n+1} et \mathbf{a}_{n+1} .
- Tout d'abord l'algorithme fait intervenir une étape de prédiction où l'on estime les valeurs de \mathbf{d}_{n+1} et \mathbf{v}_{n+1}

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}^p &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n \\ \mathbf{v}_{n+1}^p &= \mathbf{v}_n + (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (8.32)$$

- La valeur de l'accélération est calculée d'après ces valeurs estimées en résolvant le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{S} \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1}^p - \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1}^p \quad (8.33)$$

dont la solution est

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1}^p - \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1}^p). \quad (8.34)$$

- Les valeurs du déplacement et de la vitesse sont corrigées avec l'accélération calculée :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_{n+1}^p + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_{n+1}^p + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

- On procède alors au calcul de l'étape suivante, et ainsi de suite pour simuler l'évolution du système, en obtenant à chaque pas de temps une approximation \mathbf{d}_n , \mathbf{v}_n et \mathbf{a}_n des valeurs de $\mathbf{u}(t_n)$, $\dot{\mathbf{u}}(t_n)$ et $\ddot{\mathbf{u}}(t_n)$. La valeur initiale de l'accélération peut être obtenue en utilisant l'équation (8.34) avec les valeurs initiales de position et de vitesse (connues).

⁸Il s'agit souvent de capturer l'inversion de charge ; ainsi il faut un pas de temps beaucoup plus petit que la constante de temps électrique, donc très fin. On pourrait éventuellement adopter un pas variable entre circuit ouvert et court-circuit.

Afin d'accélérer le calcul⁹ on condense ces étapes en une seule. L'accélération peut être obtenue en injectant (8.32) dans (8.34) :

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1} \left(F_{n+1} - \mathbf{C}(\mathbf{v}_n + (1 - \gamma)\Delta t \mathbf{a}_n) - \mathbf{K}(\mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n) \right),$$

soit

$$\mathbf{a}_{n+1} = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{d}_n - \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{K}\Delta t + \mathbf{C})\mathbf{v}_n - \mathbf{S}^{-1}((1 - \gamma)\Delta t\mathbf{C} + (1 - 2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{K})\mathbf{a}_n + \mathbf{S}^{-1}F_{n+1},$$

soit

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{L}_1\mathbf{d}_n + \mathbf{L}_2\mathbf{v}_n + \mathbf{L}_3\mathbf{a}_n + \mathbf{S}^{-1}F_{n+1} \quad (8.36)$$

En injectant (8.36) dans (8.35) on obtient les valeurs de la vitesse et du déplacement déjà corrigées :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= (\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_1)\mathbf{d}_n + (\Delta t\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_2)\mathbf{v}_n + \left(\frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_3\right)\mathbf{a}_n + \beta\Delta t^2\mathbf{S}^{-1}F_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \gamma\Delta t\mathbf{L}_1\mathbf{d}_n + (\mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_2)\mathbf{v}_n + ((1 - \gamma)\Delta t\mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_3)\mathbf{a}_n + \gamma\Delta t\mathbf{S}^{-1}F_{n+1}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité de dimension N . Les équations (8.37) et (8.36) peuvent être écrites sous forme d'une seule opération élémentaire qui devient alors l'unique calcul à réaliser pour chaque pas de temps :

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_{n+1}} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_1 & \Delta t\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_2 & \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_3 \\ \gamma\Delta t\mathbf{L}_1 & \mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_2 & (1 - \gamma)\Delta t\mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_3 \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{d}_n \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_n} \\ &\quad + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta\Delta t^2\mathbf{S}^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma\Delta t\mathbf{S}^{-1} & 0 & 0 \\ \mathbf{S}^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{n+1}}, \end{aligned} \quad (8.38)$$

avec $\mathbf{L}_1 = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}$, $\mathbf{L}_2 = -\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{K}\Delta t + \mathbf{C})$ et $\mathbf{L}_3 = -\mathbf{S}^{-1}((1 - \gamma)\Delta t\mathbf{C} + (1 - 2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{K})$.

On peut calculer une fois pour toutes les matrices \mathbf{E} et \mathbf{G} pour les systèmes circuit ouvert et fermé; alors chaque pas d'évolution consiste d'après l'équation (8.38) en deux multiplications et une addition. Pour le cas circuit ouvert, l'effet de la charge électrique est pris en compte comme un effort ajouté.

Comparaison avec le modèle semi-analytique 1ddl

On compare les résultats obtenus par le modèle ci-dessus avec ceux du modèle semi-analytique développé au chapitre 7.4. On choisit une pulsation mécanique pour l'unique mode $\omega_1 = 1$, une pulsation électrique $\omega_1 = 20\omega_1$ (pour rester près de l'hypothèse d'une commutation rapide, mais ne pas trop alourdir les calculs en raison d'un pas de temps devenant très fin), et une excitation hors-résonance $\Omega = 1.5\omega_1$ afin de faire apparaître du battement et des commutations irrégulières. On trace le déplacement et la charge électrique figure (8.6); les résultats obtenus sont extrêmement proches, avec juste une faible différence au niveau des durées fermetures du circuit.

⁹Le calcul étant réalisé sous Matlab avec un faible nombre de degrés de liberté il est préférable de réaliser une seule multiplication de grosses matrices plutôt que plusieurs opérations sur des matrices plus petites.

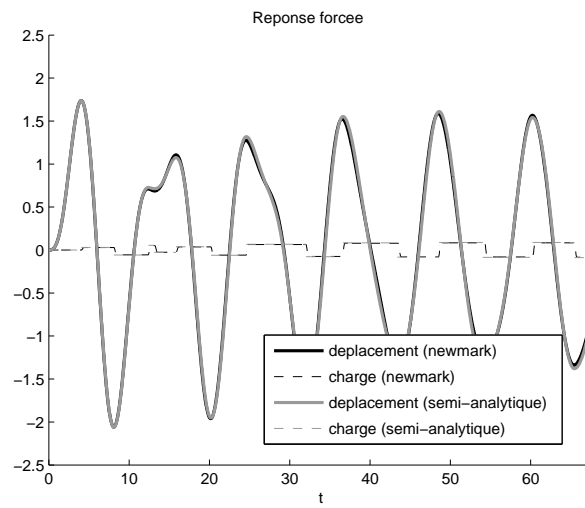


FIG. 8.6: Comparaison du modèle semi-analytique 1 ddl et calcul avec algorithme de Newmark

8.4 Résultats en régime libre

8.4.1 Effet de la stratégie de commutation pour les cas 1 ddl

À la différence du modèle du chapitre 7.2, le modèle de la réponse libre développé ci-dessus permet de prendre en compte la durée de la commutation électrique ; il permet également de prendre en compte des commutations irrégulières. On peut donc tester les différentes stratégies de commutation. Comme dans le cas de la réponse libre analytique, on définit l'amortissement équivalent comme l'amortissement mécanique qui permettrait d'obtenir la même décroissance exponentielle de l'amplitude (7.27). Pour un coefficient de couplage de 0.1 on trace cet amortissement équivalent en fonction de ξ_e , pour les trois stratégies utilisées, ainsi qu'un rappel de l'amortissement équivalent lié aux valeurs propres de la matrice d'amplification définie avec le modèle analytique du paragraphe 7.3.3. La valeur de ω_e est fixée à 10.

Les résultats tracés figure 8.7 montrent que l'amortissement optimal est le même pour les trois stratégies et que les performances obtenues sont pratiquement similaires à celles prévues par le modèle 1 ddl analytique. On cherche alors pour tous les coefficients de couplage l'amortissement électrique optimal ξ_e^{opt} ainsi que l'amortissement équivalent ajouté ; ceux-ci sont tracés figure 8.8, où on constate des résultats très proches de ceux du modèle analytique quelle que soit la stratégie retenue. Les stratégies 2 et 3 permettent d'obtenir des résultats légèrement meilleurs.

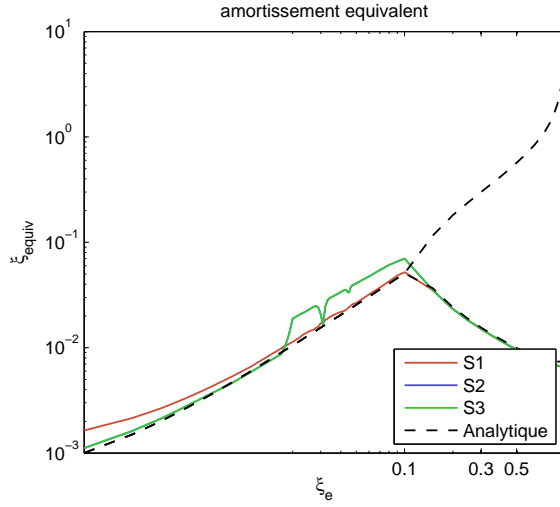


FIG. 8.7: Amortissement équivalent obtenu pour différentes valeurs de ξ_e et stratégies.

8.4.2 Choix de l'inductance

On se place maintenant dans le cas d'un couplage de 0.1, avec l'amortissement électrique optimal correspondant ($\xi_e \simeq 0.127$), et on fait varier la pulsation du circuit électrique (liée à l'inductance) ; on trace l'amortissement équivalent obtenu (taux de décroissance) en fonction de ω_e sur la figure 8.9, comparé à l'amortissement prévu avec le modèle analytique (qui lui ne prend pas en compte ω_e). On constate que :

- pour de faibles valeurs de ω_e , la performance est dégradée, en particulier pour $\omega_e \leq 3\omega_1$;

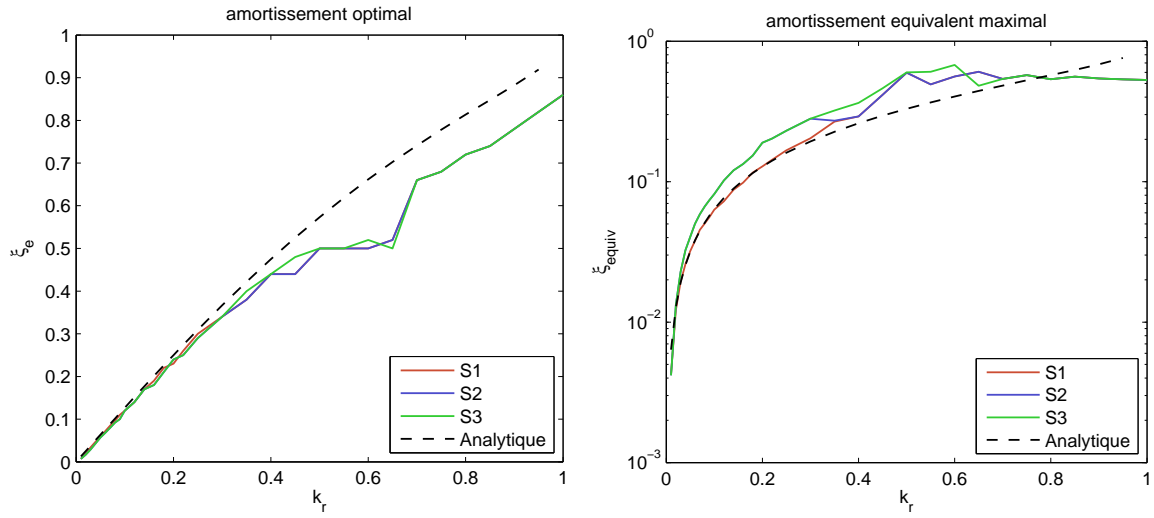


FIG. 8.8: (à g.) valeur optimale de ξ_e ; (à dr.) amortissement équivalent obtenu avec cette valeur

- pour des valeurs élevées $\omega_e \geq 10\omega_1$, on obtient la performance prédite par le modèle avec commutations instantanées;
- le choix de la stratégie n'a pas d'importance pour ce résultat.

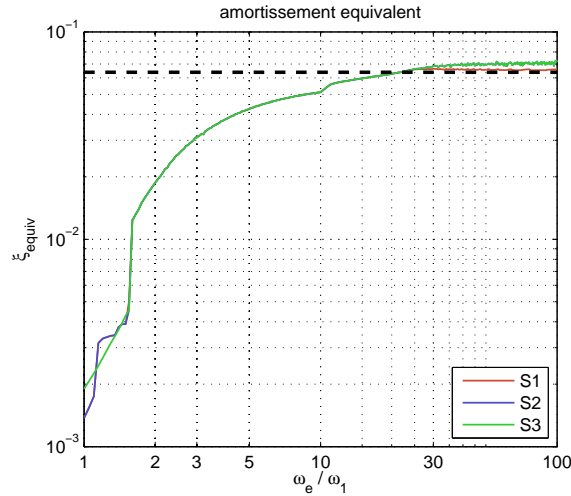


FIG. 8.9: Amortissement équivalent obtenu pour différentes valeurs de ω_e et stratégies.

8.4.3 Systèmes à 2 DDL

Amortissement équivalent

Afin de pouvoir comparer diverses situations à plusieurs ddl, on définit par convention un amortissement équivalent, ramené sur le mode 1. Pour ce faire on compare la réponse libre d'un mode avec amortissement modal :

$$q_1(t) = q_0 e^{-\hat{\omega}_1 \xi_1 t} \cos(\hat{\omega}_1 t) \quad (8.39)$$

dont l'énergie mécanique décroît de manière à peu près exponentielle¹⁰ :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1(t)^2 + \hat{\omega}_1^2 q_1(t)^2) \simeq \hat{\omega}_1^2 q_0^2 e^{-2\hat{\omega}_1 \xi_1 t} \quad (8.40)$$

dans ce qui suit, on observe le taux de décroissance de l'énergie totale (8.10) du système ; ce taux prend en compte l'énergie de l'ensemble des modes et la partie électrique. Pour pouvoir comparer les performances, on ramène ce taux à un amortissement équivalent, c'est à dire *l'amortissement du mode 1 qui permettrait d'avoir le même taux de décroissance*. On note cet amortissement équivalent ξ_{eq} . Afin de l'identifier, on effectue une régression linéaire sur le tracé de l'énergie totale (tracé en dB, voir par exemple figure 8.8) qui permet de retrouver le taux de décroissance moyen τ_{dB} de celle-ci. Alors avec (8.40), il vient :

$$\begin{aligned} \tau_{dB} &= \left(\frac{\mathcal{E}_t(t)}{\mathcal{E}_t(0)} \right)_{dB} = 10 \log \frac{\mathcal{E}_1(t)}{\mathcal{E}_1(0)} \\ &= 10 \log(e^{-2\hat{\omega}_1 \xi_{eq} t}) \\ &= -20 \frac{\hat{\omega}_1 \xi_{eq} t}{\ln 10} \\ \Rightarrow \quad \xi_{eq} &= \frac{\ln(10)}{20\hat{\omega}_1} \tau_{dB}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Cette expression peut être écrite indépendamment du nombre de modes pris en compte. Dans le cas d'un système à un DDL, on retombe sur la définition de l'amortissement ajouté vue au chapitre 7.3.3 ; dans le cas d'un système à plusieurs DDL, cela permet de rendre compte des performances multimode du système en ramenant tout au premier mode uniquement.

Exemple de simulation : cas typique

On étudie le cas d'un système arbitraire à deux modes non amortis :

- Les fréquences propres adimensionnées sont $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 1.3$
- Les coefficients de couplages sont identiques : $k_1 = 0.1$ et $k_2 = 0.1$.
- L'essai est réalisé en lachant le système avec une amplitude initiale unitaire sur le mode 1 et nulle sur le mode 2.
- Le déplacement mesuré est la somme des modes avec des coefficients $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$, comme si on mesurait la position à un emplacement où les modes ont une amplitude identique.
- Le système électrique est bien plus rapide que le mode 1 : $\omega_e = 25\hat{\omega}_1$, et son amortissement est la valeur optimale pour le cas 1 mode avec ce couplage (fig. 8.8) $\xi_e = 0.127$; on devrait ainsi obtenir une commutation courte devant la période d'évolution mécanique du système.

Ces paramètres peuvent être résumés sous forme de tableau :

	ω	ξ	k_r	ampl. init.	Φ
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	1.3	0	0.1	0	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

¹⁰ Avec peu d'oscillation, car on prend en compte l'énergie cinétique et potentielle.

La stratégie de commutation est basée sur la tension électrique (stratégie multimode numéro 1) ; les résultats tracés figure (8.10) montrent que l'amplitude décroît de manière soutenue. Le tracé des énergies totale, de chaque mode et du taux de décroissance (eq. 8.41), même figure à droite, montre que malgré un lâcher avec une amplitude nulle sur le mode 2, celui-ci est excité par la commutation. On peut remarquer que l'énergie décroît bien de manière exponentielle (décroissance linéaire en dB).

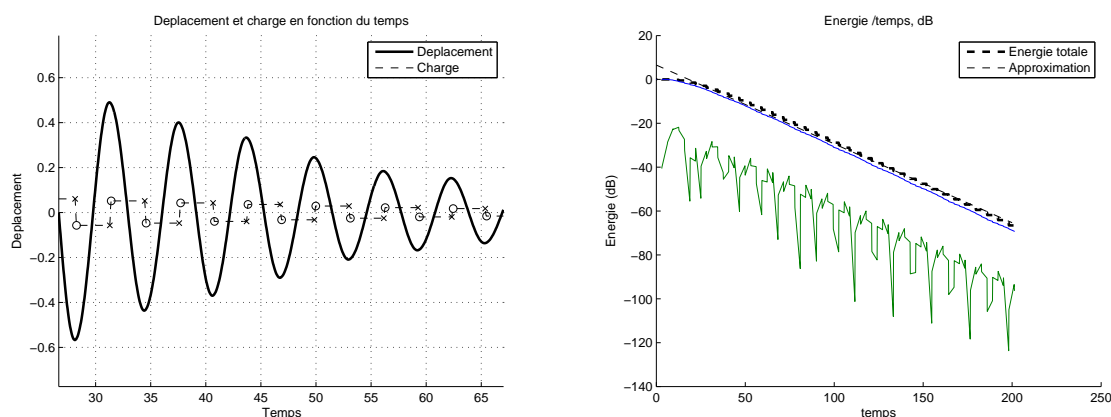


FIG. 8.10: (à g.) Déplacement et charge en fonction du temps dans un cas 2DDL de pulsations 1 et 1.3 (à dr.) Énergies totale et décroissance exponentielle; énergies mécaniques des modes 1 et 2 (bleu et vert)

Cas pathologique

On procède maintenant à une simulation utilisant exactement les mêmes paramètres, sauf la fréquence du mode 2 : on choisit une pulsation de 3.

	ω	ξ	k_r	ampl. init.	Φ
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	3	0	0.1	0	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

Cette pulsation triple de la première fait que la commutation, au départ synchronisée sur le mode 1, réexcite le mode 2 ; on constate alors une perturbation de la commutation, qui devient trop fréquente et intervient à des moments défavorables, c'est à dire tels que la charge électrique permettant de contrer le mouvement de la structure n'augmente pas beaucoup. Sur la figure (8.11) sont tracés les déplacements, charge électrique et coordonnées modales en fonction du temps. En traçant l'énergie, figure (8.12), on constate que le taux de décroissance est très inférieur à ce qu'il était à la figure (8.11).

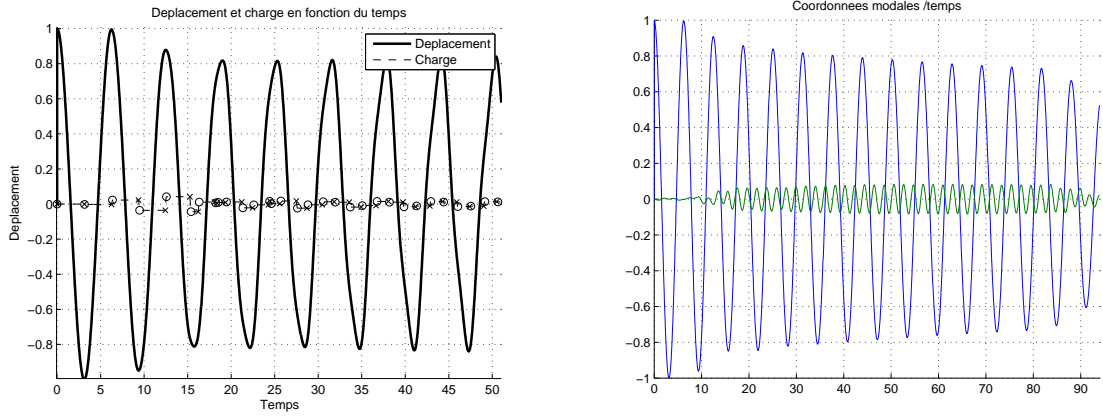


FIG. 8.11: (à g.) Déplacement et charge en fonction du temps dans un cas 2DDL dont un mode de pulsation triple de l'autre; (à dr.) amplitude des modes 1 et 2 (bleu et vert)

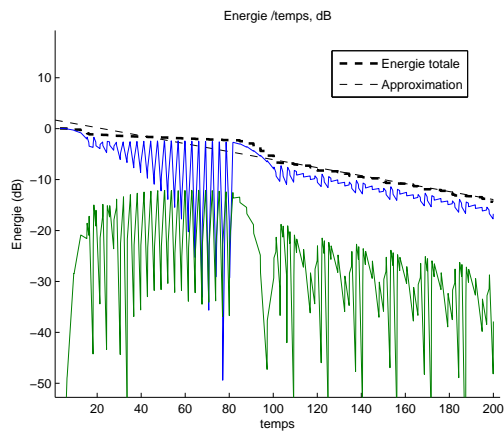


FIG. 8.12: Énergies totales et mécanique de chaque mode.

