

PREMIÈRE PARTIE I

Modèle électromécanique

La femme est une substance matérielle organique composée de nombreux sels minéraux et autres produits chimiques parés de noms gréco-latins qu'on retrouve également chez l'homme, mais dans des proportions qui forcent le respect.

Pierre Desproges

Matériau piézoélectrique

Ce chapitre est une introduction aux matériaux piézoélectriques. On procède d'abord à un rappel d'électrostatique (§2.2) qui permet au lecteur de se familiariser avec les grandeurs en jeu. Ensuite, les aspects technologiques des matériaux piézoélectriques sont explorés (§2.4). Finalement, la relation de comportement piézoélectrique que l'on utilisera dans cette thèse est exposée et réduite (§2.5.1), ainsi que les équations dynamiques couplées d'un milieu piézoélectrique (§2.6) ; on définit finalement les divers coefficients de couplage du matériau (§2.7).

2.1 Effet piézoélectrique

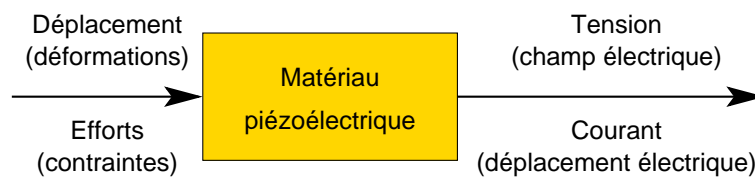


FIG. 2.1: *Effet piézoélectrique direct*

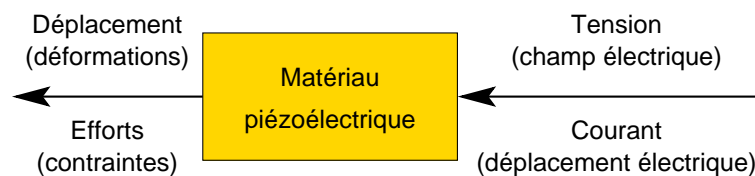


FIG. 2.2: *Effet piézoélectrique inverse*

Un matériau piézoélectrique (du grec *piezein*, presser) est par définition capable de convertir :

- de l'énergie mécanique en énergie électrique, c'est l'effet piézoélectrique direct (Fig. 2.1) ;
- de l'énergie électrique en énergie mécanique, c'est l'effet piézoélectrique inverse (Fig. 2.2).

Afin de décrire ces phénomènes il est nécessaire de décrire les champs de déformation, contrainte, et le champ électrique et de déplacement électrique. Ces deux derniers, moins classiques dans un contexte de mécanique des structures, font l'objet d'un rappel ci-après.

2.2 Grandeurs électriques

2.2.1 Dans le vide

Champ électrique

On considère un ensemble de particules chargées électriquement ; des efforts apparaissent sur ces particules, que l'on appelle forces de Lorentz [45, p. 28]. Une partie de ces forces dépend de la vitesse de chaque particule ; on parle de force associée au champ magnétique ; l'autre partie ne dépend pas de la vitesse de la particule, et est appelée force associée au champ électrique.

En particulier, dans le cas de deux particules immobiles chargées A et B , de charge q_A et q_B , on observe la force de Coulomb qui est exercée sur B par A :

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \mathbf{u}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A}, \quad (2.1)$$

où r est la distance entre les particules, $\mathbf{u}_{A \rightarrow B}$ le vecteur unitaire allant de A à B et ϵ_0 la permittivité électrique du vide, constante égale à $8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m [2]. On définit alors le champ électrique en tout point de l'espace ; ce champ \mathbf{E} permet de rendre compte de la force de Coulomb par la relation suivante :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Pour représenter l'interaction entre les particules A et B , d'après (2.1) et (2.2), le champ créé par chaque particule est un champ à symétrie sphérique ; ainsi le champ créé par A en un point M est

$$\mathbf{E} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_{A \rightarrow M}, \quad (2.3)$$

où dans ce cas r est la distance AM . Comme les forces s'additionnent, les champs de chaque particule s'additionnent. Il est ainsi possible d'écrire le champ électrique d'un système de particules chargées.

Théorème de Gauss

Si l'on considère maintenant une densité volumique de charges, notée ρ_v , on peut écrire le champ électrique produit par cette densité en tenant compte des versions locale ou intégrale du théorème de Gauss [45, p. 29-30] :

- En tout point de l'espace où la densité volumique de charge est ρ_v , le champ électrique vérifie :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v \quad (2.4)$$

- Pour tout volume Ω à l'intérieur duquel la densité volumique de charge est ρ_v , on a :

$$\oiint_{\partial\Omega} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho_v d\Omega = Q. \quad (2.5)$$

avec Q la charge contenue dans Ω .

2.2.2 Dans un matériau

Les propriétés électriques et magnétiques d'une région matérielle sont caractérisées par trois phénomènes [45, p. 112] :

1. la *conduction électrique*, représentée par le paramètre σ , conductivité du matériau ;
2. la *polarisation électrique*, représentée par le paramètre ϵ , permittivité du matériau ;
3. la *polarisation magnétique*, représentée par le paramètre μ , perméabilité du matériau ;

Comme on s'intéresse aux matériaux piézoélectriques soumis à des champs magnétiques négligeables, la suite évoquera simplement les deux premiers points.

Conduction et charges libres

La conductivité d'un matériau (solide) est liée à la présence dans ce matériau d'électrons libres, qui sont capables de se déplacer d'une orbite atomique à une autre et de créer des courants électriques [45, p. 113] ; les atomes qui constituent le matériau restent eux immobiles. On représente les courants par une densité volumique de courant électrique, définie par :

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}_m, \quad (2.6)$$

où ρ_v est la densité volumique de charges libres et \mathbf{v}_m la vitesse moyenne de ces charges. Comme ces électrons libres (qui sont des charges négatives) se déplacent lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique \mathbf{E} , on a la relation suivante, appelée loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}, \quad (2.7)$$

où σ est la conductivité du matériau, exprimée en A/V/m ou Siemens par mètre (S/m).

Selon la valeur de la conductivité σ d'un matériau donné, celui-ci est plus ou moins conducteur. On distingue en général les deux cas extrêmes [45, p. 112]

- les matériaux isolants (ou diélectriques) ne possèdent pas d'électrons libre en leur sein, si bien qu'aucun courant électrique ne peut y prendre naissance. Ils sont caractérisés par des valeur très faibles de σ , de l'ordre de 10^{-16} S/m pour les meilleurs isolants [45, p. 115]. Les matériaux piézoélectriques font partie de cette famille.
- les matériaux conducteurs, quand à eux, sont caractérisés par des électrons libres de se déplacer d'un atome à l'autre. Leur conductivité est grande, de l'ordre de 10^8 S/m pour les meilleurs conducteurs [45, p. 115].

Polarisation d'un diélectrique et charges liées

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique, les charges positives et négatives le constituant sont soumises à des forces de Coulomb et se déplacent légèrement par rapport à leur position d'équilibre moyenne, sans pouvoir circuler sur de grandes distances. Même si ces déplacements sont de l'ordre de quelques fractions des diamètres moléculaires, le cumul des charges déplacés peut causer un changement significatif de l'état électrique du milieu. Ce phénomène est la polarisation.

Les charges électriques dans un diélectrique sont organisées par paires de charge positives et négatives, chaque paire étant appelée un dipôle, de charge globale nulle. Ce peut être entre autres :

- tout atome (la charge positive est le noyau et la charge négative son nuage d'électrons) ;

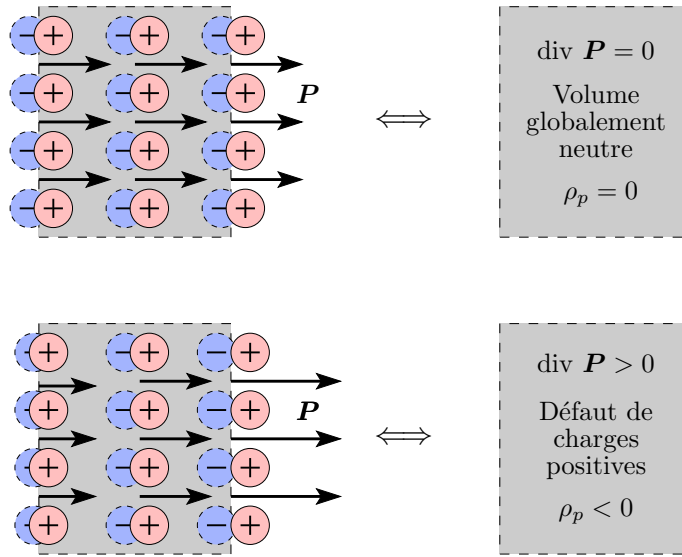


FIG. 2.3: Polarisation \mathbf{P} uniforme (en haut) et non-uniforme (en bas) d'un élément de matière et densité de charge de polarisation ρ_p équivalente

- une liaison polaire (comme dans la molécule d'eau, où les électrons des deux atomes d'hydrogène sont fortement attirés par l'atome d'oxygène, ce qui décale leur position moyenne dans la direction du noyau de l'atome d'oxygène) ;
- l'ensemble des ions d'un cristal ionique où des atomes voisins ont échangé des électrons
- ...

Chaque dipôle, est caractérisée par son moment \mathbf{p} défini par :

$$\mathbf{p}_i = q_i \mathbf{d}_i, \quad (2.8)$$

où q_i est la charge positive du i -ième dipôle et \mathbf{d}_i le vecteur représentant la distance de la charge négative vers la charge positive. Pour certains dipôles (par exemple dans le cas des atomes) cette distance est nulle au repos tandis que pour d'autres elle ne l'est pas (cas des liaisons polaires). Le *champ de polarisation électrique* du milieu est alors défini comme la densité volumique de dipôles, qui s'écrit :

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \rho_+ \mathbf{d}, \quad (2.9)$$

avec Δv un petit volume du matériau, N le nombre de dipôles contenus dans Δv , ρ_+ la densité de charge positives déplacées et \mathbf{d} le déplacement moyen des charges positives par rapport aux charges négatives. Une polarisation nulle peut signifier que les moments sont soit nuls (par exemple dans le cas d'atomes au repos) ou que les moments sont non nuls mais répartis dans toutes les directions (par exemple c'est le cas de certains cristaux comprenant des liaisons polaires).

Le champ de polarisation \mathbf{P} caractérise un déplacement de charges positives par rapport aux charges négatives. Si il n'est pas uniforme sur un volume donné, sa variation se traduit par un excès de charge positives *hors* du volume considéré (Fig. 2.3). D'un point de vue quantitatif, cela permet de définir une densité volumique de charge de polarisation ρ_p , telle que :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{P} = -\rho_p.} \quad (2.10)$$

Cette dernière relation montre qu'une polarisation \mathbf{P} non uniforme (caractérisée par $\operatorname{div} \mathbf{P}$ non nulle) dans le matériau correspond à la création d'une densité de charge ρ_p , de signe opposé à celui de la divergence de \mathbf{P} .

Déplacement et champ électrique

Par rapport au vide, un milieu matériel peut donc contenir une densité de charge de polarisation non-nulle (des charges liées, définies par la densité volumique ρ_p) en plus d'éventuelles charges libres (caractérisées par leur densité volumique ρ_v). Cette ensemble de charges est responsable du champ électrique \mathbf{E} dans le matériau, créé à la fois par les charges libres et les charges liées. L'expression locale du théorème de Gauss (2.4) devient alors, dans le cas d'un milieu matériel :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v + \rho_p, \quad (2.11)$$

soit encore, avec l'équation (2.10) :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v. \quad (2.12)$$

Cela permet de définir le *champ de déplacement électrique* (ou *induction électrique*) \mathbf{D} par :

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.} \quad (2.13)$$

Le théorème de Gauss dans un milieu matériel s'écrit alors :

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v,} \quad (2.14)$$

soit encore

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho_v d\Omega = Q.} \quad (2.15)$$

Loi de comportement

La polarisation du milieu décrite au paragraphe (2.2.2) se traduit par une relation entre \mathbf{E} et \mathbf{P} . Lorsque le matériau est linéaire, la polarisation est proportionnelle au champ électrique, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

avec χ_e la susceptibilité du milieu (c'est un paramètre adimensionné).

On a pour habitude d'écrire cette relation en fonction de \mathbf{D} et \mathbf{E} à partir de la relation (2.13). On obtient :

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},} \quad (2.17)$$

avec ϵ la permittivité du milieu. Celle-ci s'écrit aussi

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad (2.18)$$

avec ϵ_r la permittivité relative (par rapport au vide). On a aussi $\epsilon_r = 1 + \chi_e$, en comparant les équations (2.18), (2.17) et (2.13).

Lorsque le milieu est non-linéaire (c'est le cas lorsque le matériau est soumis à un fort champ électrique), la relation (2.17) est toujours valable, avec ϵ (ou ϵ_r) qui dépend de \mathbf{E} :

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{E}) \mathbf{E} = \epsilon_r(\mathbf{E}) \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.19)$$

Enfin, remarquons que les relations (2.16) et (2.17) ne sont valables que pour un milieu isotrope. Si ce n'est pas le cas, ϵ_r et χ_e sont des tenseurs.

Conditions aux limites

En appliquant le théorème de Gauss (Eq. (2.15)) au volume d'un petit disque construit sur l'interface Σ entre deux milieux matériels [45], on montre en faisant tendre l'épaisseur vers 0 que :

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s, \quad (2.20)$$

avec ρ_s la densité surfacique de charges libres présente à l'interface, \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 les champs électriques de part et d'autre de l'interface, \mathbf{n} la normale à l'interface, dirigée de 2 vers 1. Cette expression signifie que la composante normale du déplacement électrique est discontinue et que la valeur du saut est égale à ρ_s :

$$\boxed{\llbracket \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_s.} \quad (2.21)$$

Par le même raisonnement, on peut montrer que le saut du champ de polarisation à travers une interface est l'opposé d'une densité surfacique de charges de polarisation ρ_{sp} :

$$\boxed{\llbracket \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = -\rho_{sp}.} \quad (2.22)$$

Enfin, en combinant les équations (2.21), (2.22) et (2.13), on obtient la conditions au limite pour le saut de \mathbf{E} :

$$\llbracket \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_v + \rho_{sp}. \quad (2.23)$$

2.2.3 En résumé

Source	Champ modifié	Loi locale	Conditions aux limites
Charges libres ρ_v, ρ_s	\mathbf{D}	$\text{div } \mathbf{D} = \rho_v$	$\llbracket \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_s$
Charges liées ρ_p, ρ_{ps}	\mathbf{P}	$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_p$	$\llbracket \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = -\rho_{ps}$
Toute charge	\mathbf{E}	$\text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v + \rho_p$	$\llbracket \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_s + \rho_{ps}$

TAB. 2.1: Différentes formes du théorème de Gauss dans un milieu matériel

Pour caractériser l'état électrostatique d'un milieu, on a introduit trois champs (\mathbf{E} , \mathbf{P} et \mathbf{D}) et deux types de charges : les charges libres et les charges liées. L'existence de ces trois champs à un endroit donné d'un milieu est étroitement liée à la présence de charges. Les équation (2.11) et (2.23) montrent qu'un champ électrique \mathbf{E} est créé à la fois par des charges *libres* et des charges *liées*. Ensuite, la contribution de chacune des familles de charges se retrouve :

- d'une part dans le champ de polarisation \mathbf{P} , qui est créé par la présences de charges *liées* (Eqs. (2.10) et (2.22)), et
- d'autre part dans le champ de déplacement électrique \mathbf{D} , qui est créé par la présences de charges *libres* uniquement (Eqs. (2.14) et (2.21))

2.3 Isolants et conducteurs en électrostatique

2.3.1 Formulation du problème

Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell pour un milieu matériel donné sont, dans le cas général [45, p. 180] :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v, \quad (2.24a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.24b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.24c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.24d)$$

où \mathbf{B} est le champ (ou induction) magnétique et \mathbf{H} est l'excitation (ou champ) magnétique. En prenant la divergence de l'équation (2.24c) et en utilisant (2.24a), on retrouve l'équation de conservation des charges électriques :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (2.25)$$

L'hypothèse électrostatique [45, p. 181] stipule que les répartitions de charge et les densités de courant sont quasi-stationnaires, ce qui conduit à éliminer les dérivées temporelles des équations (2.24 a-d)¹. Dans ce cas, le couplage entre les quantités électriques \mathbf{E} et \mathbf{D} et magnétiques \mathbf{B} et \mathbf{H} n'a donc plus lieu et l'état électrostatique (les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{D}) ne dépend donc que :

- des équations locales (2.24a) et (2.24d), cette dernière devenant :

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}.} \quad (2.26)$$

- de la relation de comportement électrique du milieu (Eq. (2.17) ou (2.19)),
- des conditions aux limites (Eq. (2.21) et (2.30)).

Si besoin est, le vecteur polarisation \mathbf{P} peut être calculé par la relation (2.13), en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{D} après résolution du problème ci-dessus.

Potentiel électrique

L'équation (2.26) montre que le champ électrique \mathbf{E} est irrotationnel dans le cas électrostatique, ce qui signifie qu'il existe un potentiel électrique ϕ tel que :

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \phi.} \quad (2.27)$$

On peut remarquer que le potentiel ϕ est alors défini à une constante près, si bien qu'il est souvent commode d'utiliser la différence de potentiel entre deux points, qui s'obtient en intégrant (2.27) sur n'importe quel courbe reliant deux point A et B :

$$\boxed{\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_A - \phi_B.} \quad (2.28)$$

¹Dans le cas d'un problème de vibration avec des éléments piézoélectriques on peut remarquer que la célérité des ondes mécaniques est en ordre de grandeur 10^{-5} fois plus faible que celle des ondes électromagnétiques. Les constantes de temps mécaniques sont donc bien inférieures aux constantes de temps électromagnétiques, et les phénomènes quasi-stationnaires du point de vue des équations de Maxwell [99].

Une conséquence de (2.28) est que la circulation du champ électrique \mathbf{E} est nulle sur toute courbe fermée Γ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (2.29)$$

D'un point de vue qualitatif, on représente souvent le champ électrique à partir de ses lignes de champ (c'est à dire les courbes telles que \mathbf{E} est tangent en tout point). Le potentiel ϕ est représenté par des surfaces équipotentielles (surfaces telles que ϕ est uniforme). L'équation (2.28) montre alors que les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles et que si on se déplace dans le même sens que \mathbf{E} , le potentiel ϕ diminue.

Condition aux limites additionnelle

Lorsque les variables électriques inconnues sont \mathbf{D} et \mathbf{E} , en plus de la condition aux limites sur la composante normale du déplacement électrique (Eq. (2.21), issue du théorème de Gauss, Eq. (2.24a)), on doit aussi considérer celle qui découle de (2.26), qui porte sur la composante tangentielle de \mathbf{E} au voisinage d'une interface. Elle est obtenue en appliquant (2.29) à une courbe rectangulaire construite sur l'interface et s'écrit [45, p. 148] :

$$\boxed{[[\mathbf{E}_t]]_{\Sigma} = 0}, \quad (2.30)$$

où \mathbf{E}_t est la projection de \mathbf{E} sur l'interface ($\mathbf{E} = E_n \mathbf{n} + \mathbf{E}_t$). Ainsi, la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E} est toujours continue à l'interface entre deux milieux.

2.3.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

Grandeurs électriques dans un conducteur

Comme vu au début du paragraphe 2.2.2, les matériaux conducteurs contiennent des électrons libres capables de créer des courants électriques. Si le conducteur est parfait, c'est à dire que sa conductivité est très grande ($\sigma \rightarrow \infty$), comme la densité de courant doit avoir une valeur bornée, l'équation (2.7) montre que $\mathbf{E} = 0$ dans le conducteur ; *le potentiel est donc uniforme dans un conducteur* [45, p. 124, 196-197]. On arrive à la même conclusion lorsque le conducteur est en équilibre électrostatique, où dans ce cas il n'est le siège d'aucun courant électrique : $\mathbf{J} = \mathbf{0}$

Comme en général un conducteur n'est pas polarisable, on a $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, ce qui donne $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, d'après (2.13). Par suite, l'équation (2.24a) montre que $\rho_v = 0$, ce qui signifie qu'aucune charge volumique n'est présente dans un conducteur à l'équilibre électrostatique. Par suite, les charges libres contenues dans le conducteur sont toutes concentrées à la surface de celui-ci, ce qui correspond à une densité surfacique de charges libres non nulle ($\rho_s \neq 0$) à la surface du conducteur.

