
Shunts linéaires

Quoi de plus réconfortant, en ce siècle glacé, figé, engoncé dans son froid rigorisme, que de vérifier encore l'exquise sagesse de ces vieux dictons populaires que nos ancêtres, gorgés de vin rouge et boursoufflés d'idées reçues, jetaient jadis dans l'âtre, au cœur paisible des veillées campagnardes ? Mais, direz-vous, ces vieux dictons n'ont-ils pas pris quelques rides ? Pour le savoir, nous pouvons prendre un bon rat, un bon chat, une pierre qui roule et de la mousse, par exemple. (...) Hé oui, le vieux dicton a raison : Chihuahua bouillu, Chihuahua foutu.

Pierre Desproges

Shunts linéaires : modélisation et optimisation

Ce chapitre présente une optimisation de la réduction des vibrations d’une structure (modélisée d’après les chapitres précédents 3 ou 4) munie d’éléments piézoélectriques associés à des circuits “shunts”¹ passifs. On étudie le cas d’un shunt résistif (shunt “R”) où une résistance électrique dissipera de la puissance par effet Joule et le cas d’un shunt inductif ou résonant (shunt “RL”) où une inductance permet d’augmenter le courant circulant dans le shunt, et donc la dissipation par la résistance (figure 5.1). On utilise pour ce faire le modèle électromécanique de la structure avec patch piézoélectrique obtenu aux chapitres précédents ; le shunt introduit une relation entre le courant (qui dépend de la charge libre sur le patch) et la tension aux bornes de celui-ci.

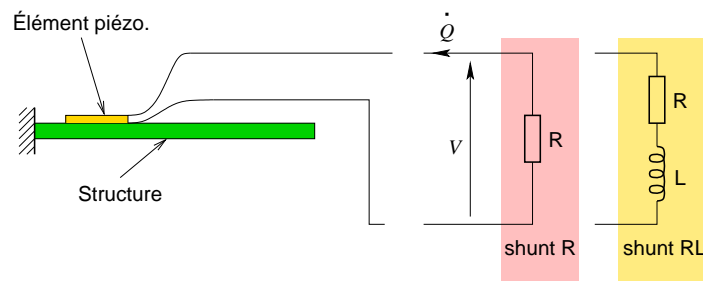


FIG. 5.1: Structure, éléments piézoélectrique et shunts linéaires au choix R ou RL.

Cette étude constitue un bon point de départ pour l’étude de la partie III sur des dispositifs à commutation :

- les shunts linéaires sont relativement simples à étudier ;
- le modèle que l’on développe pour les circuits sera réutilisé ;
- les optimisations auxquelles on procède donnent des pistes pour ensuite optimiser un dispositif à commutation ;
- la linéarité et la simplicité du système facilitent l’étude et les mesures expérimentales.

Tout d’abord, une étude bibliographique succincte est proposée (§5.1). Ensuite, pour chacun des shunts, on écrit un modèle où la partie mécanique est restreinte à un seul mode

¹On appelle shunt tout circuit mis en parallèle d’un autre.

(§5.3.1 et 5.4.1 respectivement pour les shunts R et RL) ; ensuite les valeurs optimales des composants électroniques sont identifiées pour le système 1 ddl, pour le cas de la réponse libre et forcée (§5.3.2 et 5.4.2). Finalement, on constate que les performances dans ce cas ne dépendent que du coefficient de couplage (§5.3.4 et 5.4.4). On teste alors la tenue de cette performance lorsqu'un des composants électroniques n'est pas optimal, c'est à dire la robustesse du système (§5.3.5 et 5.4.5). Finalement, on vérifie que le passage à un modèle N ddl ne remet pas en cause les résultats obtenus (§5.3.6 et 5.4.6).

Dans le chapitre suivant (chap. 6) on validera expérimentalement ces résultats.

5.1 Bibliographie

Dans un des premiers articles sur le sujet, Hagood et Von Flotow [37] présentent ces deux types de shunt et leur optimisation dans le cas d'un système conservatif à un degré de liberté. Les auteurs font les constatations suivantes :

- les shunts résistifs et résonants doivent être adaptés à la pulsation d'un mode de vibration à réduire et à la capacité de l'élément piézoélectrique ;
- cet accord doit être très précis dans le cas de l'inductance, ce qui exclut l'amortissement de plusieurs modes ;
- la performance obtenue dépend du coefficient de couplage ;
- les valeurs d'inductance requises sont très élevées.

Par la suite, de nombreux ajouts ont été faits à ce modèle de base pour par exemple comparer différentes topologies de circuits : dans [13] et [75] sont comparés des shunts résonants R-L parallèle, R-L-C parallèle et R-L série ; il peut être aussi intéressant de chercher des méthodes permettant de réduire l'inductance souvent énorme requise pour un shunt résonant, par exemple en ajoutant un condensateur en série [8]. Quelques études proposent des shunts résonants à plusieurs branches avec pour objectif d'amortir plusieurs modes d'un système à plusieurs degrés de liberté [104, 63, 7]. La plupart des études sur des shunts multimodes butent sur la difficulté d'optimiser un circuit où tous les composants ont des réglages fortement dépendants. Une solution pour contourner ce problème consiste à utiliser un réseau d'éléments piézoélectriques reliés par des shunts résonants ; ce réseau constitue un analogue électrique de la structure [61]. À l'heure actuelle de nombreuses études concernent des systèmes adaptatifs où le shunt est accordé en permanence sur les vibrations de la structure ; cela sort du cadre de cette étude.

Une revue des développements dans le domaine peut être trouvée dans [52] et [63] ; une très bonne classification des différents types de shunts est faite dans l'introduction de [69] et enfin un exemple d'application du shunt résonant à un cas concret dans [76].

Pour l'étude de shunts résistifs, on étudiera la similarité avec l'amortissement par ajout de matériau dissipatif avec un modèle viscoélastique, ou bien encore avec un amortisseur de type Lanchester présentés dans [42] et [92], entre autres.

Pour l'étude des shunts résonants, on utilise une démarche d'optimisation qui s'apparente à celle d'un amortisseur à masse accordée (*Tuned mass Damper*, TMD, ou *Damped Vibration Absorber*, DVA, ou amortisseur de Frahm du nom de son inventeur). On se réfère donc à l'optimisation présentée par Den Hartog, [29] ainsi qu'à une note sur ce calcul [10] ; la solution exacte de ce problème est présentée par Nishihara et Asami dans [72] et des solutions de problèmes similaires dans [73].

5.2 Objectif

Dans ce chapitre on suppose qu'on dispose d'une représentation sous forme modale de la structure, y compris le couplage électromécanique, avec les N premiers modes. Ces paramètres auront pu être obtenus par le calcul avec un modèle analytique comme proposé au chapitre 3, ou bien avec un modèle éléments finis proposé au chapitre 4, ou encore expérimentalement. On se fixe comme objectifs :

- de choisir une résistance optimale pour amortir un mode avec un shunt résistif, en étudiant la réponse libre et forcée ;
- de choisir une résistance et une inductance optimales pour amortir un mode avec un shunt résonant, aussi pour la réponse libre ou forcée ;
- d'évaluer la performance de ces méthodes en comparant les réponses en court-circuit et avec shunt optimal ;
- d'évaluer la perte de performance lorsque les paramètres électriques ne sont pas optimaux (robustesse) ou bien en présence d'autres modes.

On montrera à l'issue de cette étude que l'optimisation doit être faite deux étapes :

- tout d'abord en maximisant k_r le coefficient de couplage modal ;
- puis en adaptant R ou L et R à ce mode.

5.3 Shunt résistif

5.3.1 Modèle

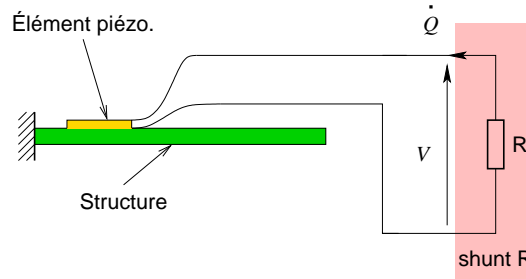


FIG. 5.2: Structure, éléments piézoélectrique et shunt résistif.

On ajoute à l'ensemble structure et éléments piézoélectriques le circuit de la figure 5.2, constitué d'une résistance unique. Cette résistance impose la relation suivante, à ajouter aux équations du système électromécanique :

$$V = -RI = -R\dot{Q}, \quad (5.1)$$

avec V tension aux bornes des éléments piézoélectriques et Q charge libre présente à leur surface. On adimensionne le système en utilisant les valeurs utilisées chapitre 3.2.3 :

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau_m}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_0}, \quad (5.2)$$

où τ_m est une constante de temps dépendante de la partie mécanique, dans le cas de la poutre :

$$\tau_m = l_b^2 \sqrt{\frac{m_b}{D_b}}$$

et

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad (5.3)$$

avec C capacité des éléments piézoélectriques, donnée par l'équation (3.28). Alors en introduisant (5.2) et (5.3) dans (5.1) on obtient :

$$\bar{V} = -\tau_e \dot{Q}, \quad (5.4)$$

avec

$$\tau_e = \frac{RC}{\tau_m}. \quad (5.5)$$

τ_e est la constante de temps du circuit RC (le temps de décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R), adimensionnée par une constante de temps liée à la partie mécanique du système. Dans toute la suite, on adopte des notations sans barre pour les grandeurs adimensionnée; on gardera à l'esprit que τ_e est proportionnel à la résistance. Pour étudier le shunt résistif, on utilise le modèle électromécanique ((3.62)) et on élimine V en tenant compte de (5.4); il vient alors

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + k_r \omega_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - k_r \omega_r Q(t) = F_r(t) & \forall r \in [1, N] \\ \tau_e \dot{Q}(t) + Q(t) - \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 2\xi_N \omega_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} & 0 \\ [k_i \omega_i k_j \omega_j] & \vdots \\ & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -k_1 \omega_1 \\ & \vdots \\ 0 & -k_N \omega_N \\ -k_1 \omega_1 & \dots & -k_N \omega_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec une écriture matricielle similaire à (3.71) où les $N + 1$ inconnues sont les coordonnées modales et la charge :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (5.8)$$

où les seules différences par rapport au système sans shunt (3.71) sont :

- \mathbf{F} le vecteur des forçages modaux où la tension n'apparaît plus comme un effet extérieur; le forçage est nul sur la charge;
- \mathbf{C} la matrice d'amortissement de la partie mécanique où un terme électrique (la résistance) apparaît sous la forme de τ_e

5.3.2 Optimisation : cas 1 ddl sans amortissement

Afin de simplifier l'étude on tronque le système (5.6) en conservant seulement le r -ième mode, on suppose donc $q_k = 0$ pour tout k différent de r . Alors

$$w(x, t) = q_r(t)\Phi_r(x),$$

et le système (5.6) se simplifie en :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \hat{\omega}_r^2 q_r(t) - k_r\omega_r Q(t) &= F_r(t), \\ \tau_e \dot{Q}(t) + Q(t) - k_r\omega_r q_r(t) &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

où $\hat{\omega}_r^2 = \omega_r^2(1 + k_r^2)$ est la pulsation en circuit ouvert ; on peut aussi noter ce système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_r\omega_r & 0 \\ 0 & \tau_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\omega}_r^2 & -k_r\omega_r \\ -k_r\omega_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Réponse forcée

On souhaite tout d'abord minimiser le maximum de gain de la fonction réponse en fréquence du système ; on cherche τ_e optimal pour ce critère, ce qui permet de déduire la valeur de R à adopter. On se place dans le cas $\xi_r = 0$; cela permet de trouver une solution optimale de manière analytique. Cette démarche a été proposée dans [37] et est reprise par la suite.

On se place en régime harmonique de pulsation Ω ; on impose un effort $F_r(t) = \Re(\underline{F}_r e^{j\Omega t})$ et la réponse est alors de la forme $q_r(t) = \Re(\underline{q}_r e^{j\Omega t})$ avec \underline{q}_r et \underline{F}_r complexes. La FRF déplacement modal / effort est alors :

$$H(\Omega) = \frac{\underline{q}_r}{\underline{F}_r} = \frac{j\Omega\tau_e + 1}{(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)(j\Omega\tau_e + 1) - k_r^2\omega_r^2}, \quad (5.11)$$

soit pour le gain au carré

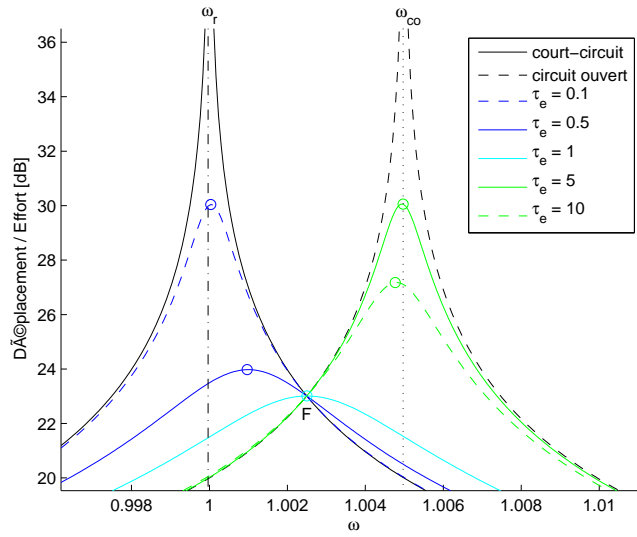
$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\Omega^2\tau_e^2 + 1}{\Omega^2\tau_e^2(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)^2 + (\omega_r^2 - \Omega^2)^2}. \quad (5.12)$$

En traçant les FRF de gain déplacement/effort (fig. 5.3), on constate qu'il existe un point F indépendant de la résistance τ_e , donc commun à toutes les courbes. On cherche la pulsation ω_F correspondant à ce point fixe : en particulier on utilise le fait que le gain est le même quand $\tau_e = 0$ et $\tau_e \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} |H(\omega_F)|^2 &= \lim_{\tau_e \rightarrow 0} |H(\omega_F)|^2 = \lim_{\tau_e \rightarrow \infty} |H(\omega_F)|^2 \\ &= \frac{1}{(\omega_r^2 - \omega_F^2)^2} = \frac{1}{(\hat{\omega}_r^2 - \omega_F^2)^2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \omega_r^2 - \omega_F^2 &= -\hat{\omega}_r^2 + \omega_F^2 \\ \omega_F^2 &= \omega_r^2 + k_r^2\omega_r^2/2 \\ \omega_F &= \sqrt{\omega_r^2 + k_r^2\omega_r^2/2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$


 FIG. 5.3: Tracés de FRF pour différentes valeurs de τ_e , $\omega_r = 1$, $k_r = 0.1$.

En injectant l'expression (5.13) dans l'expression (5.11) on trouve le gain en ce point :

$$|H(\omega_F)| = \frac{2}{k_r \omega_r^2}. \quad (5.14)$$

Comme toutes les FRF passent par le point F, le maximum de gain est supérieur ou égal à F ; au mieux il lui est égal. On cherche la valeur τ_e^{fr} optimale telle que le point F soit le maximum de gain. τ_e^{fr} permet donc d'avoir :

$$\left. \frac{\partial |H(\Omega)|^2}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=\omega_F} = 0,$$

dont le numérateur s'obtient par dérivation de (5.12) :

$$2\omega_F \tau_e^{\text{fr}2} \left[\omega_F^2 \tau_e^{\text{fr}2} + 1 \right] (k_r^2 \omega_r^2 / 2)^2 - (\omega_F^2 \tau_e^{\text{fr}2} + 1) (k_r^2 \omega_r^2 / 2) \left[2\omega_F \tau_e^{\text{fr}2} (k_r^2 \omega_r^2 / 2) + 2\omega_F (\omega_F^2 \tau_e^{\text{fr}2} + 1) \right] = 0,$$

dont la solution est :

$$\tau_e^{\text{fr}} = \frac{1}{\omega_F} = \frac{1}{\omega_r \sqrt{1 + k_r^2 / 2}}. \quad (5.15)$$

Il faudra donc choisir R afin d'avoir $\tau_e = \tau_e^{\text{fr}}$ pour minimiser le maximum de la fonction réponse en fréquence. Dans ce cas, ce maximum est situé à la pulsation ω_F .

Réponse libre

On étudie maintenant le cas de la réponse libre du système restreint à un mode (5.9) avec une partie mécanique non amortie, $\xi_r = 0$. On cherche τ_e maximisant le taux de décroissance de la réponse libre ; on écrit la réponse de (5.9) avec $F_r = 0$ sous la forme d'une exponentielle du temps :

$$\begin{pmatrix} q_r(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} = \Re(\Psi e^{\lambda t}), \quad (5.16)$$

où Ψ et λ sont solution de :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 + \hat{\omega}_r^2 & -k_r \omega_r \\ -k_r \omega_r & \tau_e \lambda \end{pmatrix}}_{A(\lambda)} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Les solutions λ non nulles sont des exponentielles décroissantes avec λ telle que $\det(A(\lambda)) = 0$. Les valeurs typiques de λ , constatées pour des simulations numériques avec des paramètres réalistes, sont une valeur réelle et deux complexes conjugués qu'on note $-\sigma$, $-\mu + j\omega$ et $-\mu - j\omega$ (σ , ω , μ réels positifs)

Numériquement on constate que σ est typiquement 1000 fois supérieur à μ ; ces valeurs correspondent à deux phénomènes :

- d'une part la valeur réelle $-\sigma$ correspond à un phénomène qui est principalement la décharge très rapide du condensateur dans la résistance avec un faible mouvement de la partie mécanique ;
- d'autre part les valeurs complexes $-\mu - j\omega$ et $-\mu + j\omega$ correspondent à un phénomène qui est principalement l'oscillation de la partie mécanique amortie par la circulation de courant dans la résistance.

Comme μ est le facteur pénalisant, car responsable de la décroissance la plus lente, on cherche la valeur de τ_e qui maximise μ , c'est à dire le taux de décroissance de la réponse libre. On note τ_e^{tp} (pour critère temporel) cette valeur optimale.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \tau_e \lambda^3 + \lambda^2 + \hat{\omega}_r^2 \tau_e \lambda + \omega_r^2 \\ &= K(\lambda + \sigma)(\lambda + \mu - j\omega)(\lambda + \mu + j\omega). \end{aligned} \quad (5.18)$$

On identifie les termes en procédant par degré de λ décroissant :

$$\begin{cases} K = \tau_e \\ 1 = \tau_e(\sigma + 2\mu) \\ \hat{\omega}_r^2 = 2\mu\sigma + \mu^2 + \omega^2 \\ \omega_r^2 = \tau_e\sigma(\mu^2 + \omega^2) \end{cases} \quad (5.19)$$

On isole les expressions de σ et $\mu^2 + \omega^2$ depuis les équations (5.19)

$$\begin{cases} \sigma = -2\mu + 1/\tau_e \\ \mu^2 + \omega^2 = \hat{\omega}_r^2 - 2\mu\sigma = \hat{\omega}_r^2 - 2\mu(-2\mu + 1/\tau_e) \end{cases} \quad (5.20)$$

puis on injecte ces expressions dans la dernière relation du système (5.19) :

$$\omega_r^2 = f(\mu, \tau_e) = \hat{\omega}_r^2 + 8\mu^2 - 2\mu\tau_e\hat{\omega}_r^2 - 8\mu^3\tau_e - 2\mu/\tau_e \quad (5.21)$$

On dérive l'équation (5.21) par τ_e , sachant que $d\omega_r/d\tau_e = 0$. Comme on suppose avoir trouvé μ maximum on écrit $\partial\mu/\partial\tau_e = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_r^2}{d\tau_e} &= \frac{\partial f}{\partial \tau_e} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \tau_e} \\ &= 8\mu^3 - 2\mu\hat{\omega}_r^2 + 2\frac{\mu}{\tau_e^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\hat{\omega}_r^2 - \frac{1}{\tau_e^2}}. \quad (5.23)$$

En injectant l'expression (5.23) dans l'équation (5.21) on trouve finalement τ_e^{tp} :

$$\omega_r^2 = \hat{\omega}_r^2 + \frac{2}{\tau_e^{\text{tp}^2}} - 2\hat{\omega}_r^2 - \frac{2}{\tau_e^{\text{tp}}} \sqrt{\frac{1}{\tau_e^{\text{tp}^2}} - \hat{\omega}_r^2}$$

$$\tau_e^{\text{tp}} = \frac{1}{\omega_r(1 + k_r^2/2)}. \quad (5.24)$$

La valeur optimale de τ_e pour la réponse libre τ_e^{tp} est légèrement différente de la valeur optimale pour la réponse forcée τ_e^{fr} (5.15). Elle permet d'obtenir un taux de décroissance dépendant du couplage et de ω_r :

$$\mu = \frac{\omega_r k_r}{\sqrt{8}} \quad (5.25)$$

5.3.3 Modèle 1 ddl avec amortissement

Influence de l'amortissement mécanique : réponse forcée

On considère le système réduit à un mode (5.10) avec ξ_r non nul. On souhaite vérifier si τ_e^{fr} constitue aussi un bon choix pour amortir les vibrations du système lorsque l'amortissement mécanique est non nul. La FRF du système avec amortissement mécanique s'écrit :

$$H(\Omega) = \frac{q_r}{F_r} = \frac{1 + j\Omega\tau_e}{(\omega_r^2 - \Omega^2 - 2\xi_r\omega_r\tau_e\Omega^2) + j\Omega(\tau_e(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2) + 2\xi_r\omega_r)}, \quad (5.26)$$

soit pour le gain au carré :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\Omega^2\tau_e^2 + 1}{(\Omega\tau_e(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2) + 2\xi_r\omega_r\Omega)^2 + (\omega_r^2 - \Omega^2 - 2\Omega^2\xi_r\omega_r\tau_e)^2}. \quad (5.27)$$

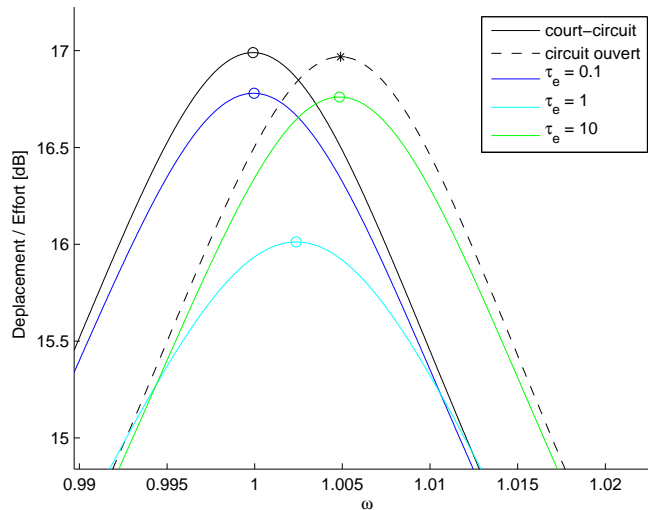


FIG. 5.4: Tracés de FRF pour différentes valeurs de τ_e , $\omega_r = 1$, $k_r\omega_r = 0.1$, $\xi_r = 0.01$: pas de point fixe

On constate sur les FRF (fig. 5.4) qu'il n'y a plus de point fixe. On effectue numériquement les calculs suivants (avec $\omega_r = 1$ et $k_r = 0.1$) :

- Pour plusieurs valeurs de ξ_r et en fonction de τ_e on cherche le maximum de la FRF ;
- On identifie numériquement la valeur de τ_e minimisant ce maximum, qu'on appelle τ_e^{num} .