Cas d'un mode double

On procède maintenant à une simulation identique en tout point, avec cette fois-ci le mode 2 à la même pulsation que le mode 1.

	ω	ξ	k_r	ampl. init.	Φ
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	1	0	0.1	0	1
shunt	$25\hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

Sur la figure (8.13) sont tracés les déplacements, charge électrique et coordonnées modales en fonction du temps. Le déplacement qui a été tracé dépend de l'amplitude de chaque mode par un coefficient identique ; ce déplacement décroît très rapidement. Cependant l'observation de chaque coordonnée modale (à dr.) montre que l'amplitude des deux modes ne décroît pas ; au contraire le mode 2 est excité et se met à osciller en opposition de phase avec le mode 1 ; ce mouvement n'est pas du tout amorti par le dispositif, qui atténue les vibrations en phase des deux modes, et non les vibrations hors-phase.

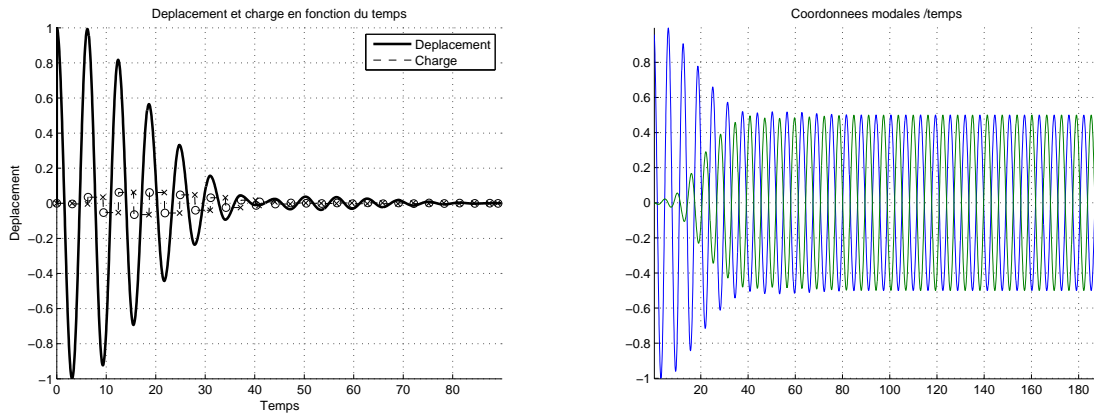


FIG. 8.13: (à g.) Déplacement et charge en fonction du temps dans un cas 2DDL avec des modes doubles ; (à dr.) amplitude des modes 1 et 2 (bleu et vert)

Influence de modes harmoniques

On procède maintenant à des simulations en faisant varier la pulsation du mode 2 comme paramètre ; on choisit un shunt à grande pulsation pour être bien plus rapide que les deux modes.

	ω	ξ	k_r	ampl. init.	Φ
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	0.1 à 10	0	0.1	0	1
shunt	$100\hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

Le coefficient d'amortissement équivalent, lié au taux de décroissance de l'énergie, est tracé en fonction de ω_2 figure (8.14) à gauche ; on trace également le maximum de l'énergie

mécanique du mode 2 (calculée d'après l'expression (8.11)) sur la même figure, à droite. Cela permet de visualiser la réexcitation du mode 2. On constate les effets suivants :

- Dans le cas de modes très proches ou doubles, la performance est fortement réduite, le mode 2 est fortement excité ;
- Dans le cas de modes multiples impairs le même phénomène est observé ;
- Dans le cas de modes multiples pairs, la performance est réduite, cependant la stratégie 3 permet d'éviter une réduction trop importante ;
- Dans les cas de modes non multiples, la performance n'est pas trop affectée ; on constate une certaine dégradation lorsque le mode 2 est éloigné (pulsation bien plus haute ou plus basse).

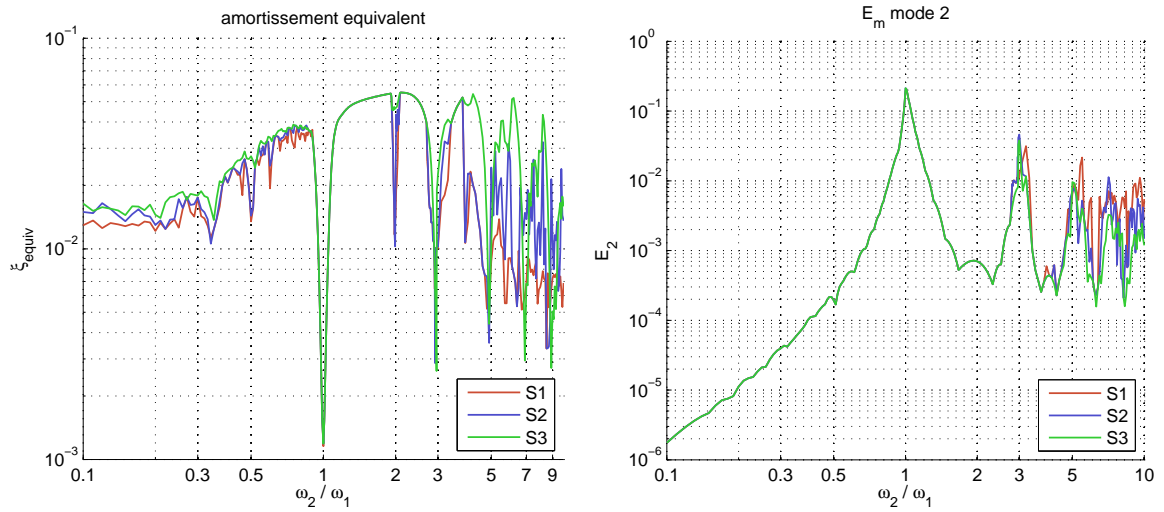


FIG. 8.14: (à g.) Amortissement équivalent en fonction de la pulsation du mode 2, avec les trois stratégies ; (à dr.) Maximum de l'énergie mécanique du mode 2 initialement au repos.

Choix de l'inductance pour éviter l'excitation de modes supérieurs

En constatant que l'excitation du mode 2 dans les cas précédents conduit à une désynchronisation de la commutation et à une baisse de performance, on souhaite choisir une inductance différente. L'idée est qu'en prenant une inductance importante, les fluctuations de la charge seront moins brutales. On devrait ainsi moins exciter le mode 2. On garde les paramètres des simulations précédentes, mais l'on choisit arbitrairement $\omega_2 = 7.3$ et on fait varier ω_e .

	ω	ξ	k_r	ampl. init.	Φ
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	7.3	0	0.1	0	1
shunt	1 à 100 $\hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

En observant l'amortissement équivalent en fonction de ω_e , tracé figure (8.15) à gauche, ainsi que le maximum de l'énergie mécanique du mode 2 (initialement au repos), calculée d'après l'expression (8.40), tracé à droite, on constate que la performance est affectée de la manière suivante :

- Pour de faibles valeurs de ω_e , comme dans le cas d'un seul mode tracé figure (8.9), la performance n'est pas bonne quand $\omega_e \leq 2\omega_1$. Les changements de signe de la charge sont trop lents pour agir sur le mode visé ;
- Pour des valeurs intermédiaires de ω_e ($\omega_e \simeq 3\omega_1$) la performance est plus élevée ; l'excitation réduite du mode 2 permet d'éviter la désynchronisation ;
- Lorsque $\omega_e \simeq \omega_2$, l'excitation du mode 2 est très importante et la performance chute nettement, en raison de la désynchronisation du switch ;
- Finalement, avec $\omega_e > \omega_2$, l'excitation du mode 2 est toujours présente, mais à un niveau moindre.

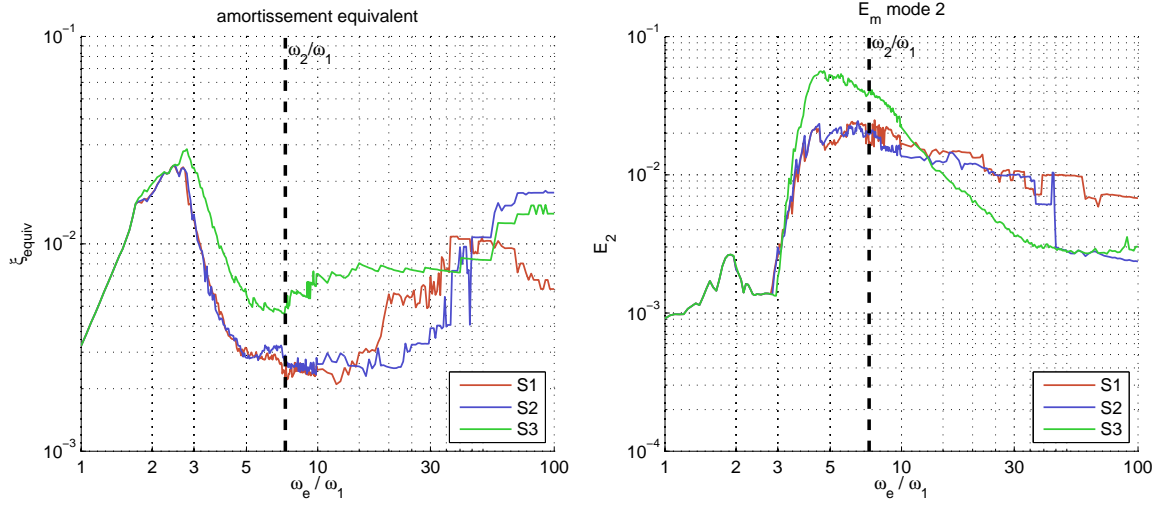


FIG. 8.15: (à g.) Amortissement équivalent en fonction de la pulsation électrique, en présence d'un deuxième mode ($\omega_2 = 7.3$), avec les trois stratégies. (à dr.) Maximum de l'énergie mécanique du mode 2 initialement au repos.

8.4.4 Optimisation du système

L'analyse des résultats obtenus avec le modèle de la réponse libre fait apparaître des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle à un ddl, entre autres l'amortissement électrique optimal qui est assez similaire et dépend du couplage électromécanique, comme montré figure (8.8) ; en revanche, le modèle N ddl permet de trouver quelques directions pour optimiser le système :

- Tout d'abord, la présence de modes harmoniques impairs et électromécaniquement couplés peut réduire la performance, tout comme celle de modes doubles. Il peut donc être intéressant de coupler sélectivement le mode que l'on souhaite réduire. Ce résultat est différent de ce qui est obtenu avec les shunts R et RL, où les modes voisins n'affectent pas les performances ;
- Ensuite, l'inductance doit être choisie pour que la commutation soit nettement plus rapide que le mode à réduire ; on trouve que $\omega_e > 3\omega_1$ convient pour amortir le mode 1 par exemple ;
- Enfin, en fonction de la valeur de l'inductance, il est possible d'éviter l'excitation de modes élevés ; ainsi une inductance importante (ω_e réduit) évite l'excitation de modes

haute fréquence. Il faut cependant éviter de tomber dans le cas où ω_e coïncide avec la pulsation d'un des modes, auquel cas celui-ci sera fortement excité et pourra perturber la synchronisation.

8.5 Résultats en régime forcé

8.5.1 Cas 1 ddl

On commence par simuler la réponse à un forçage harmonique. Afin d'évaluer la performance de l'atténuation en vibration, on utilise l'amplitude RMS de la réponse $u_{\text{RMS}} = \frac{1}{T_f} \sqrt{\int_0^{T_f} u^2 dt}$ où T_f est le temps de fin de la simulation¹¹, avec une échelle en dB. La réponse d'un système de pulsation unitaire, amortissement mécanique $\xi_1 = 0.01$, et coefficient de couplage $k_1 = 10\%$ est tracée figure 8.16. On exerce sur le mode un forçage harmonique d'amplitude F_1 et on observe le déplacement en un point où l'amplitude du mouvement est $\Phi_1 q_1$. On obtient des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle 1 ddl au chapitre 7.4.

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = 0.7 \text{ à } 1.4$	-	-	-	-

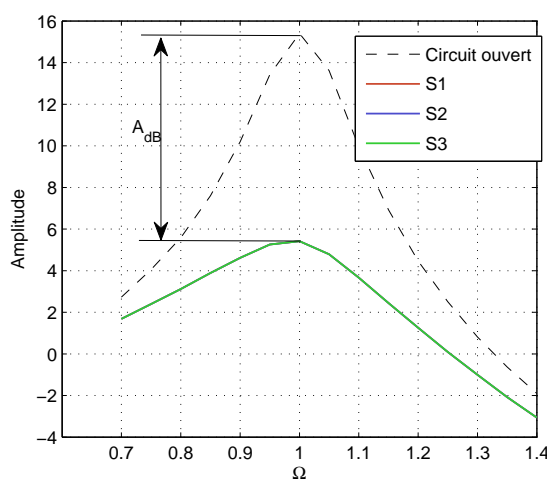


FIG. 8.16: Atténuation obtenue en fonction de Ω

De la même manière qu'au chapitre 7.4, on définit l'atténuation A_{dB} apportée par le dispositif de switch comme la différence d'amplitude RMS, en dB, entre les maxima¹² de la

¹¹Étant donné la lenteur relative des calculs, on choisit un amortissement mécanique plus élevé dans ces simulations afin d'atteindre le régime établi assez rapidement ; cependant l'influence des régimes transitoires peut parfois donner des résultats différents de ceux du chapitre 7.4.

¹²Dans le chapitre 7.4 les maxima étaient identifiés sur la plage de fréquence ; ici la lenteur des calculs fait que l'on choisit d'exciter le système à la première résonance en circuit ouvert et que l'on suppose que c'est le maximum de la réponse avec switch aussi.

réponse circuit ouvert et avec switch ; cette atténuation dépend du forçage et de la participation de chaque mode (F_r et Φ_r) qui seront précisés.

On teste plusieurs valeurs du coefficient de couplage k_1 et du coefficient d'amortissement électrique ξ_e ; on identifie ξ_e^{opt} permettant d'obtenir l'atténuation la plus élevée possible : ces résultats sont tracés figure (8.17) ; ils sont très similaires à ceux obtenus précédemment (figure (7.16) et (7.26)), mais la valeur de l'amortissement mécanique différente ne permet pas de comparaison directe.

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0 à 1	1	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0 à 1	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

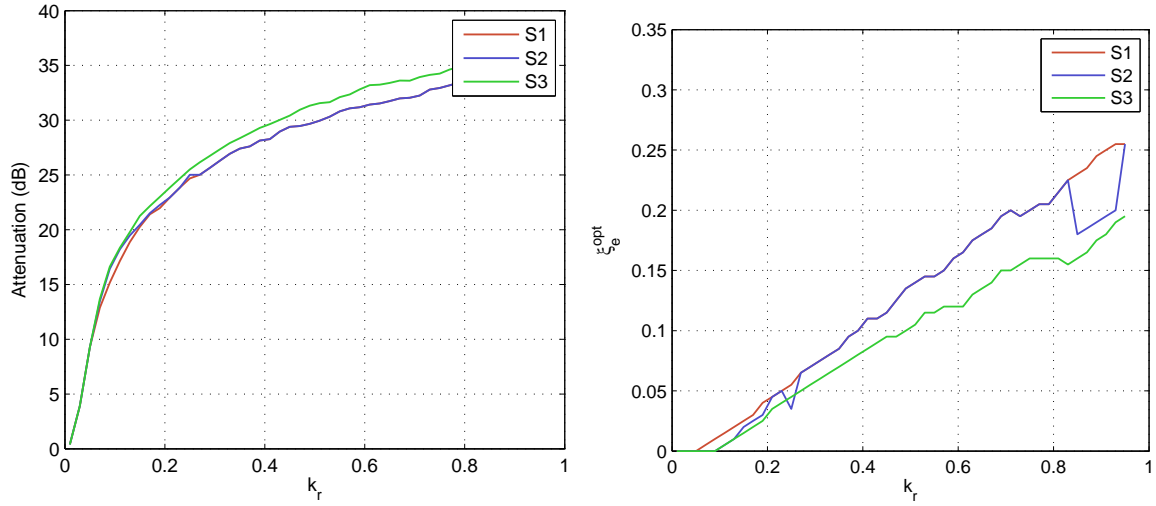
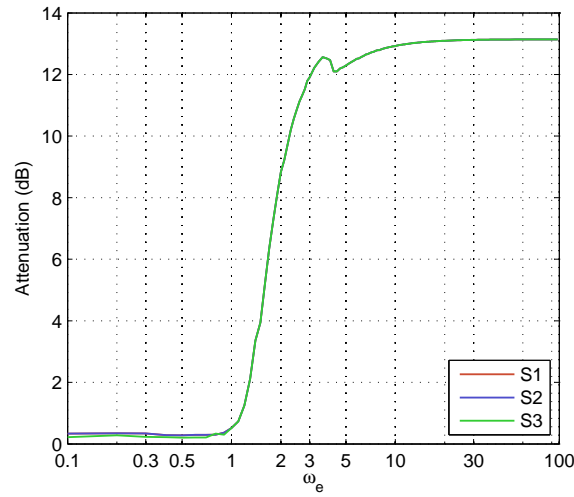


FIG. 8.17: (à g.) Atténuation maximale en fonction du couplage ; (à dr.) Valeur de ξ_e permettant d'obtenir cette atténuation. Ces résultats peuvent être comparés à la figure (7.26) obtenue avec le modèle 1 ddl, mais l'amortissement mécanique différent ne permet pas de comparaison directe.

Choix de l'inductance

Comme au paragraphe 8.4.2, on observe l'influence de ω_e sur la performance du système ; cela ne pouvait être fait avec le modèle 1 ddl, qui ne prend pas en compte la durée des phases circuit fermé. L'atténuation obtenue est tracée figure (8.18) ; de la même manière que pour le cas du régime libre, on constate que l'atténuation est pratiquement nulle pour ω_e faible, et que des valeurs $\omega_e > 3\omega_1$ permettent d'amortir correctement le premier mode.

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
shunt	$\omega_e = 0.1 \text{ à } 100 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

FIG. 8.18: Atténuation obtenue en fonction de ω_e

8.5.2 Cas 2 ddl

Effet des modes harmoniques

On étudie maintenant l'effet de la présence d'un deuxième mode, dont on teste plusieurs pulsations. Ce mode n'est pas forcé directement et ne participe pas au déplacement mesuré ; l'atténuation que l'on mesure n'est donc que celle du mode 1. Par contre, l'effet de la charge peut exciter le mode 2, et celui-ci peut à son tour désynchroniser la commutation.

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	$\omega_2 = 0.1 \text{ à } 10 \hat{\omega}_1$	0.01	0.1	0	0
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

En fonction de ω_2 on trace l'atténuation du mode 1 ainsi que l'amplitude RMS du mode 2, qui permet de rendre compte de l'excitation (ou non) du deuxième mode ; les résultats sont tracés figure 8.19. On constate, comme pour le cas de la réponse libre au chapitre 8.4.3, les phénomènes suivants :

- La présence d'un mode double (ou presque double) entraîne une baisse très nette de l'efficacité ; le deuxième mode est en effet fortement excité et vient perturber la synchronisation de la commutation ;
- Lorsque le deuxième mode est harmonique impair, il est également excité, et on observe une baisse de l'efficacité de l'amortissement du premier mode ;
- La présence d'un mode de pulsation élevée perturbe la synchronisation ; la stratégie 3 permet néanmoins de conserver une certaine efficacité.

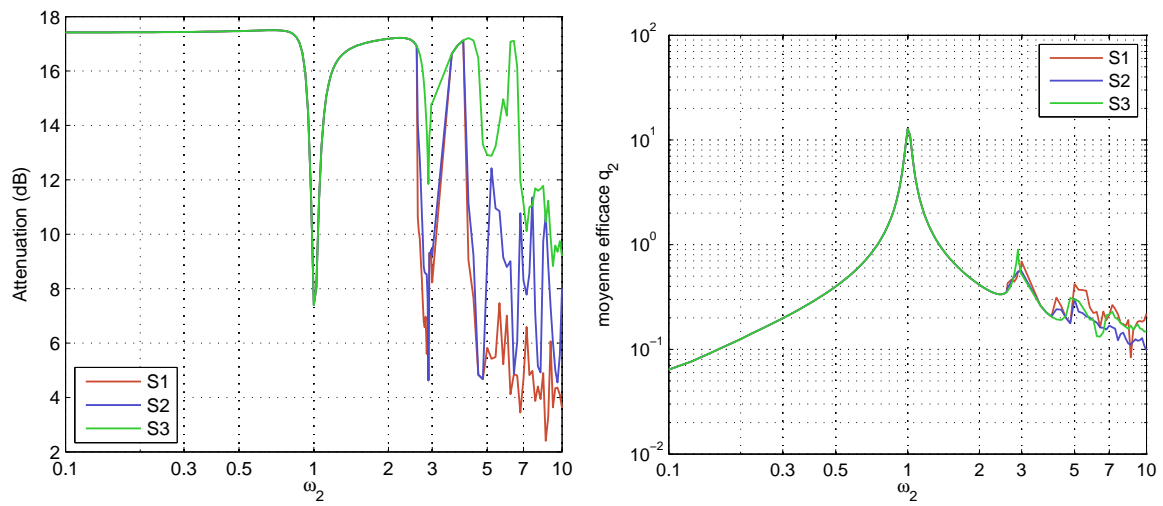


FIG. 8.19: (à g.) Atténuation obtenue sur le mode 1 en fonction de la pulsation du deuxième mode, (à dr.) Amplitude RMS du mode 2.