2.3.3 Condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures (ou électrodes) conductrices planes. On peut insérer une couche de matériau diélectrique de permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, ou laisser un vide. Sous réserve que les surfaces soient grandes devant l'épaisseur e de l'espace entre les électrodes, les effets de bord sont négligeables, et les champs sont tous de direction verticale $\mathbf{E} = E\mathbf{x}$, $\mathbf{D} = D\mathbf{x}$ et $\mathbf{P} = P\mathbf{x}$. En l'absence de perturbation extérieure, les champs \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{P} sont négligeables hors du condensateur. En appliquant le théorème de Gauss (Eqs. (2.14) ou Eqs. (2.15)), la relation de comportement (2.17) et les conditions aux limites (2.21) et (2.22), et en tenant compte du fait que les armatures sont conductrices, on trouve :

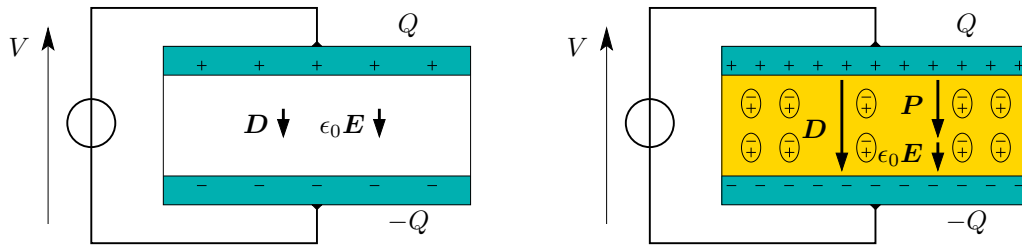


FIG. 2.4: Condensateurs d'armatures identiques, dans le vide (à g.) et avec milieu diélectrique (à droite), soumis à la même différence de potentiel.

- pour une différence de potentiel imposé V on obtient un champ électrique $E = -V/e$;
- le déplacement électrique est $D = \epsilon_0 E$ pour un condensateur sans diélectrique ;
- en présence de diélectrique, apparaît une polarisation $P = \chi_e \epsilon_0 E$; le déplacement devient $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$;
- sur l'électrode supérieure, la charge surfacique est l'opposé du flux de D : c'est donc $Q^+ = -A \epsilon_r \epsilon_0 (-V/e)$
- sur l'électrode inférieure, on trouve une charge opposée : $Q^- = A \epsilon_r \epsilon_0 (-V/e)$ où A est l'aire des armatures ;

Finalement, la capacité du condensateur est :

$$V = \frac{Q}{C}, \quad C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{e}, \quad (2.31)$$

On peut formuler les remarques suivantes :

- Le déplacement électrique est toujours dirigé des charges surfaciques *libres* positives vers les négatives. Le vecteur polarisation est quand à lui toujours dirigé dans le sens du déplacement des charges *liées*, c'est-à-dire des charges surfaciques *liées* négatives vers les positives.
- Les interfaces diélectrique/armatures concentrent des charges libres provenant du conducteurs et des charges liées provenant du diélectrique. À l'équilibre, la densité de charges libres est opposée et inférieure à celle des charges liées.
- On peut comparer le condensateur avec un diélectrique de permittivité ϵ au même condensateur avec du vide entre les armatures (Fig. 2.4). À potentiel imposé le champ électrique sera le même. La présence du matériau fait apparaître une polarisation, D augmente et la quantité de charges libres $Q = AD$ dans les armatures augmente de la même manière, pour équilibrer le déplacement de charges liées dans le diélectrique et ne pas changer la valeur de E . On doit amener plus de charges libres dans les armatures pour compenser le mouvement des charges liées dans l'isolant. L'effet de la permittivité $\epsilon_r > 1$ peut être vue de la manière suivante : il ajoute dans D le vecteur polarisation P à E , si bien que le déplacement électrique est augmenté de la valeur de P , ce qui permet d'accroître la quantité de charges stockable par le condensateur (à V donné) en déplaçant des charges liées dans le milieu. C'est pour cette raison que la capacité du condensateur est directement proportionnelle à ϵ_r .

2.4 Piézoélectricité

2.4.1 Historique

Les premières théories et observations de l'effet piézoélectrique direct sont dues aux travaux de Pierre et Jacques Curie présentés en 1880 [27] sur les cristaux présentant une structure asymétrique. Gabriel Lippman a montré en 1881 que la thermodynamique impliquait l'existence de l'effet indirect [54], mis en évidence de manière expérimentale par les frères Curie [27] l'année suivante. Les premières applications seront des appareils de mesure en laboratoire (balance de précision et générateur de charges utilisant l'effet piézoélectrique respectivement direct et indirect).

En 1910, Woldemar Voigt publie une étude rigoureuse des classes de cristaux asymétriques et de leur propriétés piézoélectriques [106].

Pendant la première guerre mondiale, l'invention du sonar va catalyser la recherche sur le sujet ; pendant la seconde guerre, la demande importante va contribuer à créer une industrie de la céramique piézoélectrique.

2.4.2 Principales catégories de matériaux piézoélectriques

Cristaux

Un certain nombre de cristaux présentent un comportement piézoélectrique ; on peut citer le quartz, la tourmaline, le sel de Seignette ², le sucre ... Ce comportement apparaît dans des cristaux présentant une structure asymétrique et des liaisons ioniques ; il peut être décrit en observant la figure (2.5), qui représente une vue de la structure du quartz³.

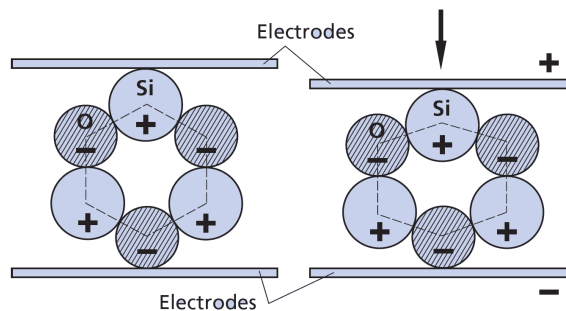


FIG. 2.5: Coupe d'une cellule élémentaire d'un cristal de quartz sous l'action d'un effort mécanique [87]

Effet direct Si on applique un effort, les contraintes mécaniques qui apparaissent dans le matériau provoquent des déformations de sa structure cristalline et ainsi des déplacements relatifs des charges électriques des ions. Ces déplacements correspondent à une polarisation électrique dans le matériau. L'état électrostatique (représenté par les champs électrique \mathbf{E} et déplacement électrique \mathbf{D} , reliés à la polarisation \mathbf{P} par l'équation (2.13)) du matériau est ainsi modifié par une action mécanique : c'est l'effet direct. Dans le cas du cristal de quartz de la figure 2.5, les centres de gravité des charges positives et négatives sont confondus en l'absence d'effort extérieur. Sous l'action de l'effort de compression, le centre des charges positives descend et celui des charges négatives remonte : un vecteur polarisation dirigé vers le bas apparaît alors.

²acide tartrique cristallisé, aussi appelé sel de Rochelle

³la structure du quartz est très complexe mais cette projection simplifie la représentation

Effet inverse Inversement, l'application d'un champ électrique extérieur crée des forces électrostatiques sur les charges électriques liées aux molécules du cristal, qui se déplacent les unes par rapport aux autres, créant ainsi des déformations dans le matériau. Ainsi, l'état mécanique du matériau est modifié par une action électrostatique : c'est l'effet piézoélectrique inverse.

Les cristaux naturellement disponibles étaient au départ la source exclusive de matériaux piézoélectriques ; cependant leur fragilité, la difficulté de les obtenir en grandes pièces et de les mettre en forme est un problème. De plus, le coefficient de couplage des cristaux naturels n'est pas très élevé. À l'heure actuelle, on développe des cristaux de synthèse comme l'orthophosphate de gallium $GaPO_3$, au coefficient de couplage très élevé ; les difficultés de fabrication et de mise en œuvre subsistent.

Céramiques

À la différence des cristaux dont la structure est figée, les céramiques piézoélectriques ont une structure qui peut varier ; leur polarisation peut être modifiée, après quoi ils présentent une polarisation rémanente⁴. Une famille importante de céramiques piézoélectriques est celle des PZT (Oxyde de plomb, zirconium et titane ou *Lead-Zirconate-Titanate* en anglais) qui possèdent d'excellentes propriétés piézoélectriques. Leur formule générale s'écrit $A^{2+} B^{4+} O_3^{2-}$ où A est un ion métallique divalent (comme le Plomb ou le Barium) et B est un ion métallique tétravalent (comme le titanium ou le zirconium)⁵. Une cellule élémentaire ou maille est représentée sur la figure 2.6.

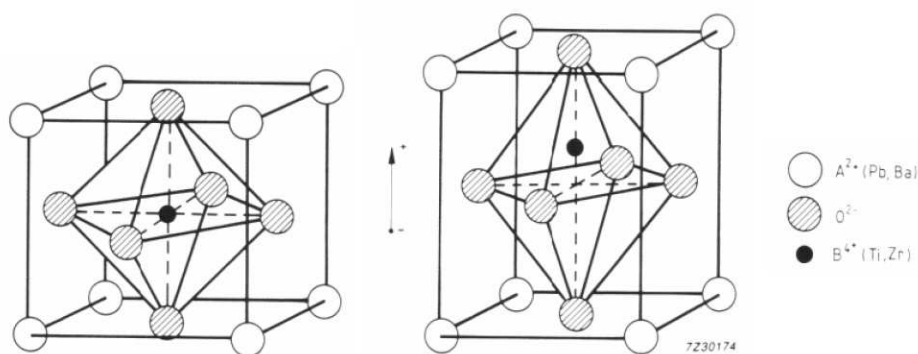


FIG. 2.6: Cellule élémentaire d'un PZT. Gauche : structure cubique non polarisée (au dessus de la température de Curie) ; droite : structure tétragonale polarisée (en dessous de la température de Curie) [64]

Structure initiale Au dessus d'une température appelée température de Curie (entre 200°C et 350°C pour les PZT [79]), ces cristaux ont une structure cristalline cubique (fig. 2.6 à gauche) avec les centres de gravité des charges positives et négatives coïncidents, si-bien qu'ils ne sont pas polarisés (ils sont dit paraélectriques) ; comme ils sont souvent obtenus par frittage à chaud, ils commencent leur existence sous cette forme. Au sein du matériau, on

⁴On les dit ferroélectriques, par analogie entre les propriétés de polarisation et la magnétisation des matériaux ferromagnétiques. Les céramiques étudiées ne contiennent en général pas de fer [64, 43]

⁵Les PZT sont en général formés de cristaux de zirconate de plomb $Pb^{2+} Zr^{4+} O_3^{2-}$ et de titanate de plomb $Pb^{2+} Ti^{4+} O_3^{2-}$, frittés et en proportions à peu près égales [43]. Le titanate de Barium $Ba^{2+} Ti^{4+} O_3^{2-}$ est une autre céramique piézoélectrique qui possède la même structure cristalline que les PZT (fig. 2.6).

peut distinguer plusieurs cristallites ou grains, où la structure est régulière. En dessous de la température de Curie, les cristaux ont une structure tétragonale (fig. 2.6 à droite) pour laquelle l'ion B^{4+} n'est plus au centre de la structure, si bien que chaque maille est le siège d'un dipôle électrostatique, dont la direction et le moment peuvent être modifiés par application d'un champ électrostatique (ils est alors ferroélectrique). Plusieurs mailles contigues ont en général la même polarisation et constituent un domaine ferroélectrique (ou domaine de Weiss) auquel est associé un vecteur polarisation \mathbf{P} particulier. Au sein d'un cristallite donné peuvent coexister plusieurs domaines de Weiss, avec une polarisation qui peut prendre 6 directions différentes (on pourrait tourner la maille fig. 2.6 à droite dans 6 directions différentes). Le matériau à ce stade est globalement isotrope et ne présente pas de couplage piézoélectrique (figure 2.8 (a)).

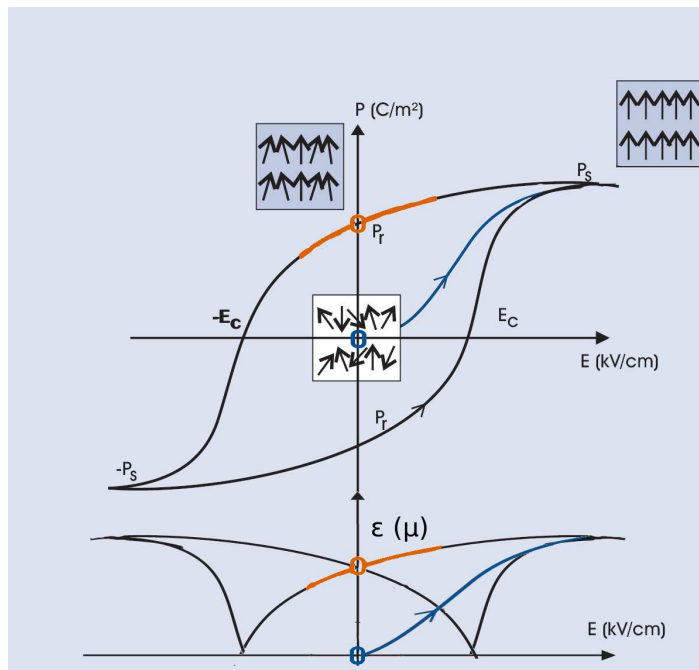


FIG. 2.7: Polarisation et déformation en fonction du champ électrique, adapté de [79]

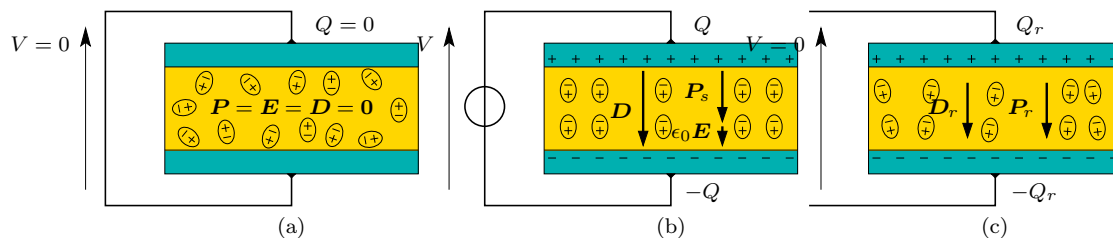


FIG. 2.8: Différents états d'une pastille piézoélectrique. (a) état non polarisé ($P = 0$); (b) état saturé ($P = P_s$); (c) pastille après polarisation ($P = P_r$)

Polarisation On munit l'élément piézoélectrique d'électrodes et on applique un champ électrique important. \mathbf{P} , \mathbf{D} et \mathbf{E} prennent des valeurs importantes (figure 2.7, tracé bleu);

au sein du cristal, les ions B^{4+} se déplacent dans les mailles en direction de l'électrode négative. La polarisation augmente rapidement et de façon non linéaire ; dans chaque cristallite, le domaine de Weiss qui correspond à une des 6 directions la plus proche du champ électrique croît, jusqu'à ce que chaque cristallite soit entièrement polarisé dans la même direction. Ensuite la polarisation cesse d'augmenter rapidement ; on dit que l'on est arrivé à saturation, et presque tous les dipôles sont alignés avec le champ électrique (figure 2.8 (b)). En même temps que ces modifications se produisent, les mailles se déforment, s'étirent légèrement dans la direction du champ et se rétrécissent orthogonalement ; au niveau macroscopique on observe que le matériau s'étire dans la direction d'application du champ et se rétrécit dans la direction orthogonale.

Polarisation rémanente Si maintenant on cesse d'appliquer un champ électrique et que l'on ramène la différence de potentiel entre les électrodes à 0 (figure 2.8 (c), figure 2.7 au point cerclé en orange) , les ions ne se réarrangent pas dans les mailles de manière uniforme ; la plupart d'entre eux restent orientés vers l'électrode négative. Il subsiste ainsi une polarisation rémanente P_r et un déplacement électrique D_r ; ainsi qu'une charge libre à la surface des électrodes, qui assure un champ électrique nul ; $Q_r = P_r A$ où A est la surface des électrodes. À partir de maintenant, les évolutions se font autour de cet état d'équilibre. Dans cet état le matériau présente aussi une déformation rémanente.

Effet piézoélectrique Pour de petites variations du champ électrique autour de cet état polarisé, on obtient une déformation du matériau (figure 2.7, partie du graphe en orange) ; le matériau au niveau macroscopique présente désormais un couplage piézoélectrique. Ce comportement peut s'expliquer par le fait que les mailles sont plus ou moins toutes alignées ; si on observe une maille seule (figure 2.9), sous l'application d'un champ électrique dans la direction de polarisation rémanente (souvent appelée direction 3), on observe un étirement dans l'axe de polarisation (ce qu'on appelle le couplage "33") et une contraction dans les directions orthogonales (couplage "31") (figure 2.9, au centre) . Ces deux couplages sont les plus fréquemment utilisés, car les mêmes électrodes sont utilisées pour la polarisation et pour utiliser l'effet piézoélectrique. Si par contre on parvient à appliquer un champ orthogonal à la direction de polarisation rémanente, ce qui requiert de nouvelles électrodes et éventuellement d'enlever les anciennes, on obtient un cisaillement du matériau (couplage "51" figure 2.9, au centre). On peut remarquer que si l'on dépasse certaines valeurs du champ électrique on risque de dépolariiser le matériau, en changeant de branche du cycle de la figure 2.7.

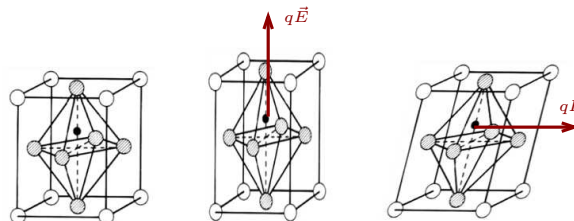


FIG. 2.9: Efforts sur l'ion positif et déformations de la maille pour un champ nul, parallèle ou orthogonal à la polarisation rémanente

Propriétés Les céramiques piézoélectriques sont produites et utilisées en volume. Du point de vue de la fabrication, l'obtention par frittage permet une variété de formes et de tailles bien plus importante que pour les cristaux. Pour obtenir un couplage important, il est préférable de maximiser le champ en tout point lors de la polarisation ; pour ce faire, une épaisseur constante entre les électrodes est préférable. Les éléments piézoélectriques sont donc très souvent des plaquettes droites ; on trouve aussi des portions de coque sphérique [87].

Les céramiques présentent des coupages élevés, mais sont fragiles. Presque tous les paramètres piézoélectriques sont sensibles à la température [79], et peuvent évoluer au cours du temps. Cependant, il est possible de les repolariser périodiquement afin de compenser ce vieillissement.

Polymère PVDF

Le polyfluorure de vinylidène (Polyvinylidene fluoride, PVDF) est un polymère thermoplastique très résistant et léger ; il peut de plus présenter des propriétés piézoélectriques. Le motif élémentaire (monomère) qui constitue le matériau est répété suivant la formule $-(CH_2CF_2)_n-$, avec les atomes de fluor et d'hydrogène constituant un dipôle électrostatique (figure 2.10). Sur une même chaîne les directions de ces dipôles sont variées et aucune polarisation n'apparaît globalement. De plus, le matériau est constitué de nombreuses chaînes moléculaires entremêlées ; il est difficile d'obtenir une polarisation rémanente dans cette configuration.

Afin d'avoir une polarisation rémanente il est nécessaire d'aligner les chaînes de molécules ; pour ce faire le matériau est étiré à chaud, puis muni d'électrodes (souvent un film mince de métal) ; il est alors possible d'appliquer un champ électrique intense et d'aligner chaque dipôle avec le champ ; on obtient une polarisation rémanente du matériau. Cela a aussi pour effet de faire apparaître un effet piézoélectrique [91].

Par rapport aux céramiques et cristaux, le PVDF est bien plus souple, léger, et supporte des déformations plus importantes. L'obtention du matériau sous forme de film souple, peu cher et facile à mettre en œuvre lui donne de bonnes propriétés en tant que capteur. Par contre le couplage piézoélectrique est plus faible que celui observé dans les autres matériaux. Sa raideur réduite rend difficile l'adaptation d'impédance mécanique avec des structures rigides.