Les résultats sont tracés figure (5.5) ; on constate que :

- τ_e^{num} est légèrement différent de τ_e^{fr} quand l'amortissement est important ;
- par contre, l'amplitude du maximum de la FRF varie de moins en moins autour de τ_e^{num} .

Il est donc raisonnable de choisir $\tau_e = \tau_e^{\text{fr}}$ quel que soit ξ_r , on obtiendra un résultat en termes d'amplitude proche de l'optimum dans tous les cas.

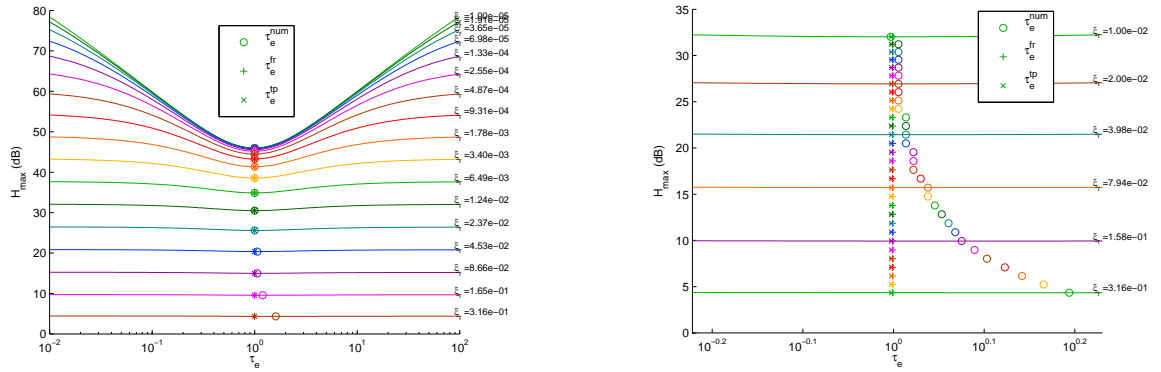


FIG. 5.5: Tracé des maxima des FRF en fonction de τ_e pour plusieurs valeurs d'amortissement ξ_r et valeurs optimales τ_e^{fr} , τ_e^{tp} et τ_e^{num}

Influence de l'amortissement mécanique : réponse libre

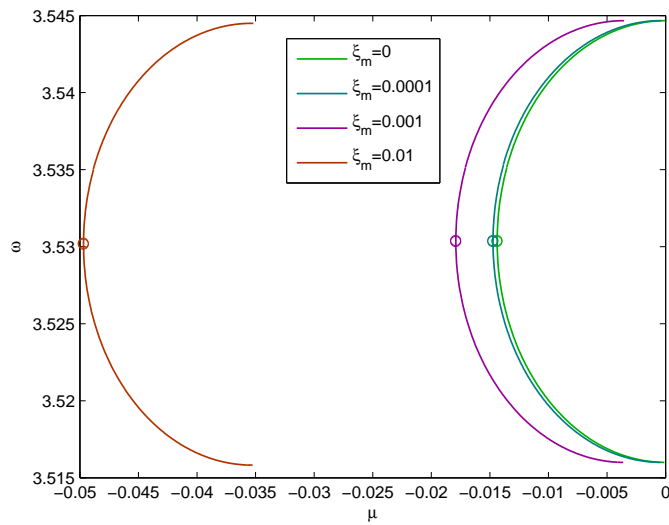


FIG. 5.6: Lieu d'Evans pour $\omega_r = 1$, $k_r = 0.1$, $0 < \tau_e < \infty$ et plusieurs valeurs d'amortissement

La réponse libre du système avec amortissement peut s'écrire sous forme d'exponentielle décroissante $\Re(\Psi e^{\lambda t})$, où Ψ et λ sont solution de :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda\xi_r\omega_r + \hat{\omega}_r^2 & -k_r\omega_r \\ -k_r\omega_r & \tau_e\lambda \end{pmatrix}}_{A(\lambda)} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

On cherche numériquement les valeurs de λ annulant $\det(A(\lambda))$, et on isole une des deux valeurs propres de partie réelle la plus basse² ; on trace alors le lieu d'Evans (fig . 5.6), qui est la courbe paramétrée $\mu + j\omega$ dans le plan complexe en fonction de τ_e pour plusieurs valeurs d'amortissement ξ_r . On obtient deux résultats :

- τ_e^{tp} calculée analytiquement pour $\xi_r = 0$ est aussi optimale en présence d'amortissement mécanique (valeur repérée par un cercle sur les courbes, dont la partie réelle est quasiment la plus basse possible) ;
- la partie réelle de cette valeur est pratiquement la somme de l'amortissement mécanique ξ_r et de l'amortissement apporté par le shunt lorsque $\xi_r = 0$.

5.3.4 Performances : atténuation et couplage électromécanique

On souhaite quantifier l'apport du shunt résistif pour la réponse forcée et voir quels paramètres sont influents. On compare le maximum du gain de la réponse forcée dans trois cas :

- Tout d'abord on considère le système en court-circuit, en partant du système (5.9) avec $\tau_e = 0$ et $\xi_r \neq 0$. Il se résume à

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) = F_r(t), \quad (5.29)$$

dont le pic d'amplitude se situe à la pulsation de résonance du système mécanique $\tilde{\omega}_r = \omega_r\sqrt{1 - 2\xi_r^2}$. Le gain au carré est donné par :

$$\begin{aligned} H_0^2 &= |H(\tilde{\omega}_r)|^2 |_{\tau_e=0} = \frac{1}{(\tilde{\omega}_r^2 - \omega_r^2)^2 + (2\xi_r\omega_r\tilde{\omega}_r)^2} \\ &= \frac{1}{\omega_r^4} \frac{1}{4\xi_r^2} \frac{1}{1 - \xi_r^2}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

H_0 est choisi comme étant l'amplitude de référence de la réponse du système et ne dépend que de l'amortissement mécanique.

- On impose maintenant $\tau_e = \tau_e^{\text{fr}}$ qu'on sait être une valeur proche de la valeur optimale. On suppose que le maximum de la FRF se situe à la même fréquence ω_F que le maximum de réponse du système sans amortissement mécanique, c'est à dire à la même abscisse que le point fixe. On cherche alors l'amplitude $H_{\text{opt}}^{\text{fr}}$ de la réponse à cette fréquence pour le système amorti en calculant (5.26) :

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}^{\text{fr}2} &= |H(\omega_F)|^2 |_{\tau_e=\tau_e^{\text{fr}}} \\ &= \frac{1}{\omega_r^4} \frac{1}{\left(k_r^2/2 + 2\xi_r\sqrt{1 + k_r^2/2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

²Donc la plus pénalisante en terme de taux de décroissance.

- On peut aussi calculer numériquement le maximum d'amplitude de $H_{\tau_e^{fr}}$: on notera celui-ci H_{opt}^{num} .

On définit le rapport entre H_0 et H_{opt}^{fr} comme l'atténuation apportée par le shunt ; on l'exprimera en dB et on constate que ω_r n'intervient pas dans l'expression :

$$A_{dB}^{th} = 20 \log \left(\frac{H_0}{H_{opt}^{fr}} \right) = 10 \log \left(\frac{H_0^2}{H_{opt}^{fr2}} \right)$$

$$\boxed{A_{dB}^{th} = 10 \log \left(\frac{(k_r^2/2 + 2\xi_r \sqrt{1 + k_r^2/2})^2}{4\xi_r^2(1 - \xi_r^2)} \right)}. \quad (5.32)$$

Sur la figure (5.7) on trace les rapports d'amplitudes pour plusieurs valeurs de ξ_r et en fonction de k_r :

- A_{dB}^{num} calculés par identification numérique des maxima des FRF en court-circuit et avec $\tau_e = \tau_e^{fr}$ en traits pleins, c'est à dire $20 \log \left(\frac{H_0^{num}}{H_{opt}^{num}} \right)$.
- A_{dB}^{th} calculés d'après l'expression (5.32) en pointillés.

On constate que les hypothèses faites sur H_0 et H_{opt}^{fr} sont pertinentes, c'est à dire que le maximum trouvé numériquement est très proche de (5.31). On peut faire les remarques suivantes sur les valeurs obtenues :

- Le coefficient de couplage k_r est le paramètre à optimiser si l'on veut augmenter l'atténuation. C'est assez naturel, car physiquement ce facteur représente la fraction d'énergie électrique que l'on pourra dissiper dans la résistance sur l'énergie totale de la structure en vibration.
- La différence d'amplitude est d'autant plus importante que l'amortissement mécanique de la structure en court circuit est faible.
- Pour des valeurs réalistes d'une structure faiblement amortie ($\xi_r = 0,001$) et bien couplée ($k_r = 0,1$) on obtient environ 10 dB d'atténuation.

5.3.5 Influence d'un désaccord

On étudie maintenant le cas où τ_e n'est pas optimale. En effet, on peut commettre une imprécision au niveau du réglage de la résistance, ou aussi des paramètres du système peuvent varier avec le temps : par exemple, en raison de la sensibilité des éléments piézoélectriques à la température [79] la capacité peut varier, ou encore la fréquence d'un mode peut changer suite à une modification de la structure ...

Les courbes de la figure 5.8 montrent l'évolution de l'atténuation sur un cas où $\xi_r = 0,001$ en fonction de τ_e . On constate que pour des variations de τ_e d'un facteur 2 ($2 \simeq 10^{0.3}$ fig. 5.8 à droite), les performances restent du même ordre de grandeur. On peut donc affirmer que le shunt résistif est robuste, c'est à dire qu'une erreur d'accord n'entraîne pas une perte de performance importante.

On constate d'autre part (fig. 5.8 à gauche) que même pour une valeur totalement inadaptée de τ_e , en cas de couplage fort, une certaine atténuation est toujours réalisée. Par exemple si $k_r = 0.3$ on obtient toujours 10dB d'atténuation avec $\tau_e = 10\tau_e^{fr}$. On peut donc s'attendre à ce qu'un shunt résistif calculé pour un mode soit également efficace sur les modes voisins.

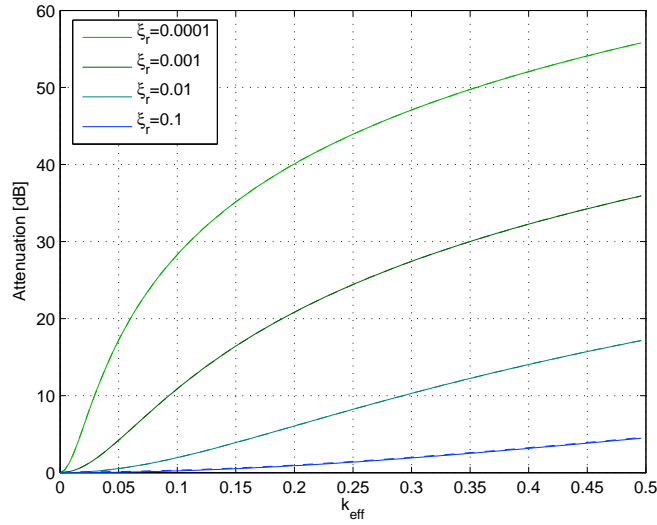


FIG. 5.7: Atténuation du pic de réponse obtenue avec une résistance optimale en fonction du couplage : résultats numériques A_{dB}^{num} en traits pleins et A_{dB}^{th} obtenus avec (5.32) en pointillés

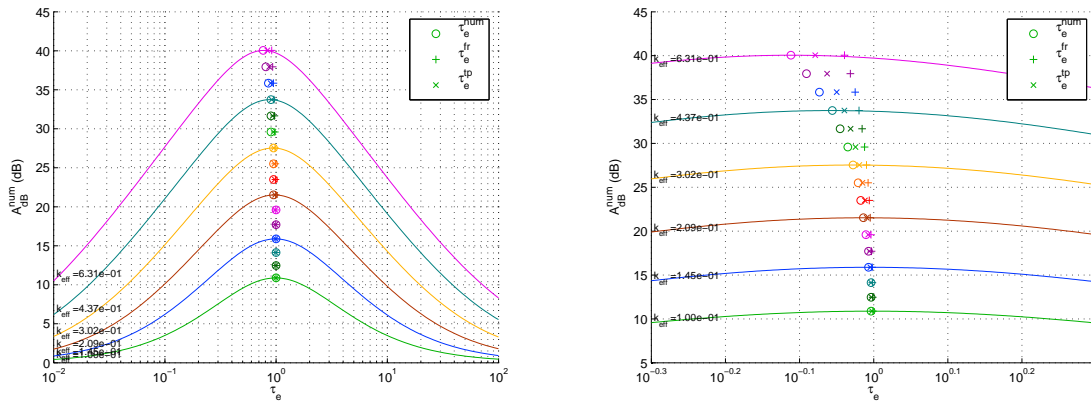


FIG. 5.8: Tracé des atténuations en fonction de τ_e pour plusieurs valeurs du coefficient de couplage k_r et valeurs optimales

5.3.6 Performances dans le cas plusieurs degrés de liberté

On souhaite évaluer l'efficacité d'un dispositif de type shunt résistif, choisi d'après les critères développés au chapitre 5.3.2, quand la partie mécanique est modélisée avec plusieurs modes.

On étudie la réponse forcée en régime harmonique avec une FRF déplacement / effort, avec le déplacement mesuré en un point de position ³ x_m et l'excitation appliquée en un point x_n . On obtient une expression de l'effort modal en considérant que l'effort $F(t)$ exercé correspond à un dirac de pression exercée sur la structure :

$$p(x, t) = \delta(x - x_n)F \cos(\omega t), \quad (5.33)$$

³Dans le cas d'un poutre une coordonnée suffit, dans le cas d'un système 3 D x_m et x_n sont des vecteurs.

avec δ fonction de Dirac; alors l'expression de l'effort modal donnée avec (3.61) permet d'écrire :

$$\underline{F}_r = \int_{\Omega} F \cos(\omega t) \delta(x - x_n) \Phi_r(x) d\Omega = F \cos(\omega t) \Phi_r(x_n). \quad (5.34)$$

On écrit respectivement les coordonnées modales, la charge et le déplacement sous forme complexe :

$$\begin{aligned} w(x_m, t) &= \Re(\underline{w} e^{j\omega t}) = |\underline{w}| \cos(\omega t + \arg(\underline{w})), \\ q_r(t) &= \Re(\underline{q}_r e^{j\omega t}) = |\underline{q}_r| \cos(\omega t + \arg(\underline{q}_r)), \\ Q(t) &= \Re(\underline{Q} e^{j\omega t}) = |\underline{Q}| \cos(\omega t + \arg(\underline{Q})), \end{aligned}$$

avec le déplacement qui s'écrit d'après l'expression (3.60) à partir des \underline{q}_r et \underline{Q} ⁴ :

$$\underline{w} = \sum_{r=1}^N \Phi_r(x_m) \underline{q}_r = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_m) \\ \vdots \\ \Phi_N(x_m) \\ 0 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_N \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \Phi_m^{\top} \underline{\mathbf{q}}, \quad (5.35)$$

où $\underline{\mathbf{q}}$ est la représentation complexe de \mathbf{q} introduit avec l'équation (5.8) et Φ_m défini de manière évidente. $\underline{\mathbf{q}}$ est la solution de l'équation (5.7) qu'on réécrit en régime harmonique :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\xi_1\omega_1 j\omega + \hat{\omega}_1^2 & & k_i\omega_i k_j\omega_j & -k_1\omega_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ k_i\omega_i k_j\omega_j & & -\omega^2 + 2\xi_N\omega_N j\omega + \hat{\omega}_N^2 & -k_N\omega_N \\ -k_1\omega_1 & \dots & -k_N\omega_N & \tau_e j\omega + 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}_R = -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)} \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_N \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \vdots \\ \underline{F}_N \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qu'on note

$$\mathbf{Z}_R \underline{\mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (5.36)$$

avec \mathbf{Z}_R matrice impédance. On peut obtenir $\underline{\mathbf{q}}$ par :

$$\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}_R^{-1} \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \vdots \\ \underline{F}_N \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_R^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_1(x_n) \\ \vdots \\ \Phi_N(x_n) \\ 0 \end{pmatrix} F = \mathbf{Z}_R^{-1} \Phi_n F \quad (5.37)$$

Ce qui donne la FRF avec (5.35) et (5.37) :

$$\underline{H}_{mn}(\omega) = \Phi_m^{\top} \mathbf{Z}_R^{-1} \Phi_n. \quad (5.38)$$

On se placera le plus souvent dans le cas particulier de la réponse au point d'excitation, $x_n = x_m$.

Une autre manière de calculer la FRF est de condenser \underline{Q} pour retrouver un système à N degrés de liberté : on part de l'écriture complexe de la charge (5.6) :

$$\underline{Q}(1 + \tau_e j\omega) = \sum_{r=1}^N k_r \omega_r \underline{q}_r, \quad (5.39)$$

⁴La charge électrique n'a pas d'influence directe sur le déplacement mais doit être prise en compte pour le calcul.

qu'on injecte dans la partie mécanique de l'équation (5.6) toujours avec une écriture complexe :

$$-\omega^2 \underline{q}_r(t) + 2\xi_r j\omega \omega_r \underline{q}_r(t) + \omega_r^2 \underline{q}_r(t) = F_r + k_r \omega_r \frac{j\omega}{1+j\omega} \sum_{k=1}^N k_k \omega_k \underline{q}_k \quad \forall r \in [1, N] \quad (5.40)$$

Cela qui donne sous forme matricielle en introduisant $H_Q(\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}$:

$$\left[\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\xi_1 \omega_1 j\omega + \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & -\omega^2 + 2\xi_N \omega_N j\omega + \omega_N^2 \end{pmatrix} + H_Q(\omega) \begin{pmatrix} k_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_N \omega_N \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix},$$

ou aussi

$$\mathbf{Z}'_R \mathbf{q}' = \mathbf{F}', \quad (5.41)$$

avec \mathbf{q}' et \mathbf{F}' qui ne concernent plus que les degrés de libertés mécaniques et \mathbf{Z}'_R matrice d'impédance avec le degré de liberté électrique condensé ; en introduisant Φ'_n vecteur des déplacements modaux en \vec{x}_n on peut alors écrire la FRF :

$$H_{mn}(\omega) = \frac{w}{F} = \Phi'_m{}^\top \mathbf{Z}'_R{}^{-1} \Phi'_n, \quad (5.42)$$

où la matrice d'impédance est cette-fois-ci de dimension N , à comparer à l'expression (5.38) qui fait appel à des matrices plus simples mais de dimensions $N + 1$. On utilisera un calcul numérique de (5.38) sur une plage de fréquences pour tracer les FRF.

Cas d'une poutre

On étudie la poutre de référence (tableau 6.7, p. 120) avec excitation et mesure du déplacement à l'extrémité libre de la poutre ; on trace le module de la FRF adimensionnée pour différentes situations : court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de τ_e^{fr} calculées pour les trois premiers modes, qu'on note τ_1 , τ_2 et τ_3 . Les résultats lisibles sur les figures 5.9 et 5.10 sont collectés dans le tableau 5.3.6. On constate que les atténuations obtenues sont similaires sur chaque mode, ce qui est lié aux coefficients de couplage k_r similaires pour les trois modes étudiés (tableau 6.1). On constate également que le fait d'amortir un mode amène une atténuation sur les modes voisins.

	τ_1	τ_2	τ_3
Att. mode 1	-14 dB	-8 dB	-4 dB
Att. mode 2	-7 dB	-16 dB	-11 dB
Att. mode 3	-3 dB	-11 dB	-13 dB

TAB. 5.1: Atténuation obtenues pour des modes distincts

Cas de plusieurs modes de fréquence proche

On étudie le cas où $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1,05$, $\omega_3 = 1,1$, et $F_r = 1$, $\xi_r = 0,001$ et $k_r = 0,1$ pour chaque mode. Le résultat est présenté figure 5.11 et les atténuations dans le tableau 5.3.6 ; on obtient des résultats très voisins pour les modes proches.