Choix de l'inductance : spectre du signal de charge

Au paragraphe 8.4.2 on a vu qu'il était possible de choisir l'inductance pour éviter d'exciter un mode plus élevé, dans le cas de la réponse libre. Cette possibilité existe également en régime forcé ; de plus il est possible d'expliquer le phénomène en observant le spectre d'une partie de la réponse forcée. On choisit un système à un ddl excité à résonance, avec switch. Le signal de charge est tracé figure (8.20, à g.) pour une inductance telle que la pulsation électrique soit $\omega_e = 3$ ou bien $\omega_e = 25$; le spectre de ce signal une fois le régime établi atteint est tracé à côté.

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
shunt	$\omega_e = 3$ ou $25 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

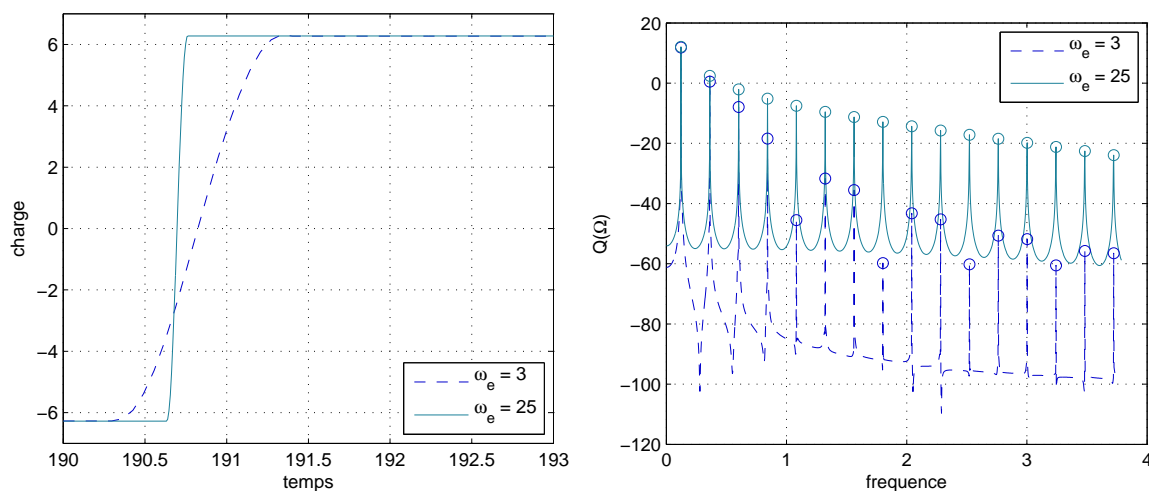


FIG. 8.20: (à g.) Charge en fonction du temps autour d'une commutation pour deux inductances différentes ; (à dr.) spectre de ce signal en régime établi.

On constate que les changements de signe de la charge se font plus brutalement avec ω_e élevée ; le spectre du signal est comparable à celui d'un signal carré. Au contraire, pour des valeurs faibles de ω_e , le signal est comparable à un signal carré "adouci", avec des hamorniques d'amplitude plus réduite. Ainsi, si ω_e est suffisamment bas, l'effet de la charge sur les modes élevés devrait être réduit.

Choix de l'inductance : excitation d'un mode élevé

On simule maintenant un système à deux modes arbitraires, et on teste plusieurs valeurs de ω_e afin de vérifier si il est possible d'éviter l'excitation du mode 2 et donc d'amortir correctement le mode 1. Le mode 1 est le seul forcé et le seul à participer au déplacement ; le mode 2 ne fait que perturber la commutation.

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	7.3	0.01	0.1	0	0
shunt	$\omega_e = 0.1 \text{ à } 100 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

Sur la figure (8.21) on trace à gauche l'atténuation apportée sur le mode 1 ; à droite la moyenne RMS de l'amplitude du mode 2. On peut faire les observations suivantes :

- Pour de faibles valeurs de ω_e , la commutation est trop lente et le système n'est pas efficace ;
- Pour des valeurs intermédiaires de ω_e ($2\omega_1 < \omega_e < \omega_2$) l'atténuation est bonne ; l'excitation réduite du mode 2 permet d'éviter la désynchronisation ;
- Lorsque $\omega_e \simeq \omega_2$, l'excitation du mode 2 est importante et l'atténuation chute nettement, en raison de la désynchronisation du switch ;
- Finalement, avec $\omega_e > \omega_2$, l'excitation du mode 2 est toujours présente, mais à un niveau moindre. L'atténuation est correcte ; en particulier avec la stratégie 3. La stratégie 1, qui consiste à commuter à chaque annulation de la dérivée du voltage, reste perturbée par le mode 2.

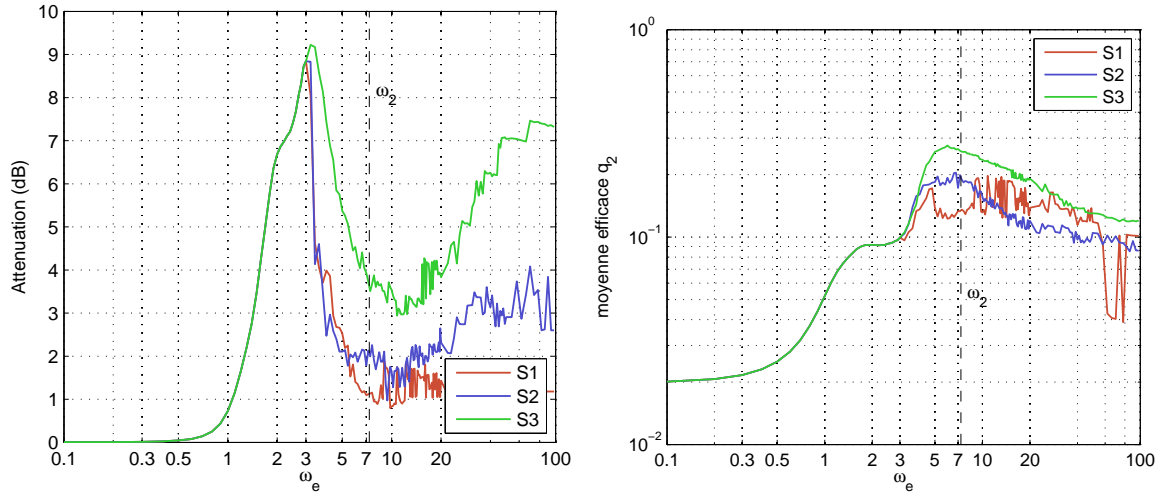


FIG. 8.21: (à g.) Atténuation apportée sur le mode 1 ; (à dr.) amplitude RMS du mode 2

Effet de l'amortissement du mode 2 sur la dissipation

Suivant les cas, on a constaté que les modes élevés peuvent être excités par la commutation. Dès lors, une puissance mécanique est dissipée par leur amortissement. À la section 8.1.4 on a défini différentes puissances, dont la puissance mécanique dissipée par chaque mode. En constatant qu'une partie de la puissance entrant dans le système est dissipée par les modes élevés (bilan d'énergie (8.10), schéma 8.2) , on se propose d'évaluer l'influence de leur amortissement. L'idée serait par exemple de combiner un dispositif à commutation avec un dispositif qui permet d'apporter un amortissement sur les modes haute fréquence. On fait

des simulations d'un système à deux modes en faisant varier l'amortissement du mode 2 ; l'atténuation du mode 1 est tracée figure 8.22 à gauche. À droite on trace les puissances¹³ moyennes $-\mathcal{C}_m$, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 (d'après §8.1.4) en fonction de l'amortissement ξ_2 . On définit la moyenne d'une puissance comme :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \mathcal{P} dt.$$

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	2.3	0 à 1	0.1	0	0
shunt	20	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

On peut faire les remarques suivantes :

- L'atténuation varie peu ici, l'amortissement des modes élevés a peu d'importance ;
- La puissance dissipée par le mode 2 augmente en fonction de ξ_2 , l'amplitude du mouvement variant peu ;
- Cette puissance reste très faible devant la puissance dissipée mécaniquement dans le mode 1 ;
- La puissance (négative) de l'effet de la charge sur la partie mécanique, \mathcal{C}_m , est bien plus importante.

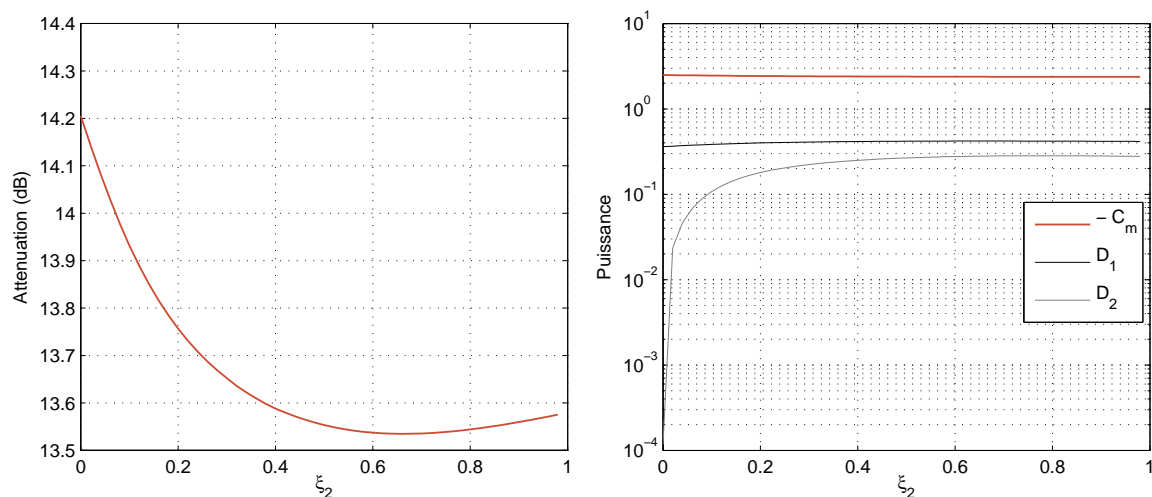


FIG. 8.22: (à g.) Atténuation apportée sur le mode 1 en fonction de ξ_2 - remarquer l'échelle ; (à dr.) Puissances en fonction de ξ_2 .

Effet de l'amortissement du mode 2 sur la synchronisation

On fait les mêmes simulations que précédemment, à la différence que le mode 2 est maintenant un harmonique 3 du mode 1 ; on a vu que cela causait une désynchronisation et une

¹³Où l'opposé de celles qui sont négatives

perte d'efficacité du système lorsqu'il était faiblement amorti. Les résultats sont tracés figure (8.23)

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	3	0 à 1	0.1	0	0
shunt	20	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

On constate l'effet suivant :

- L'amortissement mécanique du mode 2 dissipe peu d'énergie ;
- Le mode 2, lorsqu'il est faiblement amorti, perturbe la synchronisation et réduit l'efficacité du système ;
- Ce problème disparaît lorsque le mode 2 est fortement amorti ($\xi_2 > 0.8$) ; néanmoins, vu les valeurs d'amortissement requises même pour améliorer un peu la réponse, il ne s'agit pas d'une solution pratique.

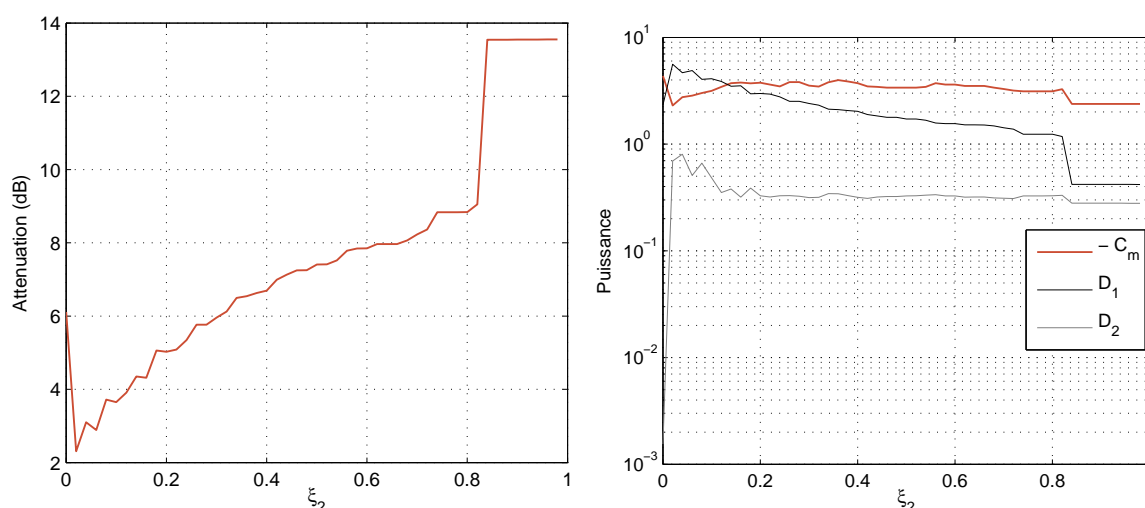


FIG. 8.23: (à g.) Atténuation apportée sur le mode 1 en fonction de ξ_2 (à dr.) Puissances en fonction de ξ_2

8.5.3 Cas N ddl

On observe maintenant la réponse temporelle d'un système ayant les caractéristiques suivantes (choisies arbitrairement) :

- La partie mécanique se constitue de trois modes , avec $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2.5$, $\omega_3 = 7.3$, d'amortissements respectifs $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.01$ et de coefficient de couplage $k_1 = 0.15$, $k_2 = 0.1$, $k_3 = 0.05$;
- Chacun des modes est excité par le même effort modal, et le déplacement est la somme des coordonnées modales avec un coefficient identique ;
- Le système est forcé par un sinus glissant passant par la résonance du mode 1 ;

- Le shunt utilisé est tel que $\omega_e = 25$ et $\xi_e = 0.05$; on fait la simulation en circuit ouvert, puis avec les trois stratégies de commutation proposées.

	ω_r	ξ_r	k_r	F_r	Φ_r
mode 1	1	0.01	0.15	1	1
mode 2	2.5	0.01	0.1	1	1
mode 3	7.3	0.01	0.05	1	1
shunt	25	0.05	-	-	-
forçage	glissant	-	-	-	-

Le déplacement est tracé en fonction du temps figure 8.24. On observe bien, pour la simulation en circuit ouvert, le passage par la résonance, qui se traduit par une amplitude importante. Par contre en présence de switch, l'amplitude est plus réduite. On constate également l'efficacité de la stratégie 3, qui permet de conserver une amplitude bien plus faible que les autres. Les stratégies 1 et 2 apportent une réduction d'amplitude, cependant on observe une certaine instabilité de l'amplitude au cours du temps.

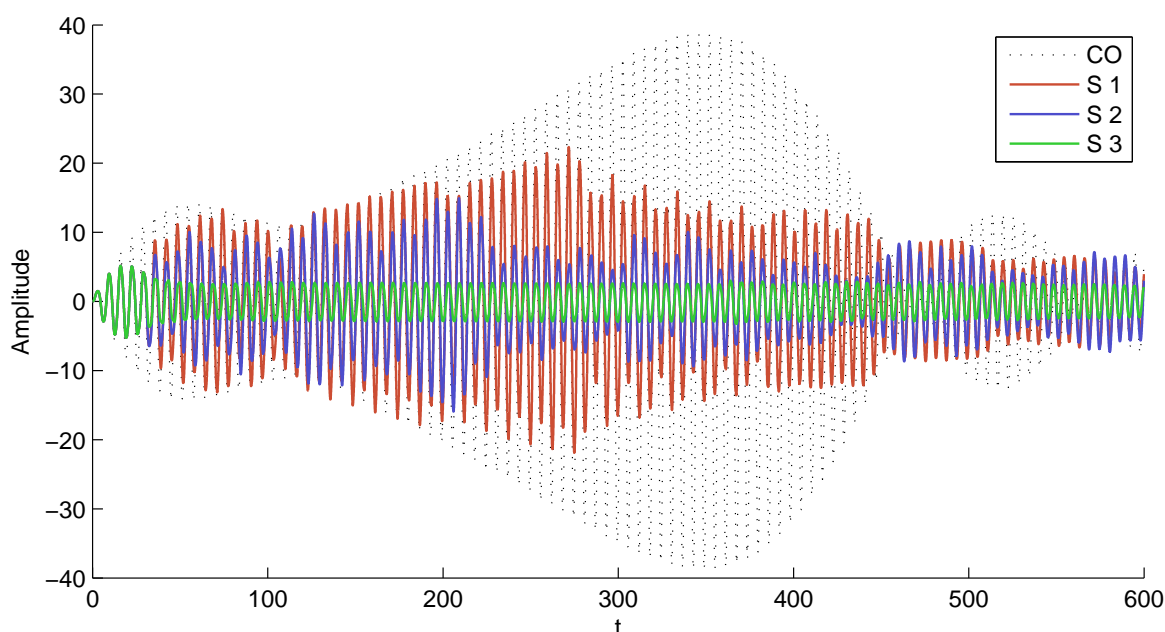


FIG. 8.24: Amplitude du déplacement avec forçage en sinus glissant

Tension

On trace figure 8.25 la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique pour chacune des trois stratégies, en mettant en valeur l'instabilité de la tension avec la stratégie 1. Avec la stratégie 2 on peut constater que par moments la tension passe par un maximum mais la commutation n'a pas lieu (commutation évitée). Enfin pour la stratégie 3 on remarque que les commutations se produisent régulièrement. Ces tracés sont utiles pour comprendre l'évolution des puissances et énergies dans le système.

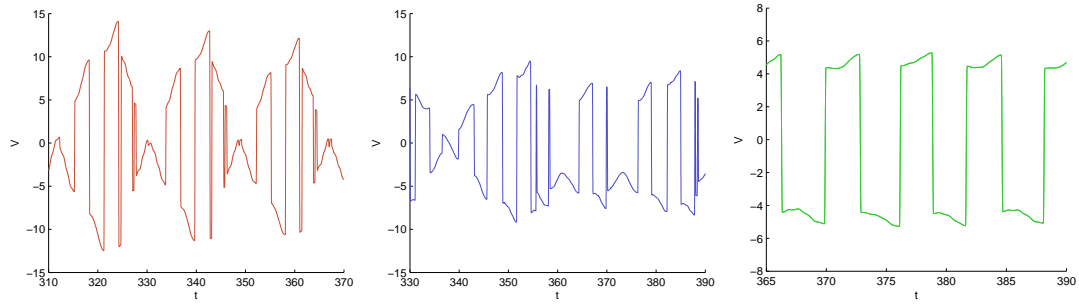


FIG. 8.25: Tension aux bornes de l'élément piézoélectrique au cours de la simulation (détail) ; stratégies 1 à 3 de g . à dr .

Énergies

Il est intéressant de tracer les énergies au cours du temps pour ces systèmes (définies au §8.1.4) ; on trace figure 8.26 l'évolution des énergies mécaniques de chacun des modes ainsi que de l'énergie électrique (équations (8.11) et (8.12)) ; la moyenne de l'énergie du mode 1 $\langle \mathcal{E}_1 \rangle$ ainsi que les rapports entre les énergies des autres modes et l'énergie électromagnétique sont décrites dans le tableau (8.1). On observe les résultats suivants :

- Le mode 1 est la principale contribution à l'énergie mécanique ; la commutation provoque une remontée du niveau relatif des autres modes ;
- Pour la stratégie 1, on observe régulièrement un début de stockage d'énergie électrique, puis lors d'une commutation survenant à un moment défavorable, l'énergie électromagnétique chute brutalement, créant un motif “en dents de scie”. Chaque fois que l'énergie électromagnétique chute, l'énergie mécanique croît ; c'est le mode 1 vers lequel cette réinjection se produit, ce qui est le plus pénalisant en termes d'amplitude, en raison de sa faible raideur. Cependant les autres modes sont également excités et leur niveau (relativement au mode 1) remonte. Ce comportement correspond à un tracé de tension qui présente un phénomène de battement figure 8.25 à gauche.
- Pour la stratégie 2, on observe le même motif, cependant les commutations défavorables surviennent moins souvent (certaines sont évitées, voir figure 8.25 au centre) ; l'énergie électrique stockée est environ la moitié de l'énergie mécanique, ce qui montre que malgré un couplage $k_1 = 0.15$ il est possible de “pomper” l'énergie au cours du temps ;
- Enfin pour la stratégie 3, les chutes d'énergie électrique sont évitées. Une énergie électrique importante (environ 2.6 fois l'énergie mécanique) est stockée dans l'élément piézoélectrique, et l'effet de la charge limite fortement l'amplitude du mouvement. Cela est possible car les commutations se produisent de manière régulière (figure 8.25 à droite) et toujours à un moment où de l'énergie est prélevée sur la partie mécanique.