Composites piézoélectriques

Afin de s'affranchir d'un certain nombre de problèmes inhérents aux céramiques (fragilité, raideur excessive) de nombreux travaux visent actuellement à associer des fibres en céramique piézoélectrique (la qualité de fabrication - et la durée de vie - de la céramique est bien meilleure sous cette forme) à un réseau d'électrodes appropriées (par exemple, orthogonales aux fibres et alternées, fig. 2.11). Le tout est noyé dans une matrice époxy qui protège et assure la tenue mécanique de l'ensemble. En choisissant bien la forme des électrodes on peut assurer une polarisation du matériau permettant un bon couplage piézoélectrique ; l'idée est d'obtenir une polarisation dans la direction des fibres (et de la contrainte que subira le matériau), et d'exploiter ainsi le couplage "33" (fig. 2.9).

Le composite obtenu ainsi est souple et peut être facilement associé à des surfaces courbes. De nombreux travaux sont consacrés à ces développements [107, 93, 65]. La modélisation de ces matériaux fait souvent appel à une première phase d'homogénéisation de l'élément composite, pour obtenir des équations similaires à un élément piézoélectrique monolithique.

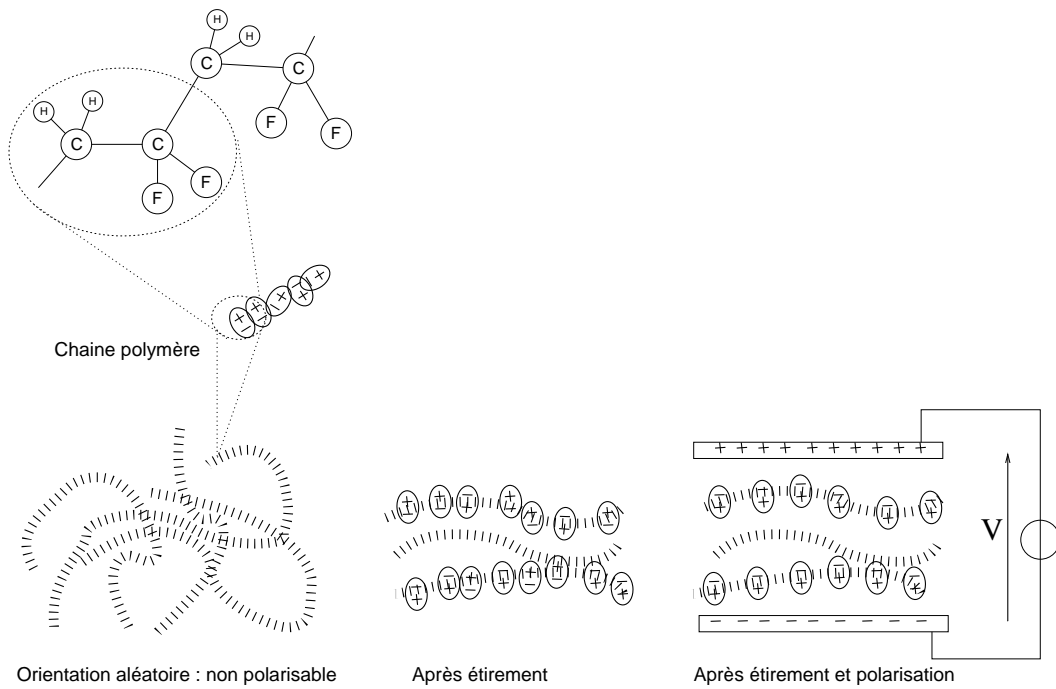


FIG. 2.10: Structure du PVDF et polarisation

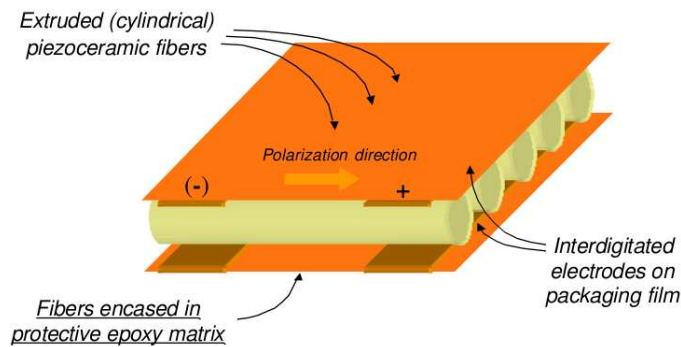


FIG. 2.11: Composite piézoélectrique à électrode croisée [107]. Le champ électrique est dans la direction de contraction et d'étirement des fibres.

2.4.3 Spécificités

Les éléments piézoélectriques sont utilisés pour des applications de capteur où l'on utilise l'effet piézoélectrique direct ou d'actionneur en utilisant l'effet piézoélectrique inverse. Ils ont des spécificités dans ce domaine qui les font préférer à d'autres éléments ou systèmes à couplage électromécanique (par exemple, actionneurs électrodynamiques de type bobine-aimant, alliages à mémoire de forme, dispositifs électrostrictifs ...) :

- Ce sont des actionneurs / capteurs solides travaillant directement en déformation, il n'y a pas de mécanisme pouvant s'user ou frotter. Cela est un avantage pour les applications dans des milieux hostiles. De plus, comme il faut les placer aux maximums de déformation, l'ajout de masse correspondant se fait à un endroit où les vitesses sont faibles et est donc peu pénalisant.

- Ils présentent une bonne linéarité et une réponse quasi-instantanée. Des applications haute fréquence sont ainsi possibles.
- Le phénomène étant réversible, le rendement est élevé.
- La puissance massique admissible est importante, sous réserve de travailler en haute fréquence.
- Les céramiques sont très rigides (impédance mécanique élevée) et les tensions apparaissant sont élevées pour de faibles déformations (sensibilité).

Au nombre de leurs défauts, on peut citer un prix de revient pour l'instant assez élevé, un vieillissement mal connu, et aussi le fait que les hautes tensions et faibles charges en jeu ne sont pas toujours adaptée au couplage avec des circuits électroniques (en particulier il faut souvent un amplificateur haute tension pour actionner un élément piézoélectrique). Enfin, travaillant en déformation, ils ne permettent que de faibles déplacements.

2.4.4 Applications

On trouve d'ores et déjà des éléments piézoélectriques dans des bien des applications industrielles :

- Dans des capteurs de pression, d'effort, ou d'accélération où l'effet direct est utilisé : la linéarité et la sensibilité (tensions détectables même pour de faibles efforts) sont mises à profit.
- Des émetteurs ultrasonores utilisent l'effet indirect ; en particulier on peut citer l'utilisation comme émetteur dans les systèmes sonar, première application de l'effet indirect proposée par Langevin en 1915. Des éléments piézoélectriques sont également utilisés pour détecter les ondes sonores dans l'eau, où leur impédance mécanique et leur sensibilité fait de très bons hydrophones. On peut aussi utiliser ce type de systèmes en imagerie médicale (échographie). Ces systèmes sont aussi utilisés dans l'air et maintenant répandus jusque dans les pare-chocs de certaines voitures (improprement appelés radars de recul).
- Le rendement et la puissance des émetteurs peuvent être très élevés si on les utilise à leur résonance mécanique ; on le trouve dans des applications comme le nettoyage à ultrasons (les ondes de pression émises dans un liquide provoquent de la cavitation à la surface de la pièce à nettoyer), la soudure par ultrasons (où les vibrations à l'interface entre deux pièces créent de la chaleur), la destruction de calculs rénaux et tumeurs cancéreuses (où on focalise des ultrasons sur la partie à détruire), le détartrage des dents (où l'outil du dentiste vient gratter la surface des dents) ...
- On peut aussi utiliser des éléments piézoélectriques comme haut-parleurs d'aigu (tweeters à pavillon avec élément céramique) ou large bande (où la membrane du haut-parleur est un film PVDF) ; ils ont un meilleur rendement que des haut-parleurs électrodynamiques mais une qualité souvent réduite, du fait de la présence de résonances mécaniques.
- On utilise des éléments piézoélectriques dans des circuits d'horloge (montre à quartz) où les oscillations mécaniques à haute fréquence d'un petit élément piézoélectrique (souvent appelé quartz) sont couplées à un circuit qui compte les oscillations ; l'oscillateur ainsi constitué est très stable et constitue l'horloge de nombreux circuits électroniques.
- On peut également réaliser des gyroscopes piézoélectriques ; un élément piézoélectrique est mis en vibration par effet indirect ; puis l'effet direct est utilisé pour mesurer les variations de ces vibrations liées aux effets de Coriolis.

- Dans certains transformateurs, on utilise les vibrations d’un bloc de matériau piézoélectrique pour abaisser une tension ; le bloc est mis en vibration par le circuit primaire et l’énergie des vibrations est récupérée pour alimenter le circuit secondaire, avec une tension différente.
- Dans les briquets dits “électroniques”, les hautes tensions générées par un choc ou une pression importante sur une céramique permettent d’obtenir une étincelle.
- On utilise des éléments piézoélectriques pour des applications de micro-positionnement dans des microscopes, de contrôle de déformation dans des optiques adaptatives, ou de contrôle de vibrations.
- Dans des moteurs piézoélectriques, ou moteurs à ultrasons, on utilise un éléments piézoélectrique pour produire des ondes de surface dans une pièce métallique au contact d’une autre ; suivant la nature des ondes les points de contact vont se déplacer et provoquer le mouvement relatif des deux pièces. Ce type de moteur est utilisé dans certains dispositifs auto-focus d’appareils photo ; ses avantages sont d’être bloqué à l’arrêt et d’avoir la forme d’un anneau monté autour de l’objectif.

D’autres applications font actuellement l’objet de développements :

- On envisage de récupérer l’énergie de vibrations mécaniques sous forme électrique : on parle de *piezoelectric energy harvesting* [53, 51, 5].
- La miniaturisation croissante fait que les procédés de fabrication permettent d’intégrer des éléments piézoélectriques directement sur des circuits intégrés ; puis les échelles ont diminué jusqu’à ce que l’on parle de MEMS et NEMS (*Micro et Nano ElectroMechanical Systems*) ; ils sont toujours utilisés comme capteurs ou actionneurs, mais l’application finale peut différer complètement ; on peut ainsi créer de nouveaux capteurs physiques ou chimiques [67, 96], ou encore des filtres électroniques.
- Un effort est en cours pour réduire les coûts des capteurs piézoélectriques, en utilisant des films PVDF par exemple, et pour les adapter à des cas spécifiques : écrans ou capteurs tactiles par exemple ; en imprimant des électrodes adaptées on peut réaliser différentes fonctions [81].

2.5 Piézoélectricité linéaire

On va maintenant écrire la loi de comportement ensuite utilisée dans ce document. Les grandeurs qui entrent en jeu sont :

- le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, un tenseur d’ordre 2, de composante σ_{ij} , exprimées en Pa ;
- le champ des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, un tenseur d’ordre 2, de composante ε_{kl} , sans dimension ;
- le champ déplacement électrique \boldsymbol{D} , de composantes D_i , exprimées en C/m² et
- le champ électrique \boldsymbol{E} , de composantes E_k , exprimé en V/m.

où i, j, k, l peuvent correspondre aux trois directions x, y, z .

2.5.1 Loi de comportement

Lorsque les grandeurs électriques (\boldsymbol{E} et \boldsymbol{D}) et mécaniques ($\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$) sont d’intensité modérée, on fait l’approximation de relations linéaires entre ces grandeurs. À partir du premier

principe de la thermodynamique, qui stipule l'existence d'une énergie interne U et la conservation de l'énergie, on montre que nécessairement, à température constante⁶[54, 99] :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}, \quad (2.32)$$

avec l'enthalpie définie par

$$H = U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = H(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}), \quad (2.33)$$

qui dépend des variables $\boldsymbol{\varepsilon}$ et \mathbf{E} . Comme on ne s'intéresse qu'à une théorie linéaire, on écrit H sous la forme :

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^E E_i E_j. \quad (2.34)$$

On obtient alors la relation de comportement suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, & (2.35a) \\ D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}^E E_k. & (2.35b) \end{cases}$$

Les constantes qui apparaissent dans ces équations sont :

- c_{ijkl}^E : les constantes de raideur à champ électrique constant, exprimé en Pa,
- e_{kij} : les constantes piézoélectriques, exprimées en N/m/V,
- ε_{ik}^E : les permittivités ou constantes diélectriques, à déformation nulle, exprimées en F/m.

Elles vérifient les symétries suivantes [99] :

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad e_{ijk} = e_{ikj}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (2.36)$$

Ces relations correspondent à une linéarisation du comportement des matériau piézoélectrique autour de leur état de repos. Dans le cas des cristaux piézoélectriques évoqués au paragraphe 2.4.2, qui ne sont pas polarisés à l'état de repos, c'est une linéarisation autour de l'état $E = D = P = 0$. Dans le cas des céramiques piézoélectriques décrites au paragraphe 2.4.2, c'est une linéarisation autour de l'état de polarisation rémanente. D'un point de vue graphique, les courbes de la figure 2.7 donnent une interprétation graphique de la valeur de certains ε_{ik} et e_{ijk} , par la pente de la tangente aux courbes, autour du point circé en orange. Dans ce dernier cas, les champs \mathbf{E} et \mathbf{D} des relations (2.35) correspondent à des petites variations autour des valeurs à l'équilibre $E = 0, P = D = P_r$. D'autre part, il est intéressant de remarquer qu'une pastille piezoélectrique au repos a ses électrodes qui contiennent une quantité de charge non-nulle : la charge libre calculée à partir du \mathbf{D} de (2.35) est là encore une variation autour de $Q = Q_r$ (Fig. 2.8(c)).

Indices contractés et lois alternatives

Pour pouvoir écrire des relations avec des matrices à deux indices, et en tenant compte des symétries des Eqs. (2.36), il est commode d'utiliser des notations avec indices contractés appelées aussi notations de Voigt-Kelvin [82], résumées dans le tableau 2.2, de sorte que toutes les grandeurs des relations (2.35) deviennent des vecteurs ou des matrices, que l'on note : $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_i)^\top$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)^\top$ etc. La relation de comportement (2.35) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^E & -\mathbf{e}^\top \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\varepsilon}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

De plus, selon les variables indépendantes utilisées, on peut écrire quatre relations de comportement équivalentes, résumées dans le tableau 2.3 [41, 101].

⁶Des relations analogues sont obtenus non plus en conditions isothermes mais en condition adiabatiques, la distinction étant rarement mentionnée [41, 101]

	Contraintes						Déformations					
Tensorielles	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	σ_{yz}	σ_{xz}	σ_{xy}	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{zz}	$2\varepsilon_{yz}$	$2\varepsilon_{xz}$	$2\varepsilon_{xy}$
Voigt	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6

TAB. 2.2: Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt

Forme	Variables indep.	Variables	Relation de comportement
Forme “en d ”	$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$	Intensives	$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \mathbf{E} \end{cases}$
Forme “en e ”	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E})$	Mélangées	$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^\top \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon \mathbf{E} \end{cases}$
Forme “en g ”	$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$	Mélangées	$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^D \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}^\top \mathbf{D} \\ \mathbf{E} = -\mathbf{g} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}^\sigma \mathbf{D} \end{cases}$
Forme “en h ”	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$	Extensives	$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^D \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{h}^\top \mathbf{D} \\ \mathbf{E} = -\mathbf{h} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \mathbf{D} \end{cases}$

TAB. 2.3: Différentes formes de la loi de comportement piézoélectrique linéaire [2, 101]

Élastiques	Piézoélectriques	Diélectriques
$\mathbf{s}^D = \mathbf{s}^E - \mathbf{d}^\top \mathbf{g}$	$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \mathbf{g}$	$\boldsymbol{\beta}^\sigma = (\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^{-1}$
$\mathbf{c}^E = (\mathbf{s}^E)^{-1}$	$\mathbf{e} = \mathbf{d} \mathbf{c}^E$	$\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma - \mathbf{e} \mathbf{d}^\top$
$\mathbf{c}^D = \mathbf{c}^E + \mathbf{e}^\top \mathbf{h}$	$\mathbf{h} = \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \mathbf{e}$	$\boldsymbol{\beta}^\varepsilon = \boldsymbol{\beta}^\sigma + \mathbf{h} \mathbf{g}^\top$
$\mathbf{c}^D = (\mathbf{s}^D)^{-1}$	$\mathbf{h} = \mathbf{g} \mathbf{c}^D$	$\boldsymbol{\beta}^\varepsilon = (\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon)^{-1}$

TAB. 2.4: Relation de passage entre les constantes élastique, piézoélectrique et diélectriques [2]

Cas d'une céramique piézoélectrique

Material Data

Material type		PIC 151	PIC 255	PIC 155	PIC 153	PIC 152
Parameter						
Physical and dielectric properties						
Density	ρ (g/cm ³)	7.80	7.80	7.80	7.60	7.70
Curie temperature	T_c (°C)	250	350	345	185	340
Permittivity	in the polarization direction $\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	2400	1750	1450	4200	1350
	perpendicular to the polarity $\epsilon \quad \epsilon$	1980	1650	1400		
Dielectric loss factor	$\tan\delta$	20	20	20	30	15
Electromechanical properties						
Coupling factors	k_D	0.62	0.62	0.62	0.62	0.48
	k_t	0.53	0.47	0.48		
	k_{31}	0.38	0.35	0.35		
	k_{33}	0.69	0.69	0.69		0.58
	k_{15}		0.66			
Piezoelectric charge constants	d_{31}	-210	-180	-165		
	d_{33} (10 ⁻¹² C/N)	500	400	360	600	300
	d_{15}		550			
Piezoelectric voltage constants	g_{31} (10 ³ Vm/N)	-11.5	-11.3	-12.9		
	g_{33}	22	25	27	16	25
Acousto-mechanical properties						
Frequency constants	N_0	1950	2000	1960	1960	2250
	N_1	1500	1420	1500		
	N_3	1750		1780		
	N	1950	2000	1990	1960	1920
Elastic constants (compliance)	S_{11}^E (10 ⁻¹² m ² /N)	15.0	16.1	15.6		
	S_{33}^E	19.0	20.7	19.7		
Elastic constants (stiffness)	C_{33}^D (10 ¹⁰ N/m ²)	10.0		11.1		
Mechanical quality factor	Q_m	100	80	80	50	100
Temperature stability						
Temperature coefficient of ϵ_{33} (in the range -20°C up to +125°C)	$TK \epsilon_{33}$ (x10 ⁻³ /K)	6	4	6	5	2
Aging stability (relative change of the parameter per decade in %)						
Relative dielectric constant	C		-1.0	-2.0		
Coupling factor	C_K (%)		-1.0	-2.0		

Further information:

The following values are valid approximations for all PZT materials from PI Ceramic.

Specific heat capacity	HC = approx. 350 J / kg K
Specific thermal conductivity	TC = approx. 1.1 W / m K
Poisson's ratio	ν = approx. 0.34
Coefficient of thermal expansion	α_s = approx. -4 to -6 x 10 ⁻⁶ / K (in the polarization direction, shorted) α_{\perp} = approx. 4 to 8 x 10 ⁻⁶ / K \perp to the polarization direction, shorted)
Static compressive strength	larger than 600 Mpa

TAB. 2.5: Extrait du catalogue Polytec PI [79]

Une céramique piézoélectrique, polarisée dans une direction donnée, est en général considérée comme un matériau isotrope transverse, avec le plan d'isotropie orthogonal à la direction de polarisation. La forme en e de la relation de comportement, dans le cas où la direction de polarisation est $z \equiv 3$, s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \hline D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & | & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & | & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & | & \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & | & 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \hline E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

La polarisation explique les composantes nulles de l'opérateur e : seule la composante suivant z ($E_3 = E_z$) du champ électrique crée des contraintes normales σ_{ii} . Inversement, seule la composante suivant z ($D_3 = D_z$) du déplacement électrique est modifiée par des déformations normales ε_{ii} . Ce matériau est alors caractérisé par 10 constantes indépendantes⁷ (5 élastiques, 3 piézoélectriques et 2 diélectriques). Le tableau 2.5 précise la valeur des constantes pour quelques matériaux piézoélectrique du commerce.

Lois de comportement réduites pour les poutres

Si on s'intéresse au comportement électromécanique d'un solide piézoélectrique de la forme d'une poutre, on est conduit à réduire la relation de comportement pour ne faire apparaître que les grandeurs mécaniques dans l'axe de la poutre et les grandeurs électriques dans la direction de polarisation.