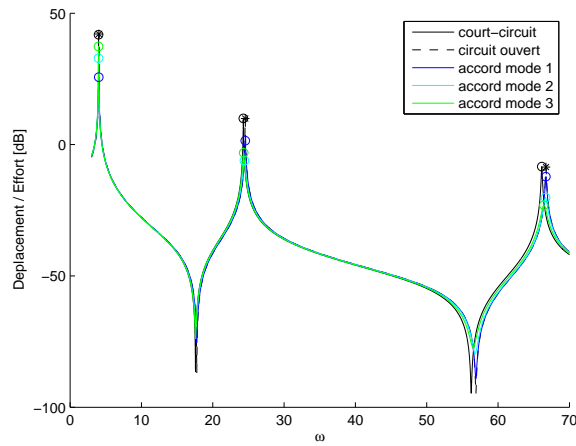


FIG. 5.9: FRF déplacement / effort pour les cas court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de résistance adaptées aux trois modes.

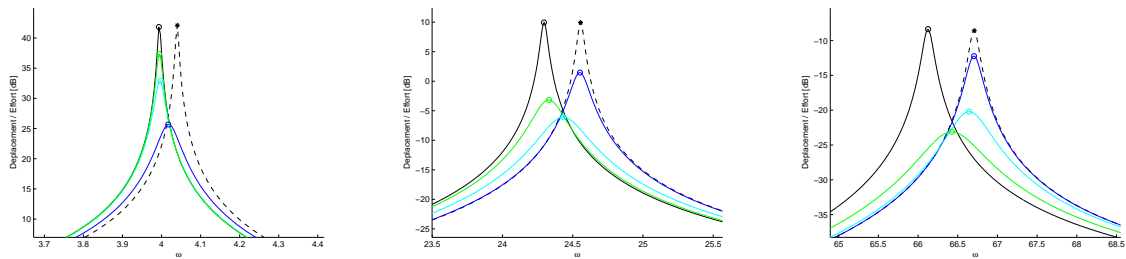


FIG. 5.10: FRF déplacement / effort sur les plages de fréquence autour des pics de résonance

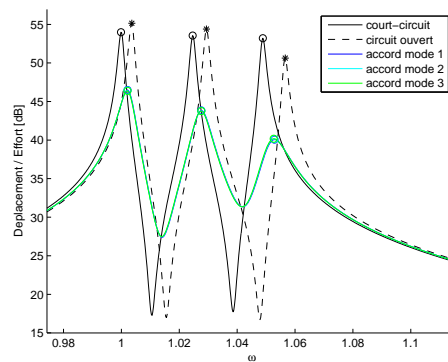


FIG. 5.11: FRF déplacement / effort pour les cas court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de résistance adaptées aux trois modes ; atténuation en dB indiquées sur les pics

5.3.7 Analogie mécanique

La technique de shunt résistif présente des similarités avec un ajout de matériau dissipatif viscoélastique à un système masse-ressort-amortisseur [92]. On peut proposer un analogue

	τ_1	τ_2	τ_3
Att. mode 1	-11,24 dB	-11,2 dB	-11,16 dB
Att. mode 2	-10,88 dB	-10,88 dB	-10,88 dB
Att. mode 3	-10,4 dB	-10,44 dB	-10,26 dB

TAB. 5.2: Atténuation obtenues pour des modes rapprochés

mécanique du système électromécanique couplé pour un degré de liberté. Le dispositif présenté figure 5.12 a un comportement similaire à celui décrit par l'équation (5.10) :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K + K_c & -K_c \\ -K_c & K_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

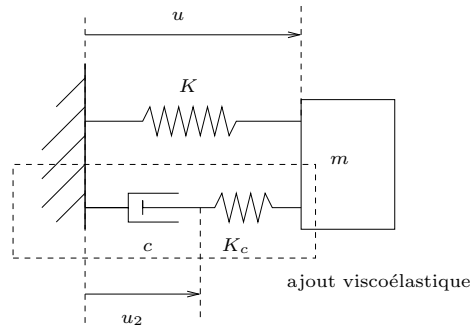


FIG. 5.12: Analogue mécanique du système

Dans cette analogie, la raideur K_c joue le rôle de l'inverse de la capacité des éléments piézoélectriques, l'amortissement c un rôle similaire à la résistance et u_2 un rôle similaire à la charge électrique. L'analogie du coefficient de couplage k_r est ici $Kc/(K + K_c)$ [92]. On peut remarquer que le coefficient de couplage ne peut dépasser 1. Les équivalences sont résumées dans le tableau 5.3.

<i>Grandeurs mécaniques</i>		<i>Grandeurs électriques</i>	
Déplacement	u_2	Charge électrique	Q
Vitesse	\dot{u}_2	Intensité	$I = \dot{Q}$
Force	$F = K_c(u_2 - u)$	Tension électrique	$V = \frac{Q}{C} - \chi q_r$
Raideur additionnelle	K_c	Inverse de la capacité	$\frac{1}{C}$
Amortissement	c	Résistance	R

TAB. 5.3: Équivalences mécanique/électrique

On observe les comportements suivants qui sont similaires :

- Quand le couplage tend vers 0, l'amortisseur (la résistance) ne travaille pas, u_2 (Q) varie très peu. On a intérêt à maximiser le couplage (K_c (k_r) élevé) si on veut diminuer l'amplitude de la réponse du système.

- Quand la viscosité de l'amortisseur (la résistance) augmente beaucoup le système s'apparente à un ajout de raideur K_c (ajout de raideur circuit ouvert $\omega_r^2 k_r^2$) sans amortissement, u_2 varie très peu (très peu de courant circule) et l'amortisseur (la résistance) ne travaillent pas.
- Quand l'amortisseur est peu visqueux (la résistance faible) u_2 varie librement (le courant circule librement), la partie raideur ajoutée n'a pas d'effet (pas d'ajout de raideur en court circuit) et le système n'a pas d'effet sur la structure.

Avant de conclure sur les qualités du shunt résistif, on analyse dans la section suivante les qualités du shunt résonant.

5.4 Shunt résonant

Par analogie avec les amortisseurs à masse accordée, on souhaite réaliser un circuit résonant accordé à un des modes de la structure. À la résonance de celle-ci, on devrait obtenir un courant plus important dans le circuit, et dissiper plus d'énergie dans la résistance.

5.4.1 Modèle

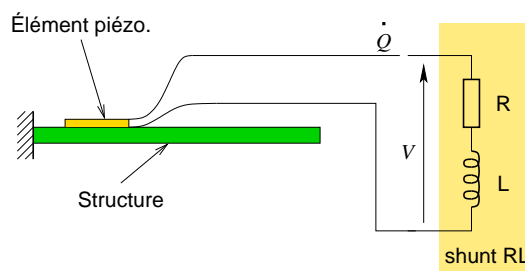


FIG. 5.13: Structure, éléments piézoélectrique et shunt résistif.

En plaçant une inductance L et une résistance R aux bornes des éléments (fig. 5.13) on impose la relation suivante entre tension et courant :

$$V = -RI - R\dot{Q} = -R\dot{Q} - L\ddot{Q}, \quad (5.44)$$

avec V tension aux bornes des éléments piézoélectriques et Q charge libre présente à leur surface. On adimensionne le système en réutilisant la démarche du paragraphe 5.3.1 ; en remarquant que l'adimensionnement de la partie mécanique se fait avec

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau_m}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_0}, \quad (5.45)$$

où

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad (5.46)$$

avec C capacité des éléments piézoélectriques, donnée par l'équation (3.28). Alors en introduisant ces relations dans (5.44) on obtient :

$$\bar{V} = -\frac{\ddot{\bar{Q}}}{\omega_e^2} - 2\xi_e \frac{\dot{\bar{Q}}}{\omega_e}, \quad (5.47)$$

avec ω_e pulsation propre adimensionnée et ξ_e coefficient d'amortissement du circuit électrique résonant constitué par la capacité des éléments piézoélectriques avec le shunt ; on a :

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC\tau_m}} \quad , \quad \xi_e = \frac{RC\omega_e}{2\tau_m}. \quad (5.48)$$

On retiendra donc que ω_e dépend de L tandis que ξ_e dépend de R . On utilise le modèle électromécanique (3.62) et on élimine V en tenant compte de (5.47) ; il vient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) + k_r\omega_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - k_r\omega_r Q(t) = F_r(t) \quad \forall r \in [1, N] \\ \frac{\ddot{Q}(t)}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\dot{Q}(t)}{\omega_e} + Q(t) - \sum_{r=1}^N k_r\omega_r q_r(t) = 0, \end{array} \right. \quad (5.49)$$

soit sous forme matricielle analogue à (5.7) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1/\omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 2\xi_N\omega_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\xi_e/\omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} & 0 \\ [\chi_i\chi_j] & \vdots \\ & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \chi_1 \\ & \vdots \\ 0 & \chi_N \\ \chi_1 & \dots & \chi_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

ce qu'on note aussi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (5.51)$$

où les seules différences par rapport aux équations du système électromécanique sans shunt (3.71) sont :

- \mathbf{F} le vecteur des forçages modaux qui ne contient plus de tension imposée,
- \mathbf{M} la matrice de masse qui comprend désormais un terme électrique correspondant à l'inductance,
- \mathbf{C} la matrice d'amortissement qui comprend un terme électrique de résistance.

5.4.2 Optimisation : cas 1 ddl sans amortissement

L'objectif de cette partie est d'optimiser les grandeurs électriques (résistance et inductance) pour réduire les vibrations dans le cas d'un système ramené à un degré de liberté.

Cas sans amortissement, réponse forcée

Pour calculer plus simplement les paramètres optimaux on tronque le système (5.49) en conservant seulement le r -ième mode, on impose donc $q_k = 0$ pour tout k différent de r . On se place de plus dans un cas d'amortissement mécanique nul $\xi_r = 0$. Le système se simplifie en :

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + \hat{\omega}_r^2 q_r(t) - k_r \omega_r Q(t) = F_r(t) \\ \frac{\ddot{Q}}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\dot{Q}}{\omega_e} + Q(t) - k_r \omega_r q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (5.52)$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_e/\omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_r^2 + k_r \omega_r^2 & -k_r \omega_r \\ -k_r \omega_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

On se place en régime harmonique de pulsation Ω ; on impose un effort $F_r(t) = \Re(\underline{F}_r e^{j\Omega t})$ et la réponse est alors de la forme $q_r(t) = \Re(\underline{q}_r e^{j\Omega t})$ avec \underline{q}_r et \underline{F}_r complexes. Alors la fonction réponse en fréquence du système s'écrit :

$$H(\Omega) = \frac{\underline{q}_r}{\underline{F}_r} = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2} + 2j\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}}{\frac{\Omega^4}{\omega_e^2} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2 + 2j\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)}. \quad (5.54)$$

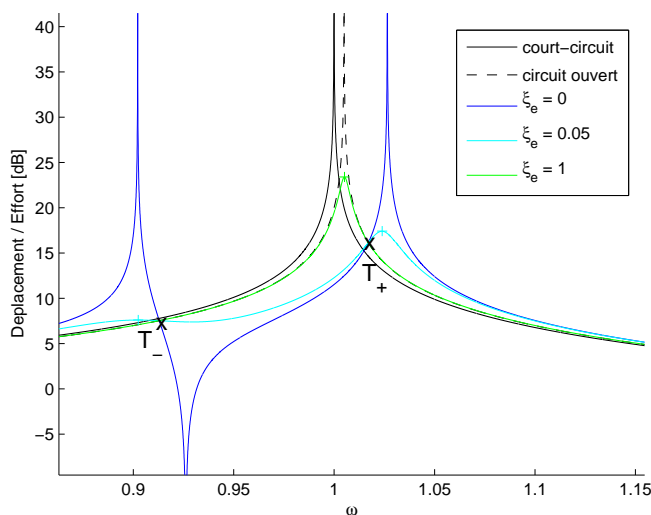


FIG. 5.14: Tracés de FRF pour plusieurs valeurs de ξ_e , $\omega_r = 1$, $k_r \omega_r = 0.1$, $\omega_e = 0.9$

En traçant plusieurs FRF (fig. 5.14) on constate qu'à inductance constante (donc ω_e constante), les courbes d'amplitude passent toutes par deux points fixes T_- et T_+ . On constate que si ω_e varie les points fixes se déplacent en ordonnée dans des directions opposées. On minimisera donc le maximum des deux en les plaçant à la même ordonnée [29]. On va chercher les pulsations ω_+ et ω_- correspondant à ces points fixes. Tout d'abord on écrit $|H(\omega)|^2$ en isolant les termes en ξ_e :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2})^2 + (2\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e})^2}{(\frac{\Omega^4}{\omega_e^2} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2)^2 + (2\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2))^2} = \frac{A_0 + A_2 \xi_e^2}{B_0 + B_2 \xi_e^2}, \quad (5.55)$$

avec

$$\begin{cases} A_0 = (1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2})^2 \\ A_2 = (2\frac{\Omega}{\omega_e})^2 \\ B_0 = (\frac{\Omega^4}{\omega_e^2} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2)^2 \\ B_2 = (2\frac{\Omega}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2))^2 \end{cases} .$$

Alors les solutions ω_{\pm} sont telles que $|\underline{H}(\omega_{\pm})|^2$ est indépendant de ξ_e :

$$\frac{\partial |\underline{H}(\omega_{\pm})|^2}{\partial \xi_e} = 0,$$

ce qui signifie que le numérateur de cette dérivée est nul :

$$\begin{aligned} 2A_2\xi_e(B_0 + B_2\xi_e^2) - 2B_2\xi_e(A_0 + A_2\xi_e^2) &= 0 \\ \text{ce qui donne pour le cas } \xi_e \neq 0 \quad A_2B_0 - A_0B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

on développe (5.56) :

$$(2\frac{\omega_{\pm}}{\omega_e})^2 \left[\frac{\omega_{\pm}^4}{\omega_e^2} - \omega_{\pm}^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2 \right]^2 - (1 - \frac{\omega_{\pm}^2}{\omega_e^2})^2 \left[2\frac{\omega_{\pm}}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \omega_{\pm}^2) \right]^2 = 0, \quad (5.57)$$

ce qu'on factorise en

$$\left(\frac{\omega_{\pm}^4}{\omega_e^2} - \omega_{\pm}^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \frac{\omega_r^2 + \hat{\omega}_r^2}{2} \right) k_r \omega_r^2 = 0. \quad (5.58)$$

On trouve donc les ω_{\pm} , pulsations des points fixes, qui sont les racines de l'équation bicarrée (5.58) :

$$\begin{cases} \omega_-^2 = \frac{\omega_e^2}{2} \left((1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) - \sqrt{(1 - \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + 2\frac{k_r\omega_r^2}{\omega_e^2}} \right) \\ \omega_+^2 = \frac{\omega_e^2}{2} \left((1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \sqrt{(1 - \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + 2\frac{k_r\omega_r^2}{\omega_e^2}} \right) \end{cases}. \quad (5.59)$$

Les deux points fixes mis en évidence dépendent de ω_e et pas de ξ_e . Un premier pas de l'optimisation va consister à choisir ω_e de telle sorte qu'ils soient à la même amplitude [29]. On écrit cela quand $\xi_e = 0$ pour simplifier le calcul :

$$\begin{aligned} &|H(\omega_+)|^2 - |H(\omega_-)|^2 = 0 \\ \text{On injecte les résultats (5.59) dans (5.55)} &\quad \frac{(1 - \frac{\omega_+^2}{\omega_e^2})^2}{k_r\omega_r^4/4} - \frac{(1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_e^2})^2}{k_r\omega_r^4/4} = 0 \\ &\text{ce qui donne} && (\omega_e^2 - \omega_+^2)^2 - (\omega_e^2 - \omega_-^2)^2 = 0 \\ &\text{qu'on factorise en} && (\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_+^2 + \omega_-^2 - 2\omega_e^2) = 0 \\ &\text{et comme } \omega_+ \neq \omega_-, && \omega_e^2 = \frac{\omega_+^2 + \omega_-^2}{2} \\ & && \omega_e = \hat{\omega}_r. \end{aligned}$$

On trouve que ω_e égalisant les amplitudes de la FRF aux points fixes est égale à la pulsation du système isolé $\hat{\omega}_r$; il faut maintenant identifier la valeur optimale de la résistance, liée à celle de ξ_e .

On trace quelques FRF pour observer l'influence de ξ_e (fig. 5.4.2) avec $\omega_e = \hat{\omega}_r$. On observe que :

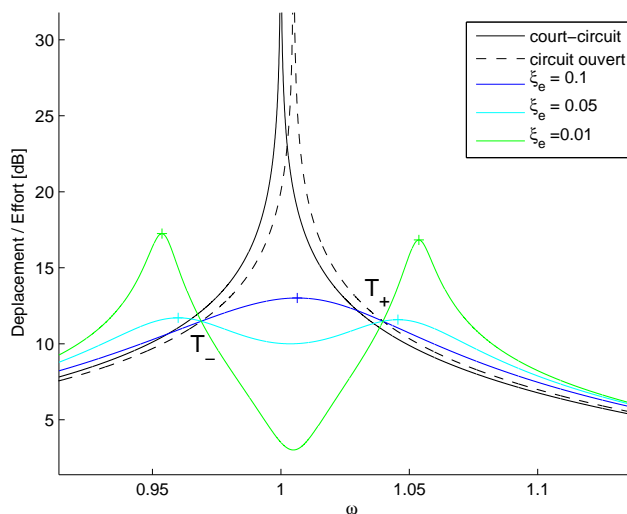


FIG. 5.15: Tracés de FRF pour différentes valeurs de ξ_e , $\omega_r = 1$, $k_r\omega_r = 0.1$, $\omega_e = \hat{\omega}_r$

- quand ξ_e augmente, on obtient un pic de résonance amorti tendant vers la réponse du système isolé ;
- quand ξ_e diminue fortement on obtient deux modes de fréquences distinctes. On peut remarquer que d'après (5.55) il y aura une antirésonance en ω_e dans ce cas.
- la valeur intermédiaire de ξ_e choisie semble être un bon compromis.

On cherche maintenant une valeur de ξ_e telle que les points fixes soient des maxima de la courbe de gain.

- On cherche d'abord à annuler la dérivée de $|H|$ en ω_- avec une valeur adaptée ξ_- . D'après [10], on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |H(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_-} &= 0 \\ \xi_- &= \frac{\sqrt{3}k_r\omega_r}{2\sqrt{\omega_e(2\omega_e - \sqrt{2}k_r\omega_r)}} = \frac{\sqrt{3}k_r}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}k_r}}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Cette valeur permet d'avoir un maximum local en T_- ; dans ce cas, un autre maximum local est observé près de T_+ avec une amplitude légèrement supérieure (fig. 5.16).

- On cherche alors à annuler la dérivée de $|H|$ en ω_+ avec une valeur adaptée ξ_+ , d'après [10], on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |H(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_+} &= 0 \\ \xi_+ &= \frac{\sqrt{3}k_r\omega_r}{2\sqrt{\omega_e(2\omega_e + \sqrt{2}k_r\omega_r)}} = \frac{\sqrt{3}k_r}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}k_r}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Dans ce cas un maximum local est observé près de T_- avec une amplitude légèrement supérieure (fig. 5.16).

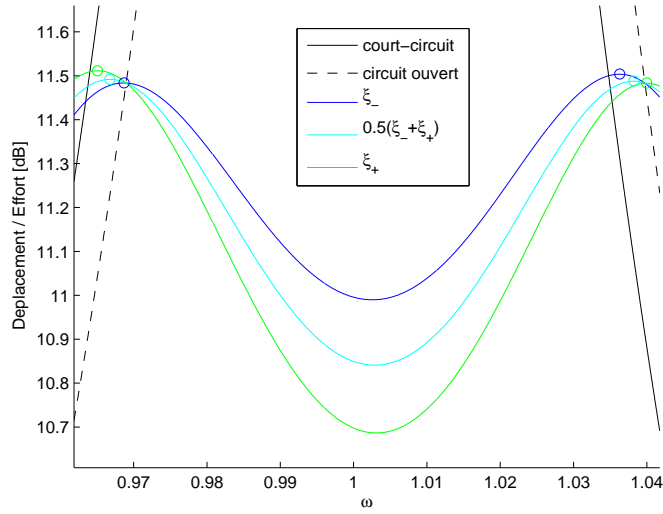


FIG. 5.16: Tracés de FRF pour différentes valeurs de ξ_e , $\omega_r = 1$, $k_r \omega_r = 0.1$. Remarquer les positions relatives des maxima et des points fixes.

La valeur optimale de ξ_e est donc située entre ξ_- et ξ_+ , et ces valeurs sont assez peu éloignées. $1/2(\xi_+ + \xi_-) \simeq \sqrt{3/8}k_r$ en est une bonne approximation (fig. 5.16). Dans [72], la valeur optimale exacte est calculée ; son expression est compliquée et elle permet qu'une amélioration marginale des performances. Par la suite on utilisera $\sqrt{3/8}k_r$ en supposant qu'il s'agit de la valeur optimale.

Réponse libre

On fait les mêmes hypothèses qu'au chapitre 5.3.2 avec cette fois-ci Ψ et λ solutions de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 + \hat{\omega}_r^2 & -k_r \omega_r \\ -k_r \omega_r & \frac{\lambda^2}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\lambda}{\omega_e} + 1 \end{pmatrix}}_{A(\lambda)} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Il y a quatre solutions non nulles de λ , deux paires de complexes conjugués $-\mu_1 + j\omega_1$, $-\mu_2 + j\omega_2$, $-\mu_1 - j\omega_1$ et $-\mu_2 - j\omega_2$. Une rapide étude numérique montre que :

- la décroissance est la plus rapide lorsque $\mu_1 = \mu_2$
- lorsque cela est vrai, on a aussi $\omega_1 = \omega_2$.