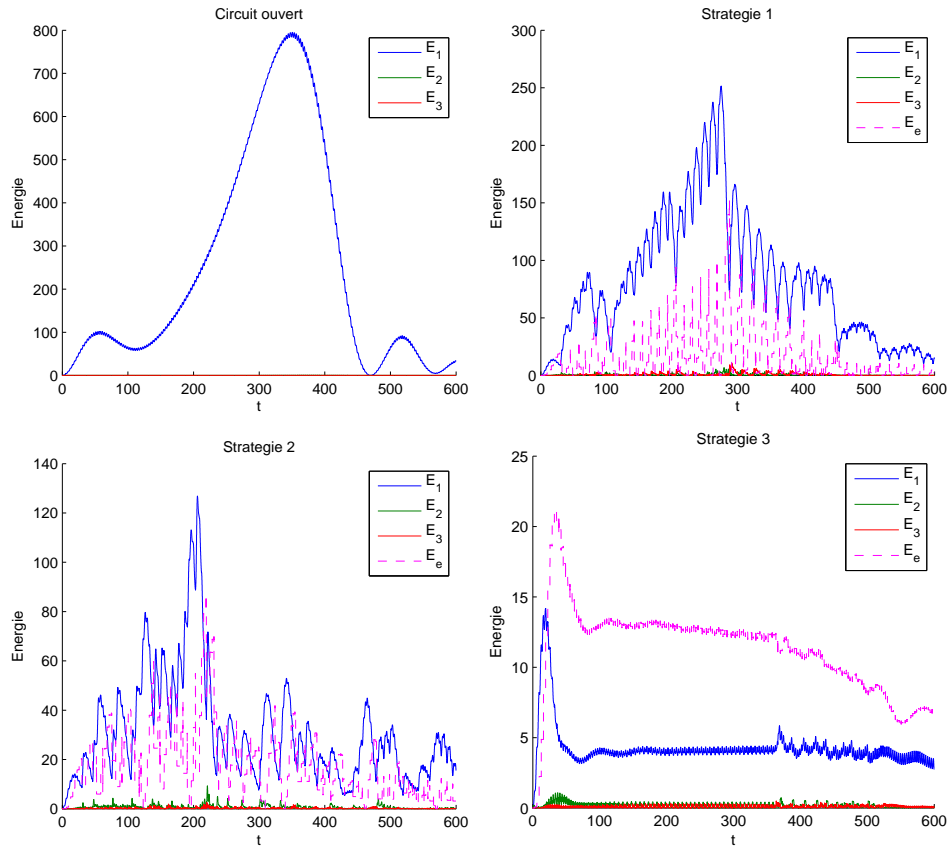


FIG. 8.26: Énergies mécaniques et électrique en fonction du temps pour des simulations circuit ouvert (en haut à gauche), avec les stratégies 1 2 et 3 respectivement en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite.

	Circuit ouvert	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
$\langle \mathcal{E}_1 \rangle$	247	80.5	30.9	4.24
$\langle \mathcal{E}_2 \rangle / \langle \mathcal{E}_1 \rangle$	0.047 %	0.7 %	2.1 %	4.4 %
$\langle \mathcal{E}_3 \rangle / \langle \mathcal{E}_1 \rangle$	0.005 %	1 %	0.6 %	2.3 %
$\langle \mathcal{E}_e \rangle / \langle \mathcal{E}_1 \rangle$	0	19.5 %	54 %	267 %

TAB. 8.1: Comparaison des énergies moyennes du mode 1 et des autres entre stratégies

Puissances

On trace maintenant différentes puissances en fonction du temps ; on s'intéresse en particulier à $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$, les puissances de dissipation mécanique de chaque mode (§8.1.4), à \mathcal{D}_e la puissance électrique dissipée par effet Joule, et à \mathcal{C}_m , la puissance exercée par l'effet de la charge sur la partie mécanique. Les résultats sont tracés figure 8.27 ; on donne les moyennes de la puissance extérieure ainsi que les moyennes des puissances dissipées, et de la puissance \mathcal{C}_m ainsi que sa répartition par modes dans le tableau 8.2. On constate les résultats suivants, qui peuvent être interprétés en gardant la répartition de l'énergie et des puissances à l'esprit (fig. 8.1) :

- La puissance instantanée dissipée par effet Joule \mathcal{D}_e est très importante (fig. 8.27 en haut à gauche) ; par contre sa valeur moyenne est du même ordre de grandeur que les autres puissances ; cela est du à la faible durée des phases circuit fermé ;
- Les stratégies que l'on a proposé ont pour but d'avoir une puissance \mathcal{C}_m importante et négative (§8.2.2) ; ce critère est vérifié avec plus ou moins de succès. Ainsi, on observe que la stratégie 1 consistant à switcher sur tous les extrema de tension n'est pas adaptée, \mathcal{C}_m devenant fréquemment positive ;
- La stratégie 2, basée sur une estimation de \mathcal{C}_m avant le switch et censée conserver cette puissance toujours négative, est un peu plus efficace. Néanmoins, des commutations intempestives subsistent. Cela est lié à l'estimation de \mathcal{C}_m avant chaque switch, qui n'est pas exacte. Contrairement à ce qui a été vu avec le modèle 1 ddl (fig. 7.26), où la stratégie 2 était la meilleure, la stratégie 3 est ici la plus efficace.
- La stratégie 3, basée sur un critère électrique, permet d'avoir une puissance \mathcal{C}_m importante (et négative) ; cela peut être vu dans le tableau 8.2 où 91 % de la puissance exercée par les efforts extérieurs est absorbée par la charge. L'autre manière d'analyser le comportement du système est d'observer la puissance dissipée par effet Joule : de ce point de vue aussi, la stratégie 3 est la plus efficace, puisque 89 % de l'énergie apportée est dissipée dans la résistance.
- Dans chacun des cas étudiés, l'amortissement des modes supérieurs n'a que peu d'importance ; les puissances dissipées sont faibles par rapport à la puissance exercée par l'extérieur. Cependant, on constate que la proportion de la puissance de dissipation mécanique dans les modes élevés augmente. En regardant les moyennes des composantes de \mathcal{C}_m par mode, on observe bien que \mathcal{C}_1 est négative (donc on prélève de l'énergie sur le premier mode) tandis que \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 sont positives (on injecte de l'énergie sur les modes élevés).
- La somme des dissipations n'est pas 100 % car de l'énergie est stockée dans le système à la fin de l'évolution.

Mécanisme de réduction de vibration

Le mécanisme principal de réduction de l'amplitude des vibrations est l'effet de la charge électrique \mathcal{C}_m sur la partie mécanique, qui s'oppose au mouvement. La puissance des efforts extérieurs est dès lors moindre, et l'énergie mécanique diminue globalement. L'énergie prélevée sur la partie mécanique est transférée essentiellement vers une charge stockée dans l'élément piézoélectrique, puis dissipée par la résistance. La réémission d'énergie vers les modes haute fréquence (puis sa dissipation par l'amortissement mécanique de ces modes) intervient pour une faible part dans la dissipation de l'énergie stockée dans l'élément piézoélectrique.

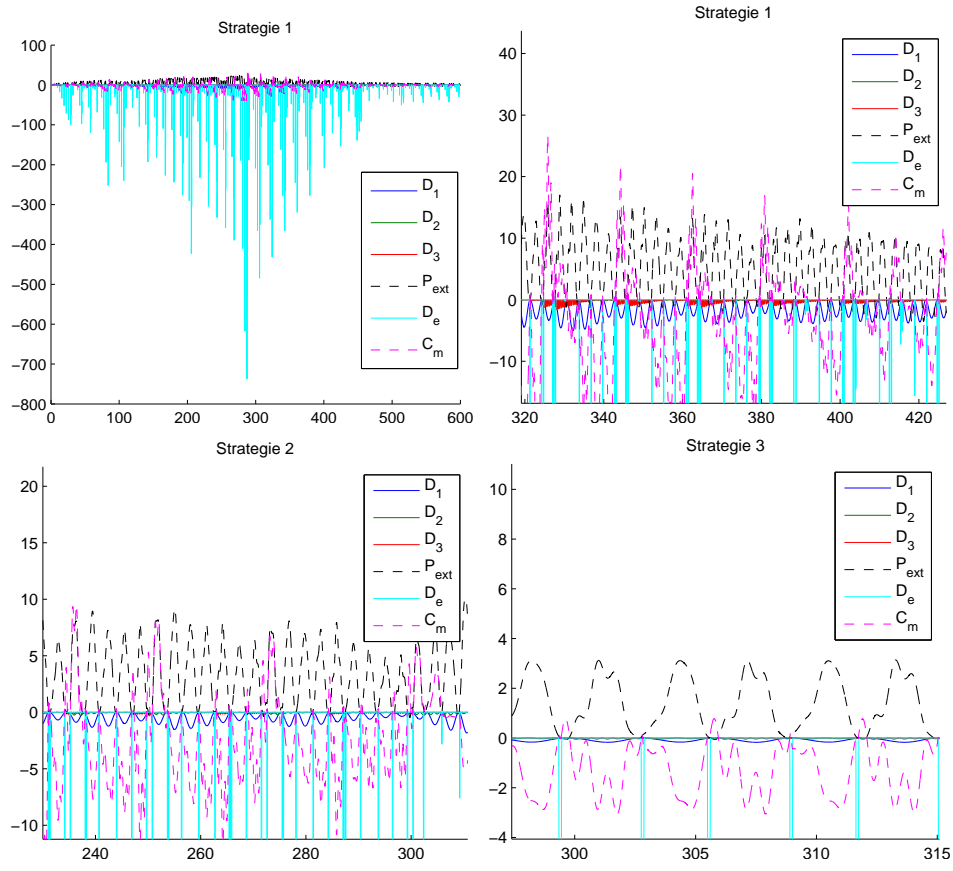


FIG. 8.27: Puissances mécaniques, électriques et de couplage en fonction du temps ; en haut à g. , avec stratégie 1, en haut à dr. détail avec stratégie 1, en bas à g. détail avec stratégie 2, en bas à dr. détail avec stratégie 3

	Circuit ouvert	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	5.0	4.27	3.05	1.28
$\langle \mathcal{D}_1 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	98.9 %	37.5 %	20.1 %	6.6 %
$\langle \mathcal{D}_2 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0.03 %	0.5 %	0.9 %	0.7 %
$\langle \mathcal{D}_3 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0.001 %	2.7 %	0.8 %	0.98 %
$-\langle \mathcal{C}_m \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	58.6%	77.2 %	91.2 %
$-\langle \mathcal{C}_1 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	62.6%	80 %	94.5 %
$-\langle \mathcal{C}_2 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	-1.1%	-1.7 %	-2 %
$-\langle \mathcal{C}_3 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	-2.8%	-1 %	-1.2 %
$\langle \mathcal{D}_e \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	57.9 %	76.1 %	89.4 %

TAB. 8.2: Comparaison des intégrales des puissances extérieure et dissipée entre stratégies.

Remarque sur les puissances et les énergies

Sur la simulation précédente, si l'on calcule les intégrales de $-\mathcal{C}_m$ ou \mathcal{D}_e entre différentes stratégies, on constate que celles-ci diminuent avec les stratégies plus efficaces. Par contre, si on les compare à l'intégrale de \mathcal{P}_{ext} , la fraction d'énergie transférée augmente. Au paragraphe 8.2.2, il était mentionné que le but de ces stratégies était de maximiser ces puissances ; or il semble qu'au contraire, plus une stratégie est efficace pour réduire les vibrations, moins la puissance transférée est importante. Cette contradiction apparente provient de la différence d'approche :

- On peut optimiser une puissance à effort imposé ; cela conduit à chercher à obtenir un système se comportant de manière “souple” ; ainsi les déplacements sont de grande amplitude et la puissance extérieure est importante. Cette démarche n'est pas adaptée à l'optimisation d'un système de réduction de vibrations. Elle pourrait éventuellement être adaptée à un cas de récupération d'énergie.
- Ou bien on peut optimiser cette puissance à déplacement imposé. Cela conduit à adopter un système se comportant de manière “raide” et fortement amortie ; pour le même déplacement une puissance importante est dissipée. Par contre, lorsqu'on impose un effort à ce type de système, son mouvement de faible amplitude fait que la puissance extérieure est faible. La faible amplitude de mouvement est justement l'objectif recherché en réduction de vibrations.

Ainsi l'optimisation de la stratégie pour maximiser la puissance \mathcal{C}_m ou \mathcal{D}_e à *déplacement imposé* réduit l'amplitude du mouvement et finalement engendre une baisse de la puissance à *effort imposé*.

8.6 Conclusion sur le modèle N DDL

Optimisation Deux modèles ont été développés afin d'étudier la réponse libre et forcée de systèmes à commutation. Les résultats obtenus prolongent ceux du chapitre 1 DDL ; ainsi les résultats suivants sont similaires :

- Le coefficient de couplage k_r doit être maximisé pour atténuer efficacement le r -ième mode ;
- Le coefficient d'amortissement du shunt ξ_e doit être adapté au coefficient de couplage.

En revanche, de nouveaux résultats sont obtenus en ce qui concerne l'optimisation des composants :

- L'inductance doit être choisie assez faible pour obtenir $\omega_e > 3\omega_r$; en dessous de cette valeur la commutation, trop “lente”, n'est pas efficace ; ce résultat était supposé dans d'autres travaux [70], mais ici il est établi.
- Une inductance faible, entraînant une valeur de ω_e élevée, engendre des variations de charge rapides ; l'effet de la commutation sur la structure a alors un spectre comportant plus d'énergie dans les hautes fréquences. Ce résultat était mentionné pour la plupart des études expérimentales [24, 70], mais est ici vérifié par le tracé de spectres (figure 8.20).
- De manière générale, les modes haute fréquence ayant une grande influence sur la dérivée de la tension peuvent désynchroniser la commutation ; les précautions expérimentales prises par la plupart des équipes montrent que le problème est connu.
- La présence d'un mode harmonique impair et couplé électromécaniquement peut être très pénalisante pour la performance du système ; en effet, cela peut engendrer une

désynchronisation de la commutation. Il peut alors être intéressant de changer sa fréquence en modifiant la structure, ou de le découpler électromécaniquement afin d'éviter son excitation ; de nombreuses discussions avec l'équipe du LGEF montrent que ce problème est très connu ; il est ici vérifié en simulation.

- En choisissant une inductance élevée, il est possible d'éviter l'excitation de certains modes haute fréquences, ce qui permet dans certains cas d'éviter la désynchronisation.

Stratégie Sur la simulation finale d'un système à trois ddl, les trois stratégies proposées ont des comportements différents :

- La stratégie 1, consistant à fermer le circuit à chaque annulation de dérivée de la tension, ne permet pas de garder la synchronisation ;
- la stratégie 2, basée sur une évaluation de la puissance \mathcal{C}_m et visant à la garder négative, est plus efficace mais des commutation intempestives se produisent toujours. L'évaluation de la puissance utilisée pour cette stratégie est basée sur une prédiction de la vitesse basée sur l'hypothèse de commutation instantanée. C'est sans doute cela qui pose un problème, puisqu'à la différence du chapitre précédent, la durée des phases circuit fermé est prise en compte. On peut remarquer que dans le cas 1 ddl avec commutations instantanées, cette stratégie était la plus efficace.
- La stratégie 3, basée sur un critère électrique et consistant à maximiser \mathcal{C}_e l'énergie transférée à l'élément piézoélectrique, présente de bons résultats. La commutation reste synchronisée et la charge stockée est importante, ce qui permet d'agir sur la partie mécanique de manière efficace et de limiter l'amplitude des vibrations.

Le choix d'une stratégie de commutation adaptée permet d'améliorer la performance. Néanmoins, dans cette étude, *on s'est volontairement limité à des stratégies de commutation ne faisant appel qu'à des grandeurs connues instantanément.*

Les simulations et les expériences montrent que les critères proposés ci-dessus ont tous la même limite : l'influence de modes haute fréquence fait que \dot{V} change très souvent de signe. Ainsi, la commutation peut être déclenchée très fréquemment si la stratégie n'est pas bien conçue. On trouve dans les travaux d'autres équipes de nombreuses manières d'éviter cet écueil (§7.1.2 , 8.2.2), basées sur des critères de filtrage temporel ou de niveau, qui permettent d'améliorer significativement la robustesse du système. Il serait intéressant de combiner les approches : critère de signe instantané développé dans ce chapitre, filtrage temporel et critère de niveau significatif. L'étude expérimentale qui suit (chap. 9) fait appel à cette démarche.

Énergies et puissances Une analyse énergétique est proposée ; on constate qu'il y a bien réexcitation des modes élevés, mais que *la puissance mécanique dissipée par l'amortissement mécanique des modes élevés n'est pas importante.* L'essentiel de la dissipation a lieu dans la résistance. Par contre, *le mécanisme essentiel de réduction de vibration est l'effet de la charge électrique qui s'oppose à l'effort extérieur.* On peut parfois éviter un problème de désynchronisation en amortissant passivement un mode harmonique ; mais cela requiert un amortissement très élevé, peu réaliste.

Expérimentation sur les shunts à commutation

Dans ce chapitre, on souhaite évaluer expérimentalement la pertinence des modèles développés aux chapitres précédents (chap. 7 et 8). Deux systèmes à commutation sont utilisés. Le premier, réalisé au LGEF, est un dispositif représentatif de l'état de l'art en matière de shunt à commutation. Une de ses caractéristiques est que c'est un circuit électronique autonome, c'est à dire qu'il ne nécessite pas d'alimentation ni de commande extérieure : il se branche simplement sur les éléments piézoélectriques. Le second système à commutation a été mis au point par l'auteur. Il est basé sur un circuit électronique très simple, commandé par un système informatique temps réel, qui permet de programmer et tester différentes stratégies de commutation. Ces deux systèmes sont associés à deux poutres munies d'éléments piézoélectriques. La première est celle déjà utilisée pour les shunts linéaires (chap. 6). La seconde a été conçue spécialement pour l'association avec des shunts à commutation.

Les deux poutres utilisées pour les expériences sont décrites au paragraphe 9.1. Dans une seconde partie (§9.2), les deux circuits à commutation sont décrits : le circuit réalisé au LGEF (§9.2.1) et l'autre basé sur l'ordinateur temps réel (§9.2.2). Dans ce dernier cas, la mise au point des circuits électroniques est détaillée, ainsi que les stratégies de commutation mises en œuvre. Le dispositif de mesure est décrit au paragraphe 9.3. Il est utilisé pour réaliser des mesures en régime forcé, qui sont analysées dans le domaine temporel (§9.4.1) et fréquentiel (§9.4.2). Une rapide analyse d'un résultat en régime libre est également proposée (§9.5).

9.1 Structures utilisées

9.1.1 Poutre symétrique

On réutilise la poutre du paragraphe 6.1 (fig. 9.1), qui a été optimisée pour l'association avec des shunts linéaires. Cette poutre est en aluminium (AU4G) et dispose de deux éléments piézoélectriques (PIC 151) symétriques collés près de l'encastrement. Cette poutre dispose d'un coefficient de couplage élevé sur les trois premiers modes.

9.1.2 Poutre asymétrique

À la différence du cas des shunts linéaires où l'on cherche le couplage maximum avec tous les modes, on a montré au paragraphe 8.5.2 qu'un mode de pulsation élevée et couplé

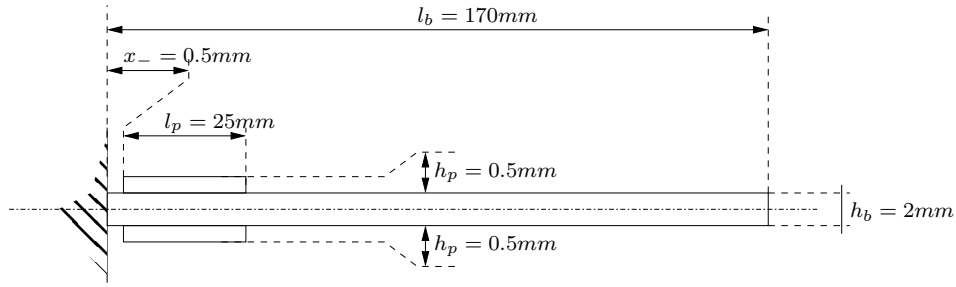
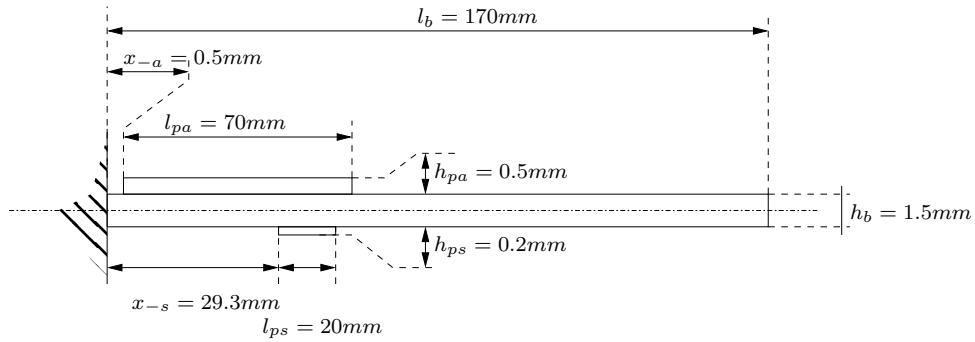


FIG. 9.1: Schéma de la poutre symétrique du chapitre 6.