On considère une poutre dont l'axe principal est la direction 1. Pour fixer les idées, on s'intéresse à un couplage 31, qui est observé lorsque le matériau est polarisé suivant la direction 3 et qu'on considère les couplage entre les grandeurs mécaniques axiales (σ_1 et ε_1) et les grandeurs électriques transverses (E_3 et D_3). Pour réduire la loi de comportement tridimensionnelle, on peut considérer les deux cas suivants :

Hypothèses "poutre" Dans le cas purement élastique, ces hypothèses sont bien adaptées à une poutre dont les dimensions de la section suivant 2 et 3 sont comparables. Il s'agit de supposer que les contraintes sont nulles dans les directions 2 et 3 :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad (2.38)$$

Dans ce cas, la loi de comportement tridimensionnelle "en d " se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^E \sigma_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} \sigma_1 + \epsilon_{33}^E E_3 \end{cases}. \quad (2.39)$$

Celle "en e " (Eq. (2.38)) s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{e}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\epsilon}_{33}^E E_3 \end{cases} \quad (2.40)$$

⁷En effet, l'isotropie implique la relation $C_{66}^E = (C_{11}^E - C_{12}^E)/2$.

où \bar{c}_{11}^E , \bar{e}_{31} et $\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon$ sont les constantes matériaux modifiées en tenant compte de (2.38), définies par :

$$\bar{c}_{11}^E = Y_1^E = c_{11} - \frac{c_{12}^2 c_{33} + c_{13}^2 c_{11} - 2c_{12}c_{13}^2}{\Delta}, \quad (2.41a)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}c_{13}}{\Delta}e_{31} - \frac{c_{13}c_{11} - c_{12}c_{13}}{\Delta}e_{33}, \quad (2.41b)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon = \epsilon_{33}^\epsilon + \frac{c_{33}e_{31}^2 + c_{11}e_{33}^2 - 2c_{13}e_{31}e_{33}}{\Delta}, \quad (2.41c)$$

avec

$$\Delta = c_{11}c_{33} - c_{13}^2. \quad (2.42)$$

et Y_1 le module d'Young du matériau dans le plan 12. On précise que tous les c_{ij} sont à champ électrique constant - ou "en court circuit".

On obtient des relation analogues en réduisant de la même manière les lois tridimensionnelles "en g " et "en h ". Le tableau 2.6 regroupe les quatre lois réduite possible. On peut remarquer que celles "en d " et "en g " font apparaître les coefficients tridimensionnels alors que celles "en e " et "en h " ont des constantes modifiées.

Enfin, en identifiant deux à deux les lois du tableau 2.6, on obtient les relations de passage suivantes :

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad \bar{c}_{11}^D = \frac{1}{s_{11}^D}, \quad \epsilon_{33}^\sigma = \frac{1}{\beta_{33}^\sigma}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^\epsilon = \frac{1}{\beta_{33}^\epsilon}, \quad (2.43a)$$

$$s_{11}^D = s_{11}^E - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^\sigma}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^\epsilon = \epsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}, \quad (2.43b)$$

$$\bar{e}_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \quad g_{31} = \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^\sigma}, \quad \bar{h}_{31} = \frac{g_{31}}{s_{11}^D}. \quad (2.43c)$$

On montre ainsi que la raideur en court-circuit est toujours plus faible que celle en circuit ouvert et que la permittivité à déplacement bloqué est plus faible que celle à contrainte nulle. Le tableau 2.7 donne quelques valeurs numériques dans le cas du matériau PIC151.

Hypothèses "plaque" Dans le cas purement élastique, ces hypothèses sont bien adaptées à une poutre de section rectangulaire, avec l'épaisseur (suivant 3) petite devant sa largeur (suivant 2). On suppose ici que les contraintes sont nulles dans la direction transverse 3 et que les déplacements sont bloqués dans la direction 2 et 3 :

$$\epsilon_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0. \quad (2.44)$$

Dans ce cas, la loi de comportement tridimensionnelle "en d " se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \bar{s}_{11}^E \sigma_1 + \bar{d}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{d}_{31} \sigma_1 + \bar{\epsilon}_{33}^\sigma E_3 \end{cases} \quad (2.45)$$

où \bar{s}_{11}^E , \bar{d}_{31} et $\bar{\epsilon}_{33}^\sigma$ sont les constantes matériaux modifiées en tenant compte de (2.44), définies par :

$$\bar{s}_{11}^E = s_{11}^E (1 - \nu_{12}^2), \quad \bar{d}_{31} = d_{31} (1 + \nu_{12}), \quad \bar{\epsilon}_{33}^\sigma = \epsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}. \quad (2.46)$$

La relation de comportement “en e ” se réduit à l'équation (2.40) avec les constantes réduites suivantes :

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{\bar{s}_{11}^E} = \frac{1}{s_{11}^E(1 - \nu_{12}^2)}, \quad \bar{e}_{31} = \frac{\bar{d}_{31}}{\bar{s}_{11}^E} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1 - \nu_{12})}, \quad (2.47)$$

$$\bar{e}_{33} = \bar{e}_{33}^\sigma - \frac{\bar{d}_{31}^2}{\bar{s}_{11}^E} = \epsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \frac{2}{1 - \nu_{12}}. \quad (2.48)$$

2.6 Modélisation d'un milieu piézoélectrique

On considère un élément piézoélectrique occupant un domaine Ω_p au repos. Cet élément subit un déplacement imposé u_i^d ⁸ sur une partie Γ_u de sa frontière et une densité d'efforts t_i^d sur la partie complémentaire Γ_t de sa frontière. Les conditions aux limites électriques sont un potentiel électrique ψ^d et une densité surfacique de charge libres q^d sur des domaines Γ_ψ et Γ_q , qui constituent une partition de la frontière $\partial\Omega_p$.

Les tenseurs de déformation linéarisée et de contrainte sont notés avec leurs composantes ε_{ij} et σ_{ij} ; les vecteurs de champ électrique et champ de déplacement électrique sont notés E_i et D_i . n_i est le vecteur normal unitaire sortant de Ω_p , ρ la masse volumique locale et t le temps.

Les équations du problème s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} + f_i^d = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (2.49a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^d \quad \text{sur } \Gamma_t, \quad (2.49b)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u; \quad (2.49c)$$

pour la partie mécanique; et pour la partie électrique :

$$D_{i,i} = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (2.50a)$$

$$D_i n_i = -q^d \quad \text{sur } \Gamma_q, \quad (2.50b)$$

$$\psi = \psi^d \quad \text{sur } \Gamma_\psi, \quad (2.50c)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions initiales.

L'équation (2.49a) est l'équation fondamentale de la dynamique; Les équations (2.49b) et (2.49c) sont les conditions aux limites imposées; l'équation (2.50a) est la loi de Gauss; les équations (2.50b) et (2.50c) sont les conditions aux limites (§2.3, [45]).

L'équation (2.50b) n'est valide que lorsque le déplacement électrique autour de Ω_p est négligeable par rapport à celui régnant à l'intérieur. Il faudrait sinon prendre en compte le saut de valeur à l'interface dans (2.50b). De plus, aucune charge volumique libre n'est présente dans Ω_p , car c'est soit un isolant (cas le plus fréquent, sans charge libre), soit un conducteur où les charges libres sont toujours concentrées aux bords sous forme de densité surfacique (§2.3.2).

On utilise la relation de comportement (2.35) pour rendre compte des effets piézoélectriques directs et indirects [2, 99] :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (2.51)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k. \quad (2.52)$$

⁸Pour rappel, les indices i, j, k, l repèrent les composantes des vecteurs et tenseurs et l'on fait usage de la convention d'Einstein.

On utilise les relations de gradient suivantes pour identifier les relations entre le déplacement et les déformations et le potentiel et champ électrique :

$$\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (2.53)$$

$$E_k(\psi) = -\psi_{,k}. \quad (2.54)$$

L'équation (2.54) est l'approximation électrostatique, utilisée pour les raisons développées au chapitre 2.3 [99].

2.7 Coefficients de couplage électromécaniques

2.7.1 Coefficients de couplage matériau

Des coefficients de couplage électromécanique sont généralement utilisés pour caractériser l'efficacité d'un matériau piézoélectrique. Ils caractérisent la quantité d'énergie mécanique qu'un matériau est capable de transformer en énergie électrique et inversement. Plusieurs définitions ont été proposées [41]. Nous proposons d'en retenir deux, expliquées ci-après.

La première, proposée dans [59], permet de définir un coefficient de couplage k par les deux relations équivalentes suivantes :

$$k^2 = \frac{\text{Énergie électrique stockée}}{\text{Énergie mécanique fournie}} = \frac{\text{Énergie mécanique stockée}}{\text{Énergie électrique fournie}}. \quad (2.55)$$

La seconde définition consiste à simplement définir k à partir d'une des relations piézoélectriques du tableau 2.3 réduite à une dimension seulement, de la manière suivante :

$$k^2 = \frac{\text{constante piézoélectrique}^2}{\text{constante élastique} \cdot \text{constante diélectrique}}. \quad (2.56)$$

Un exemple de cette seconde définition est la définition usuelle de k_{31} à partir de la loi de comportement "en d " réduite (2.39) :

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma}. \quad (2.57)$$

On peut alors obtenir les trois autres coefficients suivants, à partir des lois "en e ", "en g " et "en h " (Tab. 2.3) réduites au seul couplage $(E_3, D_3) \leftrightarrow (\varepsilon_1, \sigma_1)$:

$$k_{31}^{(e)2} = \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^\varepsilon}, \quad k_{31}^{(g)2} = \frac{g_{31}^2}{s_{11}^D \beta_{33}^\sigma}, \quad k_{31}^{(h)2} = \frac{h_{31}^2}{c_{11}^D \beta_{33}^\varepsilon}. \quad (2.58)$$

Ces coefficients ne sont pas égaux, comme on va le voir ci-après.

Barreau cylindrique en traction-compression

On a vu au paragraphe précédent que plusieurs coefficients de couplages peuvent être définis. On va voir que en fait tel ou tel coefficient apparaît naturellement, selon le système électromécanique étudié. Pour illustrer cela et pour donner une interprétation aux différents coefficients, le présent paragraphe propose de relier les deux définitions (2.55) et (2.56) en considérant le problème particulier d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique, de section rectangulaire, chargé en traction compression suivant son axe 1, muni d'électrodes

Variabiles	Constantes	Lois réduites	Coefficients de couplage
Intensives	3D	$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^E \sigma_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} \sigma_1 + \varepsilon_{33}^{\sigma} E_3 \end{cases}$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^{\sigma}} = \frac{\bar{h}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^D \bar{\beta}_{33}^{\varepsilon}}$
Extensives	Modifiées	$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1 - \bar{h}_{31} D_3 \\ E_3 = -\bar{h}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\beta}_{33}^{\varepsilon} D_3 \end{cases}$	
Mélangées	Modifiées	$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{e}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}_{33}^{\varepsilon} E_3 \end{cases}$	$\tilde{k}_{31}^2 = \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^E \bar{\varepsilon}_{33}^{\varepsilon}} = \frac{g_{31}^2}{s_{11}^D \beta_{33}^{\sigma}}$
Mélangées	3D	$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^D \sigma_1 + g_{31} D_3 \\ E_3 = -g_{31} \sigma_1 + \beta_{33}^{\sigma} D_3 \end{cases}$	

TAB. 2.6: Différentes lois de comportement réduites éventuellement modifiées par les hypothèses poutre ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) et coefficients de couplages associés

Paramètre	Symbole	Unités	Valeurs numériques
Souplesse en CC	s_{11}^E	[10^{-12} Pa $^{-1}$]	15.0
Raideur en CC (Module d'Young)	$\bar{c}_{11}^E = Y_{11}^E$	[GPa]	66.7
Souplesse en CO	s_{11}^D	[10^{-12} Pa $^{-1}$]	12.9
Raideur en CO	$\bar{c}_{11}^D = Y_{11}^D$	[GPa]	77.4
Permittivité à contrainte constante	$\varepsilon_{33}^{\sigma}$		2400 ϵ_0
Permittivité à déformation constante	$\bar{\varepsilon}_{33}^{\varepsilon}$		2068 ϵ_0
Constante piézoélectrique "d"	d_{31}	[10^{-12} C/N]	-210
Constante piézoélectrique "e"	\bar{e}_{31}	[C/m 2]	-14
Coef. de couplage	k_{31}	[Adim.]	0.372
Coef. de couplage	\tilde{k}_{31}	[Adim.]	0.401

TAB. 2.7: Constantes matériaux du PIC151, obtenues à partir du tableau 2.5 et des formules (2.41) et (2.66), en hypothèses "poutre".

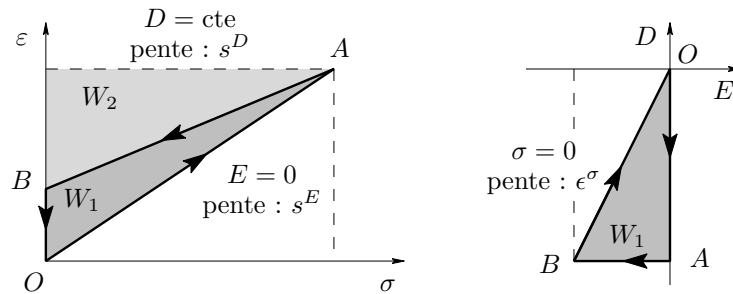


FIG. 2.12: Cycle de chargement à effort imposé

dans la direction 3 et soumis à des cycles de transformation imposés. C'est de cette manière que la norme définit les coefficients de couplages [2].

Pour appliquer la définition (2.55), on rappelle l'expression des travaux volumiques mécaniques et électrique dans le matériau, entre deux états 1 et 2 :

$$W_m = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad W_e = \int_{D_1}^{D_2} E(D) dD. \quad (2.59)$$

Le coefficient k_{31} défini par (2.56) apparaît lorsqu'on impose le cycle de la figure 2.12, à *contraintes transverses nulles* (c'est l'hypothèse poutre décrite plus haut (Eqs. (2.38))) :

- de O à A : chargement imposé en court-circuit ($\sigma \nearrow, E = 0$),
- de A à B : déchargement imposé en circuit ouvert ($\sigma \searrow, D = \text{cte}$),
- de B à O : retour au repos par transport de charge entre les électrodes en court-circuit, à chargement nul ($D \searrow, \sigma = 0$).

Les différents travaux mécaniques et électriques correspondent aux aires entre les courbes d'évolution et les axes des ordonnées des diagrammes (ε, σ) et (D, E) de la figure 2.12. Pour chaque phase du cycle, la relation de comportement (2.39) donne :

$$W_{m,O \rightarrow A} = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} s_{11}^E \sigma_A^2, \quad (2.60)$$

$$W_{m,A \rightarrow B} = W_2 = \frac{1}{2} s_{11}^E \left(1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma} \right) \sigma_A^2, \quad (2.61)$$

$$W_{e,B \rightarrow O} = W_1 = \frac{1}{2} \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^\sigma} \sigma_A^2, \quad (2.62)$$

avec σ_A la contrainte maximale imposée (au point A) et W_1 et W_2 définis sur la figure 2.12.

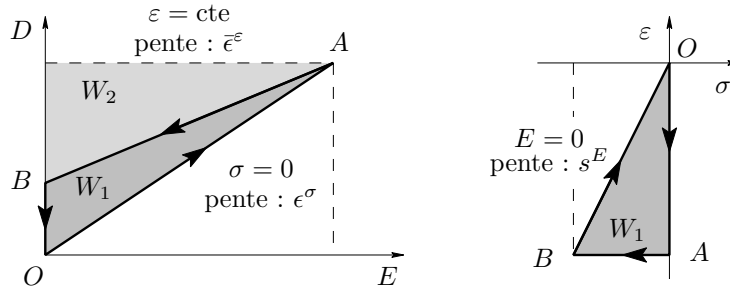


FIG. 2.13: Cycle de chargement à champ électrique imposé

On constate alors que :

- Le travail mécanique est maximal en valeur absolue pendant la phase de court-circuit.
- La différence entre les travaux mécaniques en court-circuit ($O \rightarrow A$) et circuit ouvert ($A \rightarrow B$) est toujours *égale* au travail électrique W_1 nécessaire pour retrouver le système au repos ($B \rightarrow O$).
- Les définitions (2.55) et (2.56) mènent au même résultat :

$$k_{31}^2 = \frac{W_1}{W_1 + W_2} = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma}. \quad (2.63)$$

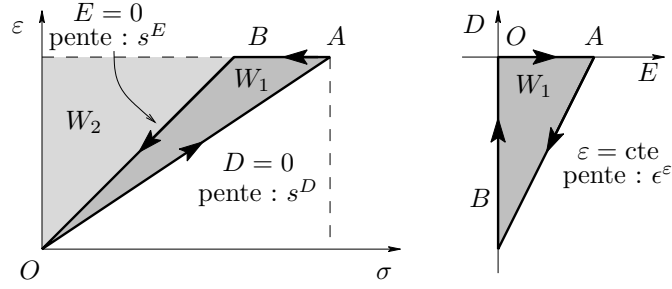


FIG. 2.14: Cycle de chargement à déplacement imposé

- Deux coefficients de couplage k_{31} et \tilde{k}_{31} coexistent⁹ [41] :

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma} = \frac{\bar{h}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^D \bar{\beta}_{33}^\epsilon}, \quad \tilde{k}_{31}^2 = \frac{e_{31}^2}{\bar{c}_{11}^E \bar{\epsilon}_{33}^\sigma} = \frac{g_{31}^2}{s_{11}^D \beta_{33}^\sigma}, \quad (2.64)$$

$$\tilde{k}_{31}^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2}. \quad (2.65)$$

k_{31} est relié aux deux lois de comportement en variables intensives et extensives et \tilde{k}_{31} est relié aux deux autres, en variables mélangées.

- k_{31} et \tilde{k}_{31} sont reliés aux rapports des constantes élastiques (en circuit ouvert et en court circuit) et des constantes diélectriques (à effort nul et à déplacement constant)¹⁰ :

$$1 - k_{31}^2 = \frac{s_{11}^D}{s_{11}^E} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^\sigma}{\epsilon_{33}^\sigma}, \quad 1 + \tilde{k}_{31}^2 = \frac{\bar{c}_{11}^D}{\bar{c}_{11}^E} = \frac{\bar{\beta}_{33}^\sigma}{\beta_{33}^\sigma}. \quad (2.66)$$

- Les coefficients k_{31} et \tilde{k}_{31} obtenus ici sont différents de $k_{31}^{(h)}$ et $k_{31}^{(e)}$ introduits par l'équation (2.58) : la différence provient des constantes modifiées du fait de l'hypothèse "poutre". $k_{31}^{(h)}$ et $k_{31}^{(e)}$ apparaissent naturellement avec une hypothèse "déformation unidirectionnelle" ($\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$).
- Les pentes des différentes phases du cycle sont indiqués sur la figure 2.12 et sont obtenues en appliquant les différentes lois du tableau 2.6.
- On obtient exactement les mêmes résultats (et notamment la relation (2.63)) en utilisant les cycles à champ électrique imposé et déformations imposées des figures 2.13 et 2.14.
- Le coefficient de couplage k_{31} intervient aussi dans les rapports des grandeurs aux points A et B de chacun des cycles :

$$\text{Fig. 2.12 : } \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} = k_{31}^2, \quad \text{Fig. 2.13 : } \frac{D_B}{D_A} = k_{31}^2, \quad \text{Fig. 2.14 : } \frac{\sigma_B}{\sigma_A} = 1 - k_{31}^2. \quad (2.67)$$

Barreau cylindrique en vibration

Une autre manière de faire apparaître le rapport des énergies dans le matériau, est de considérer les vibrations d'un matériau piézoélectrique, soit en court-circuit, soit en circuit ouvert ; on étudie le problème particulier d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique, de section rectangulaire, vibrant en traction compression suivant son axe 1 et muni

⁹Cela se montre soit en utilisant les différentes lois de comportement réduite du tableau 2.6 pour calculer W_1 et W_2 , soit en mélangeant les relations (2.43)

¹⁰Il faut encore utiliser les relations (2.43)

d'électrodes dans la direction 3 [2]. Avec l'hypothèse poutre (Eqs. (2.38)) et en considérant que toutes les grandeurs ne dépendent que de x , l'équation du mouvement (4.1a) sans efforts volumiques devient :

$$\sigma_{,x} = \rho \ddot{u}, \quad (2.68)$$

avec $\sigma = \sigma_1$ et u la composante du champ de déplacement de la poutre suivant x . En utilisant la relation de comportement réduite (2.39) et la relation déplacement/déformations (4.5), on obtient l'équation du mouvement du barreau, soit en fonction de $E = E_3$:

$$u_{,xx} - d_{31} E_{,x} = \rho s_{11}^E \ddot{u}, \quad (2.69)$$

ou en fonction de $D = D_3$:

$$u_{,xx} - \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^\sigma} D_{,x} = \rho s_{11}^D \ddot{u}. \quad (2.70)$$

En court-circuit ($E = 0$), l'équation du mouvement est alors :

$$u_{,xx} - \rho s_{11}^E \ddot{u} = 0. \quad (2.71)$$

Les modes propres sont obtenus en cherchant une solution découplée en temps et espace :

$$u(x, t) = \Phi(x)q(t). \quad (2.72)$$

On obtient alors que les pulsations propres ω_i et les modes propres $\Phi_i(x)$, $i = 1, \dots, +\infty$, vérifient :

$$\begin{cases} \Phi_{i,xx} + \beta_i^2 \Phi_i = 0, \\ \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \end{cases} \quad (2.73)$$

avec

$$\omega_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}, \quad (2.74)$$

La première des équations ci-dessus permet d'obtenir les déformées modales :

$$\Phi_i(x) = A_i \cos \beta_i x + B_i \sin \beta_i x. \quad (2.75)$$

Les conditions aux limites alors fixent la valeur des β_i (et donne une relation entre A_i et B_i), si bien que les fréquences propres en circuit ouvert sont données par l'équation (2.74).