On prend en compte ces égalités et on trouve les valeurs optimales de ω_e et ξ_e pour le critère de la réponse libre (critère temporel) qu'on note ω_e^{tp} et ξ_e^{tp} :

$$\begin{aligned} \omega_e^{\text{tp}} &= \omega_r(1 + k_r^2) \\ \xi_e^{\text{tp}} &= \frac{k_r^2}{1 + k_r^2}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

et avec ces paramètres on obtient le taux de décroissance suivant :

$$\mu_1 = \mu_2 = \omega_r k_r \sqrt{1 + k_r^2}, \quad (5.64)$$

soit une valeur plus élevée que pour le shunt résistif, et ne dépendant aussi que de k_r et ω_r . On peut remarquer que la fréquence d'accord est légèrement plus élevée et que la résistance optimale est supérieure à la valeur optimale pour la réponse forcée.

5.4.3 Modèle 1 ddl avec amortissement

Réponse forcée

En tronquant (5.49) à un mode avec ξ_r non nul, puis en passant en régime harmonique, on trouve la FRF du système à un degré de liberté avec amortissement

$$H(\Omega) = \frac{q_r}{F_r} = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2} + 2j\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}}{\frac{\Omega^4}{\omega_e^2} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2} + 4\xi_e \xi_r \frac{\omega_r}{\omega_e}) + \omega_r^2 + 2j\Omega[\frac{\xi_e}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2) + \xi_r \omega_r(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2})]}. \quad (5.65)$$

On suppose que $\omega_e = \hat{\omega}_r$ constitue toujours l'accord optimal; par contre en calculant numériquement le maximum d'amplitude de la réponse pour plusieurs valeurs de ξ_e puis en choisissant la valeur de ξ_e qui donne le résultat le plus faible, on constate que cet optimum dépend de ξ_r . On trace sur la figure (5.17) les valeurs optimisées numériquement de ξ_e pour différentes valeurs du coefficient de couplage, et l'on peut voir que $\sqrt{3/8}k_r$ est une bonne approximation tant que $\xi_r \leq 1\%$.

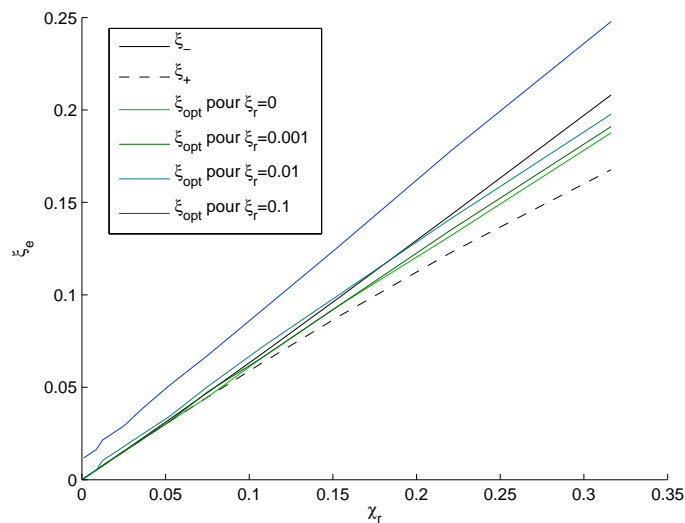


FIG. 5.17: Tracé de valeurs optimales de ξ_e trouvées numériquement (en fonction du coefficient de couplage noté χ_r ici)

Réponse libre

En calculant les valeurs des différents λ pour plusieurs valeurs de ξ_e en présence d'amortissement, on peut constater que comme dans le cas du shunt résistif, les amortissements mécanique et ajoutés par le shunt résonant s'ajoutent à peu près (figure 5.18).

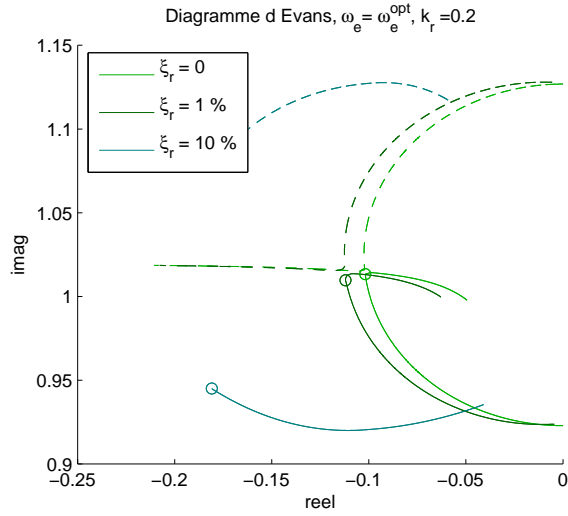


FIG. 5.18: Diagramme d'Evans avec $\omega_r = 1$, $k_r = 0.2$, $\omega_e = \omega_e^{tp}$, $0 < \xi_e < \infty$ et différentes valeurs de ξ_r

5.4.4 Performances : atténuation et couplage électromécanique

On se place dans le cas d'un mode faiblement amorti : d'après l'équation (5.30) le maximum d'amplitude en court-circuit est :

$$H_0^2 = |H(\tilde{\omega}_r)|^2 = \frac{1}{\omega_r^4} \frac{1}{\xi_r^2} \frac{4}{1 - \xi_r^2}.$$

On compare cela au maximum d'amplitude de la réponse du système qu'on suppose être proche du gain en ω_- , en choisissant $\omega_e = \hat{\omega}_r$ et $\xi_e = \sqrt{3/8k_r}$:

$$\begin{aligned} H_{opt}^2 &= |\underline{H}(\omega_-)|^2 \Big|_{\omega_e = \hat{\omega}_r, \xi_e = \sqrt{3/8k_r}} \\ &= \frac{(1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_e^2})^2 + (2\xi_e \frac{\omega_-}{\omega_e})^2}{(\omega_r^2 - 2\omega_-^2 + \frac{\omega_-^4}{\omega_e^2} - 4\xi_e \xi_r \omega_-^2)^2 + 4\omega_-^2 (\xi_e \omega_e + \xi_r \omega_r)^2 (1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_e^2})^2} \\ &= \frac{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2} + 4\xi_e^2 (1 - \sqrt{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2}})}{\omega_r^4 (1 + k_r^2)^2 ((-2k_r^2 - 4\xi_e \xi_r (1 - \sqrt{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2}}))^2 + 4(1 - \sqrt{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2}}) \frac{k_r^2}{2+2k_r^2} (\xi_e + \xi_r \frac{1}{1+k_r^2})^2)}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

On remarque que H_{opt}^2 peut s'exprimer uniquement en fonction de ω_r^4 , k_r , ξ_r et ξ_e ; d'autre part, ξ_e s'exprime uniquement à partir de k_r . On choisit donc de noter

$$H_{opt}^2 = \frac{1}{\omega_r^4} f_H(k_r, \xi_r) \quad (5.67)$$

Le rapport des amplitudes nous donne l'atténuation apportée par le shunt résonant :

$$A_{dB}^{th} = 20 \log\left(\frac{H_0}{H_{opt}}\right) = 10 \log\left(\frac{H_0^2}{H_{opt}^2}\right)$$

$$A_{dB}^{th} = 10 \log\left(\frac{1}{4\xi_r^2(1 - \xi_r^2)} \frac{1}{f_H(k_r, \xi_r)}\right). \quad (5.68)$$

On constate qu'on a un résultat similaire au cas du shunt résistif vu avec l'expression (5.32), c'est à dire une dépendance uniquement à k_r et ξ_r . Là encore, **c'est donc k_r qu'il faut optimiser.**

Sur la figure (5.19) on trace l'atténuation (calculée d'après l'identification numérique des maxima des FRF) en traits pleins, et d'après l'expression (5.68) en pointillés ; on constate que cette expression est une très bonne estimation. L'atténuation croît avec k_r et décroît avec ξ_r . Par rapport au shunt résistif, les performances sont nettement supérieures, ainsi on obtient 30 dB d'atténuation pour un cas où $k_r = 0,1$ et $\xi_r = 0,1\%$, là où le shunt résistif donnait 10 dB.

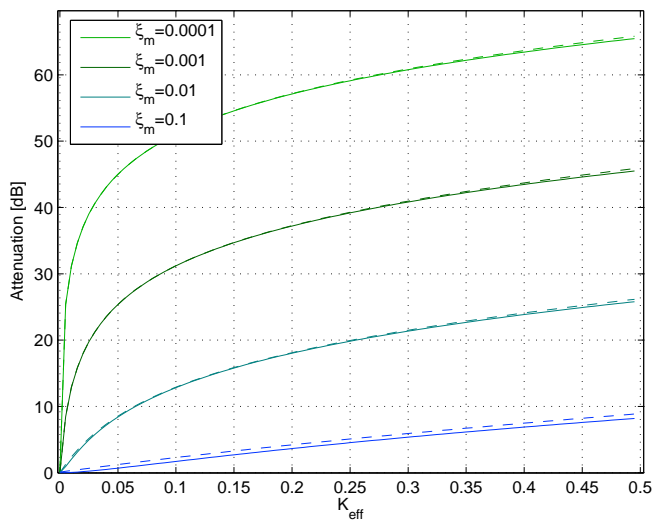


FIG. 5.19: Atténuation du pic de réponse obtenue : résultats numériques en traits pleins et (5.68) en pointillés

5.4.5 Influence d'un désaccord

Comme dans le cas du shunt résistif, on souhaite évaluer les performances du shunt résonant lorsqu'un des paramètres électriques n'est plus optimal ; ainsi dans [70] l'auteur étudie expérimentalement l'influence de la température sur les performances d'un shunt résonant et constate qu'elles se dégradent nettement. Ce phénomène est certainement lié à la dépendance de la permittivité du matériau piézoélectrique à la température [79] ; la capacité change proportionnellement, et ω_e aussi d'après la relation d'adimensionnement (5.48).

On va étudier le cas "idéal" d'un mode faiblement amorti et bien couplé : $k_r = 0.1$, $\xi_r = 0.001$. On cherche numériquement le maximum d'amplitude de la FRF pour différentes valeurs de ω_e et ξ_e et on le compare au maximum d'amplitude en court-circuit ; on trace les lignes de contour de l'atténuation ainsi obtenue en dB.

On constate qu'on obtient une efficacité remarquable si l'accord est bon sur la figure (5.20), au centre. Par contre, si on s'éloigne de l'accord entre ω_e et ω_r de 2% par exemple, on obtient déjà 5 dB d'atténuation en moins. La valeur de l'amortissement est moins critique, ainsi une erreur de 50% causera 5dB d'atténuation en moins. On peut donc affirmer que la performance du shunt résonant n'est pas robuste par rapport à des variations de ω_e , et

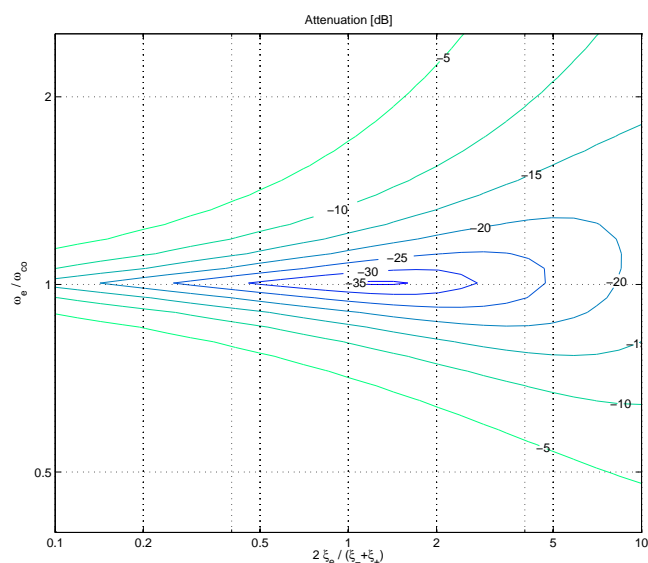


FIG. 5.20: Lignes de contour de l'atténuation obtenue pour différentes valeurs de ω_e et ξ_e ; $k_r = 0.1$, $\xi_r = 0.001$

robuste par rapport à des variations de ξ_e .

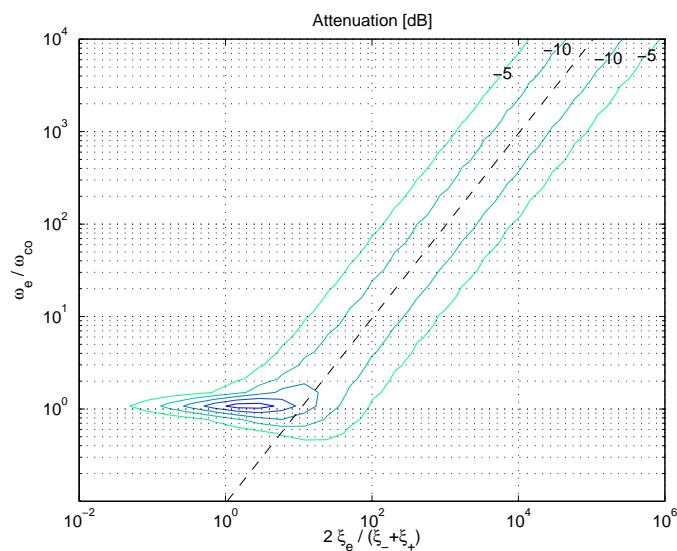


FIG. 5.21: Même étude que 5.20 avec une échelle différente; en pointillés valeur de la résistance correspondant au shunt résistif optimal

Si on s'éloigne fortement des valeurs optimales on obtient un comportement représenté figure (5.21). On constate qu'il existe des couples de valeurs de ω_e et ξ_e pour lesquelles l'atténuation reste importante. Il s'agit en fait de la situation où ω_e est grande, c'est à dire que l'inductance est basse et laisse circuler le courant à la résonance mécanique, tandis que ξ_e est

tel que la valeur de la résistance corresponde à un shunt résistif optimal. Le comportement du système (5.53) tend vers (5.10).

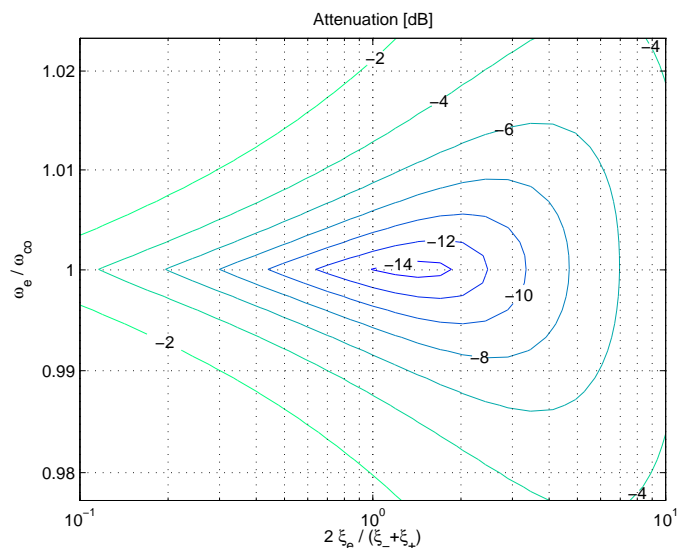


FIG. 5.22: Lignes de contour de l'atténuation obtenue pour différentes valeurs de ω_e et ξ_e ; $k_r = 0,01$, $\xi_r = 0,001$; remarquer l'échelle de ω_e

On peut remarquer que d'après les courbes figure (5.19) le shunt résonant permet d'obtenir une atténuation importante même pour des couplages peu élevés. On se place dans le cas d'un mode faiblement amorti et mal couplé, $k_r = 0,01$; on fait varier R et L et le résultat est tracé figure (5.22). On constate que l'efficacité est correcte, mais que la sensibilité à un désaccord devient nettement plus critique (remarquer l'échelle verticale en particulier) ; ainsi un désaccord de 2 % en fréquence rend le système presque inopérant.

5.4.6 Performances dans un cas à plusieurs ddl

On se place dans la situation du chapitre 5.3.6, avec un système à plusieurs modes, en remplaçant le shunt résistif par un shunt résonant ; on réutilise les notations des relations (5.34) à (5.35) qui ne concernent que la partie mécanique ; on écrit alors la représentation complexe de l'équation (5.50) :

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + 2\xi_1\omega_1j\Omega + \hat{\omega}_1^2 & k_i\omega_i k_j\omega_j & -k_1\omega_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ k_i\omega_i k_j\omega_j & -\Omega^2 + 2\xi_N\omega_Nj\Omega + \hat{\omega}_N^2 & -k_N\omega_N & & \\ -k_1\omega_1 & \dots & -k_N\omega_N & -\frac{\Omega^2}{\omega_e^2} + 2j\xi_e\frac{\Omega}{\omega_e} + 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q_1} \\ \vdots \\ \underline{q_n} \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qu'on note

$$\mathbf{Z}_{RL}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (5.69)$$

avec \mathbf{Z}_{RL} matrice d'impédance de dimensions $N + 1 \times N + 1$. Alors la FRF déplacement/effort entre le point d'excitation x_n et le point de mesure x_m peut s'écrire de façon similaire à (5.38) :

$$\underline{H}_{mn}(\omega) = \frac{w}{F} = \underline{\Phi}_m^T \underline{Z}_{RL}^{-1} \underline{\Phi}_n. \quad (5.70)$$

Cas d'une poutre

On étudie la poutre utilisée pour les expériences (tableau 6.7 p. 120) avec excitation et mesure du déplacement à l'extrémité libre; on trace le module de la FRF adimensionnée pour différentes situations : court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de shunt adaptées aux modes 1,2 et 3 par le calcul qu'on a fait dans le cas 1 ddl; on choisit donc $\omega_e = \hat{\omega}_r$ et $\xi_e = \sqrt{3/8}k_r$ pour chaque mode. On calcule alors la FRF numériquement à partir de (5.70). D'après la FRF (5.23) et les résultats (tab. 5.4) on constate que la technique de shunt résonant est efficace sur le mode visé et très peu sur les autres; elle est beaucoup plus sélective que la technique de shunt résistif. On constate également que la présence de modes voisins perturbe la symétrie des deux "bosses" de la FRF, qui au lieu d'être au même niveau se retrouvent légèrement décalées.

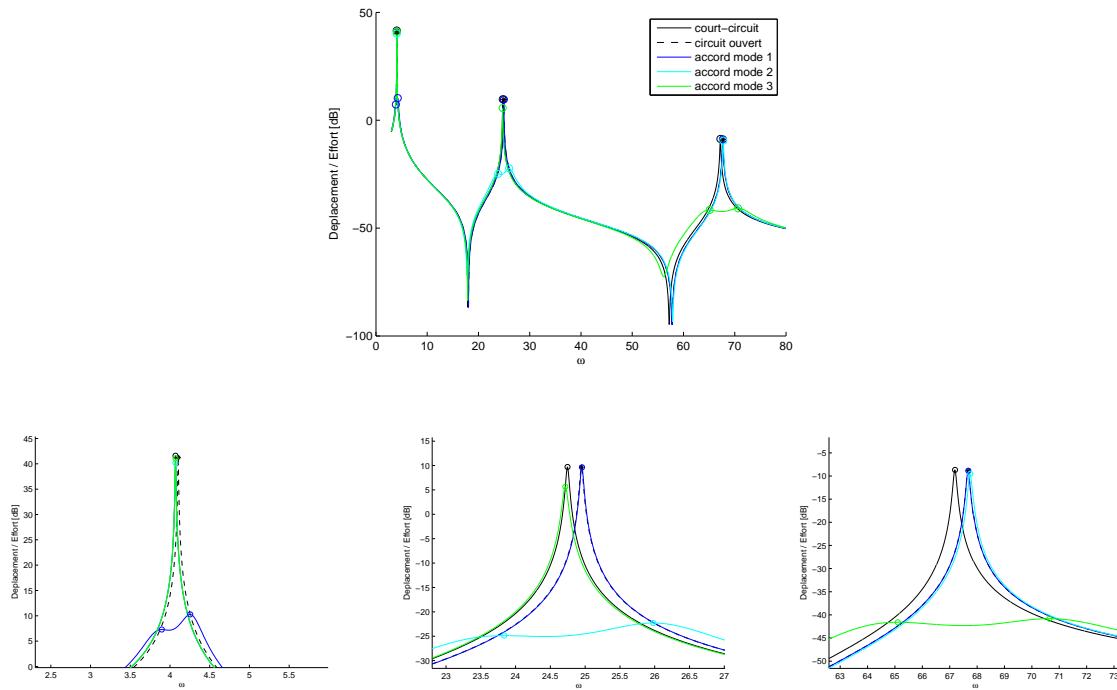


FIG. 5.23: FRF déplacement / effort avec détail sur les plages de fréquence autour des pics de résonance

	accord sur 1	accord sur 2	accord sur 3
Att. mode 1	-31,8 dB	-2 dB	-0,6 dB
Att. mode 2	-0,06 dB	-32,2 dB	-4 dB
Att. mode 3	-0,2 dB	-0,8 dB	-32,2 dB

TAB. 5.4: Atténuations obtenues sur les différents modes

Cas de plusieurs modes de fréquence proche

On se place dans le cas d'un système à trois modes rapprochés de pulsations 1, 1,05 et 1,1, Φ identiques, coefficients de couplages $k_r = 0,05$ et amortissement mécanique de 0,1%. On peut constater que dans ce cas l'efficacité est bonne pour les trois pics simultanément (figure 5.24 et tableau 5.5).