Mode	ω_r	k_r piézo. actionneur	k_r piézo. capteur
1	73.74 Hz	0.268	0.058
2	366.12 Hz	-0.059	0.00048
3	1001 Hz	-0.075	- 0.047

FIG. 9.2: Dimensions et caractéristiques calculées de la poutre asymétrique.

pouvait être pénalisant. Pour cette raison, on réalise une poutre munie de deux éléments piézoélectriques. L'un (appelé actionneur¹) est choisi pour avoir des coefficients de couplage forts avec le mode 1 mais faible avec le mode 2. Le second est choisi de telle manière que le couplage avec le mode 2 soit nul. L'idée est de réduire les vibrations du premier mode de la poutre avec un shunt à commutation relié à l'élément actionneur (fortement couplé). L'élément capteur est utilisé simplement pour synchroniser la commutation, en tirant parti de son couplage nul avec le mode 2, pour éliminer les perturbations qu'il provoque.

Un avantage d'utiliser un élément actionneur unique est que cela permet d'avoir la structure, l'encastrement et le bati au potentiel électrique de la masse. On évite ainsi d'avoir des capacités parasites dans le circuit - bien qu'aucun problème lié à cela n'ait été constaté expérimentalement. Cela peut aussi faciliter la pose de capteurs sur la structure. Par exemple, l'expérience montre que les accéléromètres, même réputés flottants, peuvent mettre à la masse la structure et perturber le fonctionnement des shunts.

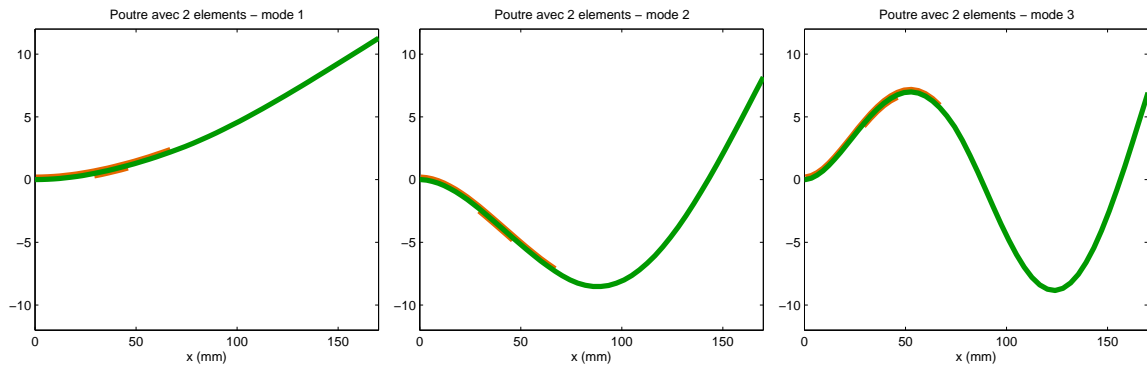


FIG. 9.3: 3 premières déformées modales avec les éléments piézoélectriques retenus

Optimisation

On choisit un élément piézoélectrique de taille importante ($70 \times 25 \times 0.5$ mm) parmi ceux disponibles au laboratoire, pour jouer le rôle d'actionneur ; le matériau est toujours une céramique PIC151. Comme on souhaite un couplage important avec le mode 1, on le place près de l'encastrement de la poutre. Pour l'élément capteur, qu'on souhaite découpler au maximum du mode 2, on choisit un élément de petite taille ($20 \times 20 \times 0.2$ mm). Parmi les structures disponibles avec une largeur de 25 mm (pour accepter l'élément actionneur), une poutre en aluminium est retenue. Le seul paramètre à choisir est la position de l'élément capteur (la distance à l'encastrement). Le modèle du chapitre 3 prévu pour une structure à trois sections symétriques ne peut convenir. On a alors recours au modèle éléments finis décrit au paragraphe 4.5 pour calculer les coefficients de couplage pour plusieurs positions de l'élément capteur et choisir celle qui présente le découplage souhaité. On peut remarquer que l'élément capteur ne fait pas la largeur totale de la poutre ; on fait donc une approximation consistant à supposer qu'il n'y a pas d'effet de bord et que tout se passe comme si cet élément faisait la largeur totale.

La figure 9.2 montre la géométrie de la structure obtenue et le résultat du calcul pour les trois premières fréquences propres et coefficients de couplage. On peut observer que le couplage prévu de l'élément actionneur avec le mode 1 est élevé et faible avec le mode 2 ; d'autre part le couplage de l'élément capteur avec le mode 2 est quasiment nul. En observant les déformées modales sur la figure 9.3, on constate que l'élément capteur est à un point d'inflexion pour le deuxième mode.

Réalisation pratique

La fabrication est identique à ce qui a été décrit au paragraphe 6.1.2 (p. 120). L'élément capteur ne disposant pas d'une électrode retournée, il faut relier sa face intérieure à la poutre. Cette face intérieure sera maintenue au potentiel 0 et on mesurera la tension sur la face extérieure. Afin d'assurer la connexion électrique avec la poutre, une goutte de résine conductrice chargée d'argent (Ecolit 340) est déposée au milieu du film de colle (voir fig. 9.4).



FIG. 9.4: Ajout de résine conductrice dans le film de colle

Mode	ω_r	k_r piézo. actionneur	k_r piézo. capteur
1	58.37 Hz	0.2255	0.052
2	313.31 Hz	0.038	0
3	814.18 Hz	0.0225	0

TAB. 9.1: Fréquences et coefficients de couplage mesurés pour la poutre à éléments capteur et actionneur

Mesure des caractéristiques

On réutilise le dispositif du paragraphe 6.2 (figure 6.9, p. 123). Les fréquences de résonances en court-circuit sont mesurées en excitant la structure avec un effort sinusoïdal et en choisissant sa fréquence pour mettre la vitesse et l'effort en phase², avec tous les éléments en court-circuit. On place alors un seul élément à la fois en circuit ouvert et on identifie le coefficient de couplage d'après la différence de fréquence, comme montré au paragraphe 4.4.3.

Les valeurs mesurées des coefficients de couplage correspondent au résultat escompté : le couplage avec le mode 2 est faible pour l'actionneur et nul pour le capteur. Les différences entre les fréquences expérimentales et théoriques peuvent s'expliquer par la masse ajoutée de l'aimant servant à exciter la structure.

Remarque : bien que des coefficients aient été trouvés nuls par la méthode des différences de fréquence, on mesure tout de même un signal de tension sur les éléments piézoélectriques en circuit ouvert. Le découplage n'est donc pas parfait.

9.2 Circuits à commutation

9.2.1 Circuit autonome

Ce circuit a été réalisé par Élie Lefeuvre au LGEF Lyon sur le schéma de base du brevet [85] (fig. 9.5). Il fait fortement appel aux non-linéarités des composants électroniques, en particulier des tensions de seuil des composants ; le comportement est ainsi potentiellement dépendant de l'amplitude du mouvement. Il est autoalimenté et il suffit donc de le connecter aux éléments piézoélectriques ; l'ensemble peut être électriquement flottant. Dans certains cas on peut utiliser un pont diviseur avec amplificateur opérationnel (AOP, p. 217) afin de

¹Cet élément n'est pas un actionneur à proprement parler car on n'impose jamais explicitement la tension. C'est juste l'élément associé au shunt, voir figure 9.14 .

²Le tracé sur un oscilloscope en mode "xy" est alors une droite.

mesurer la tension aux bornes du circuit sans trop perturber celle-ci.

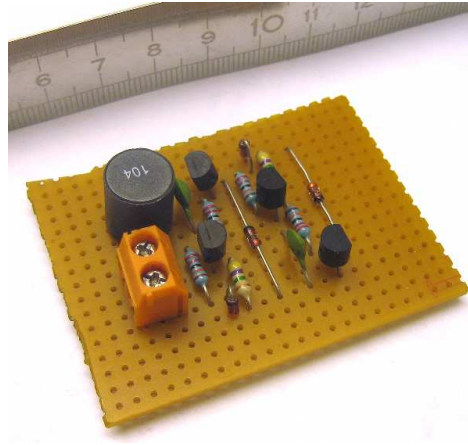


FIG. 9.5: Circuit autonome fourni par le LGEF.

9.2.2 Circuit à commutation commandée

L'objectif est ici d'associer un ordinateur fonctionnant en temps réel au circuit de commutation. Son rôle est de créer la commande de fermeture et d'ouverture du circuit. Il analyse les signaux provenant de différents capteurs et met en oeuvre une stratégie que l'on peut redéfinir au besoin. Cette solution est plus lourde à mettre en oeuvre qu'un circuit dédié, mais présente des avantages en terme de facilité de modifications ultérieures, très utiles pour la mise au point de stratégies de commutation.

Informatique temps réel

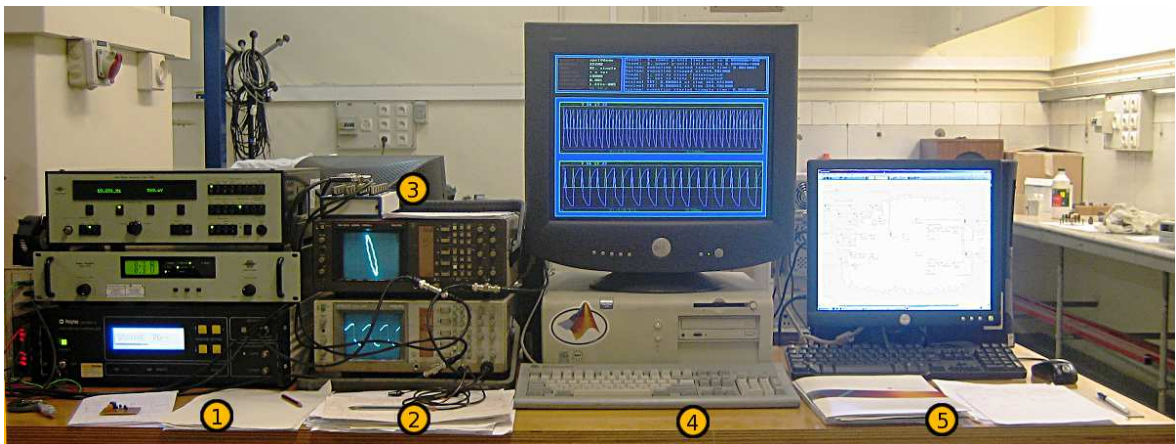


FIG. 9.6: Partie du dispositif expérimental : 1. Générateur de signaux, amplificateur, conditionneur de signal du vibromètre ; 2. Oscilloscopes ; 3. Boîtier d'interface de la carte d'acquisition ; 4. PC temps réel ; 5. PC de contrôle.

Pour faciliter la programmation, on choisit d'utiliser le module logiciel de Matlab xPC target associé à Matlab Simulink. Le dispositif comprend deux ordinateurs (voir figs. 9.6, 9.13

et 9.14). Le premier (le PC de contrôle) est utilisé pour créer un programme de commande, qui est ensuite exécuté en temps réel de manière autonome par le deuxième (PC temps réel). D'une manière pratique, le programme est créé sous forme de schéma bloc avec Matlab Simulink. Ensuite, il est compilé et envoyé par le réseau au PC temps réel³, qui, lui, fonctionne avec un système d'exploitation temps réel fourni par Mathworks avec le module xPC target.

Le PC temps réel est muni d'une carte d'acquisition National Instruments PCI-6024 E, choisie pour sa compatibilité avec xPCtarget et son faible temps de latence⁴. À chaque pas de temps, l'ordinateur acquiert un échantillon de tension via la carte, exécute le programme de détection, et si il y a lieu, fait sortir par la carte une commande en tension qui viendra fermer le switch. Quelques commandes basiques peuvent être exécutées, et des tracés affichés sur l'ordinateur temps réel. On peut aussi changer certains paramètres du modèle, typiquement des gains, localement ou via le PC de contrôle. En raison des latences des cartes, le pas de temps est d'au moins $60 \mu s$ avec le matériel choisi. Une bonne partie de ce temps est liée à des temps d'attente du matériel et non aux calculs eux-mêmes ; même des modèles bien plus complexes ont fonctionné avec un pas de temps inférieur à $100 \mu s$. Cette partie du dispositif est présentée figure 9.6.

Mise au point électronique

De nombreux problèmes ont surgi pendant la mise au point de l'électronique. L'idée de base était d'utiliser des transistors de type CMOS pour laisser passer le courant ou non dans le dispositif. Une des conditions essentielles pour avoir un dispositif SSDI efficace est de parvenir à inverser la tension lors de la fermeture du switch, c'est-à-dire de fermer le circuit exactement une demi-période électrique après l'ouverture (fig. 7.4(b), 147). Cela peut être obtenu de deux manières.

- Soit on utilise un dispositif capable de commander la fermeture exactement une demi période électrique. Cela nécessite un système extrêmement précis en temps. L'interrupteur utilisé doit de plus, lorsqu'il est fermé, laisser passer le courant dans deux directions. De manière pratique il faudrait deux transistors tête bêche recevant la même commande.
- Soit avec deux branches de circuit comportant chacune une diode anti-retour (fig. 9.7, 9.8, 9.9). Il faut alors fermer une des branches plus longtemps que la demi-période électrique ; c'est la diode qui va se charger de bloquer le courant pour réaliser la fermeture apparente du circuit au bon moment. Comme le courant circule dans un seul sens dans chacune des branches, on peut utiliser un seul transistor par branche ; par contre chacun d'entre eux doit être commandé séparément ; il faut générer deux signaux de commande, l'un pour les maxima de tension, l'autre pour les minima.

Comme le pas de temps minimum ($60 \mu s$) n'est pas négligeable devant la demi-période (par exemple $90 \mu s$ pour l'association de la poutre symétrique et d'une inductance de 10 mH), il est difficile de maîtriser l'inversion par la durée de fermeture. On choisit la seconde solution, c'est-à-dire un circuit à deux branches distinctes avec des diodes anti-retour.

Circuit avec MOSFETs identiques Le premier circuit réalisé sur une plaquette d'essais fait appel à deux transistors à canal N International Rectifier IRFD 220 choisis pour leur faible résistance interne et pour supporter des tensions d'au moins 100 V lors d'essais à grande amplitude. Des diodes UF4003 permettent à chaque branche de ne fonctionner que

³Choisi pour son processeur Pentium III, plus rapide pour certaines applications temps réel que des processeurs plus récents.

⁴Il s'agit du délai entre le moment où l'ordinateur temps réel demande une valeur à la carte et où cette valeur est disponible pour le programme.

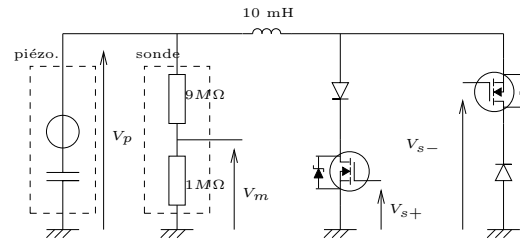


FIG. 9.7: Circuit symétrique à base de MOSFETs canal N

dans le sens voulu. La tension aux bornes de l'éléments piézoélectrique est mesurée à travers la sonde de mesure d'un oscilloscope (Philips PM 8927A) afin de la ramener à des valeurs tolérables par la carte d'acquisition, c'est à dire ± 10 V. L'ordinateur déclenche la commutation en imposant un potentiel de -5 V à la grille du transistor de la branche à déclencher (fig. 9.7). Pour ce faire, deux sorties de la carte d'acquisition sont utilisées : chacune d'elles est reliée directement à la grille des transistors.

Ce circuit ne fonctionne pas en raison du déclenchement intempestif du transistor de la deuxième branche lorsque la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique devient positive. Pour qu'il reste fermé, il faudrait appliquer la tension V_p ou $V_p - 5$ V à la grille - ce qui n'est pas possible en raison de la limitation à ± 10 V de la carte d'acquisition. Un transformateur d'isolement pourrait régler ce problème.

D'autre part, des perturbations en dents de scie à la fréquence d'échantillonnage (donc visibles seulement à l'oscilloscope) sont observées sur la mesure de la tension piézoélectrique, probablement liés au circuit bloqueur de la carte d'acquisition qui a une impédance variant fortement avec le temps.

Amplificateur suiveur Afin de s'affranchir du problème de l'impédance de la carte d'acquisition, on associe aux éléments piézoélectriques un pont diviseur de tension constitué d'une résistance de 9.87 MΩ et une de 0.97 MΩ. On obtient ainsi un potentiel divisé par 11. Ensuite un amplificateur suiveur est utilisé pour adapter les impédances ; on choisit un OPA445 AP qui a donné de bons résultats sur l'inducteur synthétique. Des oscillations de tension en sortie ont été observées ; elles ont disparu en laissant l'alimentation flottante et en ajoutant des capacités de filtrage de 22 nF aux bornes d'alimentation de l'amplificateur opérationnel, conformément aux instructions du fabricant [11]. Ce montage a une influence réduite sur la tension piézoélectrique puisque l'impédance d'entrée est grande (10.84 MΩ) ; par contre l'impédance de sortie est faible et le montage est une source de tension que la carte d'acquisition ne perturbe pas.

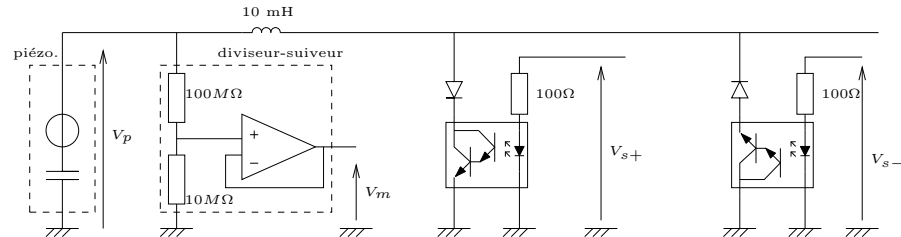


FIG. 9.8: Circuit symétrique à base d'optocoupleurs

Circuit avec optocoupleurs On décide d'utiliser des optocoupleurs darlington de type MOC 8050 directement sur l'élément piézoélectrique pour leur bonne tenue en tension et leur gain élevé. Les optocoupleurs permettent surtout d'isoler galvaniquement la partie piézoélectrique et la partie commande de la commutation et devraient remédier au problème de déclenchement intempestif. Au repos l'optocoupleur ne laisse pas passer de courant dans la partie phototransistor. Pour déclencher la commutation une tension de 3 V est appliquée par la carte d'acquisition à la partie diode lumineuse (protégée par une résistance de 100 Ω). La lumière émise dans l'optocoupleur rend alors la partie phototransistor passante (fig. 9.8).

L'observation des tensions à l'oscilloscope fait apparaître une inversion imparfaite de la tension électrique lors des commutations, sans doute due à une résistance ou capacité parasite⁵. Par contre il n'y a pas de déclenchement intempestif. Afin de régler ce problème on devrait munir le système d'une paire de transistors supplémentaires, commandés chacun par les optocoupleurs, et alimentés par une alimentation flottante, ce qui correspond à la plupart des montages commandés utilisés par le LGEF. Faute de temps, ce dispositif n'a pu être mis en place.

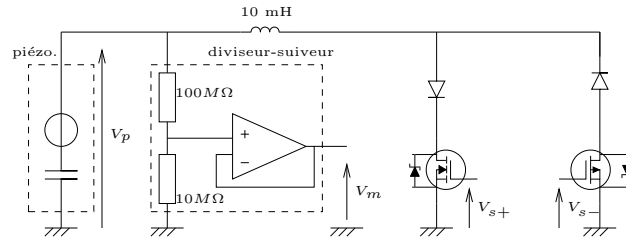


FIG. 9.9: Circuit à base de MOSFET canal N et P

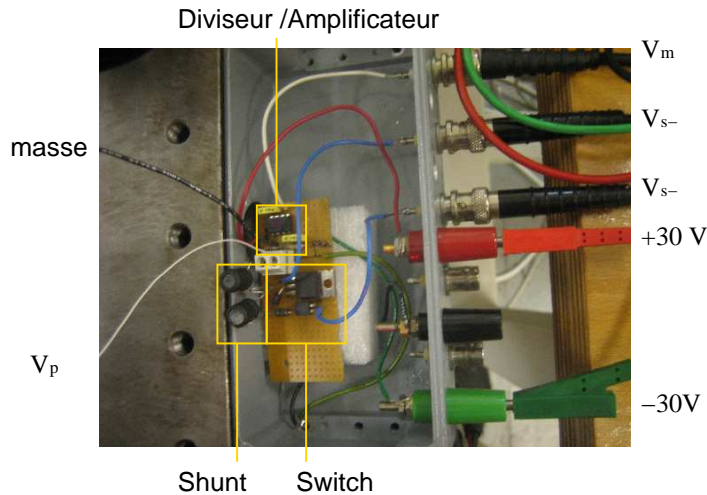


FIG. 9.10: Boîtier électronique avec connecteurs comprenant le pont diviseur, l'AOP, le shunt (qui peut être changé par enfichage) et le circuit switch avec ses deux branches.