En circuit ouvert ($D = 0$), l'équation du mouvement est :

$$u_{,xx} - \rho s_{11}^D \ddot{u} = 0, \quad (2.76)$$

et par le même raisonnement, les fréquences propres en circuit ouvert sont données par

$$\hat{\omega}_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\rho s_{11}^D}}. \quad (2.77)$$

La valeur des β_i est commune entre les cas court-circuit et circuit ouvert, pour un jeu de conditions aux limites données, si bien que :

$$\frac{\hat{\omega}_i^2}{\omega_i^2} = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^D} = \frac{\bar{c}_{11}^D}{\bar{c}_{11}^E}, \quad (2.78)$$

le rapport des carrés des fréquences propres est identique à celui des raideurs. À partir des relations entre les coefficients de couplage et les constantes matériaux (2.66), on obtient alors :

$$k_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\hat{\omega}_i^2}, \quad \tilde{k}_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}. \quad (2.79)$$

Les coefficients de couplage matériaux sont directement reliés aux rapport des fréquences propres en court-circuit et circuit ouvert d'un solide piézoélectrique.

2.8 Conclusion

On a écrit dans cette partie le modèle qui va être utilisé par la suite pour le comportement d'un matériau piézoélectrique ; il s'agit de piézoélectricité linéaire. On a présenté les divers coefficients de couplage matériau, ainsi que la réduction de la relation de comportement pour des cas poutre ou plaque.

Dans les deux chapitres qui viennent, on étudie le cas d'une structure en vibration sur laquelle on ajoute des éléments piézoélectriques, en utilisant pour ceux-ci le modèle de ce chapitre.

Modélisation semi-analytique d'une poutre avec éléments piézoélectriques

Dans ce chapitre, un modèle semi-analytique de poutre stratifiée avec éléments piézoélectriques est proposé. L'intérêt d'un tel modèle est en premier lieu l'écriture d'un problème simplifié où des paramètres physiques peuvent être facilement dégagés. En second lieu, il permet d'obtenir une écriture réduite du problème, sous formes de modes ; dans l'écriture de chacun des modes apparaît naturellement un coefficient de couplage électromécanique. Ce coefficient joue le même rôle que celui défini pour le matériau seul au chapitre 2 ; la différence est qu'ici son expression tient compte du couplage entre la structure et les éléments piézoélectriques. Ces résultats seront utilisés dans les parties II et III. Notamment, la formulation modale sera la base de toutes les études vibratoires menées sur les systèmes à shunts étudiés. Ensuite, on montrera que les coefficients de couplages modaux introduits dans le présent chapitre seront un facteur déterminant la performance des shunts en réduction de vibration.

3.1 Formulation générale

Ce chapitre vise tout d'abord à exposer les principales étapes qui mènent à l'établissement des équations dynamiques qui gèrent les états élastique et piézoélectrique couplés d'une poutre stratifiée munie de pastilles piézoélectriques, éventuellement couplées à un circuit électrique. Ces équations dynamiques font intervenir les grandeurs généralisées classiques qui sont :

- l'effort N de traction compression dans la poutre,
- le moment M de flexion dans la poutre,
- la différence de potentiel V_k aux bornes de la k -ième pastille,
- la charge Q_k à la surface de l'une des électrodes de la k -ième pastille (la charge est considérée la même sur les électrodes supérieure et inférieure).

3.1.1 Géométrie

La figure 3.1 décrit le système : la poutre est composée de N couches, chacune d'elles étant constituée d'un matériau homogène isotrope transverse, piézoélectrique ou non. L'axe \boldsymbol{x} est l'axe de la poutre, c'est-à-dire la direction d'élanement de la géométrie et l'axe \boldsymbol{z} est normal au plan des couches. Les caractéristiques sont les suivantes.

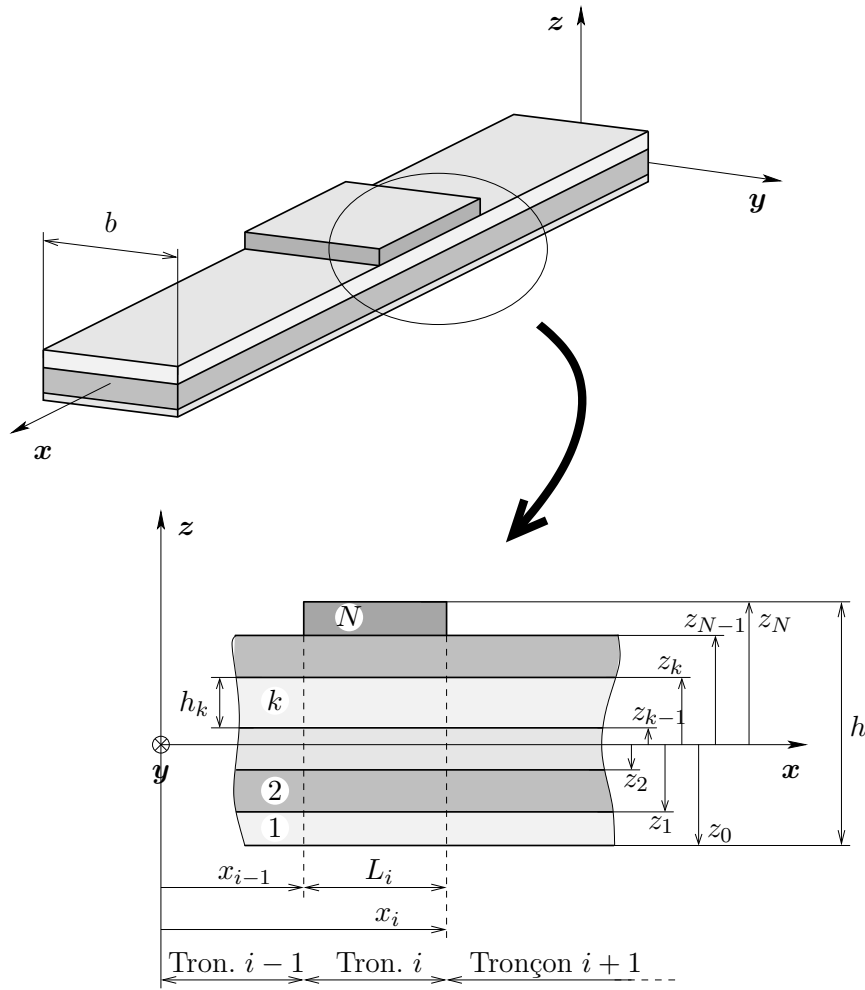


FIG. 3.1: Système de coordonnées, numérotation des couches et des tronçons de la poutre stratifiée

- La k -ième couche est située entre les cotes $z = z_{k-1}$ et $z = z_k$, son épaisseur est notée $h_k = z_k - z_{k-1}$ et sa masse volumique ρ_k .
- Plusieurs tronçons sont considérés suivant la direction x : le i -ième est situé entre les abscisses $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$, et à l'intérieur de chaque tronçon, les quantités matérielles et géométriques sont uniformes pour chaque couche (leur épaisseur, les constantes de la relation de comportement...). La longueur du i -ième tronçon est $l_i = x_i - x_{i-1}$.
- La largeur de la poutre (suivant l'axe y) est notée b .

L'origine O du repère est choisie dans le plan de symétrie suivant y de la poutre (de sorte que $y \in [-b/2; b/2]$), à une extrémité suivant x , la poutre étant située du côté des x positifs ($x \in [0; l]$, avec l la longueur totale de la poutre). La cote de O est choisie en fonction d'éventuelles symétries verticales (§3.1.6 ou §3.2.1).

3.1.2 Hypothèses mécaniques

La cinématique de la poutre utilisée est une extension au cas des poutres (milieu élastique unidimensionnel) de la *théorie classique des plaques stratifiées* (Classical Laminated Plate Theory, CLPT, [82]). Les hypothèses principales sont les suivantes :

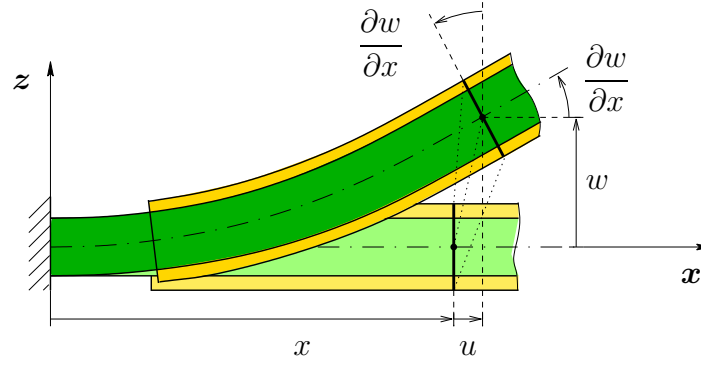


FIG. 3.2: Champ de déplacement de la poutre en traction / flexion

- la poutre est un milieu mince, c'est-à-dire que l'épaisseur est très faible devant la longueur totale de la poutre ;
- les effets de bord sont négligés ;
- les couches sont parfaitement collées les unes aux autres si bien qu'un éventuel délaminage entre couches n'est pas pris en compte ici ;
- les modules d'élasticité des différentes couches sont du même ordre de grandeur ;
- les déformations de cisaillement transverse $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz}$ sont négligeables.

À partir de ces cinq hypothèses, on suppose que :

HYPOTHÈSE 3.1

|| toute section normale et droite (à travers toutes les couches) reste normale, droite et indéformable. C'est une généralisation des hypothèses d'Euler-Bernouilli au cas d'une poutre stratifiée.

De plus, en supposant que :

- le chargement extérieur de la poutre est contenu dans le plan (x, z) ;
- les déformations des pastilles piezoélectriques suivant la direction \mathbf{y} sont négligées (la poutre ne s'incurve pas autour de son axe) ;

HYPOTHÈSE 3.2

|| les déplacements suivant la profondeur \mathbf{y} et la dépendance des variables en y est négligée.

Si les coordonnées de tout point M de la poutre sont notées (x, y, z) , on obtient le déplacement de ce point M par :

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \left(u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right) \mathbf{x} + w(x, t) \mathbf{z}, \quad (3.1)$$

où (u, w) sont les composantes du déplacement de tout point de coordonnée x de la ligne moyenne (voir Fig. 3.2).

La composante normale des déformations suivant \mathbf{x} est alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

En considérant là encore que la poutre est élancée,

HYPOTHÈSE 3.3

on suppose que la contrainte normale suivant l'axe x de la poutre est prépondérante, si bien que $\sigma_{yy} \ll \sigma_{xx}$, $\sigma_{zz} \ll \sigma_{xx}$ soit encore :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0. \tag{3.3}$$

3.1.3 Hypothèses électriques

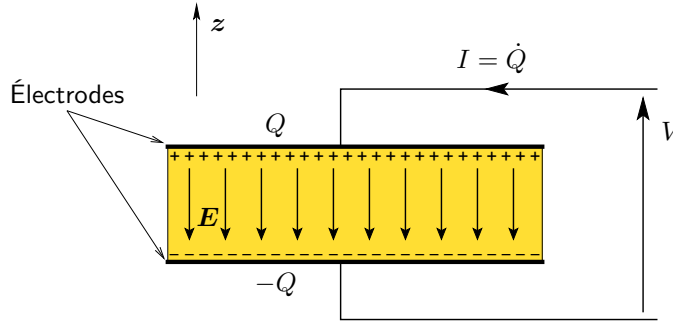


FIG. 3.3: Pastille piézoélectrique métallisée : champ électrique \mathbf{E} , charge électrique Q contenue à la surface de l'électrode supérieure, différence de potentiel V aux bornes de la pastille.

On étudie le cas où tous les éléments piézoélectriques sont munis sur leurs faces supérieures et inférieures d'électrodes conductrices très minces. On modélise ainsi l'intérieur de l'élément comme régi par les équations présentées au chapitre 2.6, avec deux surfaces minces vérifiant les équations présentées au chapitre 2.3.2. Pour la k -ième couche, les électrodes sont situées aux cotes $z = z_{k-1}$ et $z = z_k$, et le fait qu'elles soient conductrices implique que le potentiel électrostatique ψ soit constant à leur surface. Le potentiel dans l'élément piézoélectrique est donc constant sur les faces supérieures et inférieures. Si en plus on remarque que le milieu est mince, on peut raisonnablement faire l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 3.4

Le potentiel électrique dans un élément piézoélectrique dépend linéairement de z

Cela a pour conséquence que le champ électrique est orienté suivant z et constant :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{z}$$

3.1.4 Réduction de la loi de comportement

En tenant compte de la spécificité des conditions limite ainsi que de celles du matériau piézoélectrique, on va réduire la relation de comportement aux variables d'intérêt. On considère le cas d'une céramique initialement isotrope, polarisée suivant la direction 3^1 . La relation de comportement particulière qui en résulte est isotrope transverse (2.38). Dans la suite, on utilise la notation de Voigt pour $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ et une notation indicielle des composantes des vecteurs ; grâce aux hypothèses 3.1, 3.3 et 3.4, on a :

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad E_1 = E_2 = 0. \tag{3.4}$$

¹C'est à dire en utilisant les mêmes électrodes pour la polarisation et l'effet piézoélectrique, cas le plus fréquent.

$$\sigma_4 = \sigma_5 = 0, \quad D_1 = D_2 = 0, \quad (3.5)$$

En éliminant ε_2 et ε_3 , la relation de comportement (2.38) se réduit, comme montré section 2.5.1 pour le cas d'une poutre :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{C}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{13} E_3, \\ D_3 = \bar{e}_{13} \varepsilon_1 + \bar{\epsilon}_{33} E_3, \end{cases} \quad (3.6)$$

où les coefficients $\bar{C}_{11}^E, \bar{\epsilon}_{33}, \bar{e}_{13}$ sont définis par (2.41). On peut remarquer que par définition, \bar{C}_{11}^E est la contrainte qui apparaît suivant la direction 1 pour une déformation dans la direction 1 et une contrainte uniaxiale ; il s'agit donc du module d'Young (à champ électrique constant ou "en court circuit") dans cette direction. Dans la suite, pour différencier les différentes couches de la structure si besoin est, la relation de comportement de la k -ième couche sera notée :

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_1 = c_k \varepsilon_1 - e_k E_3, \\ D_3 = e_k \varepsilon_1 + \epsilon_k E_3, \end{cases}} \quad (3.7)$$

où $\sigma_1, \varepsilon_1, D_3$ et E_3 sont des fonctions de (x, z, t) et c_k, e_k et ϵ_k sont les constantes réduites du matériau de la k -ième couche.

3.1.5 Grandeurs généralisées

On définit tout d'abord la force de traction et le moment de flexion de la poutre par :

$$N = \int_{\mathcal{S}} \sigma_1 d\mathcal{S} = b \int_{z_0}^{z_N} \sigma_1(x, z, t) dz \quad \text{et} \quad M = \int_{\mathcal{S}} z \sigma_1 d\mathcal{S} = b \int_{z_0}^{z_N} z \sigma_1(x, z, t) dz, \quad (3.8)$$

où $\mathcal{S} = [-b/2; b/2] \times [z_0; z_N]$ est la section totale de la poutre à l'abscisse x . Le moment de flexion correspond à un moment autour d'un axe (P, \mathbf{y}) , avec P le point de l'axe (O, \mathbf{x}) d'abscisse x .

Ensuite, la différence de potentiel V_k aux bornes de la k -ième pastille piézoélectrique est :

$$V_k = \phi(z_k) - \phi(z_{k-1}) = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = - \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_3 dz. \quad (3.9)$$

À partir de la géométrie stratifiée de la poutre décrite au paragraphe 3.1.1, en remplaçant σ_1 par sa valeur en fonction de ε_1 et E_3 , puis en fonction de u et w grâce aux équations (3.2) et (3.7), en intégrant sur l'épaisseur de la poutre, et enfin en tenant compte de l'identité :

$$\int_{z_0}^{z_N} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz, \quad (3.10)$$

on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} N = A \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Xi_k V_k, \\ M = B \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Theta_k V_k, \end{cases}} \quad (3.11)$$

où \mathcal{P} est un ensemble d'entiers contenant les numéros des couches piézoélectriques et :

$$A = \sum_{k=1}^N bh_k c_k, \quad B = \sum_{k=1}^N I_{1k} c_k, \quad D = \sum_{k=1}^N I_{2k} c_k \quad (3.12)$$

$$\Xi_k = be_k, \quad \Theta_k = \frac{I_{1k}}{h_k} e_k = b \frac{z_k + z_{k-1}}{2} e_k, \quad (3.13)$$

avec h_k , I_{1k} et I_{2k} l'épaisseur, le moment linéaire et le moment quadratique de la k -ième couche, définis par :

$$h_k = z_k - z_{k-1}, \quad I_{1k} = \int_{\mathcal{S}} z d\mathcal{S} = b \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2}, \quad I_{2k} = \int_{\mathcal{S}} z^2 d\mathcal{S} = b \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3}. \quad (3.14)$$

Les grandeurs N , M , u et w sont des fonctions de (x, t) , V_k est une fonction de t uniquement et les paramètres A , B , D , Ξ_k et Θ_k sont des fonctions constantes par morceau de x (elles varient d'un tronçon de poutre à l'autre).

La charge Q_k de la k -ième pastille est par définition la quantité de charges électriques libres contenues dans l'une des électrodes. *On choisira dans cette étude l'électrode supérieure.* C'est le flux du saut de déplacement électrique à travers la surface de l'électrode, comme établi au chapitre 2.2.2. En supposant que chaque électrode couvre toute la surface du i -ième tronçon de la poutre, on obtient :

$$Q_k = \int_{\mathcal{S}_k} [\mathbf{D} \cdot \mathbf{z}]_{z_k^-}^{z_k^+} d\mathcal{S} = b \int_{x_{i-1}}^{x_i} -D_3(x, z_k) dx, \quad (3.15)$$

car $\mathbf{D} = D_3 \mathbf{z}$ à l'intérieur de la pastille et $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ à l'intérieur de l'électrode. On a noté $\mathcal{S}_k = [x_{i-1}; x_i] \times [-b/2; b/2]$ la surface de l'électrode et $z_k^- < z_k$ et $z_k^+ > z_k$ deux cotes au voisinage de z_k . Il faut remarquer que l'on se place dans le cas où une électrode n'est pas placée entre deux éléments piézoélectriques, ni au contact d'un isolant dans lequel un déplacement important existerait.

De plus, en remarquant que dans un isolant il n'y a pas de charge libre, et que donc la divergence de \mathbf{D} est nulle, on peut écrire avec (3.5) :

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad \text{soit} \quad \mathbf{D} = D_3(x, t) \mathbf{z}, \quad (3.16)$$

c'est-à-dire que D_3 est indépendant de z^2 . En revanche, on peut remarquer que D_3 est une fonction de x , puisque ε_1 dépend de x ; cela provient d'un déplacement de charges électriques libres dans l'électrode, suivant \mathbf{x} , à charge globale Q constante.