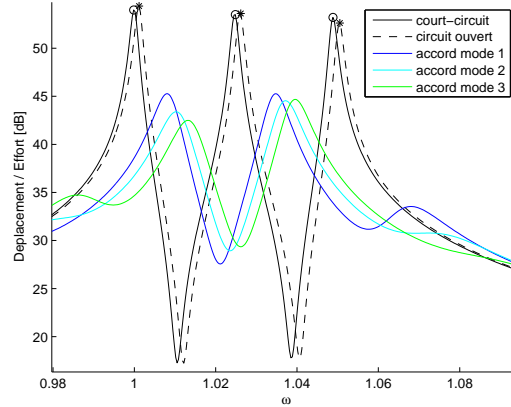


FIG. 5.24: FRF déplacement / effort pour trois modes proches

	accord sur 1	accord sur 2	accord sur 3
Att. mode 1	-22 dB	-20 dB	-16 dB
Att. mode 2	-22 dB	-27 dB	-22 dB
Att. mode 3	-16 dB	-18 dB	-22 dB

TAB. 5.5: Atténuations obtenues sur les différents modes proches

5.4.7 Analogie mécanique

La technique de shunt résonant présente des similarités avec un système amortisseur à masse accordée (fig. 5.25).

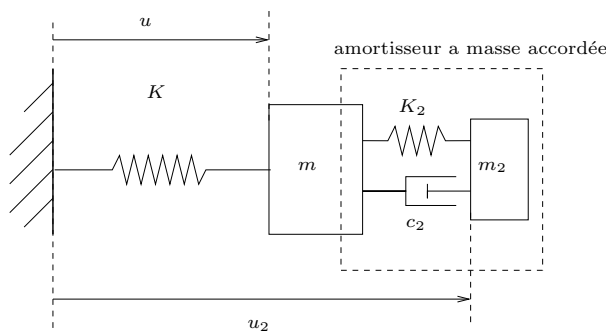
La mise en équation de ce système se fait comme suit et donne un système de forme assez similaire à (5.53) :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

On peut regrouper les paramètres par similarités : voir le tableau (5.6).

On observe les tendances suivantes qui sont communes aux deux systèmes :

- Le paramètre qui fixe l'efficacité maximale sera le rapport des masses (coefficient de couplage) . Il faut faire un compromis acceptable par rapport à l'encombrement et poids de l'amortisseur (des éléments piézoélectriques).


 FIG. 5.25: *Analogie mécanique du système*

<i>Grandeurs mécaniques</i>		<i>Grandeurs électriques</i>	
Déplacement	u_2	Charge électrique	Q
Vitesse	\dot{u}_2	Intensité	$I = \dot{Q}$
Force	$F = K_2(u_2 - u)$	Tension électrique	$V = \frac{Q}{C} - k_r \omega_r q_r$
Raideur de l'amortisseur	K_2	Inverse de la capacité	$\frac{1}{C}$
Masse de l'amortisseur	m_2	Inductance	L
Amortissement	c_2	Résistance	R

 TAB. 5.6: *Équivalences mécanique/électrique*

- Il faut accorder la raideur de l'amortisseur (l'inductance du shunt) de telle façon que les fréquences propres du mode à amortir et du TMD (du shunt) soient coincidentes ; alors à la résonance l'amplitude du mouvement du TMD (du courant) sera très élevée par rapport au déplacement de la structure et l'énergie sera dissipée rapidement dans l'amortisseur (la résistance).
- Si la viscosité de l'amortisseur (la résistance) est trop élevée le système se comporte comme un ajout de masse (de raideur).
- Si la viscosité (résistance) est trop basse le système présente deux modes et une antirésonance.

5.5 Conclusion

On a montré comment optimiser des shunts R et RL associés à un élément piézoélectrique pour réduire les vibrations d'une structure. Dans les deux cas, on montre que *la performance ne dépend que du coefficient de couplage*.

La technique de shunt résistif présente des caractéristiques intéressantes. En effet, il est très facile d'associer une résistance à un élément piézoélectrique, et de coller cela à la structure ; le système ainsi constitué est autonome. De plus, la performance n'est pas trop dégradée si un des paramètres varie. Par contre, il est nécessaire d'avoir un couplage élevé pour obtenir un amortissement important. Cela impose, sauf cas particulier, des éléments piézoélectriques de grande taille, et donc un ajout de masse et/ou d'encombrement.

Par rapport au shunt résistif, la technique de shunt résonant est bien plus efficace mais dépend de l'accord précis de l'inductance avec la résonance du système. Étant donné que les caractéristiques des matériaux piézoélectriques et peut être celles de la structure peuvent varier au cours du temps, par exemple en fonction de la température, il est probable que la mise en œuvre de shunts inductifs nécessite un accord périodique, voire continu. De plus, cette technique n'est efficace que sur une faible plage de fréquences. Enfin, les inductances très élevées requises, ainsi que la nécessité de régler leur valeur, font qu'il est nécessaire de faire appel à un inducteur synthétique. Celui-ci a besoin d'une alimentation ; on perd le bénéfice d'un système autonome. Par contre, il devrait être possible à *condition d'avoir un réglage précis* d'avoir une atténuation correcte même pour de faibles couplages.

La démarche d'optimisation de ces deux systèmes est similaire. Il faut commencer par déterminer l'atténuation souhaitée, ainsi que l'amortissement mécanique du mode que l'on souhaite atténuer. Grâce aux abaques (5.7 et 5.19) il est possible de déterminer le coefficient de couplage nécessaire ; on calcule alors les matériaux, dimensions et positions du ou des éléments piézoélectriques à associer à la structure avec la méthode des chapitres 3 ou 4. Ensuite on règle l'impédance d'après les formules (5.5),(5.15),(5.48) et les valeurs trouvées §5.4.2 : pour le shunt résistif

$$R = \frac{\tau_m}{C\omega_r\sqrt{1+k_r^2/2}},$$

et pour le shunt résonant

$$L = \frac{\tau_m^2}{C\hat{\omega}_r^2}, \quad R = \sqrt{3/2}k_r\frac{\tau_m}{C\hat{\omega}_r},$$

où pour rappel, τ_m dépend des propriétés mécaniques, par exemple dans le cas d'une poutre avec le modèle du chapitre 3 :

$$\tau_m = l_b^2\sqrt{\frac{m_b}{D_b}}$$

Dans le chapitre suivant (§6) on suit cette démarche d'optimisation pour une étude expérimentale du cas d'une poutre symétrique.

Expérimentation sur les shunts

Afin de valider les résultats des chapitres 3 et 5 on souhaite :

- optimiser par le calcul, avec le modèle du chapitre 3, le coefficient de couplage d'un ensemble poutre et éléments piézoélectriques ;
- associer à cet ensemble des shunts résistifs et résonants tels que ceux du chapitre 5 ;
- mesurer les caractéristiques du tout pour vérifier l'accord avec la théorie.

L'optimisation de la poutre consiste à maximiser le coefficient de couplage, qui d'après le chapitre 5 joue un rôle déterminant. Ensuite, on décrit le dispositif utilisé pour les mesures (§6.2) ainsi que les circuits utilisés pour les shunts (§6.3). Finalement, des mesures sont effectuées, analysées et comparées aux résultats théoriques, en régime forcé (§6.4.1) et libre (§6.4.3). Dans le cas du régime forcé, on propose en particulier au paragraphe 6.4.2 une expérience originale de variation du couplage, permettant de valider la relation trouvée au chapitre 5 entre performances et coefficient de couplage.

6.1 Réalisation d'une poutre avec couplage optimisé

On trouve bon nombre d'articles traitant de la réduction de vibrations avec des shunts R ou RL ; néanmoins un certain nombre d'entre eux négligent le résultat évoqué dans [37] et montré au chapitre précédent, c'est à dire la nécessité d'optimiser le coefficient de couplage. Afin d'obtenir des résultats nets en terme d'atténuation, on décide de réaliser une structure avec un couplage important.

6.1.1 Choix des éléments

Structure

On étudie une poutre encastree libre, relativement simple à réaliser et raisonnablement exempte de non-linéarités. Le technicien du laboratoire a réalisé un étai permettant d'encastree différentes poutres avec une longueur bloquée de 30 mm (fig.6.1). D'autre part un stock de plaquettes métalliques dans différentes dimensions était disponible. Une analyse modale de chacune de ces plaques a été conduite afin d'en choisir une qui aie des caractéristiques adaptées ; cette analyse modale est réalisée avec le dispositif présenté figure 6.2, combinant une excitation par un aimant plongé dans le champ d'une bobine et un vibromètre laser à balayage¹. Les fonctions réponse en fréquence vitesse sur effort sont acquises sur une grille de

¹Ce dispositif est commenté plus en détail dans la partie (6.2)

points sur chaque plaque, puis analysées avec un logiciel qui permet d'obtenir les fréquences propres, déformées, et amortissements.

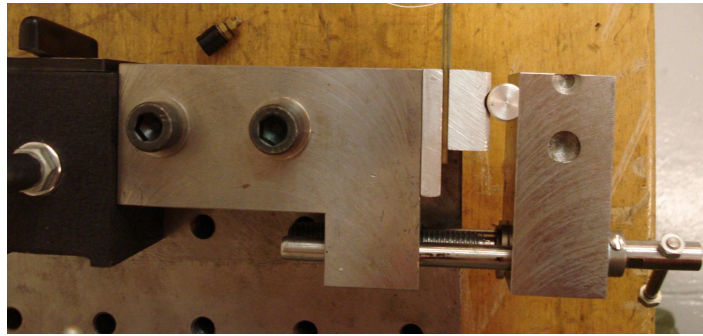
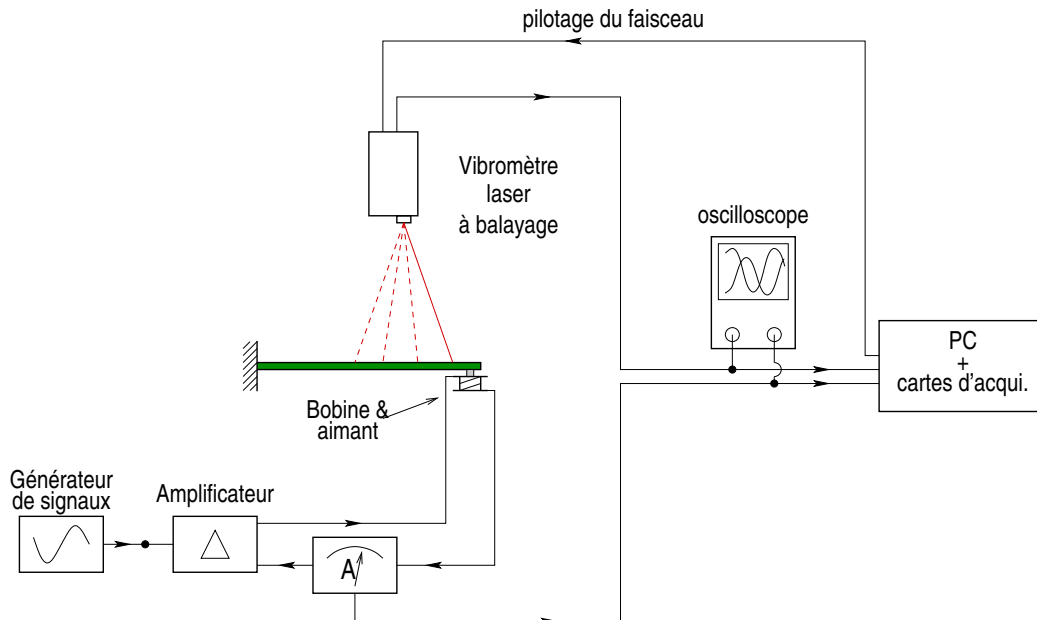


FIG. 6.1: Étau permettant la réalisation d'un encastrement, vue de dessus ; remarquer la pige métallique faisant pivot pour répartir la pression de contact.



Appareils	Constructeurs	Modèles
Synthétiseur de signaux	Bruel & Kjær	1051
Amplificateur de puissance	Bruel & Kjær	2719
Vibromètre laser	Polytec	OFV 056/OFV 3001 S
Boîtier d'acquisition	Polytec	PSV-Z-040-H
Logiciel d'acquisition	Polytec	PSV
Logiciel d'analyse modale	M+P International	Smart Office

FIG. 6.2: Dispositif expérimental et références des appareils utilisés.

Les remarques suivantes sont utilisées pour sélectionner les poutres :

- Certaines poutres présentent un amortissement plus important que d'autres ; comme l'on souhaite mettre en valeur l'atténuation apportée par le shunt, elles sont évitées ;

- Certaines poutres imparfaitement fabriquées présentent des modes couplés flexion - torsion ; on souhaite une poutre s'approchant autant du modèle flexion pure que possible ;
- Enfin souhaitant coller les éléments piézoélectriques, il fallait choisir une poutre ayant un bon état de surface.

Notre choix s'est porté sur une poutre en aluminium AU4G de 2 mm d'épaisseur et de 20 mm de large disponible au laboratoire. La longueur totale est de 200 mm, mais l'étai laisse une longueur libre de 170mm à partir de l'encastrement.

Éléments piézoélectriques

Comme cela a été vu avec les relations (5.32) et (5.68) si l'on souhaite obtenir une atténuation optimale des vibrations il est nécessaire de maximiser le coefficient de couplage pour le mode visé. Celui-ci dépend des caractéristiques matériau, des dimensions du système, et du mode visé d'après l'équation (3.68) :

$$k_r = \sqrt{6} \underbrace{\tilde{k}_{31} \sqrt{\frac{Y_p}{Y_s}}}_{\text{matériau}} \underbrace{\sqrt{\frac{l_s}{l_p}} \left(1 + \frac{h_p}{h_s}\right)}_{\text{dimensions}} \underbrace{\sqrt{\frac{h_p}{h_s}} \frac{1}{\omega_r} \left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+}}_{r\text{-ième mode}}. \quad (6.1)$$

On commence par choisir un matériau piézoélectrique avec un coefficient de couplage k_{31} élevé. On notera que de nombreuses études sont actuellement consacrées à l'intérêt de composites piézoélectriques à électrodes interdigitées, comme par exemple [65] ; cependant la supériorité de ces matériaux n'est pas nette et la modélisation et mise en œuvre plus complexe nous ont conduit à les éviter. Après un tour de plusieurs fournisseurs la céramique PIC 151 de PI Ceramic avec un coefficient k_{31} de 38% a été retenue. Il s'agit d'une céramique de type zirconate de plomb / titanate de plomb qui a de bonnes caractéristiques piézoélectriques.

Afin de rester dans le cadre du modèle simple développé au chapitre 3, des éléments d'une largeur identique à la poutre sont retenus ; comme la méthode de calcul développée est très rapide (un dixième de seconde pour obtenir les couplages des trois premiers modes), on étudie systématiquement toutes les positions, longueurs et épaisseurs d'éléments, associées aux 4 matériaux possibles pour la structure. Pour chaque longueur et position on détermine une épaisseur optimale (il n'y en a qu'une, à la différence de la longueur optimale qui admet par exemple deux valeurs locales pour le mode 2).

Pour le premier mode les résultats sont tracés figure (6.3) ; la position optimale est systématiquement près de l'encastrement. On constate qu'il y a bien une épaisseur optimale, et que pour ce mode le couplage augmente avec la longueur de l'élément. On constate aussi que les éléments piézoélectriques doivent être plus épais pour une structure plus rigide, ce qui est caractéristique d'un cas d'adaptation d'impédance mécanique.

Pour le deuxième mode on optimise aussi l'épaisseur, mais cette fois-ci deux positions optimales existent. Les résultats sont tracés figure (6.4).

La longueur et l'épaisseur sont alors choisies parmi les éléments disponibles en stock chez notre fournisseur ce qui nous conduit à choisir des éléments de 25 mm de long et 0.5 mm d'épaisseur (voir tableau 6.7). Les déformées prévues pour ces valeurs sont comparées à celle de la figure nue, figure 6.5. L'effet de raidissement lié à la présence de l'élément piézoélectrique est bien visible. On choisit arbitrairement d'orienter toutes les déformées avec un déplacement positif à l'extrémité (pour comparer les signes des k_r).

On peut commenter les valeurs et les signes des coefficients de couplage obtenus ; sur la figure 6.6 on a tracé la variation des trois premiers coefficients pour des variations d'un seul paramètre autour de la valeur optimale, où l'on observe l'influence des paramètres de l'équation (6.1) :

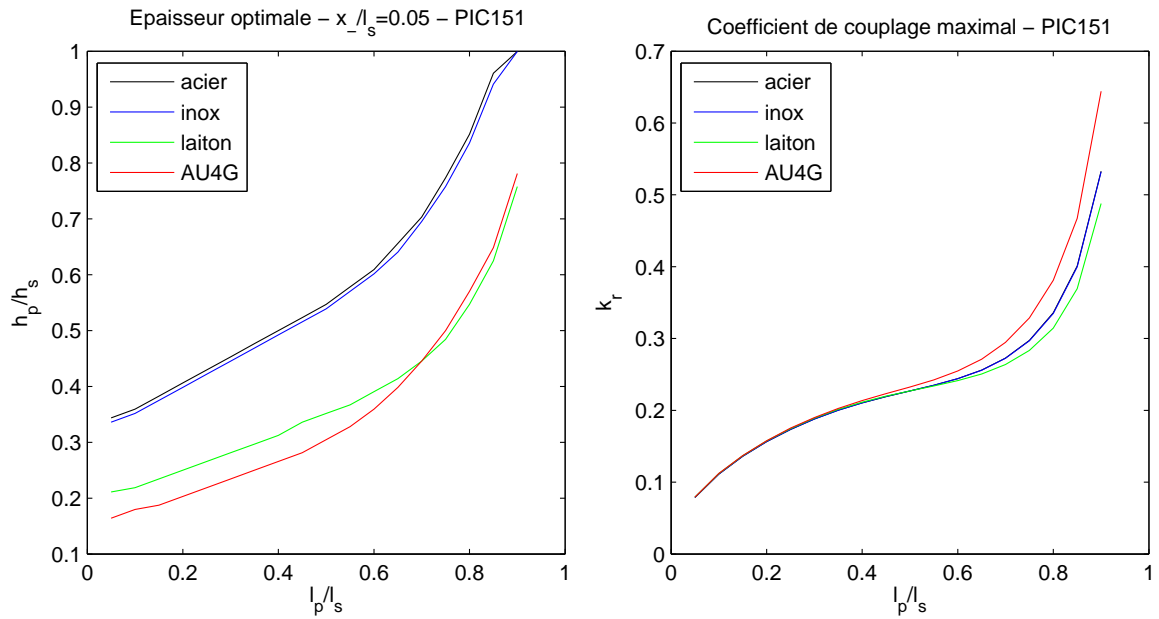


FIG. 6.3: (à g.) épaisseur optimale des éléments (à dr.) couplage obtenu avec cette épaisseur en fonction de la longueur de l'élément, pour différentes poutres

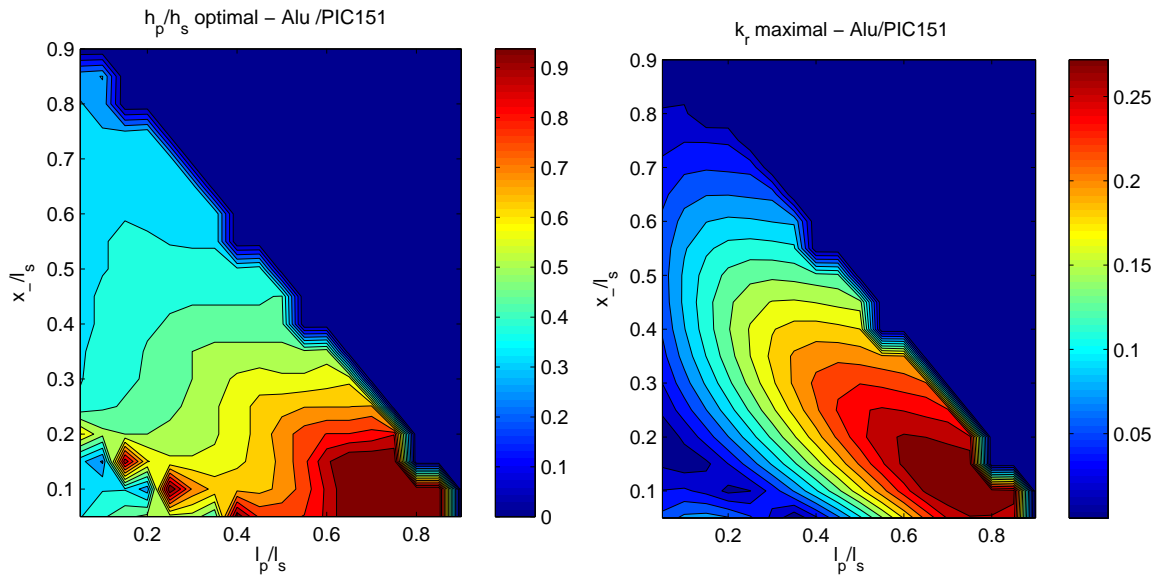


FIG. 6.4: (à g.) épaisseur optimale des éléments (à dr.) couplage obtenu avec cette épaisseur en fonction de la longueur de l'élément et de sa position pour une poutre en aluminium.