Circuit avec MOSFETs appairés Finalement, on utilise des transistors MOSFET, en choisissant un transistor à canal N pour la commutation lorsque la tension est positive et

⁵La lecture de la documentation du composant [33] ne permet pas de conclure à ce sujet.

un transistor à canal P pour l'inversion depuis une tension négative. La mesure de tension s'effectue avec le même circuit diviseur et suiveur ; la commutation est déclenchée par une tension positive appliquée à la grille du transistor à canal N (type IRFD 220) ou une tension positive appliquée à la grille du transistor à canal P (type IRF 9630, adapté à un contexte similaire) (fig. 9.9, 9.10). Le défaut de cette approche est que la différence des composants pourrait introduire une différence de comportement lors des commutations dans un sens ou dans l'autre. Cela n'a pas été observé par la suite.

Stratégies de commutation

La stratégie de commutation est déterminée par le programme Simulink qui fonctionne sur l'ordinateur temps réel. Ce programme est présenté sous forme de diagramme bloc (fig. 9.12) où les fonctions ont été regroupées en bloc. Le schéma complet peut être retrouvé en annexe (A). On a le choix entre deux types de signaux pour déclencher la commutation.

Signal de tension Le signal de tension est mesuré grâce à l'amplificateur suiveur (p. 217) ; il est pris soit sur l'élément connecté au switch, soit sur un élément piézoélectrique séparé faisant office de capteur.

Afin de s'affranchir des problèmes de commutation intempestive liés aux composantes haute fréquence du signal de tension, il est nécessaire de le filtrer. Pour cela on utilise deux techniques.

- On utilise un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR, Finite Impulse Response). Des essais ont été faits avec des filtres écrits dans le domaine temporel mais le résultat obtenu n'est pas satisfaisant (en pratique des problèmes peuvent apparaître dès qu'une partie du système n'est pas écrite en mode échantillonné [60]). Le filtre à réponse impulsionnelle a été utilisé comme un filtre passe-bas ou désactivé suivant les essais.
- On utilise aussi une réduction du taux d'échantillonnage qui évite de détecter trop de maxima non significatifs, comme illustré figure 9.11 ; il faut faire un compromis entre un taux d'échantillonnage trop élevé (précis en temps mais détectant trop tôt un maximum local) et trop bas (imprécis en temps et switchant parfois "tard").

La stratégie de commutation mise en place est la suivante :

- Le signal filtré est alors dérivé et des zéros de la dérivée sont détectés, qui correspondent donc à des extrema.
- Le signal filtré est aussi analysé afin de détecter lorsque le niveau est significativement élevé. Pour ce faire, le carré de l'amplitude est comparé à la valeur RMS sur une période d'intégration (en pratique quelques dixièmes de seconde) et la commutation est possible si la valeur instantanée dépasse la valeur moyenne d'un coefficient réglable. On se rapproche ainsi du critère proposé dans [34, 48]. En pratique et dans les cas étudiés ce critère n'a pas apporté d'amélioration significative et peut être désactivé à volonté.
- Enfin, afin de décider de la branche du circuit de commutation à fermer, le signe de la tension est pris en compte. Un gain négatif peut éventuellement être utilisé dans un cas où un élément piézoélectrique est utilisé comme capteur avec un coefficient de couplage de signe opposé à l'élément piézoélectrique sur lequel on a placé le système de commutation.
- Un délai d'inhibition peut être réglé pour éviter que deux commutations ne surviennent immédiatement l'une après l'autre.

- Enfin, la durée pendant laquelle le switch restera fermé, ainsi que l'amplitude du signal de fermeture (la tension à appliquer aux transistors) peuvent être réglées. Il faut respecter une durée supérieure à la demi-période électrique afin que l'inversion aie lieu.

Les stratégies 2 et 3 telles qu'elles sont définies au chapitre 8 ne peuvent être mises en œuvre facilement en l'absence de moyen fiable de mesurer la charge. En utilisant plusieurs éléments piézoélectriques ou une mesure du courant, il est peut être possible de l'obtenir. C'est dans cette optique que ce dispositif a été prévu, mais la mise au point électronique est plus longue que prévu.

Signal de vitesse Une autre manière de déclencher la commutation est d'utiliser un capteur extérieur (par exemple le signal fourni par le vibromètre laser). On souhaite déclencher la commutation aux maxima de déplacement, donc aux annulations de vitesse. Le signe (direction dans laquelle on commute) est donné par la valeur instantanée, donc après passage par 0 de la vitesse. On peut changer ce signe pour tenir compte du fait que le coefficient de couplage pour un mode peut être négatif ou positif et que le vibromètre mesure la vitesse à un point de la structure où la déformée peut être dans un sens ou dans l'autre.

Il est intéressant de remarquer qu'en pointant le laser du vibromètre sur un noeud d'un mode donné, on réduit à 0 la participation de ce mode à la mesure - et qu'on peut donc s'affranchir d'une partie des problèmes de synchronisation évoqués au chapitre 8.5.2.

Comme pour le cas du signal de tension, on peut régler un délai minimum entre deux commutations, ainsi que la durée de la phase de fermeture et la tension appliquée aux transistors.

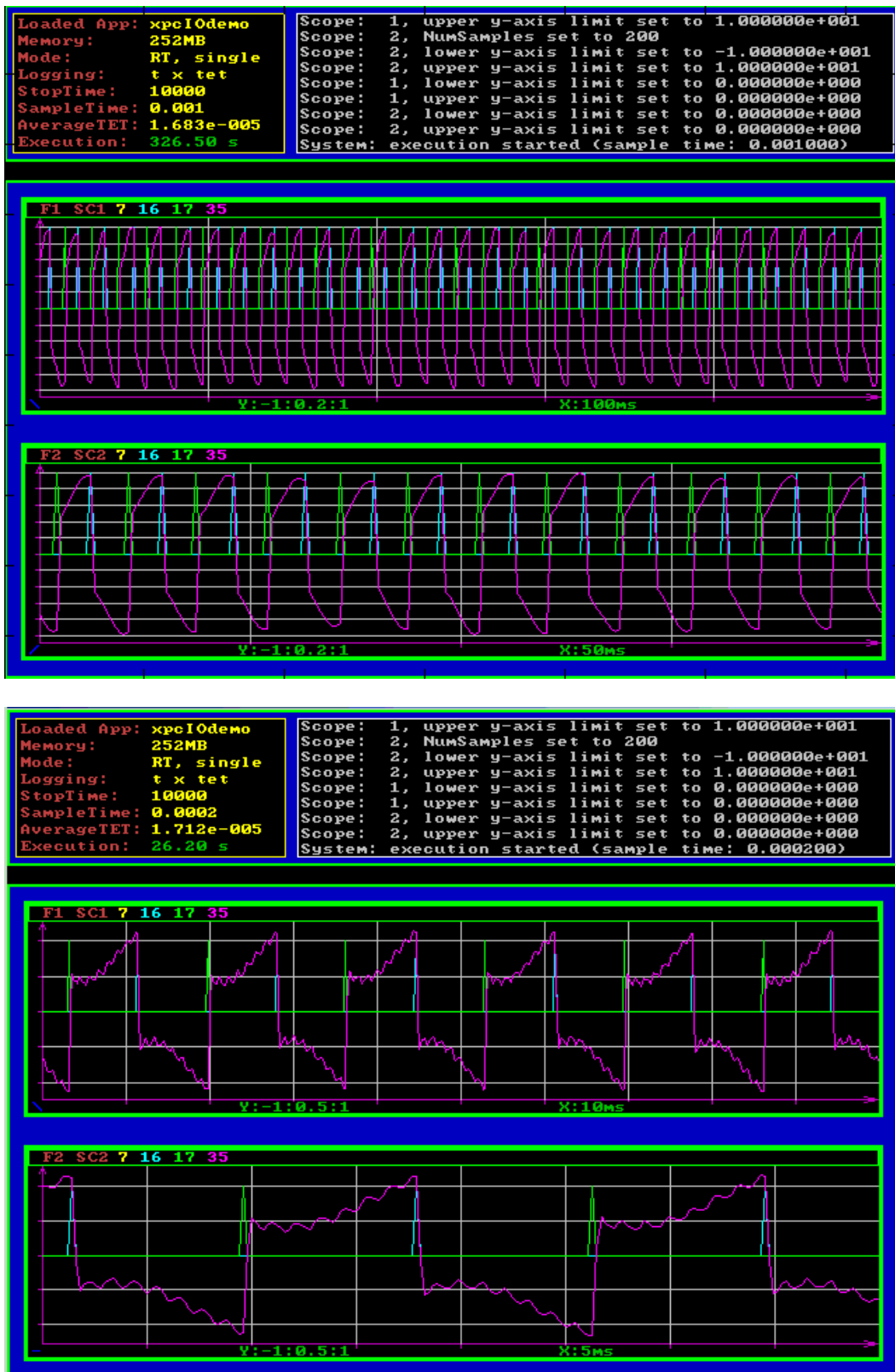


FIG. 9.11: Captures d'écran de l'ordinateur temps réel illustrant l'effet d'un changement de fréquence d'échantillonnage sur la détection de max. (en haut) taux réduit, (en bas) taux plus élevé. Les signaux de tension dans l'élément piézoélectrique représentés sont identiques dans les deux cas ; par contre la mesure du haut, sous-échantillonnée, montre moins de composantes haute fréquence.

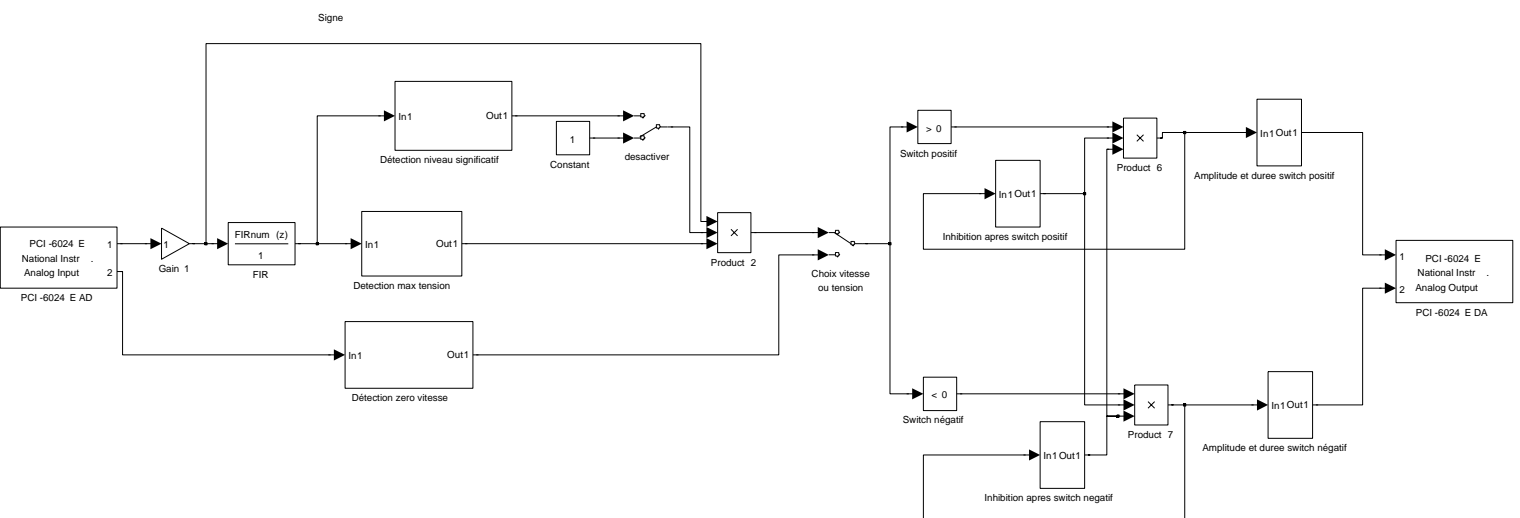


FIG. 9.12: Schéma bloc simplifié du programme Simulink utilisé.

9.3 Dispositifs de mesure

9.3.1 Poutre symétrique

La figure 9.13 présente le dispositif utilisé avec la poutre symétrique (§9.1.1). Le système de commutation avec ordinateur temps réel du paragraphe 9.2.2 est utilisé avec le circuit à MOSFETs appairés. La mesure de la tension piézoélectrique ou la mesure de vitesse par le vibromètre peuvent être utilisées pour déterminer les instants de commutation. Un pont diviseur et un amplificateur suiveur (présentés au paragraphe 9.2.2) évitent la perturbation de la tension piézoélectrique par la carte d'acquisition.

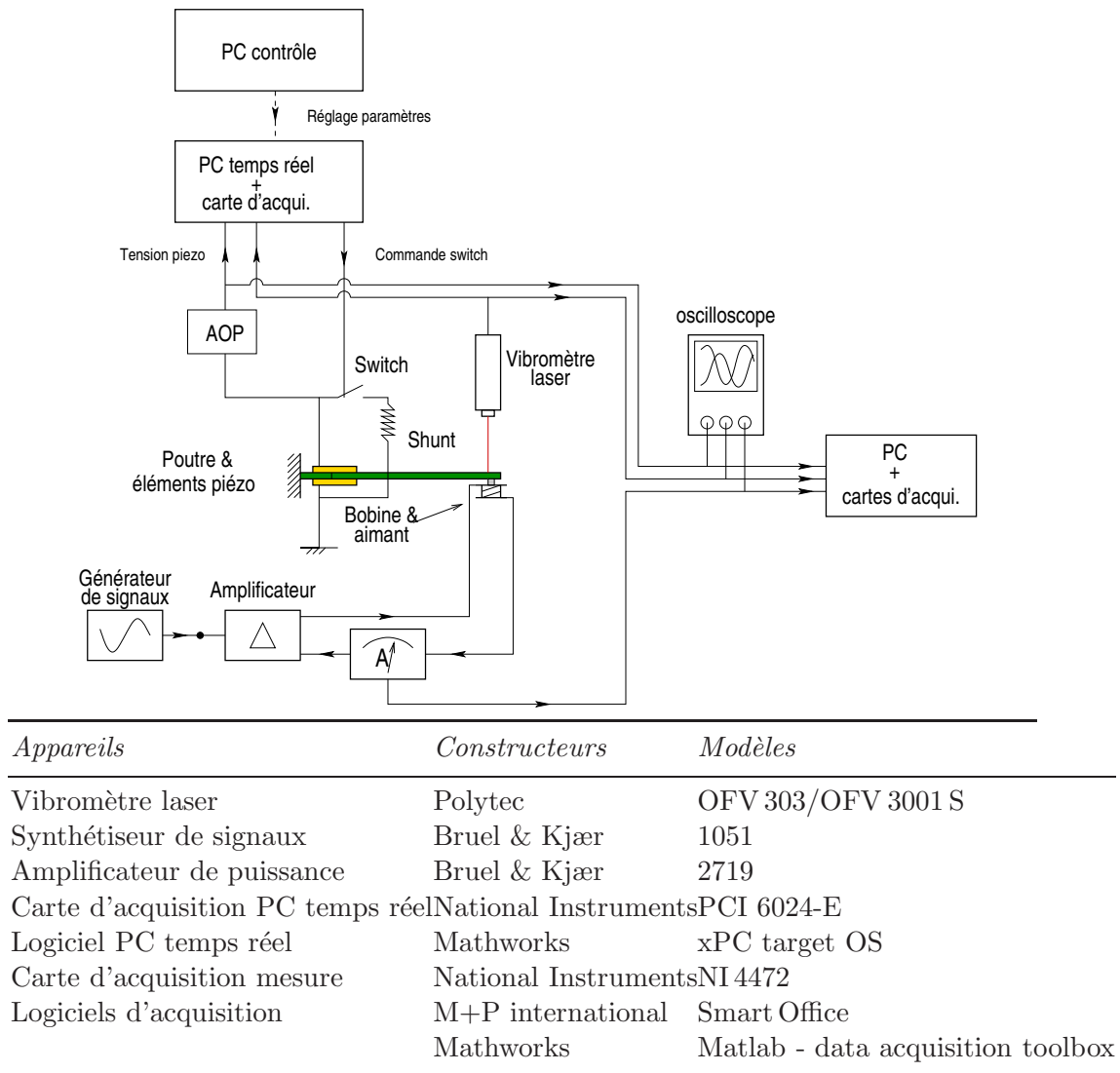


FIG. 9.13: Dispositif expérimental et références des appareils utilisés.

9.3.2 Poutre asymétrique

Le dispositif, présenté figure 9.14, est identique à celui du paragraphe précédent, à la différence de la structure utilisée, définie paragraphe 9.1.2, qui possède un élément capteur et

un élément actionneur séparés. La vitesse ou la tension dans chacun de ces éléments peuvent être utilisées pour synchroniser le switch.

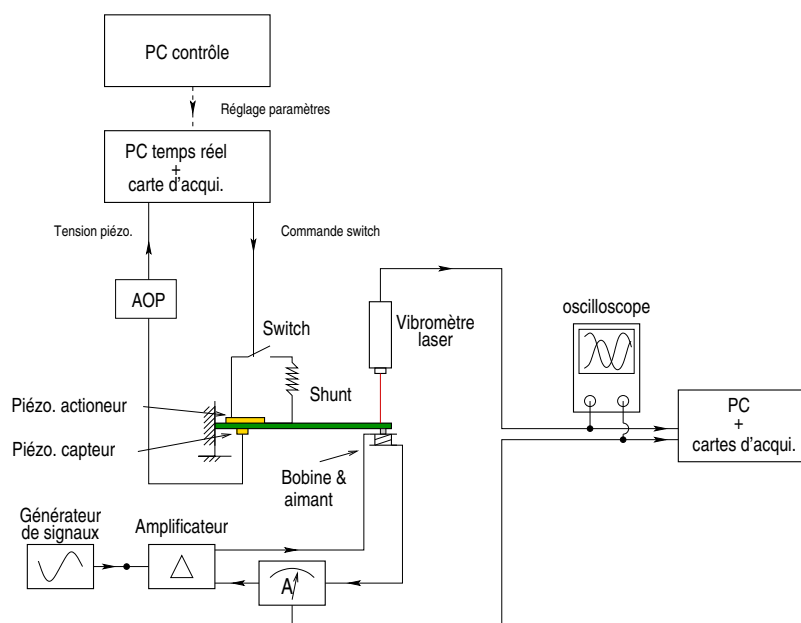


FIG. 9.14: Dispositif expérimental à deux éléments piézoélectriques

9.4 Résultats en régime forcé

9.4.1 Analyse en temps

Protocole On utilise la poutre asymétrique, qui permet de mettre en œuvre toutes les techniques de switch envisagées⁶. Grâce à l'aimant situé en bout de poutre, on excite celle-ci avec un signal sinusoïdal à la résonance (en circuit ouvert) du premier mode.

On effectue des mesures dans 7 situations différentes.

- Avec les éléments piézoélectriques en circuit ouvert.
- Avec le switch autonome du LGEF.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo actionneur et n'est pas filtré numériquement.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo actionneur et filtré par un filtre numérique passe-bas.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo capteur et n'est pas filtré numériquement.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo capteur et filtré par un filtre numérique passe-bas.
- Avec le circuit à commutation commandée, déclenchée par le signal de vitesse mesuré par le vibromètre.

⁶La poutre qui a été utilisée pour ces mesures est une poutre en inox asymétrique dont les caractéristiques sont proches de celle du paragraphe 9.1.2; les fréquences sont légèrement différentes. Il s'agit d'une première version de poutre asymétrique à deux éléments. Les résultats observés sur la poutre en aluminium (mais qui faute de temps n'ont pas été mesurés systématiquement) sont similaires.

Sur la figure 9.15, on trace la mesure de l'effort, de la vitesse au point d'excitation, et de la tension électrique dans l'élément piézoélectrique actionneur quand c'est possible. Voici quelques remarques sur les tracés.

- L'effort imposé est le même dans chacun des cas.
- L'échelle des tracés est la même dans chacun des cas ; ce sont les signaux en Volts de chacun des capteurs.
- La mesure de l'effort est effectuée en supposant que celui-ci est proportionnel au courant dans la bobine ; les tracés d'effort sont en réalité une mesure du courant avec un calibre 10 A.V^{-1} . Le rapport entre l'effort et le courant n'est pas connu. Il est de l'ordre de grandeur de 0.5 N.A^{-1} .
- La mesure de vitesse s'effectue au vibromètre sur l'aimant avec un calibre de $125 \text{ mm.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$.
- La mesure de tension est effectuée à travers le pont diviseur avec AOP (§9.2.2) - avec un rapport de réduction de 1/11.2.
- L'acquisition de tension est parfois faite sur un autre élément piézoélectrique pour la commutation ; ainsi les deux tracés avec switch commandé par patch capteur ne montrent pas la tension du patch actionneur ; on remarque d'ailleurs qu'il n'y a pas d'inversion périodique de tension ...