En remplaçant D_3 dans l'équation (3.15) par sa valeur en fonction de ε_1 et E_3 , puis en fonction de u , w et E_3 au moyen des relations (3.2) et (3.7) et enfin en intégrant sur l'épaisseur de la pastille pour faire apparaître V_k , on obtient :

$$Q_k = -\Xi_k \left[u \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} + \Theta_k \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} + C_k V_k, \quad (3.17)$$

où C_k est la capacité du condensateur électrique équivalent à la pastille piézoélectrique sans déformation, définie par :

$$C_k = \epsilon_k \frac{bl_i}{h_k} = \epsilon_k \frac{S_k}{h_k}, \quad (3.18)$$

²Ce résultat viole la relation de comportement (3.7), puisque ε_1 est une fonction linéaire de z et E_3 ne dépend pas de z . Il faudrait pour y remédier utiliser un champ électrique E_3 linéaire dans l'épaisseur (et donc un potentiel ϕ quadratique).

avec $l_i = x_i - x_{i-1}$ la longueur de l'électrode, longueur du i -ième tronçon de la poutre, et S_k l'aire de la surface de l'électrode.

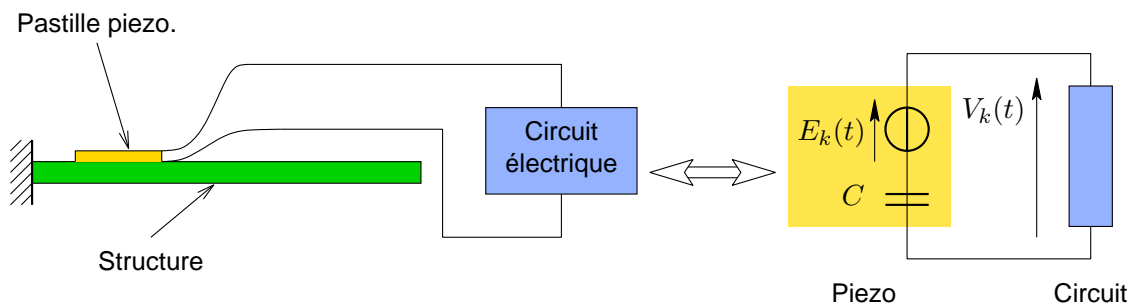


FIG. 3.4: Équivalent électrique de la pastille piézoélectrique.

On peut remarquer que :

- dans les équations (3.11), le terme B est directement lié à la non-symétrie dans l'épaisseur de la poutre stratifiée : il couple les mouvements longitudinaux au moment de flexion et les mouvements de flexion à l'effort normal ;
- les équations (3.11) représentent *l'effet piézoélectrique inverse*, c'est-à-dire que des différences de potentiel V_k aux bornes des pastilles piézoélectriques modifient l'état mécanique de la structure, représenté par l'effort normal N et le moment de flexion M . En terme de sens, lorsque $\bar{e}_{31} > 0$, une différence de potentiel V_k *positive* produit un *raccourcissement* de la pastille lorsque celle-ci est libre.
- l'équation (3.17) représente *l'effet piézoélectrique direct*, c'est-à-dire qu'une déformation de la structure, représentée par les déplacements longitudinal u et transversal w , modifie les charges électriques Q_k des pastilles piézoélectriques. En terme de sens, une *élongation* de la pastille produit une différence de potentiel *négative* ($V < 0$) en circuit ouvert (à charge Q_k nulle) ou un amoncellement de charges *négatives* ($Q < 0$) sur l'électrode supérieure en court-circuit ($V_k = 0$) ;
- l'équation (3.17) montre que chaque pastille (disons la k -ième) est équivalente du point de vue électrique à un condensateur de capacité C_k en série avec une source de tension de force électromotrice E_k (Fig. 3.4) :

$$V_k(t) = E_k(t) + \frac{Q_k(t)}{C_k}, \quad \text{avec} \quad E_k(t) = \frac{\Xi_k}{C_k} \left[u \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} - \frac{\Theta_k}{C_k} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i}; \quad (3.19)$$

- en appliquant le même raisonnement que précédemment (Eq. (3.15) et (3.16)) à l'électrode inférieure, on montre que celle-ci contient une charge égale et opposée à celle de l'électrode supérieure.
- ces équations (3.11) et (3.17) font apparaître les coefficients A , B , D , Ξ_k , Θ_k et C_k de

manière symétrique :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ -Q_1 \\ \vdots \\ -Q_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \Xi_1 & \cdots & \Xi_P \\ B & D & \Theta_1 & \cdots & \Theta_P \\ \Xi_1 & \Theta_1 & -C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_P & \Theta_P & 0 & \cdots & -C_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ou } [u]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ ou } -\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ V_1 \\ \vdots \\ V_P \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

3.1.6 Cas particulier d'une structure symétrique

Lorsque la structure présente une symétrie à la fois géométrique et matérielle par rapport à son plan milieu, en choisissant l'origine O du repère dans ce plan, on montre que :

$$\sum_{k=1}^N I_{1k} \bar{c}_k = 0, \quad \text{soit } \boxed{B = 0}. \quad (3.21)$$

Les équations (3.11) se réduisent alors à :

$$\begin{cases} N = A \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Xi_k V_k, \\ M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Theta_k V_k, \end{cases} \quad (3.22)$$

La partie mécanique de ces équations est alors similaire à celle d'une poutre homogène par tronçons, où il y a découplage entre traction et flexion :

- une elongation de la poutre produit seulement un effort normal,
- une courbure de la poutre produit seulement un moment de flexion.

3.1.7 Équations d'équilibre

En négligeant l'inertie de rotation de la poutre, les équations d'équilibre sont :

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (3.23)$$

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r, \quad (3.24)$$

où :

- $p = p(x, t)$ est une répartition linéique d'efforts transversaux (exprimés en N/m),
- $q = q(x, t)$ est une répartition linéique de moment (exprimés en N.m/m),
- $r = r(x, t)$ est une répartition linéique d'effort longitudinaux (exprimés en N/m),
- $m = m(x)$ est la masse linéique de la poutre (exprimé en kg/m), définie par :

$$m = b \sum_{k=1}^N \rho_k h_k, \quad (3.25)$$

où ρ_k est la masse volumique de la k -ième couche. C'est une fonction de x constante par morceau.

3.2 Poutre symétrique munie de deux pastilles piézoélectriques

3.2.1 Grandeurs généralisées

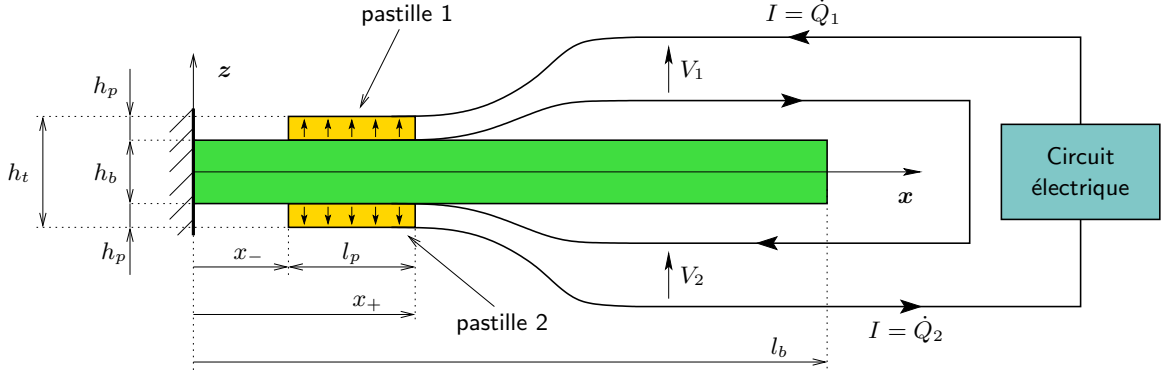


FIG. 3.5: Poutre symétrique munie de deux pastilles piézoélectriques.

On se propose ici de particulariser les développements du paragraphe 3.1 précédent au cas d'une poutre homogène et isotrope, de module d'Young Y_b et de masse volumique ρ_b , sur laquelle sont collées deux éléments piézoélectrique (ou pastilles, ou patches) identiques, l'une sur la face supérieure (la pastille 1) et l'autre sur la face inférieure (la pastille 2, cf. Fig. 3.5). L'épaisseur de la poutre est notée h_b , celle de chaque pastille h_p , de sorte que l'épaisseur totale de la poutre au niveau du tronçon où sont collées les pastilles est $h_t = h_b + 2h_p$. La longueur totale de la poutre est notée l_b , celle des pastilles l_p . La position des pastilles est repérée par les abscisses x_- et x_+ , avec $x_+ - x_- = l_p$. La largeur commune aux pastilles et à la poutre est notée b .

Les deux pastilles sont toutes les deux pourvues d'électrodes métalliques qui couvrent toute la surface de leurs deux faces et sont câblées en série, avec l'électrode inférieure de la pastille 1 connectée à l'électrode supérieure de la pastille 2. Pour avoir un effet de flexion, on polarise les deux pastilles en sens inverse (cela joue sur le signe des constantes piézoélectriques e_{ij} dans l'équation (2.38)). On note $c_1 = c_2 = \bar{c}_{11} = Y_p$, $e_1 = -e_2 = -\bar{e}_{31}$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_{33}$ les constantes élastiques (Y_p est le module d'Young dans la direction longitudinale des pastilles, celles-ci étant supposées constituées d'un matériau isotrope transverse), piézoélectrique et diélectrique des pastilles piézoélectriques, ρ_p leur masse volumique. La valeur des coefficients Ξ_k , Θ_k et C_k sur le tronçon central de la poutre, pour $k = 1$ ou $k = 2$ selon la pastille considérée, sont alors :

$$\Xi_1 = -\Xi_2 = \Xi = -b\bar{e}_{31}, \quad (3.26)$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = b \frac{h_p + h_b}{2} \bar{e}_{31}, \quad (3.27)$$

$$C_1 = C_2 = C = \bar{\epsilon}_{33} \frac{bl_p}{h_p}. \quad (3.28)$$

Les équations (3.11) et (3.17) deviennent alors, pour tout x dans $[x_-; x_+]$:

$$\begin{cases} N = A \frac{\partial u}{\partial x} + \Xi(V_1 - V_2), \\ M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Theta(V_1 + V_2), \\ Q_1 = \Xi \left[u \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + \Theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV_1, \\ Q_2 = -\Xi \left[u \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + \Theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV_2. \end{cases} \quad (3.29)$$

Les équations précédentes montrent que :

- si la même différence de potentiel est imposée aux deux pastilles, alors la poutre est simplement soumise à un moment de flexion ;
- si des différences de potentiel opposées sont imposées aux deux pastilles, alors la poutre est simplement soumise à de la traction/compression ;

Le câblage des pastilles en série implique que $Q_1 = Q_2 = Q$. En supposant qu'aucun effort extérieur ne crée une élongation $[u]$ des pastilles, on obtient (Eq. 3.17) que $V_1 = V_2 = V$. En conséquence, les équations (Eq. 3.29) précédentes deviennent, pour tout x dans $[x_-; x_+]$:

$$\begin{cases} M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\Theta V, \\ Q = \Theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV. \end{cases} \quad (3.30)$$

On se place donc dans un cas de flexion pure.

3.2.2 Équations du mouvement

Θ étant une fonction de x , constante par morceau et non-nulle simplement sur le tronçon central de la poutre, on peut écrire, pour tout x dans $[0; l_b]$:

$$\Theta(x) = \Theta [H(x - x_-) - H(x - x_+)], \quad (3.31)$$

où Θ est défini par l'équation (3.27) et $H(x)$ est la fonction de Heavyside :

$$\begin{cases} H(x) = 0 & \forall x < 0, \\ H(x) = 1 & \forall x \geq 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

On obtient alors, quel que soit x dans $[0; l_b]$:

$$M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\Theta V [H(x - x_-) - H(x - x_+)]. \quad (3.33)$$

En injectant l'équation précédente dans l'équation d'équilibre (3.23), et en notant que la dérivée de la fonction de Heavyside correspond à la fonction de Dirac $\delta(x)$, on obtient l'équation du mouvement de la poutre, associée à l'équation électrique :

$$\boxed{\begin{cases} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2\Theta V \Delta(x) + p - \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q = \Theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV, \end{cases}} \quad (3.34)$$

où :

$$\Delta(x) = \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - x_-) - \delta(x - x_+)]. \quad (3.35)$$

et

$$\begin{cases} D(x) = D_b = \frac{bh_b^3}{12} Y_b, & \forall x \in [0; x_- \cup x_+; l_b], \\ D(x) = D_p = D_b + bh_p \frac{4h_p^2 + 6h_b h_p + 3h_b^2}{6} Y_p, & \forall x \in [x_-; x_+], \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} m(x) = m_b = bh_b \rho_b, & \forall x \in [0; x_- \cup x_+; l_b], \\ m(x) = m_p = m_b + 2bh_p \rho_p, & \forall x \in [x_-; x_+]. \end{cases} \quad (3.37)$$

D_b et m_b représentent la raideur en flexion et la masse linéique du tronçon sans pastille et D_p et m_p celles du tronçon avec pastille.

Les équations précédentes permettent de conclure que :

- les pastilles ajoutent localement de la masse et de la raideur à la poutre ;
- l'action des pastilles piézoélectrique est équivalente à *deux moments concentrés* (dérivées de Dirac), d'intensités égales et opposées, appliqués aux deux extrémités des pastilles, en $x = x_-$ et $x = x_+$;
- la charge électrique produite par une déformation de la poutre est proportionnelle à *la différence des pentes* de la poutre déformée, en $x = x_-$ et $x = x_+$.

On peut réécrire les équations (3.34) en éliminant V au profit de Q dans la première, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\Theta^2}{C} \Delta(x) \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} = 2 \frac{\Theta}{C} \Delta(x) Q + p - \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q = \Theta \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV. \end{cases}} \quad (3.38)$$

Les inconnues du problème sont alors $w(x, t)$, $Q(t)$ et $V(t)$. La troisième équation, qui permet d'imposer une relation supplémentaire entre Q et V , dépend du circuit électrique utilisé.

3.2.3 Adimensionnement

Pour la suite des développements, on choisit d'adimensionner les équations. On introduit alors les variables sans dimension suivantes (repérées avec une barre supérieure) :

$$\bar{x} = \frac{x}{l_b}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h_b}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau_m} = \frac{1}{l_b^2} \sqrt{\frac{D_b}{m_b}} t, \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{l_b^2} \Delta, \quad \bar{p} = \frac{l_b^4}{h_b D_b} p, \quad (3.39)$$

$$\bar{D} = \frac{D}{D_b}, \quad \bar{m} = \frac{m}{m_b}, \quad \alpha = \Theta \sqrt{\frac{2l_b}{C D_b}}, \quad (3.40)$$

$$\bar{Q} = \frac{l_b}{h_b} \frac{\alpha}{\Theta} Q = \frac{1}{h_b} \sqrt{\frac{2l_b^3}{C D_b}} Q, \quad \bar{V} = \frac{1}{h_b} \sqrt{\frac{l_b^3 C}{2 D_b}} V \quad (3.41)$$

avec D_b et m_b définies par les équations (3.36) et (3.37). Les équations (3.34) et (3.38) deviennent respectivement

$$\boxed{\begin{cases} \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\bar{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \alpha \Delta(x) V + p, \\ Q = \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + V, \end{cases}} \quad (3.42)$$

et

$$\boxed{\begin{cases} \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\bar{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \alpha^2 \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} \Delta(x) = \alpha \Delta(x) Q + p, \\ Q = \alpha \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + V, \end{cases}} \quad (3.43)$$

où les grandeurs sans dimension \bar{x} , \bar{w} , \bar{t} , $\bar{\Delta}$, \bar{p} , \bar{V} et \bar{Q} sont notées sans barre supérieure, pour alléger l'écriture. On peut remarquer que :

- un paramètre important apparaît dans cet adimensionnement : c'est le paramètre α , qui régit le couplage électromécanique. En utilisant les équations (3.27), (3.28), (3.36) et (3.39), on montre que :

$$\alpha = \sqrt{6} \frac{\bar{e}_{31}}{\underbrace{\sqrt{Y_p \bar{e}_{33}}}_{\tilde{k}_{31}}} \sqrt{\frac{Y_p}{Y_b}} \sqrt{\frac{l_b}{l_p}} \left(1 + \frac{h_p}{h_b} \right) \sqrt{\frac{h_p}{h_b}}. \quad (3.44)$$

α dépend donc des paramètres suivants :

- le coefficient de couplage $\tilde{k}_{31} = \bar{e}_{31} / \sqrt{Y_p \bar{e}_{33}}$ du matériau piézoélectrique, qui ne dépend que des constantes matérielles des pastilles : leur module d'Young Y_p , leur constante diélectrique modifiée \bar{e}_{33} et leur constante piézoélectrique modifiée \bar{e}_{31} (voir §2.5.1 pour la comparaison avec k_{31}),
- le rapport des modules d'Young Y_p/Y_b ,
- le rapport des longueurs l_p/l_b ,
- le rapport des épaisseurs h_p/h_b .

Il ne dépend pas de la position de la pastille sur la poutre, qui intervient pour le couplage à travers le terme $[w'(x)]_{x_-}^{x_+} \Delta(x)$.

- l'adimensionnement de la charge électrique est imposée par l'adimensionnement de la partie mécanique du système, et ne dépend donc pas du circuit électrique utilisé.

3.3 Réduction modale

Afin d'accélérer la résolution du problème, on souhaite projeter les équations aux dérivées partielles (3.43) sur une base adaptée ; on choisit d'utiliser les modes propres de la poutre avec éléments piézoélectriques en court-circuit.

3.3.1 Calcul des modes propres en court-circuit

On s'intéresse ici à la solution de la partie conservative de (3.42) ($p = 0$) avec les éléments piézoélectriques court-circuités ($V = 0$) :

$$\boxed{\bar{m}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\bar{D}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.} \quad (3.45)$$

On cherche une solution découplée en temps et en espace, soit :

$$w(x, t) = \Phi(x) q(t). \quad (3.46)$$

En remplaçant l'équation précédente dans (3.45) on obtient :

$$\bar{m}(x) \Phi(x) \ddot{q}(t) = - [\bar{D}(x) \Phi_{,xx}(x)]_{,xx} q(t), \quad (3.47)$$

où \ddot{q} est la dérivée seconde de q par rapport au temps et où $(\cdot)_{,x}$ désigne la dérivée par rapport à x . Par suite :

$$\frac{[\bar{D}(x) \Phi_{,xx}(x)]_{,xx}}{\bar{m}(x) \Phi(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}. \quad (3.48)$$

Du fait de l'hypothèse de séparation des variables, les deux membres de cette équation sont égaux à une constante, que l'on suppose positive et que l'on note ω^2 , ce qui sera justifié ci-après. On obtient alors les deux équations :

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0, \quad (3.49)$$

$$[\bar{D}(x) \Phi_{,xx}(x)]_{,xx} - \bar{m}(x) \omega^2 \Phi = 0. \quad (3.50)$$

La première équation donne le classique mouvement harmonique à la fréquence ω , ce qui justifie le signe de la constante (le système est conservatif et la solution $w(x, t)$ doit rester finie lorsque t augmente). La seconde équation permet de déterminer les déformées modales $\Phi(x)$.