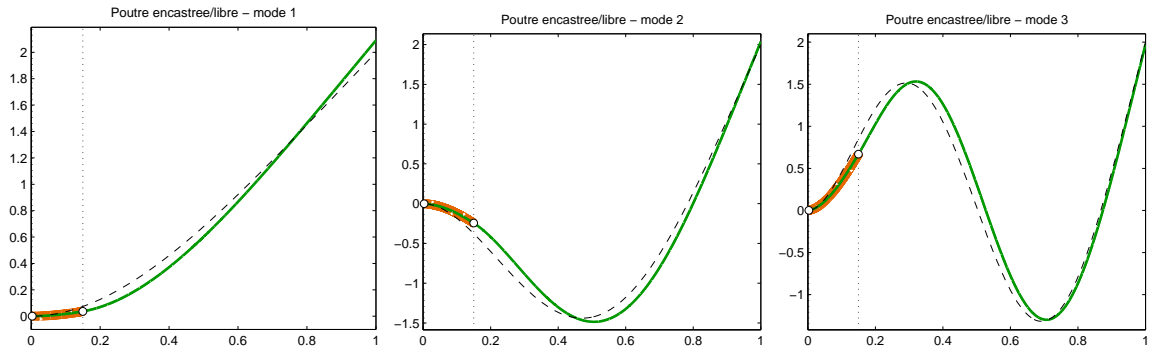


FIG. 6.5: 3 premières déformées modales avec les éléments piézoélectriques retenus

- il n'y a qu'un seul optimum pour l'épaisseur ; l'épaisseur optimale est un compromis entre un élément piézoélectrique assez souple pour que la structure se déforme sous lui et assez épais pour stocker une fraction importante de l'énergie de déformation ;
- il y a plusieurs maxima locaux du couplage en fonction de la longueur ou de la position de l'élément pour les modes élevés. On observe également des changements de signe du couplage ; cela est lié au terme de courbure ; l'encastrement reste une position privilégiée.
- pour le premier mode on peut remarquer que bien que la courbure soit du même signe sur toute la longueur (donc que la différence des pentes entre les extrémités de l'élément augmente avec sa longueur), le couplage admet un maximum. Ce phénomène est lié au terme en l_b/l_p dans (6.1), qui correspond à la capacité de l'élément piézoélectrique qui augmente avec sa surface, et réduit le couplage. Ainsi, même dans le cas d'une courbure de même signe sur toute la surface, il peut être contre-productif de trop augmenter la taille de l'élément piézoélectrique.

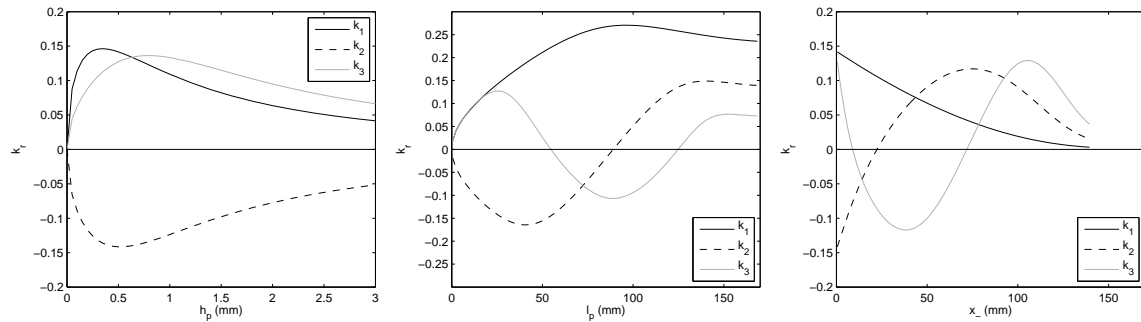


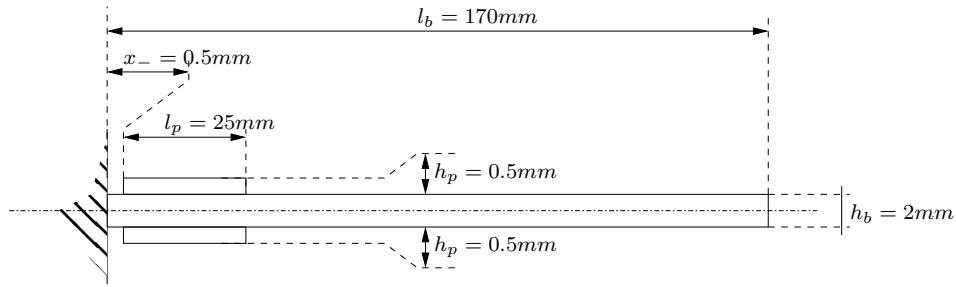
FIG. 6.6: Variation des coefficients de couplage des trois premiers modes en fonction de (de g. à dr.) l'épaisseur, la longueur et la position des éléments piézoélectriques

Les éléments piézoélectriques sont livrés avec une électrode en cuivre/nickel retournée, c'est à dire qu'une des électrodes fait le tour de l'élément et est accessible de l'autre côté pour contact électrique. Par contre, cette électrode retournée nous impose de coller les éléments avec des polarités opposées. Le champ électrique doit donc être dans la même direction dans chacun des éléments si l'on souhaite coupler le mouvement de flexion au shunt, comme indiqué aux équations (3.29). Cela laisse deux possibilités de câblage :

- Soit on câble les éléments en parallèle, ce qui augmente le courant dans le shunt et diminue la tension. Les faces intérieures des éléments piézoélectriques ne sont alors pas

au même potentiel et il faut les isoler de la poutre (qui est conductrice). Cela peut faire apparaître des capacités parasites - le film de colle entre la poutre et l'électrode intérieure d'un élément piézoélectrique agissant comme un condensateur. De plus, ce film de colle est très fin et il est difficile de garantir qu'il soit absolument isolant².

- Soit on câble les éléments en série en reliant les faces intérieures. Il n'y a alors pas de champ électrique entre les faces intérieures des éléments piézoélectriques. Cela impose par contre que le potentiel de la poutre soit intermédiaire entre les deux bornes du shunt³. En raison de l'incertitude sur le film de colle, cette solution est préférée.



	Poutre (AU4G)	Pastille piézoélectriques (PIC 151)
Longueur, position	$l_b = 170 \text{ mm}$	$l_p = 25 \text{ mm}$ $x_- = 0.5 \text{ mm}$
Épaisseur	$h_b = 2 \text{ mm}$	$h_p = 0.5 \text{ mm}$
Largeur	$b = 20 \text{ mm}$	$b = 20 \text{ mm}$
Masse volumique	$\rho_b = 2800 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p = 8500 \text{ kg/m}^3$
Module d'Young	$Y_b = 74 \text{ GPa}$	$Y_p = 57 \text{ GPa}$
Coefficient de couplage matériau	–	$k_{31} = 0.4$
Constantes diélectrique modifiée	–	$\bar{\epsilon}_{33} = 2400 \times \epsilon_0$

FIG. 6.7: Dimensions du système choisi. $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Le placement à 0.5 mm des éléments piézoélectriques a été choisi aussi près que possible des mâchoires de l'étau sans risquer de contact.

6.1.2 Collage

Les éléments choisis disposent d'électrodes retournées et les deux électrodes sont accessibles par le dessus; la colle n'a donc pas de rôle électrique à remplir. On choisit une colle Araldite 2011 pour ses bonnes propriétés mécaniques (limite en cisaillement d'au moins 20 MPa d'après la documentation [39]). La procédure de collage est inspirée de celle conseillée pour des jauges de déformation [105] afin d'obtenir un bon état de surface. Pour être tout à fait rigoureux, une étape de déaération (passage sous vide) de la colle serait nécessaire. Les photos de la figure (6.8) présentent les principales étapes de cette procédure⁴.

La mesure au pied à coulisse de l'ensemble permet d'estimer à posteriori l'épaisseur des films de colle entre 0.04 et 0.05 mm - ce qui devrait donner une épaisseur de chaque film de

²Une mesure à posteriori montre qu'une résistance de fuite de quelques $M\Omega$ existe, valeur pénalisante dans ce cas.

³Cela a en particulier pour conséquence de devoir laisser électriquement flottant le bâti mécanique si un des pôles du shunt est à la terre, ce qui ne s'est pas révélé problématique par la suite.

⁴Certaines photos correspondent à la poutre réalisée pour le chapitre (9.1.2) mais les étapes sont identiques.



Ponçage à la toile émeri de grain 400.



Nettoyage avec une solution diluée d'acide phosphorique. Essuyage dans une seule direction.



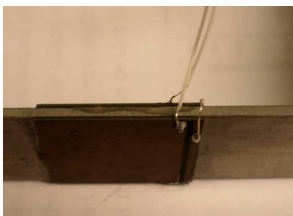
Neutralisation de l'acide avec une goutte d'ammoniaque. Essuyage dans une seule direction.



Nettoyage de l'élément piézoélectrique à l'acétone ; le film de colle époxy a été déposé sur la poutre en léger excès.



Élément piézo. positionné avec ruban adhésif et mis sous pression par un poids ; un peu de colle sera chassée avec les bulles d'air. Temps de prise : 24h. à température ambiante.



Fil à wrapper (30 AWG, 0.255 mm de diamètre) soudé à l'étain sur les électrodes extérieures ; une petite longueur est utilisée pour relier les électrodes intérieures.

FIG. 6.8: Étapes du collage inspirée d'une méthode prévue pour des jauges de contrainte [105]

l'ordre de 0.02 mm environ. L'approximation consistant à négliger l'épaisseur du film de colle est donc ici justifiée.

6.2 Dispositif expérimental

La mesure qu'on souhaite réaliser sur la poutre est la fonction de réponse en fréquence vitesse / effort. Un générateur de signaux crée un signal en tension et un amplificateur de puissance asservi en courant envoie dans la bobine un courant proportionnel à ce signal. Le courant est mesuré au sein de l'amplificateur et disponible pour la mesure. On fait l'hypothèse que l'effort sur la structure est proportionnel au courant dans la bobine [97]. Cette méthode présente les avantages suivants par rapport à un pot vibrant :

- L'excitation est en effort directement, sans dépendance au mouvement ;
- Il y a peu de non-linéarités ;
- L'excitation se fait sans contact et ne relie pas la structure à la masse électrique ; cela est utile car parfois le potentiel électrique de la structure doit être laissé flottant ;
- La masse ajoutée est celle de l'aimant, de 2 à 4 g suivant le type utilisé à comparer à la masse de la structure qui est d'une dizaine de grammes.

Comme défaut, les efforts disponibles sont faibles. Notre structure étant assez petite et souple, cela n'est pas pénalisant. Pour des cas particuliers on peut obtenir des efforts importants en faisant circuler jusqu'à 20 A dans la bobine ; il faut alors la refroidir avec un ventilateur et respecter des périodes d'arrêt entre les mesures.

La vitesse est ensuite mesurée par un vibromètre laser qui permet une mesure sans contact ; cela a deux avantages, d'une part l'absence de masse ajoutée, d'autre part l'absence de liaison de la structure à la masse électrique⁵. Le schéma du dispositif, ainsi qu'une photographie de la poutre en situation sont présentés figures 6.9 et 6.9.

6.3 Circuit shunt

6.3.1 Résistance

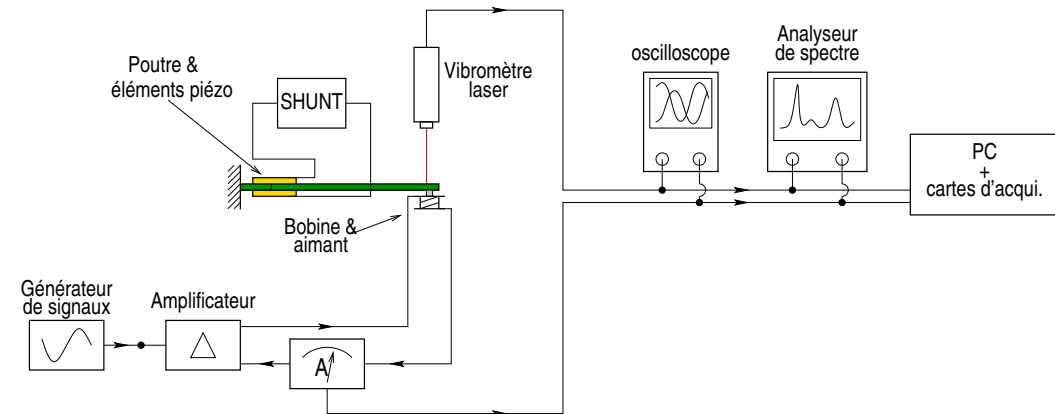
Afin de régler la partie résistive du shunt on utilise un boîtier de potentiomètres de 100 Ω à 10 $M\Omega$.

6.3.2 Inductance

Choix d'un inducteur synthétique

Les valeurs d'inductance prévues sont élevées : 123 H pour le premier mode par exemple (5.48). Cela peut s'obtenir avec des bobines de plusieurs kilomètres de fil et un noyau en ferrite ; ces bobines ont souvent une résistance interne parasite non négligeable. De plus on souhaite pouvoir régler précisément la valeur de l'inductance. Ces raisons font qu'une inductance synthétique réalisée à base d'amplificateurs opérationnels est préférable. On utilise un circuit simple, un inducteur synthétique d'Antoniu [4], avec une modification proposée par Senani [89] permettant de compenser d'éventuelles résistances internes.

⁵À l'occasion d'une mesure à l'accéléromètre, on a pu constater que ceux-ci, bien que réputés flottants, ne le sont pas en pratique ; d'autre part ils sont difficiles à isoler électriquement de la structure à laquelle ils sont collés.



<i>Appareils</i>	<i>Constructeurs</i>	<i>Modèles</i>
Vibromètre laser	Polytec	OFV 303/OFV 3001 S
Analyseur FFT	Bruel & Kjær	2032
Synthétiseur de signaux	Bruel & Kjær	1051
Amplificateur de puissance	Bruel & Kjær	2719
Cartes d'acquisition	National Instruments	NI 4472
Logiciel d'acquisition	M+P international	Smart Office

FIG. 6.9: Dispositif expérimental et références des appareils utilisés.

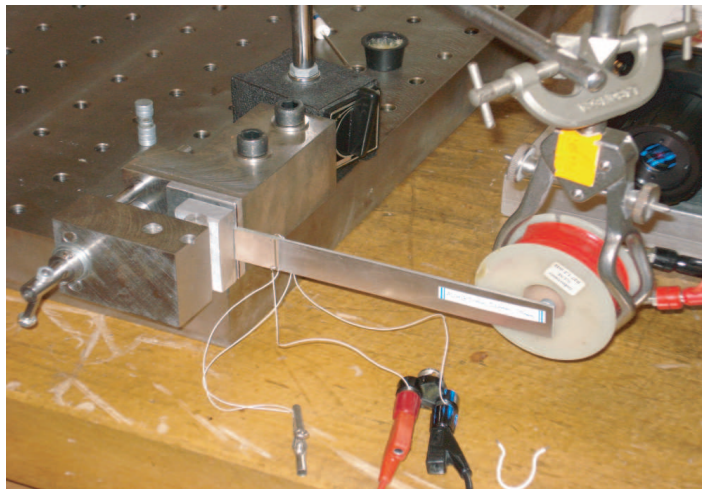


FIG. 6.10: Photographie de la poutre en place.

Réalisation

Les amplificateurs opérationnels sont des OPA445AP choisis après discussion avec Corrado Maurini [61] pour leur possibilité d'alimentation à des tensions élevées [11] évitant la saturation dès de petites amplitudes de vibration. Une alimentation régulée Hewlett-Packard E3620A alimente les deux composants en $+30V$ / $-30V$. Les valeurs de résistances et de la capacité fixe ont été choisies pour limiter le courant sortant des amplificateurs. Une carte regroupant tous les composants sauf le deuxième potentiomètre P2 est réalisée. Pour P2 on

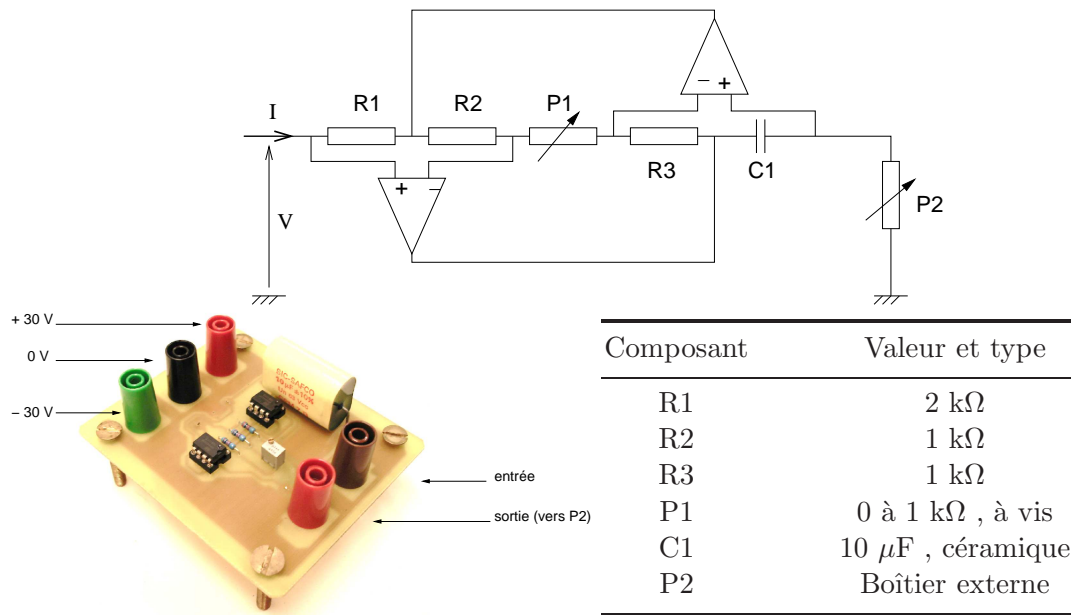


FIG. 6.11: Schéma, photographie et composants de l'inducteur synthétique utilisé

utilise un boîtier externe de potentiomètres de 100Ω à $10 M\Omega$. On peut ainsi mesurer la valeur de P_2 au multimètre avant de réaliser une mesure.

On peut montrer que l'impédance d'entrée de ce système en régime harmonique, tous les composants étant supposés idéaux, est équivalente à une inductance et une résistance négative :

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = jC\omega P_2 R_3 \frac{R_1}{R_2} - P_1 \frac{R_1}{R_2} = jL_{eq}\omega + R_{eq} \quad (6.2)$$

avec $L_{eq} = CP_2 R_3 \frac{R_1}{R_2} = \alpha P_2$ et $R_{eq} = -P_1 \frac{R_1}{R_2}$. L'inductance devrait être proportionnelle à P_2 avec une constante α égale à $20 \text{ H.k}\Omega^{-1}$. Il faut donc tout d'abord régler P_1 afin de compenser une éventuelle résistance parasite du circuit ; ensuite en réglant P_2 on peut changer à volonté la valeur de l'inductance. Cependant la constante α doit être connue avec précision, ce qui n'est pas possible en la calculant d'après les caractéristiques nominales des composants⁶.

Validation expérimentale

On souhaite mesurer l'impédance (résistance et inductance) du circuit. On associe celui-ci à une résistance et une capacité test R_t et C_t , qui ont été mesurées avec un multimètre Langlois GDM8246 avec une incertitude de mesure de $\pm 0.1\%$. On obtient ainsi un circuit RLC série dont on va analyser le comportement.

On étudiera la fonction réponse en fréquence (FRF) $H(\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ qui s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{L_{eq}j\omega + R_{eq}}{L_{eq}j\omega + R_{eq} + R_t + \frac{1}{jC_t\omega}} \quad (6.3)$$

⁶Les tolérances sont de +/- 10 % sur chaque composant soit jusqu'à -33% / +47% sur la valeur de α .

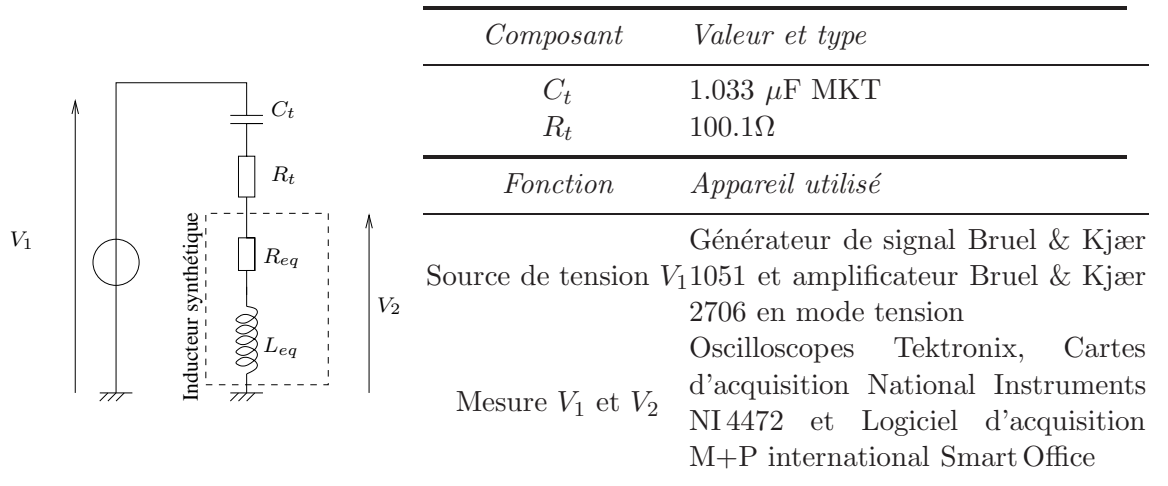


FIG. 6.12: Identification de l'impédance

La première mesure est effectuée en supprimant C_t et en très basse fréquence. Sous ces hypothèses la FRF (6.3) se simplifie :

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{L_{eq}j\omega + R_{eq}}{L_{eq}j\omega + R_{eq} + R_t} \simeq \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_t} \quad (6.4)$$

En imposant à V_1 des signaux sinusoïdaux à des fréquences inférieures à 1 Hz ou une tension continue on observe à l'oscilloscope la relation entre V_1 et V_2 ; la résistance mesurée ainsi est très faible⁷. On ne touche alors pas au réglage de P_1 qui est laissé à 0. La résistance interne est supposée nulle et on cherche maintenant à déterminer L_{eq} .