Analyse des résultats On commente maintenant les résultats de gauche à droite puis de haut en bas :

- Le tracé en circuit ouvert est conforme à la théorie ; on observe que l'effort est en phase avec la vitesse, et que la tension électrique, qui dépend du déplacement, est décalée de $\pi/2$.
- Le tracé avec circuit switch autonome montre que les commutations sont bien synchronisées ; par contre l'inversion de tension n'est pas satisfaisante, à chaque commutation la tension retombe presque à 0. Un début d'explication est que ce circuit a été conçu pour une association avec la poutre symétrique, qui comporte des éléments piézoélectriques en série dont la capacité est faible. Ici, la capacité de l'élément seul est bien supérieure ; le courant qui circule est plus important et les tensions moins élevées, et la résistance interne du circuit devient plus pénalisante. Il aurait été intéressant de faire réaliser un circuit adapté à l'élément piézoélectrique utilisé. La vitesse a nettement diminué par rapport à la situation circuit ouvert, et on constate que le signal est bien plus chahuté, avec des modes de fréquence supérieure qui sont excités.
- Le tracé avec switch commandé par ordinateur temps réel montre un défaut de synchronisation lorsqu'on utilise la stratégie 1 qui consiste à fermer le switch à chaque maximum de tension. Comme le signal de tension est fortement perturbé par les modes élevés, il présente des maxima locaux à intervalles très courts. Pour des raisons de taux d'échantillonnage et probablement beaucoup de facteurs, le switch ne se ferme pas tout le temps, néanmoins les commutations se produisent à des intervalles de temps variables et l'amortissement de vibration n'est pas optimal. Par contre, on peut remarquer que lorsqu'il se ferme, on obtient une inversion de la tension assez nette. Les performances sont finalement meilleures que le circuit autonome, malgré les irrégularités.
- Le tracé avec switch commandé par ordinateur temps réel et filtre passe-bas montre que la commutation se produit bien plus régulièrement. Cependant, elle n'est pas exactement périodique : la durée des phases circuit ouvert fluctue légèrement. On assiste tout de même à une nette augmentation de la charge stockée par rapport au cas sans

filtre passe-bas, et l'amplitude du mouvement diminue. On peut remarquer également que les modes élevés sont davantage excités. L'atténuation obtenue est très bonne.

- En utilisant un élément piézoélectrique séparé comme capteur pour synchroniser les commutations, on observe que le signal de tension est moins perturbé par les modes haute fréquence (on rappelle que cet élément a des couplages quasi-nuls avec les modes 2 et 3). Evidemment, la tension mesurée ne s'inverse plus à chaque commutation. On remarque cependant une faible influence instantanée du phénomène de switch, qui est peut être liée à la déformation longitudinale instantanée de la poutre sous l'effet du changement brusque de tension. Une autre possibilité est que ce phénomène soit une interaction dans le circuit électrique.
- En utilisant un filtre passe-bas avec l'élément piézoélectrique capteur on améliore légèrement l'efficacité. On peut donc déduire que bien que l'élément capteur soit à peu près découplé du mode 2, d'autres modes perturbent la tension, et que le signal de tension doit être traité afin d'améliorer la synchronisation même lorsqu'il est issu d'un capteur dédié.
- En utilisant la mesure de vitesse pour déclencher la commutation on parvient à obtenir des commutations régulières et une très bonne atténuation des vibrations.

Atténuation globale du niveau vibratoire Le tableau 9.2 regroupe les atténuations par rapport à la situation circuit ouvert calculées à partir des valeurs efficaces des signaux de vitesse⁷, par la formule :

$$A_{dB} = 20 \log \frac{V_{RMS}^{CO}}{V_{RMS}}$$

Technique	A_{dB}
Switch autonome	9.6 dB
Switch commandé	12.8 dB
Switch commandé et filtre passe bas	16.6 dB
Switch commandé par piézo. capteur	13.2 dB
Switch commandé par piézo. capteur et passe bas	16.2 dB
Switch commandé par vibromètre	17.8 dB

TAB. 9.2: Atténuation obtenues avec les divers dispositifs à commutation, correspondant au signaux de vitesse de la figure 9.15

⁷Ce qui n'est pas exactement identique à la comparaison des moyennes RMS du signal en déplacement, mais doit être proche.

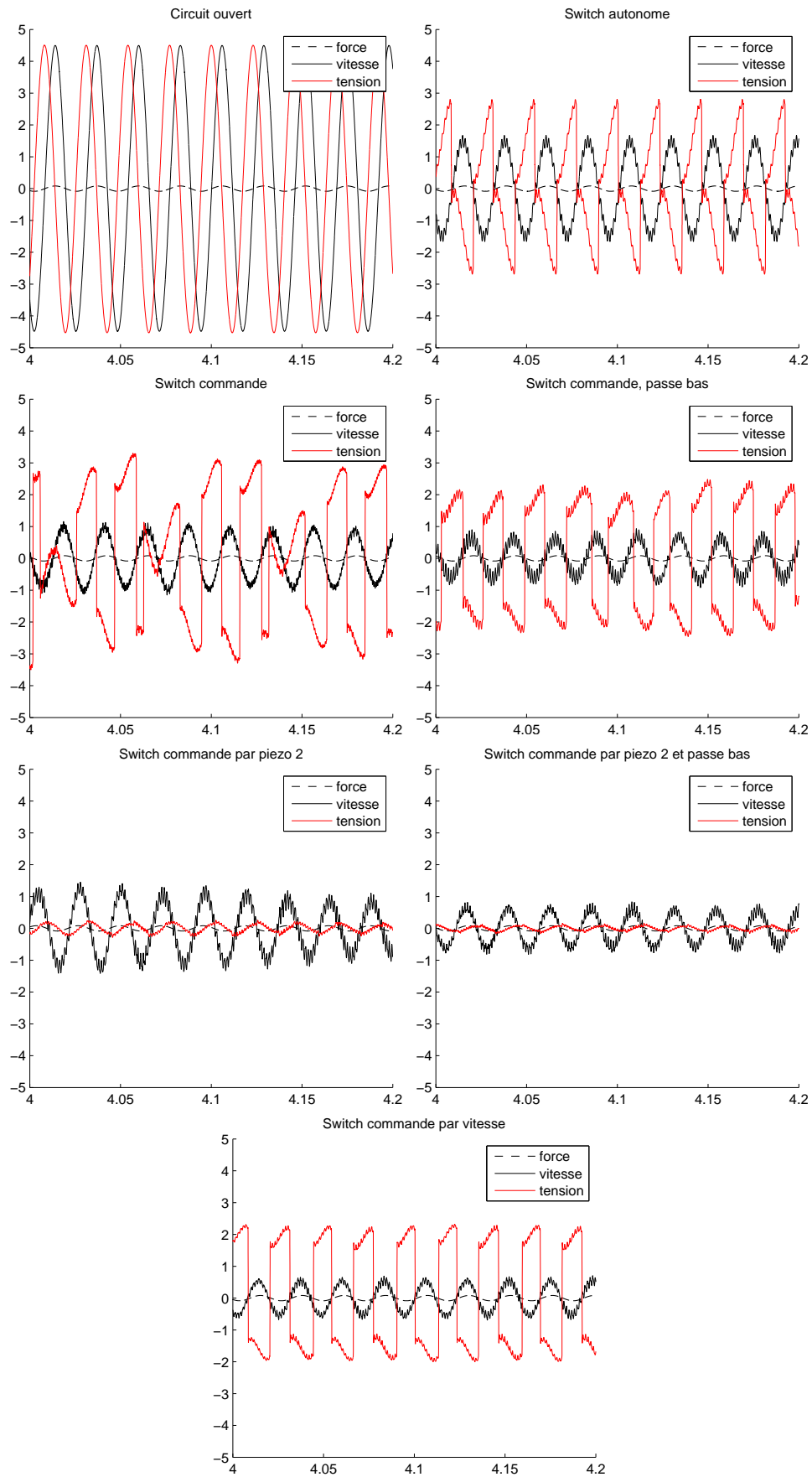


FIG. 9.15: Tracés en temps [s] des signaux [V] d'effort, de vitesse et de tension avec divers circuits électriques.

9.4.2 Analyse en fréquence

Influence de la stratégie

On prend les signaux temporels des mesures précédentes (fig. 9.15) et on en fait le spectre ; le signal de 10 s est découpé en 15 blocs avec 78% de recouvrement⁸, traités avec une fenêtre de Hanning ; les spectres sont obtenus par fft, puis les amplitudes moyennées. On s'est limité aux techniques utilisant l'élément piézoélectrique actionneur afin de mettre en valeur l'effet de la stratégie de commutation et non le choix du capteur.

On peut faire les remarques suivantes sur les résultats :

- On remarque que le spectre du système en circuit ouvert présente des harmoniques (de niveau faible), qui sont liés aux non-linéarités du dispositif (le signal d'excitation est sinusoïdal) ;
- La réponse du système avec switch autonome présente un spectre harmonique ; le signal est périodique. On remarque que l'amplitude des harmoniques est plus importante que dans le cas circuit ouvert, avec en particulier des niveaux élevés des harmoniques voisines des fréquences propres de la poutre. Cela est par exemple le cas de la 16-ième harmonique qui est proche de la fréquence du troisième mode.
- Les spectres des systèmes avec switch commandé (avec et sans filtre passe-bas) présentent un spectre beaucoup plus bruité, lié à l'irregularité des commutations, visible sur la figure 9.15. La réponse n'est pas périodique, même si l'utilisation du filtre passe-bas permet d'avoir des commutations à peu près régulières. D'ailleurs, ces commutations plus régulières se traduisent sur le spectre par un niveau de bruit plus bas. On remarque par contre un "trou" très net dans le spectre à la fréquence de 1kHz, avec un motif localement symétrique pour les signaux avec switch commandé ; il s'agit probablement d'un phénomène lié à l'échantillonnage (le PC temps réel accomplit sa boucle de calcul à 1 kHz exactement et les commutations arrivent à un intervalle variable mais entier de ms). L'explication exacte de ce motif reste à déterminer.

Transfert d'énergie

La figure 9.17 correspond à un extrait de la figure 9.16. Elle représente le spectre de la vitesse en circuit ouvert et celui avec switch commandé et filtre passe-bas. Ce dernier spectre peut s'interpréter comme la superposition (i) d'un spectre harmonique (à la fréquence d'excitation) à (ii) un spectre bruité avec des pics prépondérants aux fréquences propres des modes de flexion. Le signal de tension électrique correspondant (fig. 9.15, 2-ième ligne à droite), peut s'interpréter de manière analogue : la superposition d'un signal périodique et d'une perturbation non périodique. Comme le signal de tension joue le rôle d'un effort sur la structure (Voir les équations (3.34), p. 50 ou (4.27), p. 66), sa partie périodique explique la partie harmonique du spectre de vitesse. De manière analogue, la partie non-périodique du signal de tension vient faire résoner la structure à ses fréquences propres, qui se retrouvent dans le spectre de vitesse.

Alors que les pics des modes de flexion 1, 3 et 4 sont très visibles, on peut remarquer que le pic du second mode de flexion (autour de 300 Hz) est quasiment absent du spectre de vitesse. Cela s'explique en considérant que chaque mode est excité par le signal de tension à travers son coefficient de couplage (voir par exemple la formulation modale (3.61), p. 55). Comme l'élément piézoélectrique actionneur est faiblement couplé au mode 2 (voir tab. 9.1), l'effet du switch sur ce mode est réduit.

⁸Ce qui permet d'avoir un nombre d'échantillons en puissance de 2 dans chaque bloc.

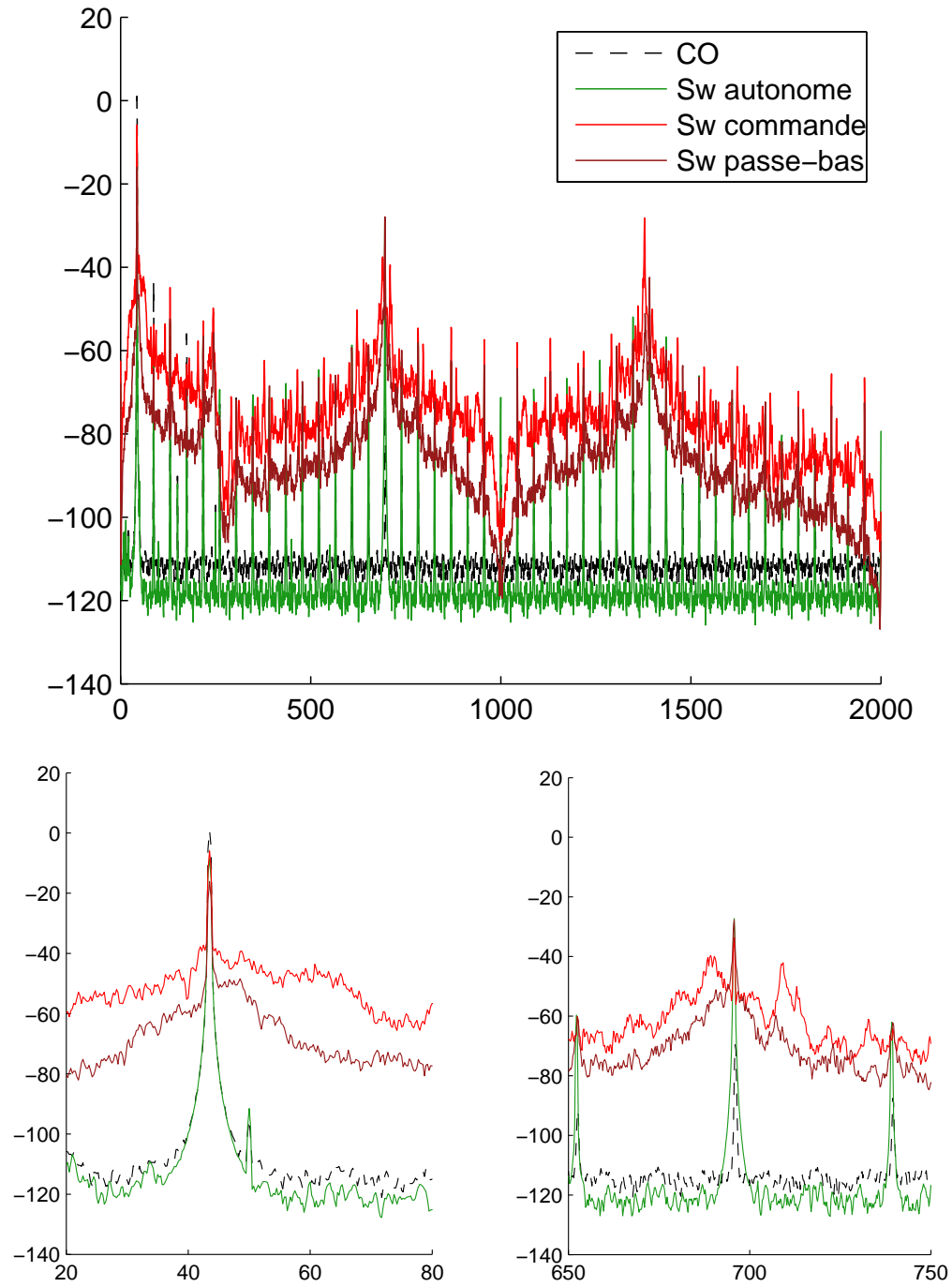


FIG. 9.16: Spectres de la vitesse pour les 4 premières situations de la figure 9.15. Détail au voisinage des modes 1 et 3. Le mode 2 est autour de 300 Hz et peu présent.

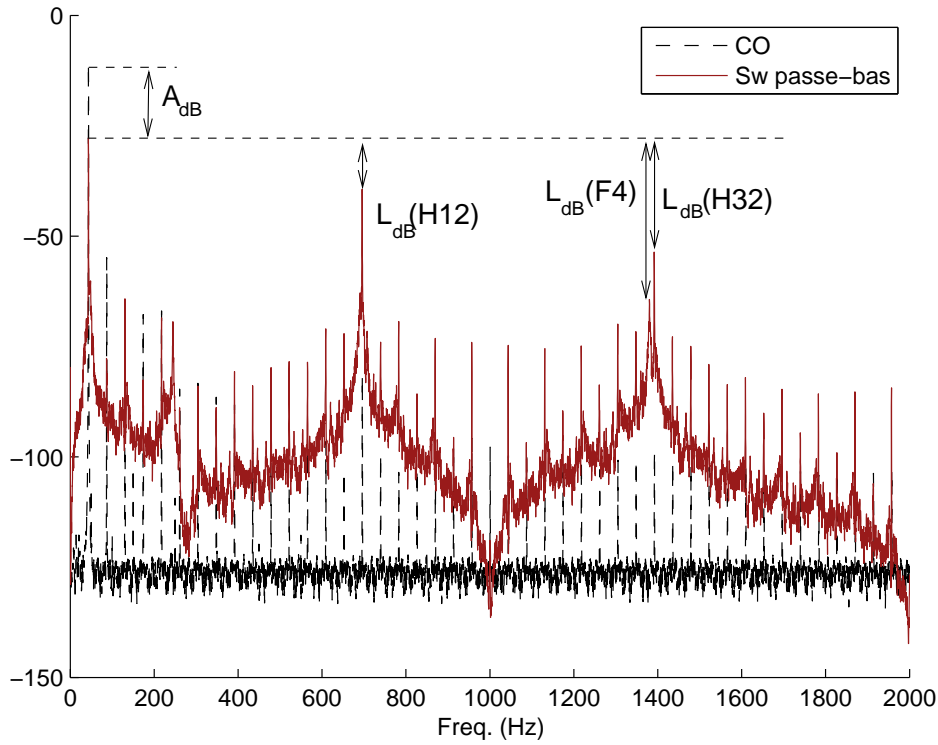


FIG. 9.17: Spectre de la vitesse en circuit ouvert et avec switch commandé avec filtre passe-bas (extrait de la figure 9.16).

Dans le cas d'un switch parfaitement synchronisé avec le signal d'excitation, le signal de tension est périodique et le spectre de vitesse correspondant est harmonique ; les pics aux fréquences propres exactes des modes de flexion n'apparaissent pas. De même, le "plancher" de bruit est très bas. Cela est très visible avec le switch autonome (figs. 9.15 et 9.16). Cependant, le spectre de vitesse présente des zones de niveau plus élevé au voisinage des fréquences propres, dues au filtrage du signal de tension par la réponse de la structure.

Au contraire, dans le cas d'une commutation "mal" synchronisée, on observe une remontée du niveau de bruit, cela est visible par exemple figure 9.16 dans le cas du switch commandé sans passe-bas.

Atténuation et amplitude des harmoniques

Pour quantifier l'atténuation apportée par le dispositif ainsi que le transfert d'énergie vers les hautes fréquences, on définit les grandeurs suivantes.

- A_{dB} est l'atténuation apportée par le dispositif, par rapport à la situation en circuit ouvert, à la fréquence d'excitation Ω_F du système.

$$A_{dB} = 20 \log \frac{|V_{CO}(\Omega_F)|}{|V(\Omega_F)|},$$

avec $V_{CO}(\omega)$ et $V(\omega)$ les spectres moyennés des signaux de vitesse en circuit ouvert et avec le dispositif à commutation considéré, à la fréquence ω , respectivement.

- $L_{dB}(\omega)$ le niveau relatif d'un pic secondaire du spectre à la fréquence ω par rapport au

Système	A_{dB}	$L_{dB}(N12)$	$L_{dB}(F4)$	$L_{dB}(N32)$
Circuit ouvert	0	70	-	87.3
Switch autonome	9.6	18.6	-	46.5
Switch commandé	12.9	27.7	25	51.9
Switch avec passe-bas	17	11.2	47	25.8

TAB. 9.3: Atténuation apportée et niveau relatif des modes / harmoniques.

fondamental (à Ω_F) du même spectre.

$$L_{dB} = 20 \log \frac{|V(\Omega_F)|}{|V(\omega)|},$$

Pour caractériser le transfert d'énergie vers les fréquences autres que celles d'excitation, on s'intéresse aux pics prépondérants : on mesure L_{dB} pour les pics harmoniques proches des fréquences des modes de flexion 3 et 4 ainsi que pour le pic à la fréquence du 4-ième mode de flexion. Les résultats sont indiqués dans le tableau 9.3, où l'on note :

- $L_{dB}(H12)$ le niveau relatif du 12-ième harmonique (696 Hz), très proche du mode F3 (690 Hz) ; le pic de résonance n'est pas observé à la pulsation du mode, mais plutôt à l'harmonique le plus proche ;
- $L_{dB}(F4)$ le niveau relatif du 4-ième mode de flexion (1378 Hz) ;
- $L_{dB}(H32)$ le niveau relatif du 32-ième harmonique (1392 Hz).

On a retiré les valeurs correspondant à un niveau "plancher" du spectre (autour de -120 dB). On peut faire les remarques suivantes :

- Les A_{dB} calculés ici (à la fréquence d'excitation) sont quasiment identiques à ceux du tableau 9.2, calculés avec la valeur efficace de la vitesse et prenant en compte toute la bande fréquentielle.
- Dans tous les cas, lorsque le fondamental est atténué, les niveaux relatifs des harmoniques remontent ; on peut s'attendre à ce que la synchronisation soit alors plus difficile.
- Au voisinage du mode 4 il arrive que le pic d'amplitude la plus élevée soit à la fréquence du mode propre (1378 Hz) ou bien sur l'harmonique 32 du signal d'excitation (1392 Hz), suivant la qualité de la synchronisation.

Influence du couplage

On compare maintenant le spectre à la résonance entre la poutre symétrique (§6.1.1) et asymétrique (§9.1.2). La première a été conçue pour avoir les trois premiers coefficients de couplage élevés ; tandis que la deuxième a été conçue pour avoir le coefficient de couplage du premier mode élevé et celui du deuxième mode faible. On espère ainsi limiter les phénomènes de désynchronisation observés sur les simulations du paragraphe 8.5.2, où la présence de mode élevés réduit l'efficacité du switch.