Pour calculer analytiquement les déformées modales, on considère les trois tronçons de la poutre numérotés à partir de l'encastrement. Sachant que $\bar{D} = \bar{m} = 1$ sur les tronçons 1 et 3 et que $\bar{D} = \bar{D}_p = D_p/D_b$ et $\bar{m} = \bar{m}_p = m_p/m_b$ sur le tronçon 2, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \Phi_{1,xxxx} - \xi^4 \Phi_1 = 0, & \forall x \in [0; x_-[\\ \Phi_{2,xxxx} - (\gamma\xi)^4 \Phi_2 = 0, & \forall x \in [x_-; x_+] \\ \Phi_{3,xxxx} - \xi^4 \Phi_1 = 0, & \forall x \in]x_+; 1] \end{cases} \quad (3.51)$$

où on a noté

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{\bar{m}_p}{\bar{D}_p}} = \sqrt[4]{\frac{m_p D_b}{m_b D_p}}. \quad (3.52)$$

Les solutions générales de ces trois équations sont :

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = A_1 \cos(\xi x) + B_1 \sin(\xi x) + C_1 \cosh(\xi x) + D_1 \sinh(\xi x), \\ \Phi_2(x) = A_2 \cos(\gamma\xi x) + B_2 \sin(\gamma\xi x) + C_2 \cosh(\gamma\xi x) + D_2 \sinh(\gamma\xi x), \\ \Phi_3(x) = A_3 \cos(\xi x) + B_3 \sin(\xi x) + C_3 \cosh(\xi x) + D_3 \sinh(\xi x), \end{cases} \quad (3.53)$$

On a donc 13 inconnues à déterminer : ξ et les coefficients A_i , B_i , C_i et D_i . Leur valeurs sont imposées par les conditions aux limites encastree en $x = 0$ et libre en $x = 1$ et les

conditions de raccordement en $x = x_-$ et $x = x_+$. Pour ces dernières, on impose la continuité du déplacement Φ , de la pente $\Phi_{,x}$, des moments de flexion M et des efforts tranchants T , reliés à Φ par :

$$M(x, t) = -\bar{D}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\bar{D}(x) \Phi_{,xx} q(t), \quad T(x, t) = -\frac{\partial M}{\partial x} = \bar{D}(x) \Phi_{,xxx} q(t), \quad (3.54)$$

car $\bar{D}(x)$ est constant sauf sur des ensembles de mesure nulle. On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \\ x = x_- : \\ x = x_+ : \\ x = 1 : \end{array} \right. \begin{array}{l} \Phi_1(0) = 0, \\ \Phi_1(x_-) = \Phi_2(x_-), \\ \Phi_{1,xx}(x_-) = \bar{D}_p \Phi_{2,xx}(x_-), \\ \Phi_2(x_+) = \Phi_3(x_+), \\ \bar{D}_p \Phi_{2,xx}(x_+) = \Phi_{3,xx}(x_+), \\ \Phi_{3,xx}(1) = 0, \end{array} \begin{array}{l} \Phi_{1,x}(0) = 0, \\ \Phi_{1,x}(x_-) = \Phi_{2,x}(x_-), \\ \Phi_{1,xxx}(x_-) = \bar{D}_p \Phi_{2,xxx}(x_-), \\ \Phi_{2,x}(x_+) = \Phi_{3,x}(x_+), \\ \bar{D}_p \Phi_{2,xxx}(x_+) = \Phi_{3,xxx}(x_+), \\ \Phi_{3,xxx}(1) = 0. \end{array} \quad (3.55)$$

En combinant les équations (3.55) avec les équations (3.51), on obtient le système singulier suivant à résoudre :

$$\mathbf{M}(\xi) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ D_3 \end{pmatrix} = (0), \quad (3.56)$$

où $\mathbf{M}(\xi)$ est une matrice 12×12 où les coefficients sont des fonctions de ξ . On obtient alors :

- les fréquences propres : la r -ième est $\omega_r = \xi_r^2$ où ξ_r est le r -ième zéro de l'équation caractéristique $\det \mathbf{M}(\xi) = 0$;
- les déformées modales : la r -ième, $\Phi_r(x)$, est définie à une constante multiplicative près à partir des équations (3.53) avec les valeurs de onze des (A_1, \dots, D_3) obtenus en fonction du douzième (disons D_3) en résolvant le système (3.56) privé d'une ligne.

Le modes sont enfin normalisés en calculant le coefficient multiplicatif (D_3 ici) pour que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \bar{m}(x) \Phi_r(x)^2 dx = 1. \quad (3.57)$$

Ce calcul analytique des modes est intéressant car il permet d'effectuer aisément une étude paramétrique de l'influence de la raideur ajoutée des pastilles sur le comportement vibratoire de la structure. De plus, il permet de façon immédiate le calcul des coefficients Δ_r de l'équation (3.68) qui, on le verra (§5), sont directement liés au transfert d'énergie entre la structure mécanique et le circuit électrique et par suite à l'efficacité du système amortissant. On peut montrer que les modes de la poutre sont orthogonaux, c'est-à-dire que :

$$\forall (p, q) / \omega_p \neq \omega_q, \quad \int_0^1 \bar{m}(x) \Phi_p(x) \Phi_q(x) dx = \delta_{pq}, \quad (3.58)$$

$$\int_0^1 [\bar{D}(x) \Phi_{p,xx}(x)]_{,xx} \phi_q(x) dx = \omega_p^2 \delta_{pq}, \quad (3.59)$$

où δ_{pq} est le symbole de Kronecker.

3.3.2 Projection modale du système couplé

On va maintenant se servir de la base des modes propres pour réécrire le système (3.43) ; en utilisant $(\Phi_r, \omega_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ l'ensemble des modes propres du système en court-circuit, on écrit la flèche en fonction du temps :

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{+\infty} \Phi_r(x) q_r(t), \quad (3.60)$$

puis on intègre la partie mécanique de (3.42) ou (3.43) multipliée par Φ_r sur la longueur de la poutre et on écrit la partie électrique en tenant compte de (3.60) ; alors, avec l'orthogonalité des modes (3.58) on trouve un système d'équations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) - \alpha \Delta_r V(t) = F_r, \\ Q(t) - \alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = V, \end{array} \right. \quad (3.61)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Delta_r \Delta_j q_j(t) - \alpha \Delta_r Q(t) = F_r, \\ Q(t) - \alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = V, \end{array} \right. \quad (3.62)$$

où les modes sont couplés par des termes croisés. On a dans les deux systèmes les coefficients suivants :

- F_r le terme de forçage modal sur le r -ième mode, tel que $F_r = \int_0^1 p(x, t) \Phi_r(x) dx$;
- Δ_r la courbure des éléments piézoélectriques pour le r -ième mode, définie par $\Delta_r = \left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right]_{x=x-}^{x=x+}$

3.4 Coefficient de couplage effectif

3.4.1 Projection modale du système circuit ouvert

En partant de l'équation (3.61) on écrit les équations du problème conservatif associé en court circuit ($F = 0$ et $V = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0, \\ Q(t) - \alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.63)$$

Les modes sont naturellement découplés, en raison de la base modale choisie. En revanche, si l'on écrit les équations du problème conservatif associé en circuit ouvert à partir de (3.62) ($F = 0$ et $Q = 0$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Delta_r \Delta_j q_j(t) = 0, \\ -\alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = V, \end{array} \right. \quad (3.64)$$

et on constate que les équations de chaque mode sont couplées entre elles, par un terme de raideur ajoutée.

3.4.2 Coefficient de couplage

De manière analogue à ce qui est proposé dans la norme [2], on définit le coefficient de couplage effectif, dépendant des fréquences en circuit ouvert (ω_{CO}) et en court-circuit (ω_{CC}), pour le mode de vibration considéré par³ :

$$k_{\text{eff}}^2 = \frac{\omega_{CO}^2 - \omega_{CC}^2}{\omega_{CC}^2}. \quad (3.65)$$

Ce coefficient est utilisé pour le calcul dans de nombreuses applications ; on montrera que c'est un paramètre essentiel pour la réduction de vibrations avec shunt ou switch. En partant des équations (3.63) et (3.64) restreintes à un seul mode ($q_j = 0 \forall j \in \mathbb{N}^*, j \neq r$) on écrit la pulsation en court-circuit et une approximation de la pulsation en circuit ouvert :

$$\begin{cases} \text{court circuit} & \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0, \\ \text{circuit ouvert} & \ddot{q}_r(t) + (\omega_r^2 + \alpha^2 \Delta_r^2) q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (3.66)$$

on note ainsi $\hat{\omega}_r^2 = \omega_r^2 + \alpha^2 \Delta_r^2$ l'approximation de la pulsation en circuit ouvert, et on définit une approximation du coefficient de couplage effectif :

$$k_r^2 = \frac{\hat{\omega}_r^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2} = \frac{\alpha^2 \Delta_r^2}{\omega_r^2} \quad (3.67)$$

cependant, à la différence du coefficient k_{eff} , toujours positif, il est possible d'attribuer un signe à k_r d'après le signe de Δ_r ; on obtient alors l'écriture suivante :

$$k_r = \frac{\alpha \Delta_r}{\omega_r} = \sqrt{6} \underbrace{\frac{\bar{e}_{31}}{\sqrt{Y_p \bar{e}_{33}}}}_{\tilde{k}_{31}} \underbrace{\sqrt{\frac{Y_p}{Y_b}} \sqrt{\frac{l_b}{l_p}} \left(1 + \frac{h_p}{h_b}\right)}_{\text{coefficients mat. et dimensions}} \underbrace{\sqrt{\frac{h_p}{h_b}} \frac{1}{\omega_r} \left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+}}_{\text{carac. modales}}. \quad (3.68)$$

On verra par la suite que ce coefficient est capital pour la performance des applications de type shunt (§5.3.4, 5.4.4, [37, 32, 31]) ou switch (§7.4.4, [30]) ; il est souvent essentiel de le maximiser. Pour des applications moins fréquentes il peut être intéressant de le minimiser, afin de découpler certains modes. Dans les deux cas, comme les modes dépendent des paramètres entrant dans l'écriture de α , il est difficile de conclure directement sur la valeur optimale de ces paramètres sans calculer les modes. La seule conclusion qu'on peut tirer ici, c'est que tous autres paramètres égaux, il faut maximiser \tilde{k}_{31} .

Au paragraphe 6.1 on verra comment il est possible de maximiser ce coefficient en adaptant les éléments piézoélectriques à la structure ; une analyse de l'effet de chaque paramètre est proposée.

³On peut remarquer que le coefficient k_{eff} défini ici est analogue au \tilde{k}_{31} de la section 2.7.1. Les deux sont égaux pour des géométries simples comme celles du barreau cylindrique de la section 2.7.1. Ils sont différents dans le cas général : \tilde{k}_{31} ne dépend que du matériau tandis que k_{eff} dépend aussi de la géométrie du système complet ainsi que du mode considéré. On aurait pu aussi définir un k_{eff} analogue à k_{31} , soit $(\omega_{CO}^2 - \omega_{CC}^2)/\omega_{CO}^2$, ce qui est précisément proposé dans la norme [2, p. 59]. Nous utilisons dans ce texte le k_{eff} de l'équation (3.65) car c'est celui-ci qui apparaît naturellement dans les équations. Les deux sont de toute façon très proches.

3.4.3 Troncature modale

En utilisant la notation ci-dessus, on peut réécrire les équations (3.62), en les tronquant aux N premiers modes; on introduit également un amortissement modal ξ_r sur chacun des modes (cet amortissement sera par exemple mesuré expérimentalement, ou posé arbitrairement);

$$\begin{cases} \forall r \in [1, N], & \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + k_r\omega_r \sum_{j=1}^N k_j\omega_j q_j(t) - k_r\omega_r Q(t) = F_r(t), \\ & - \sum_{r=1}^N k_r\omega_r q_r(t) + Q(t) = V(t), \end{cases} \quad (3.69)$$

ces équations peuvent se mettre sous forme matricielle : on obtient

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 2\xi_N\omega_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \\ & \left[\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 0 \\ [k_i\omega_i k_j\omega_j] & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & -k_1\omega_1 \\ & 0 & \vdots \\ -k_1\omega_1 & \dots & -k_N\omega_N & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ V \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (3.71)$$

avec :

- \mathbf{q} le vecteur des inconnues modales et de la charge ,
- \mathbf{M} la matrice de masse, diagonale, avec un 0 sur le ddl électrique,
- \mathbf{C} la matrice d'amortissement, avec là aussi un 0 sur le ddl électrique,
- \mathbf{K} la matrice de raideur en court-circuit, diagonale, avec un 1 sur le ddl électrique qui correspond à la capacité des éléments piézoélectriques,
- \mathbf{K}_p la matrice d'ajout de raideur piézoélectrique, qui couple les modes mécaniques entre eux et n'a aucun effet sur la charge; $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_p$ correspond à la matrice de raideur en circuit ouvert ($Q = 0$),
- \mathbf{K}_c la matrice de couplage électromécanique comprend les termes de couplage liés aux effets piézoélectriques directs et indirects,
- \mathbf{F} le vecteur de forçage, avec la tension appliquée aux éléments piézoélectriques sur la ligne de la charge.

3.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de définir un modèle réduit mais précis d'une structure avec éléments piézoélectriques. Le choix de décrire le système avec la charge comme degré de liberté

électrique va faciliter l'association de shunts au système ; mais de manière générale, n'importe quel circuit électrique pourra être associé à ce modèle. Ce circuit va imposer soit (i) une tension électrique, soit (ii) la charge électrique, soit (iii) une relation entre ces deux variables. Ce dernier cas est l'objet des parties II et III de cette thèse. Dans la partie II, une étude expérimentale des shunts (chap. 6) est proposée, qui inclut la réalisation de poutres avec éléments piézoélectriques telles qu'elles sont calculées dans le présent chapitre. On constate que le modèle proposé est en bon accord avec l'expérience.

Avant de continuer vers ces parties, on peut remarquer que la représentation d'un problème électromécanique couplé sous la forme (3.71) devrait convenir à tout problème avec couplage piézoélectrique projeté sur les modes en court-circuit ; dans le chapitre suivant on choisit d'étudier un problème plus général, c'est à dire non limité à une poutre, et de le réduire de manière similaire.

Modélisation éléments finis adaptée aux cas de shunts

Après avoir étudié au chapitre 3 un problème de poutre avec éléments piézoélectriques symétriques, il est intéressant de voir comment modéliser un problème à la géométrie plus arbitraire. Ce chapitre propose en premier lieu une formulation éléments finis adaptée au cas d'une structure élastique munie d'éléments piézoélectriques minces. Sa principale originalité est qu'elle introduit des variables électriques globales (la différence de potentiel aux bornes des éléments piézoélectriques d'une part et la charge contenue dans ses électrodes d'autre part). Ces variables sont naturellement adaptées au couplage du modèle éléments-finis avec un shunt.

Dans une seconde partie, ce modèle éléments-finis est projeté sur la base des modes propres du système avec les éléments piézoélectriques en court-circuit (§4.4). Une formulation analogue à celle obtenue au chapitre 3 est obtenue. Elle permet de faire apparaître de manière naturelle les coefficients de couplage modaux, qui s'exprime cette fois-ci en fonction des déformées modales et de la matrice de couplage problème éléments-finis.

Enfin, dans une dernière partie (§4.5), la formulation ci-dessus permet de bâtir un modèle éléments finis d'une poutre symétrique similaire à celle du chapitre 3. Cela permet d'une part de valider la présente formulation éléments-finis et d'autre part de fournir un modèle qui sera utilisé au chapitre 9 pour optimiser les coefficients de couplage d'une poutre utilisée pour les expériences avec les shunts à commutation (§9.1.2).

4.1 Étude bibliographique

Les premiers travaux sur des éléments finis électromécaniques couplés par piézoélectricité [1] reposent sur une formulation couplant par effet direct et inverse les champs de déplacement mécanique et de potentiel électrique. On peut remarquer que dans le cas d'applications capteur ou actionneur uniquement, les variables électriques peuvent être condensées de sorte que le problème à résoudre prend la forme d'un problème d'élasticité conventionnel, avec l'effet d'éventuels actionneurs piézoélectriques similaire à un effort imposé (parfois simulé par une contrainte de type thermique) proportionnel à la tension ; cette formulation est la base de la plupart des modèles de structures élastiques avec éléments piézoélectriques [102, 40, 103, 46, 14, 88, 100, 49, 12]. On peut trouver dans [28, 9, 55] une revue des développements récents dans le domaine.

À la différence de ces applications, les circuits type shunt ou switch imposent uniquement

une relation entre la tension et la charge dans le circuit, et nécessitent un calcul simultané de l'effet capteur et actionneur. Cela peut être fait en utilisant les fonctions adaptées d'un logiciel commercial éléments finis [66], mais cette démarche est lourde en terme de calculs.

On se propose ici de développer un modèle éléments finis adaptée au cas d'éléments piézoélectriques minces, munis d'électrodes sur leur surface et polarisés dans la direction transverse. La partie mécanique est décrite de manière conventionnelle avec des éléments finis en déplacement. On décrira l'état électrique uniquement par la différence de potentiel et la charge des électrodes, sans passer par la description complète du champ électrique. Un des avantages est que cette formulation est naturellement adaptée au cas d'électrodes imposant un potentiel uniforme et à l'intégration des charges libres sur celles-ci ; cela se fait d'habitude en imposant un potentiel identique à tous les nœuds. [62, 3, 80]. Ensuite, on projette le système couplé sur les modes du problème conservatif en court-circuit associé, qui, comme nous allons le voir, peut être considéré comme purement élastique ; on montrera ainsi que les coefficients de couplage effectifs peuvent être calculés en post-traitement d'un calcul d'élasticité effectué avec un code éléments finis standard. Ce chapitre reprend pratiquement [95].

4.2 Modélisation d'un milieu piézoélectrique

Cette section présente la forme générale des équations utilisées pour modéliser le comportement d'un milieu piézoélectrique, sous forme locale puis sous forme faible adaptée pour un passage à la méthode des éléments finis. Les indices i, j, k, l repèrent les composantes des vecteurs et tenseurs et l'on fait usage de la convention d'Einstein ; on utilise les équations d'un milieu piézoélectrique vues au chapitre 2.6 :

- l'élément piézoélectrique occupe un domaine Ω_p au repos ;
- il subit un déplacement imposé u_i^d sur une partie Γ_u de sa frontière et une densité d'efforts t_i^d sur la partie complémentaire Γ_t de sa frontière ;
- un potentiel électrique ψ^d et une densité surfacique de charge libres q^d sont prescrites sur des domaines Γ_ψ et Γ_q , qui constituent une partition de la frontière $\partial\Omega_p$

En considérant que les équations du problème s'écrivent (2.49, 2.50), les équations du problème s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} + f_i^d = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (4.1a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^d \quad \text{sur } \Gamma_t, \quad (4.1b)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u; \quad (4.1c)$$

pour la partie mécaniques ; et pour la partie électrique :

$$D_{i,i} = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (4.2a)$$

$$D_i n_i = -q^d \quad \text{sur } \Gamma_q, \quad (4.2b)$$

$$\psi = \psi^d \quad \text{sur } \Gamma_\psi, \quad (4.2c)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions initiales. On utilise la relation de comportement suivante :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (4.3)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k, \quad (4.4)$$

où c_{ijkl} est le module d'élasticité à champ électrique constant (raideur en court-circuit), e_{kij} les constantes piézoélectriques et ϵ_{ik} la permittivité électrique à déformation constante (permittivité bloquée). Cette écriture simplifie l'approche éléments finis.

On utilise les relations de gradient suivantes pour identifier les relations entre le déplacement et les déformations et le potentiel et champ électrique :

$$\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (4.5)$$

$$E_k(\psi) = -\psi_{,k}. \quad (4.6)$$

Les quantités mécaniques et électriques σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i et ψ sont fonction du temps t et du vecteur position dans Ω_p . Les quantités imposées sont fonction du temps et du vecteur position dans Ω_p pour f_i^d et sur $\partial\Omega_p$ pour les densités surfaciques u_i^d , t_i^d , ψ^d et q^d . Les caractéristiques du matériau ρ , c_{ijkl} , e_{kij} et ϵ_{ik} peuvent être fonction du vecteur position.

4.2.1 Formulation variationnelle en terme de déplacement et potentiel (u_i, ψ)

Les équations locales de la section précédente sont exprimées avec pour inconnues le déplacement mécanique u_i et le potentiel électrique ψ . Afin d'obtenir une formulation variationnelle associée à ces équations on utilise la méthode de fonction test, en deux étapes, d'abord avec les équations mécaniques puis électriques.

Tout d'abord on introduit l'espace \mathcal{C}_u des fonctions u_i définies sur Ω_p , suffisamment régulières et en particulier l'espace des fonctions cinématiquement admissibles à 0, $\mathcal{C}_u^* = \{u_i \in \mathcal{C}_u \mid u_i = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$. En multipliant l'équation de la dynamique (4.1a) par une fonction indépendante du temps $\delta u_i \in \mathcal{C}_u^*$, en intégrant sur Ω_p , en utilisant la formule de Green et en prenant en compte la condition de bord (4.1b), on obtient :

$$\int_{\Omega_p} \sigma_{ij}(u, \psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega + \int_{\Omega_p} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega_p} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \quad \forall \delta u_i \in \mathcal{C}_u^*. \quad (4.7)$$

Ensuite on considère l'espace \mathcal{C}_ψ des fonctions ψ suffisamment régulières dans Ω_p . En multipliant (4.2a) par une fonction indépendante du temps $\delta \psi \in \mathcal{C}_\psi$, en intégrant sur Ω_p en utilisant la formule de Green et en prenant en compte l'équation (4.2b) on obtient :

$$\int_{\Omega_p} D_i(u, \psi) E(\delta \psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} q^d \delta \psi \, dS + \int_{\Gamma_\psi} q^r \delta \psi \, dS \quad \forall \delta \psi \in \mathcal{C}_\psi. \quad (4.8)$$

où $q^r = -D_i n_i$ est la densité surfacique de charge libre apparaissant sur Γ_ψ .