La deuxième mesure est effectuée avec le condensateur C_t . En l'absence de résistance interne, la FRF s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{L_{eq}j\omega}{L_{eq}j\omega + R_t + \frac{1}{jC_t\omega}} = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + 2\xi_e\omega_e j\omega + \omega_e^2} \quad (6.5)$$

Pour retrouver L_{eq} on souhaite identifier la valeur de la pulsation propre $\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C_t}}$ et le coefficient d'amortissement $\xi_e = \frac{R_t C_t \omega_e}{2}$ à partir de la FRF. On procèdera par pseudo-inversion. Tout d'abord, la FRF est mesurée : le générateur est réglé pour envoyer un bruit blanc restreint à la bande 2-2000 Hz et un logiciel d'acquisition est utilisé pour acquérir et moyenner H pour des fréquences ω_i discrètes. L'équation (6.5) peut être réécrite de la manière suivante, pour chaque point de mesure :

$$H(\omega_i)(\omega_e^2 + 2j\xi_e\omega_i\omega_e) = \omega_i^2(H(\omega_i) - 1) \quad \forall i \in [1, n], \quad (6.6)$$

ce qui peut s'écrire pour l'ensemble des points mesurés de ω_1 à ω_n par un unique produit matriciel :

⁷Un léger courant de repos des amplificateurs opérationnels est observé et masque la résistance interne ; ce phénomène n'est pas jugé pénalisant pour la suite des mesures.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} H(\omega_1) & 2j\omega_1 H(\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ H(\omega_n) & 2j\omega_n H(\omega_n) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}, \text{Mesurée}} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_e^2 \\ \xi_e \omega_e \end{pmatrix}}_{\text{Inconnues}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1^2(H(\omega_1) - 1) \\ \vdots \\ \omega_n^2(H(\omega_n) - 1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}, \text{Mesurée}}. \quad (6.7)$$

Suivant le nombre de points expérimentaux retenus le système (6.7) peut être de nature différente :

- si $n = 1$ le système est indéterminé ;
- si $n = 2$ le système a autant d'équations que d'inconnues et peut être résolu ; cependant toute erreur de mesure sur un des échantillons se traduit par une erreur sur les paramètres à identifier ;
- si $n > 2$ le système a plus d'équations que d'inconnues, il est surdéterminé. On peut alors chercher une solution minimisant la norme suivante :

$$\left(\mathbf{A} \begin{pmatrix} \omega_e^2 \\ \xi_e \omega_e \end{pmatrix} - \mathbf{B} \right)^\top \left(\mathbf{A} \begin{pmatrix} \omega_e^2 \\ \xi_e \omega_e \end{pmatrix} - \mathbf{B} \right). \quad (6.8)$$

Cela fait qu'une erreur de mesure ponctuelle sur H n'affectera que peu le résultat. En pratique, la résolution est faite avec Matlab, en tronquant manuellement la FRF à une bande de fréquence assez large autour de la résonance ; en effet un excès de points au delà ou en deçà du pic de résonance perturbe l'identification.

On effectue plusieurs essais en réglant le potentiomètre P2 sur différentes valeurs de résistances. La valeur de la résistance est mesurée au multimètre, puis P2 est connecté à l'inducteur synthétique et la FRF est mesurée. Les FRF expérimentales et identifiées sont tracées sur la figure (6.13). On obtient un bon accord entre les FRF mesurées et identifiées. La valeur de l'inductance est déduite de la pulsation⁸ $L_{eq} = \frac{1}{C_t \omega_e^2}$. Les valeurs d'inductance obtenues sont comparées à la résistance de P2 et une régression linéaire (fig. 6.13) permet de trouver la valeur de α à $20.88 \text{ H.k}\Omega^{-1}$ avec une bonne précision ; la valeur théorique calculée d'après la relation (6.2) et les valeurs nominales des composants étant de $20 \text{ H.k}\Omega^{-1}$.

⁸On peut remarquer qu'il est aussi possible de déduire la valeur de l'inductance de ξ_e ; cependant les valeurs obtenues par cette méthode ne sont pas satisfaisantes.

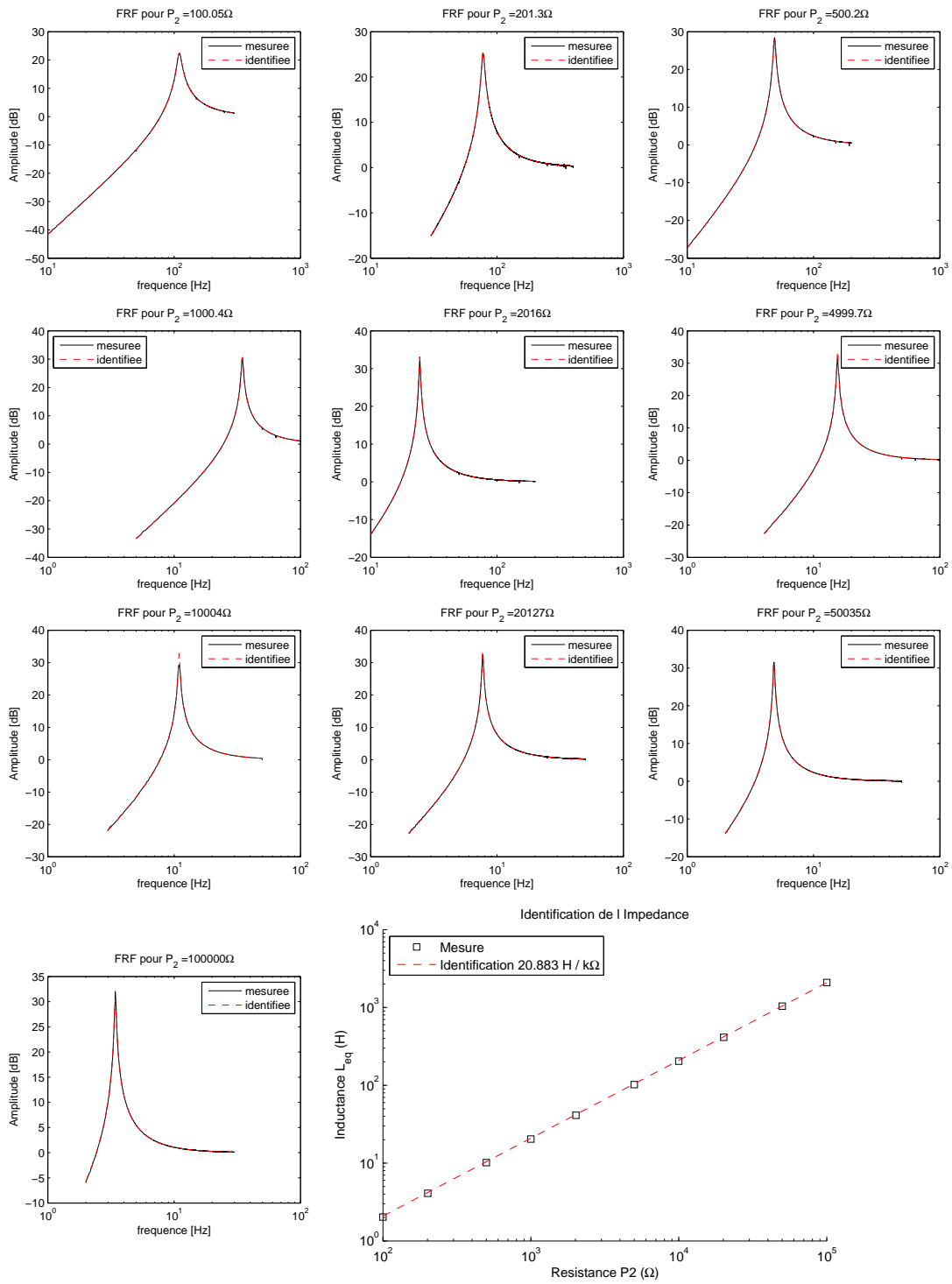


FIG. 6.13: FRF mesurées et identifiées pour différents réglages du potentiomètre P_2 ; identification de l'inductance synthétique en fonction du réglage du potentiomètre P_2

6.4 Résultats

6.4.1 Régime forcé

Le dispositif présenté figure (6.9) est utilisé pour acquérir des fonctions réponse en fréquence (FRF) vitesse sur effort. Un bruit blanc est utilisé pour l'excitation ; les réglages éventuels sont faits en observant la FRF à l'analyseur de spectre. L'acquisition est réalisée un grand nombre de fois par le logiciel et les résultats sont moyennés. Ces mesures sont tout d'abord effectuées en circuit ouvert puis fermé. Ensuite pour les deux premiers modes, les shunts sont réglés de la manière suivante :

- Le shunt résistif est réglé manuellement en tournant le potentiomètre et en observant la FRF présentée sur l'analyseur de spectre ; on minimise l'amplitude du pic correspondant au mode visé, puis la mesure est faite à l'ordinateur. La valeur de la résistance est mesurée ensuite.
- Pour le shunt inductif l'inductance est réglée approximativement à la valeur d'accord prévue pour le mode visé et la résistance additionnelle laissée à 0. On observe une antirésonance sur la FRF, qui correspond à la résonance du shunt ; on règle alors l'inductance pour amener l'antirésonance sur le mode visé.
- Une fois l'inductance réglée, la partie résistive du shunt inductif est réglée en observant la FRF à l'analyseur. Finalement, l'acquisition est faite avec l'ordinateur, puis les valeurs d'inductance et résistance sont relevées au multimètre.

Comparaison calcul - essai : modèle réduit

Tout d'abord on procède à une identification des paramètres modaux à partir de la FRF, avec le logiciel SmartOffice. Ensuite on compare les résultats à ceux obtenus avec deux théories :

- d'une part les résultats obtenus avec le modèle analytique (chap 3) ;
- d'autre part, les résultats obtenus avec le modèle élément finis (chap 4) .

Une différence entre ces deux modèles est la prise en compte de la masse de l'aimant utilisé pour l'excitation. En effet, la partie libre de la poutre nue pèse 18g, et l'aimant utilisé pour l'excitation, situé à l'extrémité, pèse 4.6g, ce qui n'est pas négligeable. Ainsi, les fréquences prévues par le modèle analytique qui ne tient pas compte de cette masse sont plus élevées que les valeurs réelles. On constate un bon accord avec le modèle élément finis en mettant une masse ponctuelle de 4.2g sur le dernier élément (la position réelle de l'aimant étant légèrement éloignée de l'extrémité ce résultat est logique.)

On peut de plus comparer le coefficient de couplage modal réduit (noté k_r , calculé par les coefficients matériau et la géométrie des modes, non mesurable directement) et le coefficient de couplage effectif $k_{\text{eff},r}$ (calculé par différence des fréquences, calcul qui n'est pas fait avec le modèle analytique.) ; on remarque que les valeurs sont proches et que l'hypothèse faite au paragraphe 4.4.3 est ici justifiée.

Finalement, on constate la présence d'un mode de torsion sur le système réel, qui n'est pas prévisible par les modèles poutre Euler-Bernoulli EF ou analytique. Ce mode de torsion devrait logiquement être découplé électriquement, en raison de l'antisymétrie du champ de déformation (qui est donc d'intégrale nulle sur les éléments piézoélectriques). On constate expérimentalement qu'il est peu couplé.

On peut reconstituer à partir des paramètres modaux identifiés (participation des modes, pulsations, coefficients de couplage et amortissements) la FRF du système avec différentes

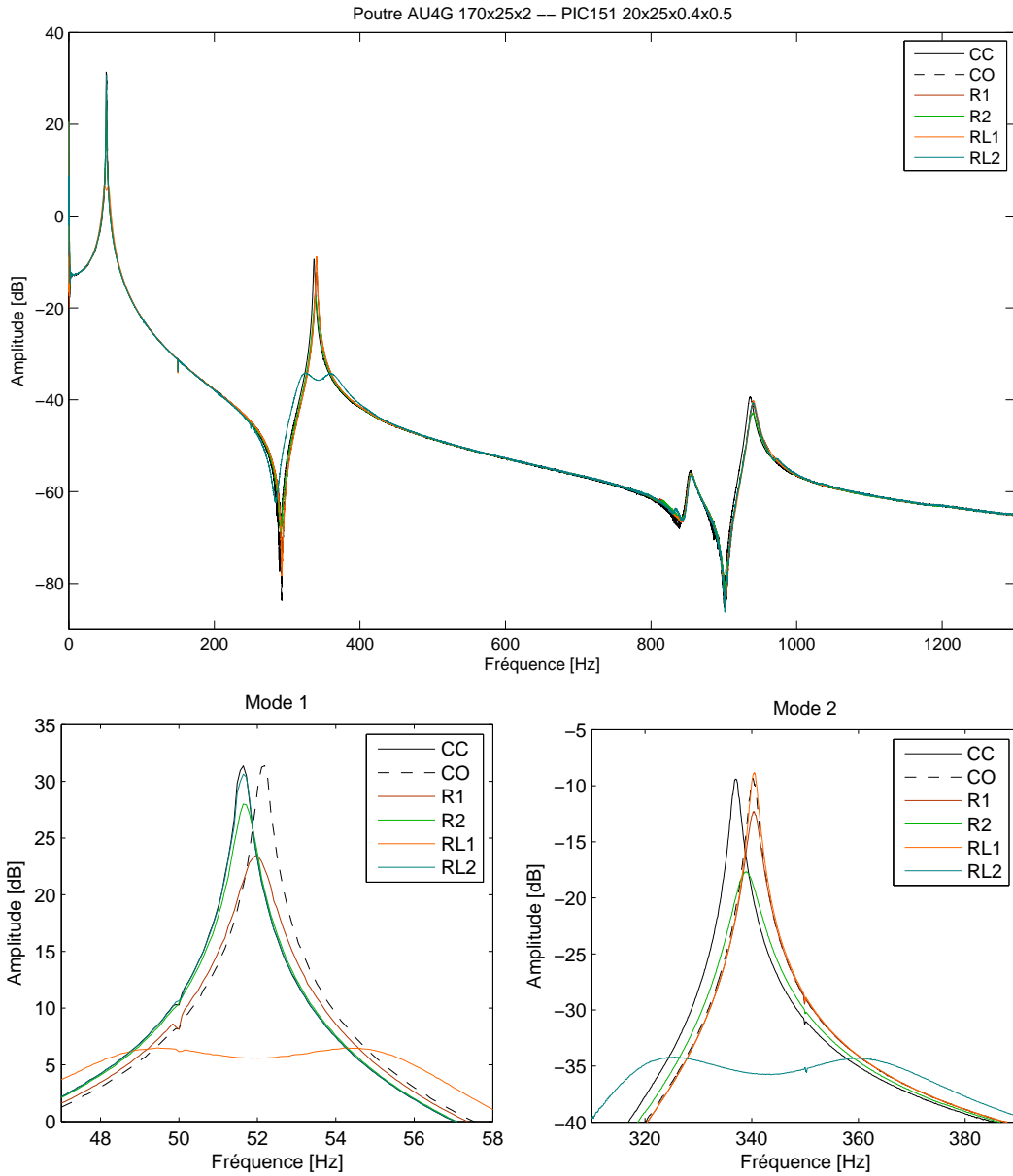


FIG. 6.14: FRF de la structure étudiée avec shunt court-circuit, circuit ouvert, résistif et résonant adaptés aux deux premiers modes. Agrandissement au voisinage des deux premiers pics de résonance.

	Freq. CC ω_r [Hz]			Freq. CO $\hat{\omega}_r$ [Hz]		$k_{\text{eff},r}$		k_r		ξ_r
	Ana.	EF	Exp.	EF	Exp.	EF	Exp.	Ana.	EF	Exp.
mode F ₁	68.87	48.96	51.46	49.42	51.98	0.137	0.143	0.147	0.143	0.17 %
mode F ₂	411.18	337.1	335.4	340.7	338.5	0.145	0.136	0.143	0.15	0.25 %
mode T ₁	–	–	853	–	854	–	0.05	–	–	0.5 %
mode F ₃	1094.3	951.8	926.8	960.6	931.4	0.137	0.10	0.125	0.14	0.4 %

TAB. 6.1: Fréquences propres et coefficients de couplage (modèle EF et mesure)

conditions électriques ; en particulier on peut reproduire l'association avec des shunts résistifs et résonants optimaux, en utilisant un modèle réduit à trois modes et l'expression (5.38 ou 5.70) ; on constate alors (fig. 6.15) un assez bon accord avec les résultats expérimentaux, avec une légère déviation liée aux modes voisins, comme vu à la section 5.4.6.

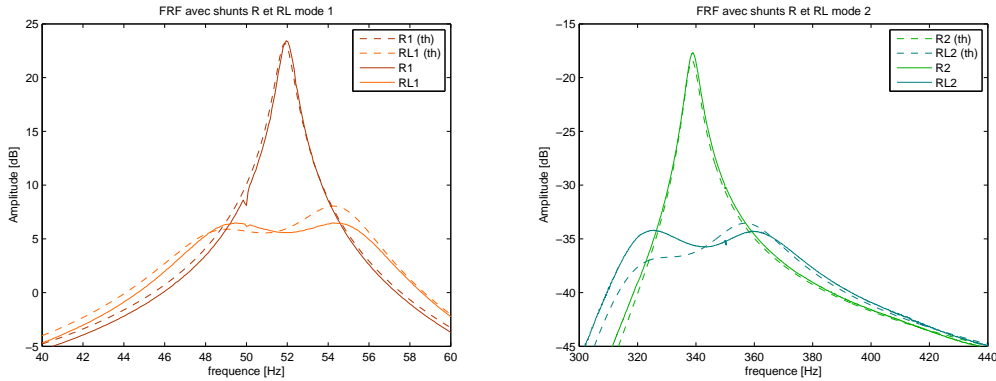


FIG. 6.15: FRF de la structure étudiée avec shunts R et RL adaptés aux modes 1 (à g.) et 2 (à dr.), résultats expérimentaux (traits pleins) et théoriques (pointillés)

On peut aussi utiliser le modèle éléments finis du chapitre 4 pour tracer la FRF. On part de l'équation (4.73), où on aura calculé les matrices de raideur et couplage d'après le modèle poutre (§4.5). Ensuite, cette équation est réécrite avec la charge comme ddl électrique et un shunt résonant associé de la même façon qu'au chapitre 5. On tient compte de la masse de l'aimant en ajoutant une masse ponctuelle sur le dernier élément de la poutre. La FRF déplacement / effort à ce nœud est tracée ; on adapte la valeur de l'inductance pour obtenir le même aspect des courbes et on obtient un très bon accord (fig. 6.16). Toutefois l'amplitude du pic de résonance n'est pas bien prise en compte, en raison de l'absence d'amortissement dans le modèle EF.

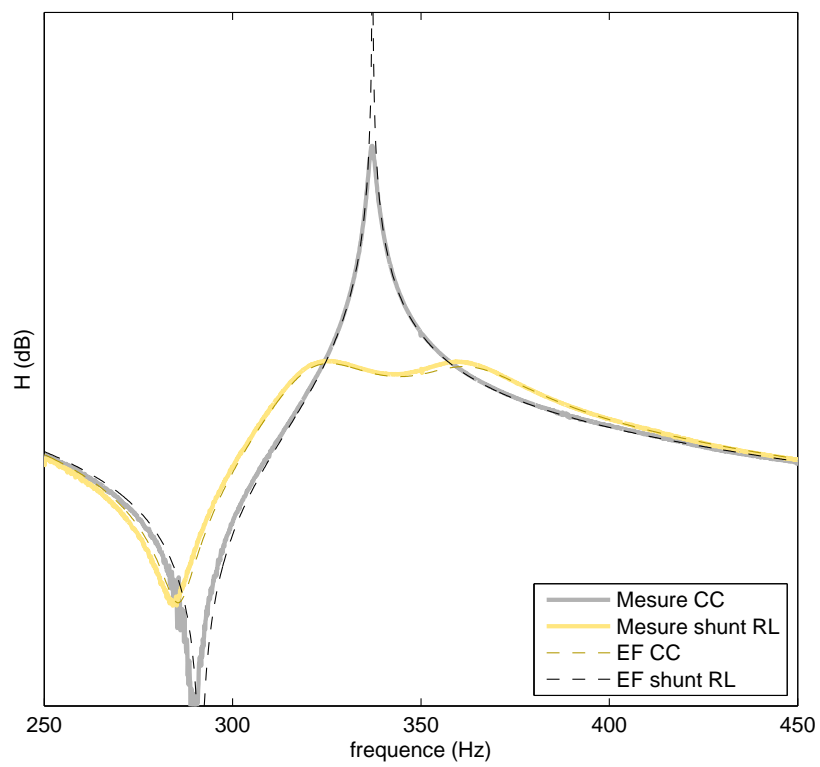


FIG. 6.16: *FRF en court-circuit et avec shunt RL au voisinage du deuxième mode*

6.4.2 Variation du couplage

Association de capacité et réduction du couplage

Afin de vérifier la relation entre l'atténuation apportée par le système de shunt et le coefficient de couplage, on souhaite faire évoluer celui-ci, sans avoir à reconstruire une nouvelle structure pour chaque expérience. Une possibilité est d'associer une capacité en parallèle de l'élément piézoélectrique (figure 6.17). Cela a pour effet de baisser le couplage électromécanique. Si l'on écrit les équations du problème électromécanique couplé, avec le couplage en tension, pour le système électromécanique, on a (équations adimensionnées) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r - k_r \omega_r V = F_r, \\ - \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r + Q = V, \end{array} \right. \quad (6.9)$$

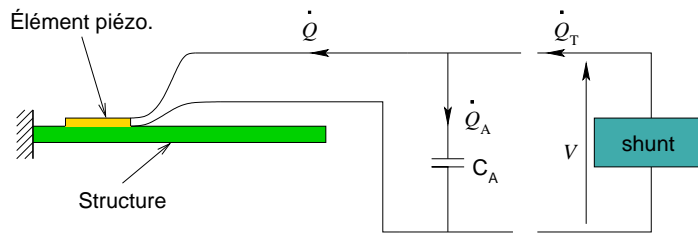


FIG. 6.17: Capacité en parallèle de l'élément piézoélectrique.