La figure 9.18 permet de comparer les spectres de la vitesse avec excitation à la résonance du premier mode, en circuit ouvert et avec switch autonome, de la poutre symétrique (à gauche) et asymétrique (à droite). Le spectre est obtenu en effectuant un grand nombre de moyennes

pendant une acquisition continue (par le logiciel SmartOffice). Le spectre de la vitesse du système en circuit ouvert est un spectre harmonique ; seule l'amplitude des harmoniques est représentée. On observe les différences qualitatives suivantes - une comparaison quantitative est sans objet, les structures étant différentes.

- L'excitation du mode 2 est bien réduite par le découplage de la structure asymétrique ;
- L'amortissement des vibrations est plus important avec la structure asymétrique ;
- L'aspect "en peigne" du spectre avec structure asymétrique montre que la synchronisation est meilleure qu'avec la structure symétrique (où l'on observe d'autres raies que celle des harmoniques du mode 1 ; ce comportement est interprété ci après (§9.4.2))
- L'excitation du mode 3 est plus importante avec la structure asymétrique ; néanmoins cela ne pose pas de problème de désynchronisation apparent.

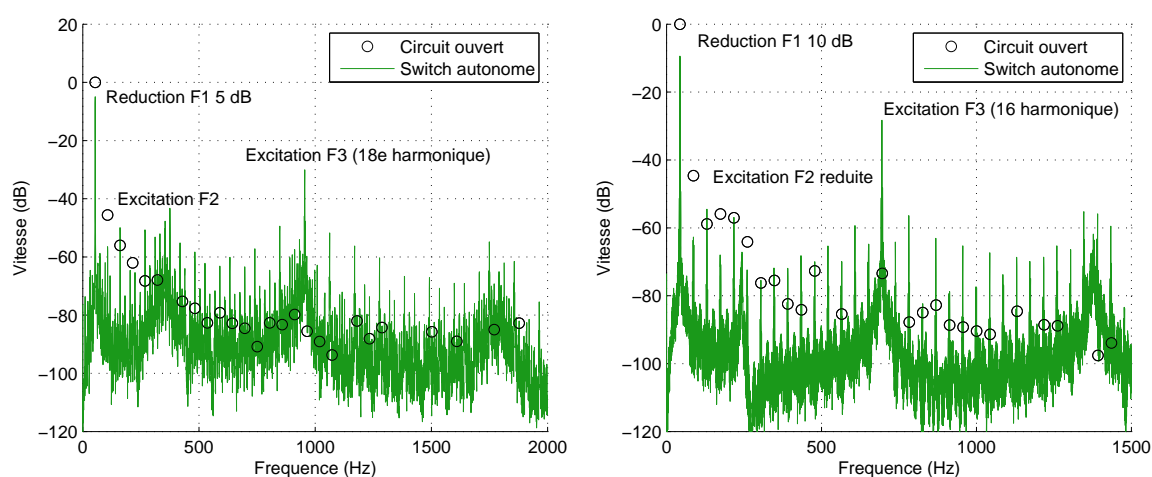


FIG. 9.18: (à g.) Spectre de la vitesse avec poutre symétrique (à dr.) avec poutre asymétrique.

Excitation croisée entre modes, théorie et expérience

L'observation du comportement et de simulations du système montre que la synchronisation des commutations est perturbée par la présence de modes voisins, particulièrement lorsqu'ils sont harmoniques impairs. Afin de visualiser ce phénomène on réalise une simulation et un essai d'excitation par un sinus glissant lentement, passant par la première résonance, sur la poutre symétrique qui présente un couplage important des trois premiers modes. Le résultat est tracé sous forme de diagramme temps/fréquence figure 9.19 ; le but est de mettre en valeur les comportements des harmoniques.

On distingue les éléments suivants :

- La ligne diagonale de faible pente que l'on observe sur les deux diagrammes correspond à la réponse directe à l'effort d'excitation.
- On peut également observer les harmoniques impairs de cette réponse, qui sont liés à l'effet du switch ; ils se voient sous formes de lignes dont la pente est multiple impair de la pente de l'effort d'excitation.
- Les barres horizontales sur le diagramme correspondent aux modes 1 et 2.
- Les harmoniques impairs excitent légèrement le deuxième mode ; on observe un phénomène d'addition / retrait de fréquence qui fait apparaître des lignes montantes et descendantes de part et d'autre de la fréquence du deuxième mode. Cette addition / retrait de fréquence des signaux montre qu'il y a une modulation des amplitudes, c'est à dire un phénomène de multiplication entre un phénomène à la fréquence d'excitation et un à la fréquence propre d'un mode. Il ne s'agit pas d'un artefact de mesure, puisqu'il s'observe également sur les simulations.
- Au moment où la fréquence d'excitation passe par la pulsation du premier mode (passage à la résonance) on constate que le deuxième mode est fortement excité ; de plus, on observe un élargissement du spectre. Cet élargissement montre que le système se comporte de manière irrégulière à ce moment.

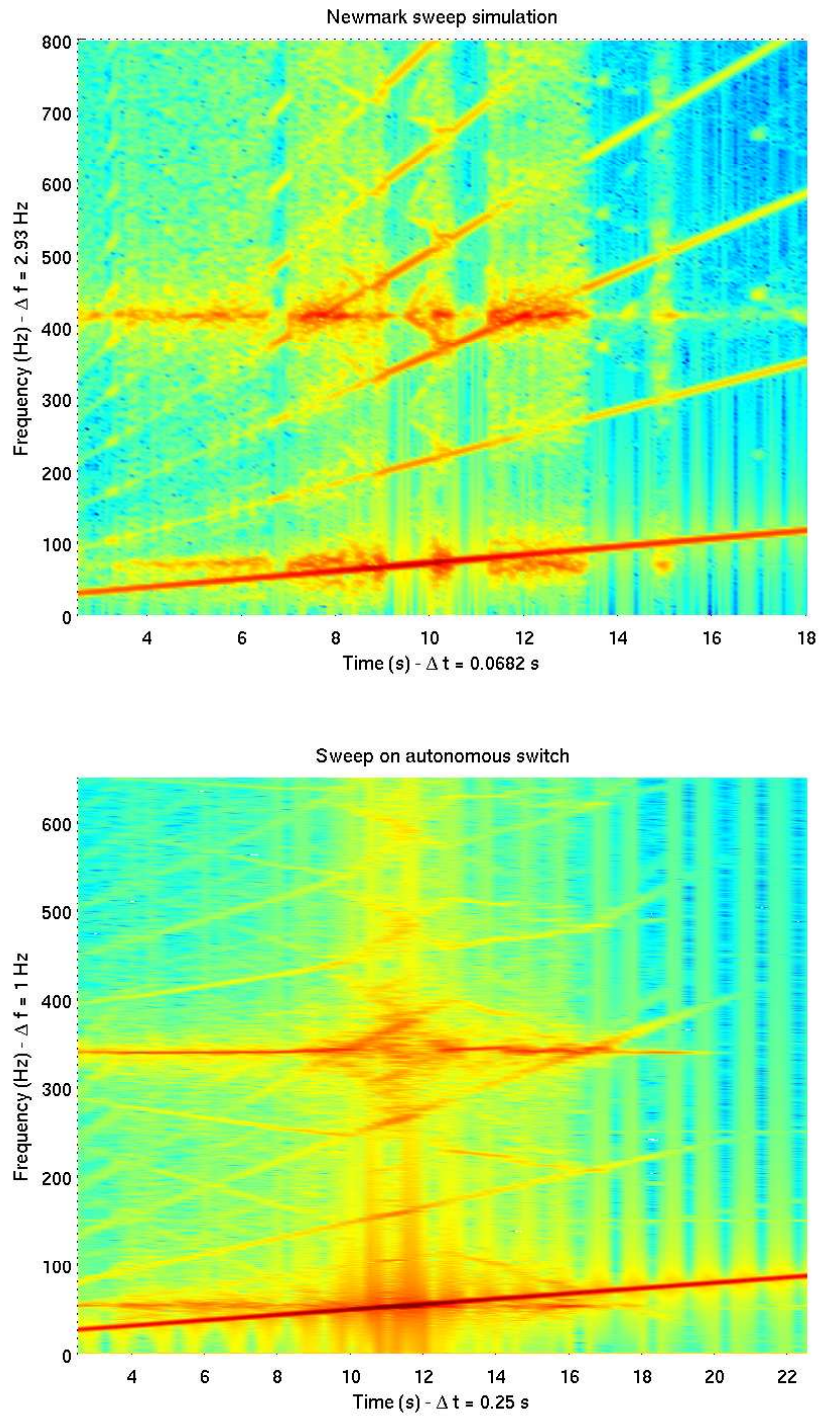


FIG. 9.19: Diagrammes temps-fréquence pour une excitation sinus glissant : (en haut) simulation et (en bas) expérience.

Influence de l'inductance

On se place à la résonance du mode 1 de la poutre asymétrique. On utilise le dispositif à switch commandé avec filtre passe bas, qui permet de changer la valeur de l'inductance du shunt ; on mesure le spectre de la réponse avec une inductance de 1 mH et une de 20 mH⁹. Le spectre de la vitesse est tracé figure 9.20 à gauche et le spectre du signal de tension est tracé à droite. On peut rapprocher cette expérience du tracé du spectre de la charge (§8.5.2), même si le signal de tension et de charge n'ont pas exactement la même forme.

En comparant les spectres on constate que les composantes haute fréquence sont bien plus présentes dans les signaux de tension et dans la vitesse de la structure. De plus, étant donné qu'à ces fréquences la structure rayonne très bien du bruit acoustique, la différence de niveau sonore est spectaculaire à l'oreille. Ainsi le bruit produit par les commutations est nettement audible avec une inductance de 20 mH, et vraiment très désagréable avec une inductance de 1 mH. L'efficacité du système est à peu près la même avec les deux inductances ; on observe cependant un niveau de réexcitation de certains modes intermédiaires un peu supérieur avec une inductance de 20 mH.

⁹Plus grosse valeur disponible au moment de la mesure.

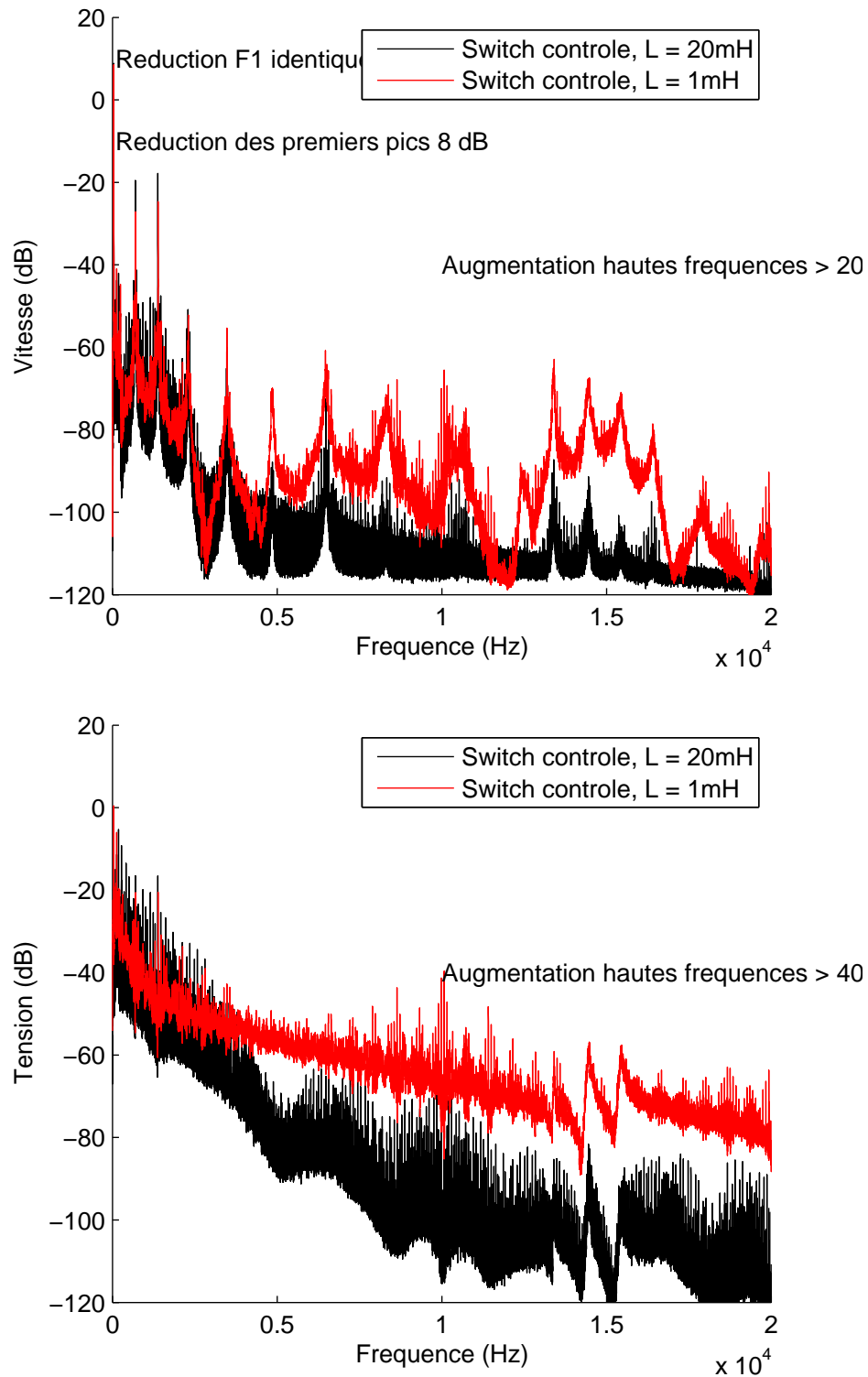


FIG. 9.20: (en haut) Spectre de la vitesse avec deux inductances différentes (en bas) spectre du signal de tension.

9.5 Résultats en régime libre

On réutilise le dispositif expérimental de lâcher électromagnétique du chapitre 6.4.3 ; on compare deux shunts possibles, le shunt RL linéaire et le shunt SSDI, avec le circuit autonome ; ces deux dispositifs sont associés à la poutre symétrique (§6.1 , tab. 6.7). Le début de *deux réponses superposées* et un détail sont tracés figure 9.21, où on a porté en gris clair l'enveloppe de décroissance de la réponse en circuit fermé. On peut faire les commentaires suivants :

- L'efficacité du shunt SSDI est bonne sur le début de la réponse, sans atteindre celle du shunt résonant.
- Le circuit autonome cesse de fonctionner assez rapidement, aux alentours de 0.2s ; il n'y a plus assez de tension dans l'élément piézoélectrique pour déclencher la commutation ; c'est une non-linéarité de type seuil de l'électronique qui n'est pas prise en compte dans nos modèles.
- L'observation des deux réponses superposées pour le cas du shunt RL montre une superposition exacte des réponses. Les conditions initiales sont donc parfaitement identiques entre deux lâchers.
- Par contre, la réponse du cas avec shunt SSDI montre des différences nettes en terme de phase des modes 1 et 2. On peut déduire de cette observation que le système avec shunt est très sensible aux conditions initiales ; ainsi la déviation minuscule qui passe inaperçue avec le shunt RL provoque une différence notable d'évolution avec le shunt SSDI. Il s'agit d'une des caractéristiques d'un système chaotique [98].

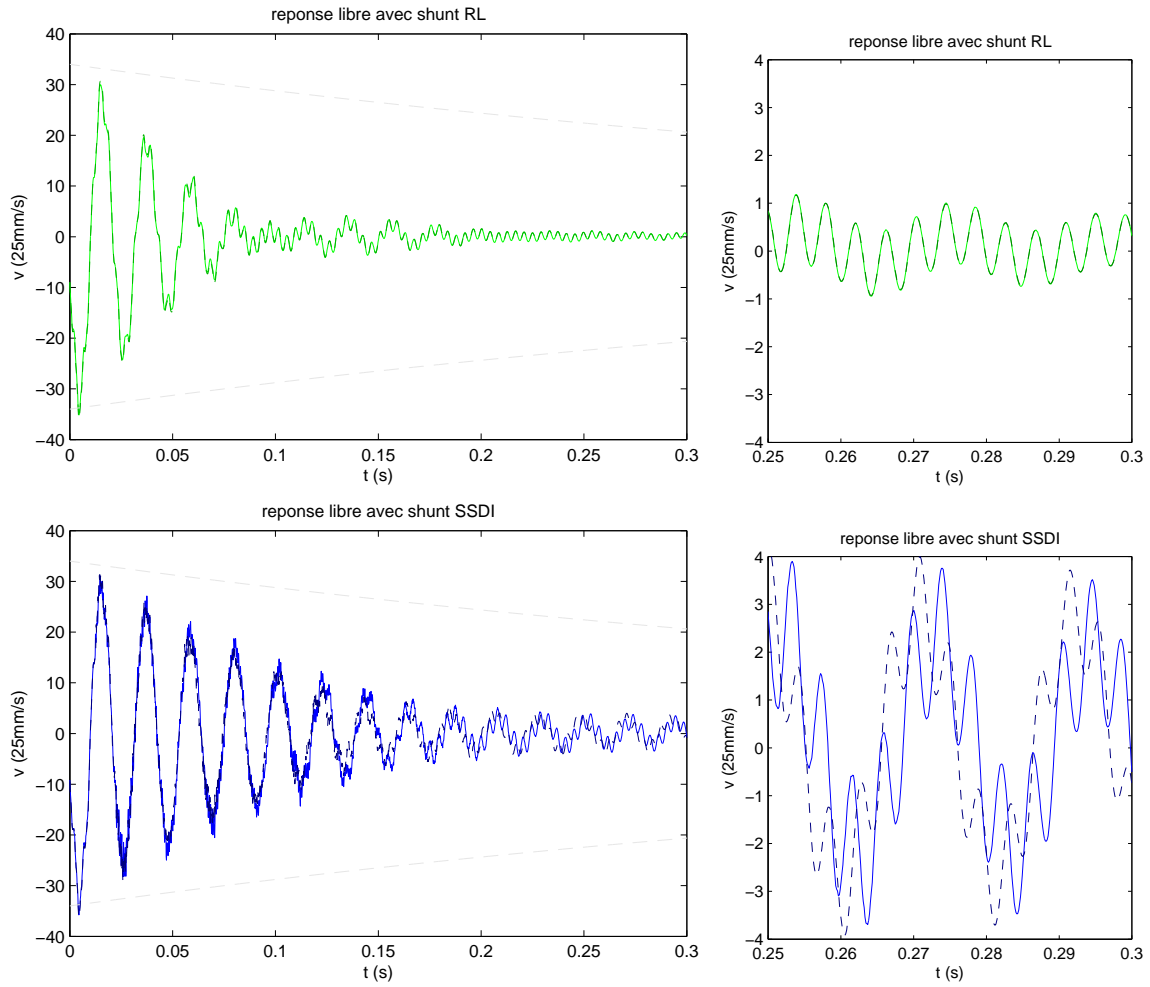


FIG. 9.21: Début (à g.) et détail (à dr.) de deux réponses libres avec shunt RL (en haut) et SSDI (à droite)

9.6 Conclusion

L'étude expérimentale de shunts à commutation montre que plusieurs phénomènes dégradent la performance par rapport à la prédiction du modèle 1 ddl. Ainsi, à chaque switch, le changement rapide de la charge dans l'élément piézoélectrique provoque un changement de contrainte qui excite les modes de vibration élevés de la structure. Ce phénomène perturbe le signal de tension qui sert à déclencher la commutation, ce qui peut diminuer les performances. On a observé trois situations dans le cas d'une excitation harmonique :

- Dans certain cas, le système reste synchronisé sur le signal d'excitation, et la réponse est périodique à la fréquence d'excitation. Certains harmoniques, proches des modes propres de la structure, peuvent prendre une amplitude importante.
- Dans certain cas, le système a une synchronisation qui fluctue, c'est à dire que la réponse n'est pas tout à fait périodique, néanmoins les commutations se produisent non loin du maximum de déplacement du mode que l'on cherche à atténuer. La réponse du système n'est plus tout à fait périodique, mais en terme d'atténuation, ce cas n'est pas forcément très pénalisant.
- Dans certain cas, la synchronisation est perturbée, les commutations surviennent trop souvent, trop peu ou au mauvais moments, et le système ne parvient pas à stocker une charge importante ; alors l'efficacité est dégradée.

Ces comportements avaient été constatés avec le modèle N ddl (§8) ; dans ce chapitre on s'est volontairement limité à des stratégies de commutation basées uniquement sur des critères instantanés. Cette démarche avait pour but de mettre en valeur les phénomènes de transfert d'énergie entre modes. Expérimentalement, ces phénomènes se constatent bien ; de plus on observe la baisse de performance en termes d'atténuation en présence de modes élevés. Les systèmes qui ont bien fonctionné en terme d'atténuation sont ceux qui sont capables de ne pas commuter à chaque maximum local :

- le circuit autonome, avec ses composants qui réalisent un passe-bas et une détection de niveau ;
- le système commandé avec ordinateur temps réel, réglé avec un taux d'échantillonnage bas, ou un filtre passe bas ;
- le système commandé avec un élément piézoélectrique capteur sélectivement couplé au mode visé ;
- le système commandé avec la mesure de vitesse...

Certains des dispositifs étudiés sont évidemment peu réalistes pour un objectif de shunt autoalimenté (vibromètre laser ...) ; néanmoins ils sont autant de pistes pour des développements ultérieurs.