Le fait d'associer une capacité en parallèle à cet ensemble ne va changer ni Q , charge libre présente sur les électrodes des éléments, ni V différence de potentiel à leurs bornes. Par contre la nouvelle capacité stocke une charge Q_A ; en notant C_A sa capacité, on a la relation suivante (dimensionnée) :

$$Q_A = VC_A.$$

Si l'on tient compte de l'adimensionnement pratiqué pour le problème électromécanique (§3.2.3),

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau_m}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_0}, \quad (6.10)$$

avec

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad (6.11)$$

avec C capacité des éléments piézoélectriques, donnée par l'équation (3.28), il vient alors la relation adimensionnée suivante :

$$\bar{Q}_A = \bar{V} \frac{C_A}{C}. \quad (6.12)$$

À partir de cette équation et dans ce qui suit, on notera sans barre les grandeurs toutes adimensionnées. On peut remarquer que la charge qui circule dans le shunt est désormais la somme de la charge aux bornes des éléments piézoélectriques et de la capacité additionnelle : $Q_T = Q_A + Q$. En écrivant Q_T en tenant compte de (6.12) il vient :

$$Q_T = Q + \frac{C_A}{C} Q - \frac{C_A}{C} \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r. \quad (6.13)$$

En notant $\alpha = 1 + C_A/C$ on écrit

$$Q_T - \alpha V = \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r,$$

ce qu'on injecte dans (6.9) pour obtenir l'équation du système couplé désormais écrit avec la charge totale circulant dans le circuit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r - k_r \omega_r V = F_r, \\ - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\alpha} q_r + \frac{1}{\alpha} Q_T = V. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

En réécrivant maintenant le système couplé sur la charge, et en remplaçant la valeur de la charge par une autre valeur adimensionnée définie à un facteur près $Q_{eq} = Q_T/\sqrt{\alpha}$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} \sum_{j=1}^N \frac{k_j \omega_j}{\sqrt{\alpha}} q_j - \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} Q_{eq} = F_r, \\ - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} q_r + Q_{eq} = V \sqrt{\alpha}. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Dans ce système on peut alors remplacer V par sa valeur imposée par le shunt ; on obtient alors suivant le type de shunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} \sum_{j=1}^N \frac{k_j \omega_j}{\sqrt{\alpha}} q_j - \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} Q_{eq} = F_r, \\ \text{shunt R} \quad \alpha \tau_e \dot{Q}_{eq} - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} q_r + Q_{eq} = 0, \\ \text{shunt RL} \quad \alpha \frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q}_{eq} + \alpha \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{Q}_{eq} - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} q_r + Q_{eq} = 0, \end{array} \right. \quad (6.16)$$

c'est à dire que *l'écriture adimensionnée du système avec capacité parallèle et shunt est rigoureusement identique à celle du système sans capacité parallèle, à la seule différence que le coefficient de couplage est réduit d'un facteur $1/\sqrt{\alpha}$, et les pulsations et amortissements électriques différents*. Dans [8] les auteurs se servent de cette modification pour réduire la valeur de l'inductance nécessaire et constatent la baisse du couplage.

Comme les seuls paramètres qui ont changé sont les paramètres électriques, la partie mécanique du problème va se comporter de manière rigoureusement identique suivant les valeurs de C_A .

Résultat

On se place à la résonance du mode 1, en associant des capacités croissantes à l'élément piézoélectrique. Pour chaque capacité, la fréquence circuit ouvert et court-circuit sont mesurées, permettant de déduire le coefficient de couplage. Ensuite, des shunts optimaux R et RL sont réglés à la main. On constate expérimentalement que la pulsation court-circuit n'est pas affectée, par contre on observe la baisse des impédances signalée dans [8]. Finalement on compare les amplitudes en court-circuit et avec shunts R et RL optimaux avec chacune

des capacités test utilisées ; on obtient des points (figure 6.18) qu'on compare aux formules (5.32,5.68) prévoyant la performance en fonction du coefficient de couplage (et de l'amortissement mesuré de la structure). On constate un bon accord expérimental, avec cependant une baisse de performance en dessous de 5 % de couplage : il devient en effet aux couplages faibles très difficile de régler correctement le shunt résonant, problème prévu numériquement (par exemple figure 5.22). On peut tirer les conclusions suivantes de cette étude :

- Il est possible expérimentalement, *tous paramètres mécaniques égaux*, de réduire le coefficient de couplage artificiellement pour réaliser une étude paramétrique. Il suffit d'ajouter une capacité en parallèle des éléments piézoélectriques. L'impédance du circuit doit être adaptée.
- Au dessus de 5 % de couplage, la prédiction de performance des shunts R et RL (5.32,5.68) est bonne. Les performances sont intéressantes.
- En dessous de 5 % de couplage, le shunt résistif n'apporte presque rien à notre structure test en terme d'amortissement.
- En dessous de 5 % de couplage, en conditions contrôlées de laboratoire, avec de bons appareils de mesure, il devient très difficile de régler un shunt résonant satisfaisant, la performance n'est alors plus conforme à la prédiction.

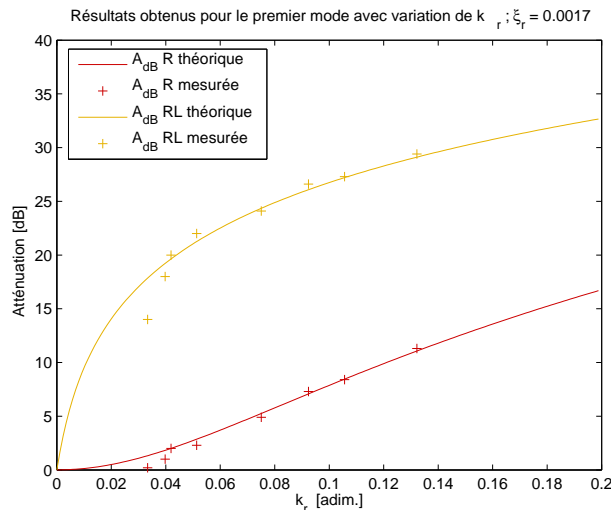


FIG. 6.18: Atténuations prévues et obtenues avec des shunts R et RL pour le premier mode avec variation du couplage

6.4.3 Régime libre

On se propose d'étudier la réponse en régime libre de la structure, pour cela on veut la déformer statiquement d'une flèche donnée, puis la laisser libre.

Lâcher mécanique Une première idée était de fléchir la poutre à l'aide d'un système de poids, avec une poulie de renvoi pour obtenir un effort de traction à l'horizontale. Cet effort est transmis à travers un fil de nylon ; ce fil est brûlé par la flamme d'un briquet pour qu'il cède brusquement et la structure est alors libérée. Expérimentalement, ce système fonctionne mal pour deux raisons liées à la petite échelle du dispositif :

- le frottement dans la poulie et peut être d'autres phénomènes font qu'il est visiblement difficile d'obtenir une flèche constante ; la mesure au micromètre de cette flèche nécessitant un appui sur la touche du micromètre perturberait la mesure ;
- la rupture du fil n'est pas du tout reproductible ; parfois le fil se contracte sous l'effet de la chaleur avant de céder, d'autrefois il s'étire et cède progressivement, ou même se détend complètement avant de brûler.

Lâcher électromagnétique On décide de se servir du dispositif utilisé pour la réponse forcée (figure 6.9) ; la seule différence est l'utilisation d'un générateur de tension continue branché sur l'amplificateur. Celui-ci est réglé pour délivrer un courant fixe de 20 A environ⁹, ce qui correspond à une déflexion fixe d'environ 1 mm de la poutre. Le câble reliant la bobine est alors débranché brutalement afin d'arrêter le courant dans un temps très court¹⁰. La poutre est alors en régime libre, à partir d'une position de départ parfaitement reproductible.

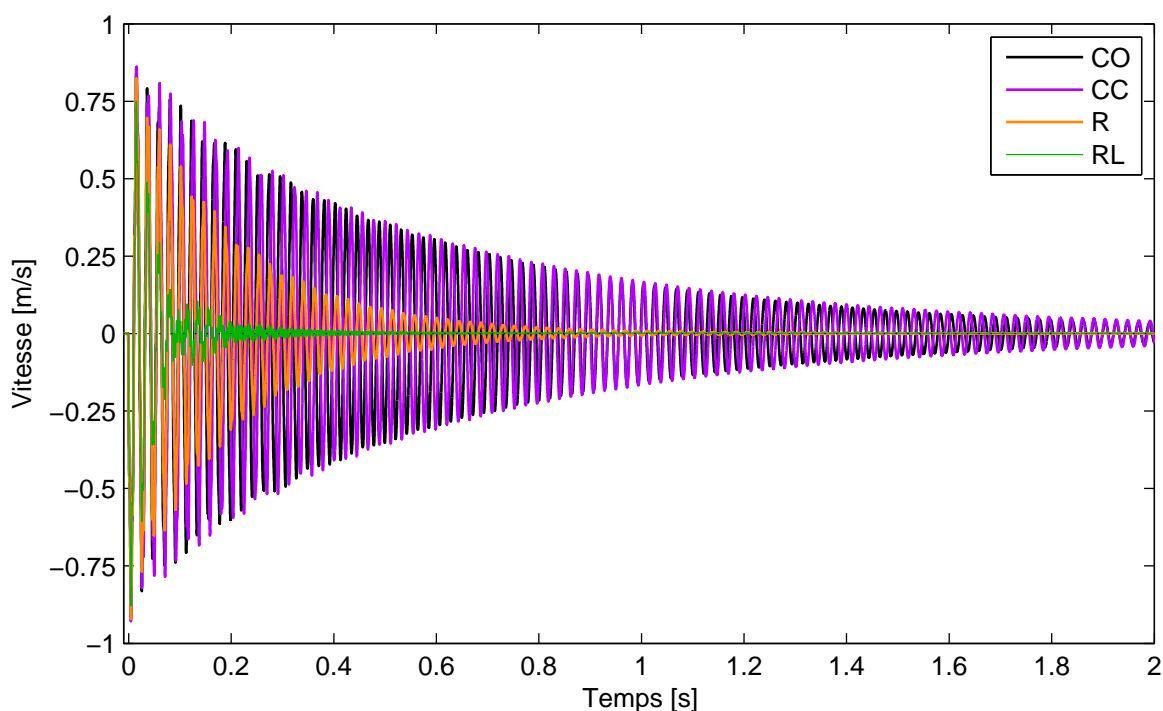


FIG. 6.19: Oscillations libres de la poutre à déplacement initial non nul et vitesse nulle.

Résultats On peut faire les remarques suivantes :

- La déformée statique initiale de la structure est très proche de la première déformée modale, si bien qu'une grande partie de l'énergie est transférée au mode F1. Par suite, la forme des oscillation est très proche d'une sinusoïde de fréquence proche de celle du mode F1.

⁹Nécessitant un ventilateur de refroidissement sur la bobine entre les mesures.

¹⁰Un interrupteur à couteaux aurait été plus indiqué pour cette opération. Néanmoins le temps d'arrêt du courant, mesuré à l'oscilloscope, est systématiquement de l'ordre de la milliseconde, ce qui est satisfaisant.

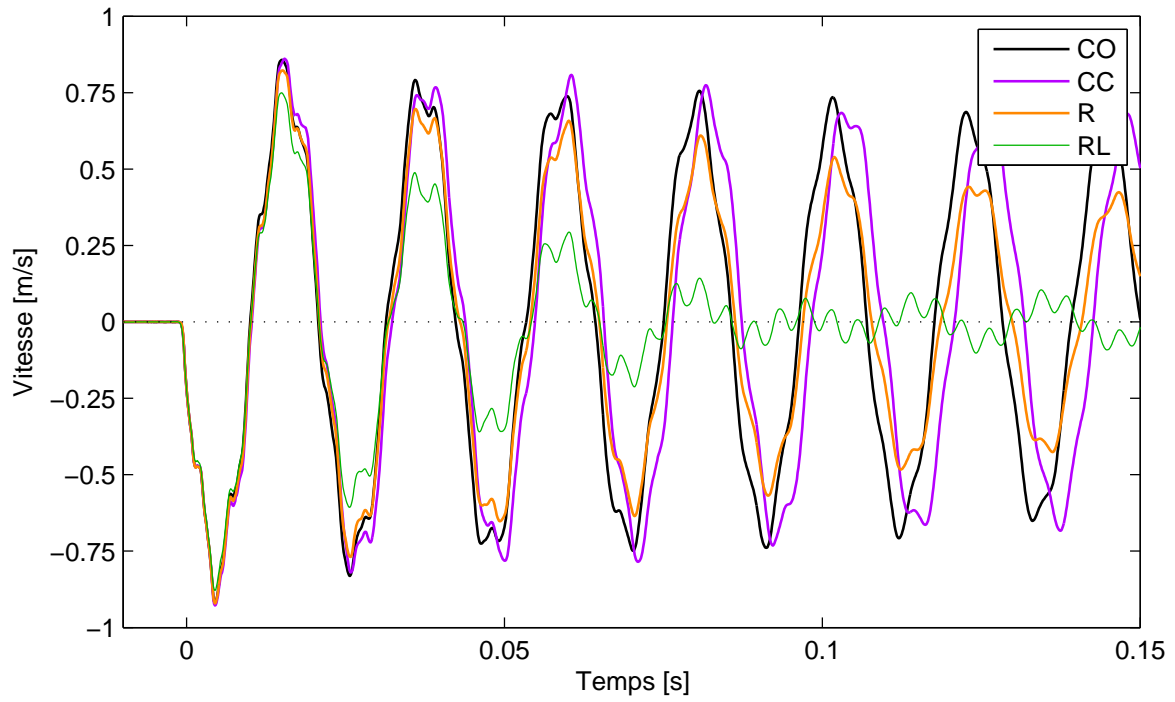


FIG. 6.20: Détail de la figure 6.19 entre 0 s et 0.15 s

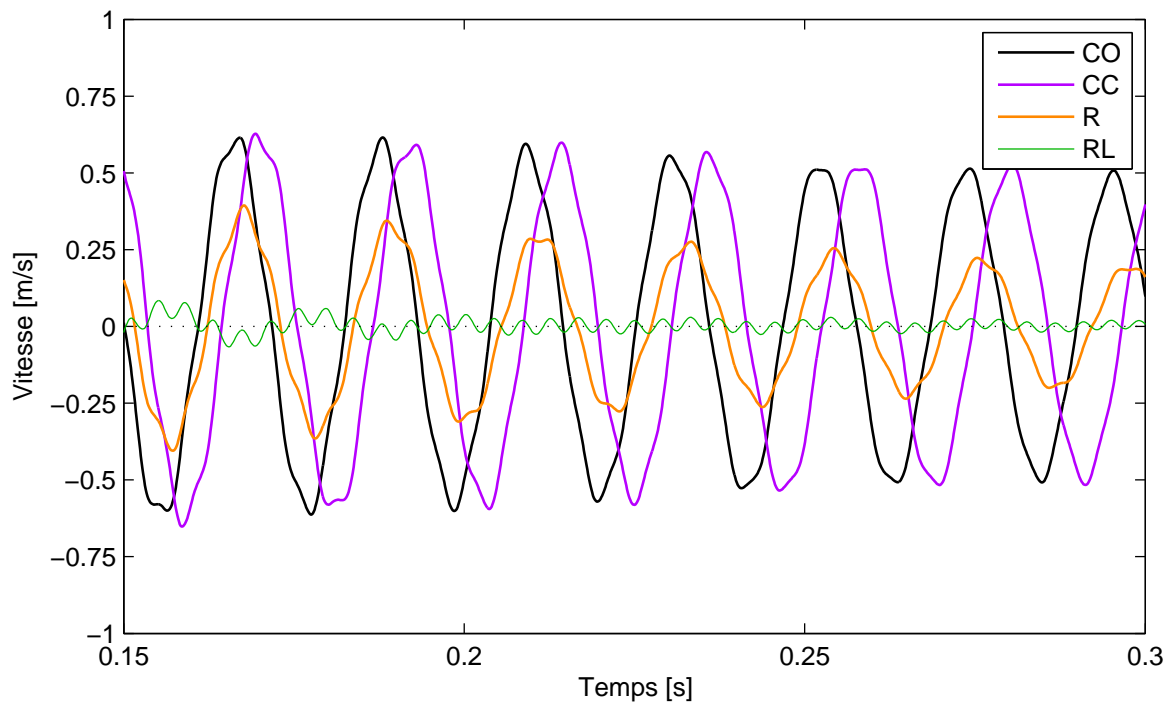


FIG. 6.21: Détail de la figure 6.19 entre 0.15 s et 0.3 s

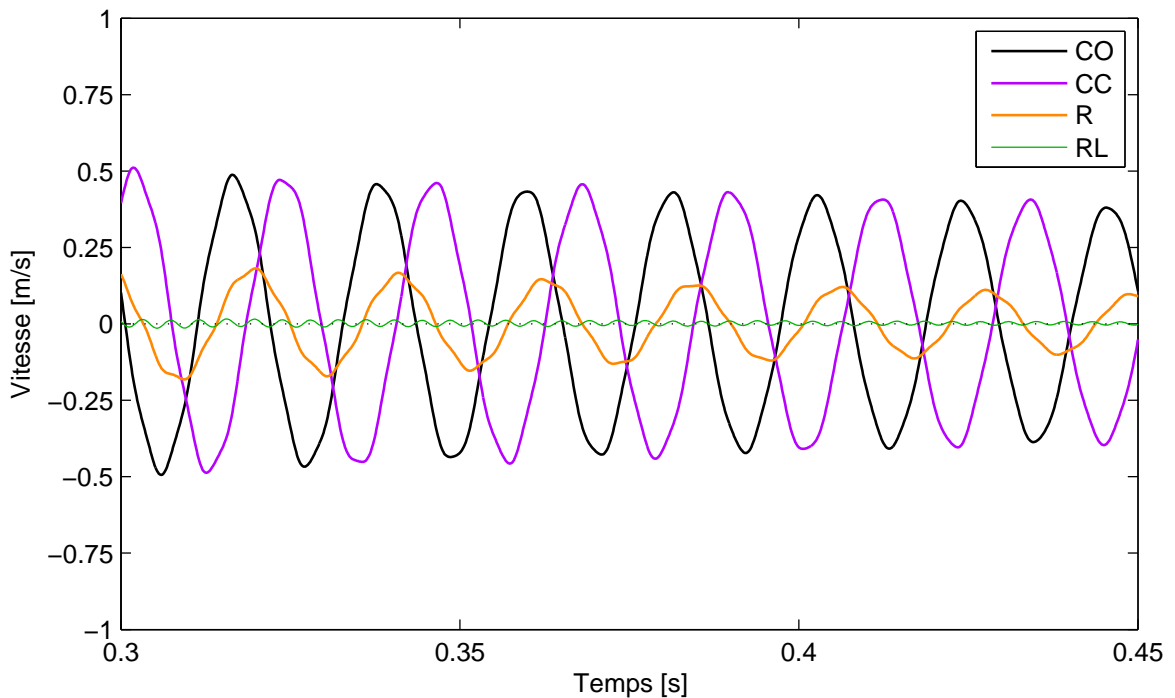


FIG. 6.22: Détail de la figure 6.19 entre 0.3 s et 0.45 s

- Les décroissances rapides, dues au shunt résistif d’une part et au shunt résonant d’autre part sont clairement visible sur la figure 6.19. Il faut respectivement 0.4 s et 1 s avec les shunts résonant et résistif pour diviser l’amplitude des oscillations par un facteur 100, alors que 3 s sont nécessaire en court-circuit.
- On observe facilement la différence de valeur entre la fréquence en court-circuit et celle en circuit ouvert, par un décalage des oscillations : la structure en circuit ouvert oscille plus rapidement qu’en court-circuit, effet de la raideur ajoutée en circuit ouvert.
- La sélectivité fréquentielle du shunt résonant, accordé sur le mode F1, est très visible car seule les oscillations à la fondamentale du signal sont amorties de façon significative. Après extinctions du mode F1, il subsiste encore des oscillations de plus haute fréquence, correspondant à la fréquence du mode F2.
- Le shunt résonant ayant été réglé en observant la réponse en régime forcé n’est pas tout à fait optimal pour le régime libre. La résistance choisie en observant la FRF (réponse forcée) est trop faible pour être optimale en régime libre (§5.4.2), ce qui fait apparaître un phénomène de battement du mode 1 visible au début de la réponse (figure 6.19).

6.5 Conclusion

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie, pour mémoire :

- Les fréquences propres et coefficients de couplage obtenus par modèle analytique ou éléments finis ;
- Le comportement du système avec shunt R ou RL ;
- La dépendance au coefficient de couplage de l’atténuation obtenue.

On a également établi que le shunt résonant donne de bonnes atténuations jusqu'à 5 % de couplage, valeur en dessous de laquelle il devient trop difficile à régler pour atteindre la performance souhaitée. L'idéal serait donc de trouver un dispositif capable d'atteindre les mêmes performances que le shunt résonant, tout en étant capable de s'adapter à la fréquence de la structure.

Dans les chapitres qui viennent, on s'intéresse aux shunts à commutations, qui sont basiquement des shunts que l'on ferme et ouvre de manière synchronisée avec le mouvement de la structure; ainsi une partie des outils développés et validés ici pourront être réutilisés.

On espère que les shunts à commutation permettront d'obtenir de bonnes performances sans nécessiter d'accord précis.