Finalement en prenant en compte la relation de comportement (4.3) et (4.4), on peut réécrire les équations (4.7) et (4.8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega - \int_{\Omega_p} e_{kij} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega_p} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega_p} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \end{aligned} \quad (4.9)$$

et

$$\int_{\Omega_p} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta \psi) \, d\Omega + \int_{\Omega_p} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta \psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} q^d \delta \psi \, dS + \int_{\Gamma_\psi} q^r \delta \psi \, dS. \quad (4.10)$$

Ainsi la formulation variationnelle des équations couplées du problème électromécanique, équivalent aux équations (4.1a à 4.6), consiste en trouver $u_i \in \mathcal{C}_u$ tel que $u_i = u_i^d$ sur Γ_u , $\psi \in \mathcal{C}_\psi$ tel que $\psi = \psi^d$ sur Γ_ψ et la densité de charge libre surfacique q^r sur Γ_ψ , satisfaisant les équations (4.9) et (4.10) pour toutes les fonctions test $\delta u_i \in \mathcal{C}_u^*$ et $\delta \psi \in \mathcal{C}_\psi$, en tenant compte des conditions initiales.

4.3 Structure élastique avec éléments piézoélectriques

Dans cette section la formulation générale introduite est appliquée au cas particulier d'une structure munie d'éléments piézoélectriques minces, collés à sa surface ou inclus dans son volume. Cela permet avec certaines hypothèses de passer d'une formulation habituelle avec variables électriques locales ψ et D_i à une formulation faisant intervenir des variables discrètes définies pour chaque élément piézoélectrique : la différence de potentiel et la charge libre contenue sur une électrode.

4.3.1 Problème général, hypothèses

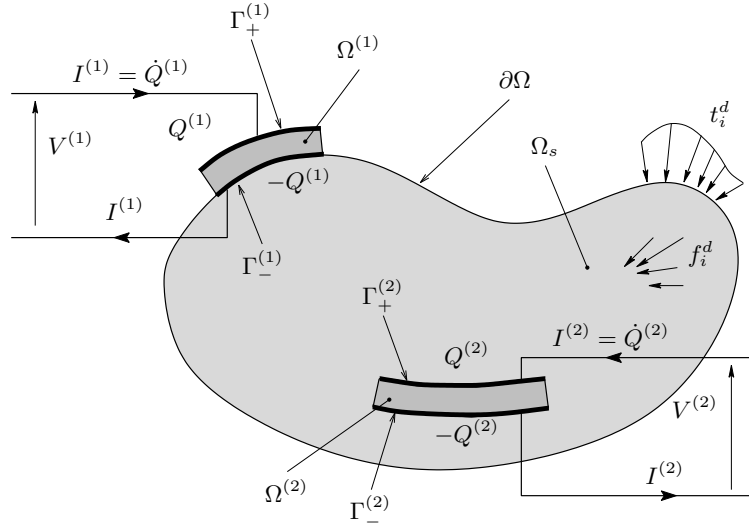


FIG. 4.1: Structure élastique avec deux éléments piézoélectriques

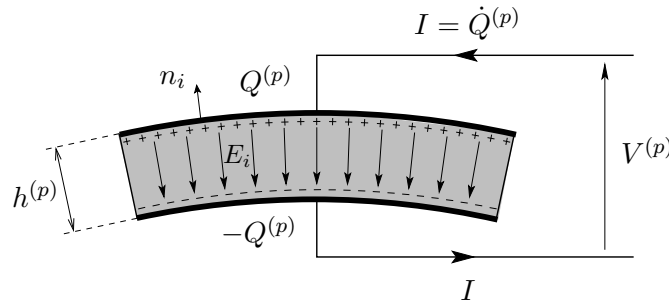


FIG. 4.2: p -ième élément piézoélectrique soumis à la différence de potentiel $V^{(p)}$, avec les charges $Q_+^{(p)}$ et $Q_-^{(p)}$ aux surfaces des électrodes (avec $Q_+^{(p)} = -Q_-^{(p)} = Q^{(p)}$ d'après (4.22).

On considère une structure élastique munie de $P \in \mathbb{N}$ éléments piézoélectriques (Figure 4.1). Le domaine occupé par la structure est Ω_s . Chaque élément piézoélectrique a la forme d'une plaque ou d'une coque légèrement courbée, d'épaisseur constante, et munie sur les faces supérieures et inférieures d'électrodes conductrices très fines. Dans tout le reste de ce chapitre, la notation (p) , $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$ désigne une quantité liée au p -ième élément ; ainsi les surfaces supérieures, inférieures et latérales du p -ième élément sont respectivement notées $\Gamma_+^{(p)}$, $\Gamma_-^{(p)}$ et $\Gamma_0^{(p)}$. Les domaines $(\Omega_s, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(P)})$ sont une partition du domaine occupé par la structure avec éléments piézoélectriques Ω .

Un ensemble d'hypothèses est proposé, permettant de s'adapter à la plupart des cas pratiques comme montré dans la section 4.3.4.

1. Seuls les éléments piézoélectriques sont constitués de matériau piézoélectrique. Les constantes de couplage piézoélectrique e_{ijk} disparaissent donc dans Ω_s . Par contre la permittivité ϵ_{ik} n'est pas forcément négligeable dans Ω_s [45].
2. L'épaisseur des éléments piézoélectriques $h^{(p)}$ pour le p -ième patch est constante et plus faible que sa longueur caractéristique (Figure 4.2).
3. L'épaisseur de l'électrode est négligeable devant $h^{(p)}$.
4. Les éléments piézoélectriques sont polarisés dans la direction transverse (normale aux électrodes), souvent notée 3. Cela induit un couplage avec la contrainte transverse, noté usuellement "33" (§2.4.2, [99, 2]) et un avec les contraintes longitudinales noté usuellement "31" ; par la suite seul ce dernier couplage sera pris en compte.
5. Les éléments piézoélectriques sont istropes dans les directions longitudinales.
6. Aucune charge libre surfacique n'est présente sur $\Gamma_0^{(p)}$.
7. Les effets de bord du champ électrique aux extrémités des éléments sont négligés.
8. Le champ électrique de composantes E_k est normal et d'amplitude constante sur l'élément, de sorte que pour tout $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$:

$$E_k = -\frac{\psi_+^{(p)} - \psi_-^{(p)}}{h^{(p)}} n_k = -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} n_k, \quad \text{dans } \Omega^{(p)}, \quad (4.11)$$

où $V^{(p)} = \psi_+^{(p)} - \psi_-^{(p)}$ est la différence de potentiel entre $\Gamma_+^{(p)}$ et $\Gamma_-^{(p)}$ et n_k est la k -ième composante du vecteur normal unitaire à la surface des électrode (Figure 4.2). Cette hypothèse est justifiée par les hypothèses 2, 4, 5 et 7.

9. Le champ de déplacement électrique de composantes D_i est négligé dans Ω_s , par rapport à sa valeur dans $\Omega^{(p)}$. Cette hypothèse est justifiée dans 4.3.4. Cependant le champ électrique ne s'annule pas toujours dans Ω_s .

4.3.2 Formulation variationnelle en déplacement et différence de potentiel $(u_i, V^{(p)})$

Une formulation variationnelle du problème électromécanique associé au système peut être obtenue en tenant compte des hypothèses 1-6 et en utilisant la formulation variationnelle du chapitre 4.2.1 à chaque sous domaine de Ω , soit $\Omega_s, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(P)}$.

Équations mécaniques

En utilisant la formulation variationnelle (4.9) successivement à chaque sous domaine de Ω puis en ajoutant toutes les équations et en tenant compte de la partition de Ω :

$$\int_{\Omega} = \int_{\Omega_s} + \sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}}, \quad (4.12)$$

on élimine toutes les intégrales de surface liées à des frontières entre sous domaines de Ω , par continuité des déplacements et équilibre des frontières. Il ne reste ainsi que les surfaces extérieures de Ω dont les domaines où les déplacement et les efforts sont imposés, Γ_u et Γ_t , sont une partition.

On définit \mathcal{C}_u l'espace des fonctions suffisamment régulières définies sur Ω et en particulier l'espace des déplacements cinématiquement admissibles à 0 $\mathcal{C}_u^* = \{u_i \in \mathcal{C}_u \mid u_i = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e_{ijk} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega - \int_{\Omega} e_{kij} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS. \quad \forall \delta u_i \in \mathcal{C}_u^* \end{aligned} \quad (4.13)$$

De plus le terme piézoélectrique intégral de cette équation peut être réécrit :

$$\int_{\Omega} e_{kij} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega = \sum_{p=1}^P -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega, \quad (4.14)$$

où $V^{(p)}$ est la différence de potentiel entre les électrodes du p -ième élément piézoélectrique, introduit dans l'équation (4.11). Pour montrer cela il faut utiliser l'hypothèse 1 impliquant $e_{ijk} = 0$ dans Ω_s et éliminer les intégrales correspondantes. Ensuite l'hypothèse 8 avec l'équation (4.11) permet d'obtenir le résultat.

Équations électriques

On applique l'équation (4.10) à chaque élément piézoélectrique.

On choisit ici d'imposer le potentiel ψ sur les électrodes $\Gamma_+^{(p)}$ et $\Gamma_-^{(p)}$, et une densité de charge surfacique nulle $q^d = 0$ sur le domaine complémentaire $\Gamma_0^{(p)}$ conformément à l'hypothèse 6 ; l'équation (4.10) appliquée au p -ième élément s'écrit alors quelque soit $\delta\psi \in \mathcal{C}_\psi$:

$$\int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta\psi) \, d\Omega + \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma_+^{(p)} \cup \Gamma_-^{(p)}} q^r \delta\psi \, dS \quad (4.15)$$

Les termes piézoélectriques de l'équation (4.15) peuvent être traités de la même manière qu'à la section 4.3.2 de façon à obtenir :

$$\int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = -\frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i \, d\Omega, \quad (4.16)$$

où $\delta V^{(p)} = \delta\psi_+^{(p)} - \delta\psi_-^{(p)}$ avec $\delta\psi_+^{(p)}$ et $\delta\psi_-^{(p)}$ les valeurs de $\delta\psi$ sur les électrodes supérieures et inférieures du p -ième élément.

De la même façon le terme diélectrique de l'équation (4.15) peut être réécrit en considérant les hypothèses 8 :

$$\int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = \frac{V^{(p)} \delta V^{(p)}}{(h^{(p)})^2} \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} n_i n_k \, d\Omega. \quad (4.17)$$

Avec l'hypothèse 2, le volume du p -ième élément est proche de $h^{(p)} S^{(p)}$, où $S^{(p)}$ est la surface moyenne de l'élément, ce qui donne :

$$\int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = C^{(p)} V^{(p)} \delta V^{(p)}, \quad (4.18)$$

où

$$C^{(p)} = \frac{\epsilon_{33} S^{(p)}}{h^{(p)}} \quad (4.19)$$

est la capacité de l'élément et $\epsilon_{33} = \epsilon_{ik} n_i n_k$ la permittivité à déformation constante (ou bloquée) du matériau dans la direction normale aux électrodes. Le terme à droite de l'équation (4.15) peut être réécrit en prenant en compte le fait que le potentiel test est uniforme sur les électrodes ; l'intégrale se réduit au produit des charges libres présentes sur les électrodes supérieures et inférieures $Q_+^{(p)}$ et $Q_-^{(p)}$ par le potentiel de ces électrodes :

$$\int_{\Gamma_+^{(p)} \cup \Gamma_-^{(p)}} q^r \delta\psi \, dS = Q_+^{(p)} \delta\psi_+^{(p)} + Q_-^{(p)} \delta\psi_-^{(p)}, \quad (4.20)$$

ce qu'on peut simplifier en appliquant la forme intégrale du théorème de Gauss à une surface fermée Σ entourant le p -ième élément ; à l'équilibre électrostatique on obtient

$$\oint_{\Sigma} D_i n_i \, dS = Q, \quad (4.21)$$

où Q est la charge libre contenue dans Σ . Dans le cas étudié, en plaçant Σ dans Ω_s ou à l'extérieur de Ω on ne lui fait traverser que des domaines où D_i est négligé, c'est à dire soit le milieu entre les éléments piézoélectriques, soit un des fils conducteurs reliés aux électrodes du p -ième élément. Le coté gauche de l'équation (4.21) s'annule et la charge libre intégralement contenue dans Σ est nulle, ce qui établit que les charges à la surface des électrodes sont opposées (voir Figure (4.2)). En notant $Q^{(p)}$ la charge présente sur l'électrode supérieure $\Gamma_+^{(p)}$ on obtient :

$$Q_+^{(p)} = -Q_-^{(p)} = Q^{(p)}. \quad (4.22)$$

et ensuite :

$$\int_{\Gamma_+^{(p)} \cup \Gamma_-^{(p)}} q^r \delta\psi \, dS = Q^{(p)} (\delta\psi_+^{(p)} - \delta\psi_-^{(p)}) = Q^{(p)} \delta V^{(p)}. \quad (4.23)$$

Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème peut maintenant être écrite, en prenant en compte les équations (4.13) et (4.15) pour chacun des P éléments et en prenant en compte les équations (4.14), (4.16), (4.18) et (4.23).

Il faut trouver $u_i \in \mathcal{C}_u$ (tel que $u_i = u_i^d$ sur Γ_u) et les P charges électriques $Q^{(p)}$ (avec les différences de potentiel $V^{(p)}$ associées prescrites) satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega + \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \quad \forall \delta u_i \in \mathcal{C}_u^* \end{aligned} \quad (4.24)$$

et

$$- \sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i \, d\Omega + \sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} C^{(p)} V^{(p)} = \sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} Q^{(p)}, \quad \forall \delta V^{(p)} \in \mathbb{R}, \quad (4.25)$$

avec les conditions initiales adéquates.

Cette formulation variationnelle est adaptée au cas où les éléments piézoélectriques sont utilisés en tant qu'actionneurs, car dans ce cas une source de tension impose la différence de potentiel $V^{(p)}$ à leurs bornes. Il est ainsi possible de calculer la réponse en déplacement du système à partir des tensions imposées $V^{(p)}$ et seulement ensuite calculer les charges si besoin avec l'équation (4.25).

On peut aussi utiliser cette formulation lorsque les éléments piézoélectriques sont en circuit ouvert ($Q^{(p)} = 0$), ou lorsqu'une charge électrique leur est imposée. Dans ce cas, ce sont les différences de potentiel qui sont solution de (4.24) et (4.25).¹

Enfin on peut utiliser (et c'est ici le but) cette formulation pour le cas d'éléments piézoélectriques connectés à un circuit électronique (shunt) qui n'impose ni la charge, ni la différence de potentiel, mais plutôt une relation entre les deux, liée à son impédance électrique. Dans ce cas, il faut ajouter cette relation aux équations (4.24) et (4.25) pour trouver la solution du problème.

4.3.3 Formulation en éléments finis

Après discrétisation éléments finis de la partie mécanique des équations (4.24) et (4.25) et en notant \mathbf{U} le vecteur des coordonnées nodales de u_i et $\mathbf{Q} = (Q^{(1)} Q^{(2)} \dots Q^{(P)})^\top$, $\mathbf{V} = (V^{(1)} V^{(2)} \dots V^{(P)})^\top$ les vecteurs colonnes des charges libres et différences de potentiel, les équations (4.24) et (4.25) s'écrivent :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} \quad (4.26a)$$

$$\int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{K}_m \mathbf{U} \quad (4.26b)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{K}_c \mathbf{V} \quad (4.26c)$$

$$\int_{\Omega} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{F} \quad (4.26d)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{V}^\top \mathbf{K}_c^\top \mathbf{U} \quad (4.26e)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} C^{(p)} V^{(p)} \Rightarrow \delta \mathbf{V}^\top \mathbf{K}_e \mathbf{V} \quad (4.26f)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} Q^{(p)} \Rightarrow \delta \mathbf{V}^\top \mathbf{Q} \quad (4.26g)$$

On obtient ainsi la formulation éléments finis générale du problème électromécanique :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_c \\ -\mathbf{K}_c^\top & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Dans cette équation \mathbf{M}_m et \mathbf{K}_m sont les matrices de masse et raideur mécaniques, de dimension $N \times N$ où N est le nombre de degrés de liberté (ddl). $\mathbf{K}_e = \text{diag}(C^{(1)} C^{(2)} \dots C^{(P)})$

¹On parle très souvent de cette condition comme le "cas capteur". Pourtant, les capteurs piézoélectriques font parfois appel à un amplificateur de charge qui a pour effet de fixer $V^{(p)} = 0$ et de mesurer $Q^{(p)}$ [90]. Il est donc nécessaire de vérifier le type d'électronique utilisée avant de conclure quant à la condition limite ainsi qu'à la valeur de la mesure.

est la matrice diagonale des capacités de chacun des éléments piézoélectriques. \mathbf{K}_c et la matrice de couplage électromécanique, de taille $N \times P$. \mathbf{F} est le vecteur des efforts nodaux. On peut reformuler ce système avec la charge comme ddl et la différence de potentiel imposée :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_m & \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^\top & \mathbf{K}_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

avec $\hat{\mathbf{K}}_m = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^\top$ matrice de raideur en circuit ouvert ; cette expression est de la même forme que celle que l'on souhaite obtenir (3.70), à quelques différences près :

- l'équation (4.28) est dimensionnée ;
- il y a plusieurs éléments piézoélectriques et donc plusieurs ddl électriques ;
- le nombre de ddl mécaniques est bien plus important (il n'y a pas eu réduction du modèle).

Si l'on souhaite converger vers la forme de l'équation (3.70) il faut réduire le système par projection modale et l'adimensionner.

4.3.4 Cas pratiques

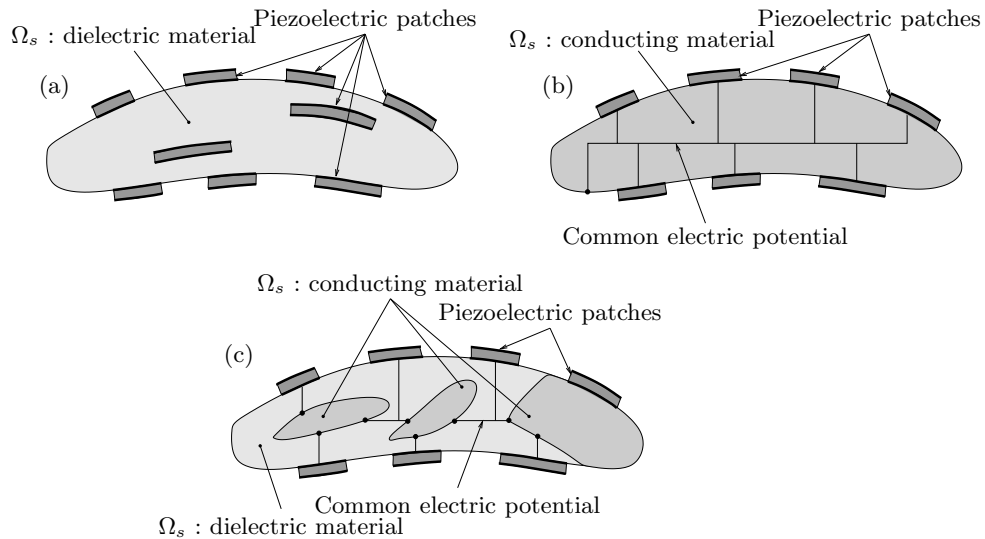


FIG. 4.3: Exemples de configurations correspondant aux hypothèses de la section 4.3.1. (a) structure Ω_s diélectrique ; (b) structure conductrice ; (c) structure Ω_s partiellement conductrice et partiellement conductrice.

Les cas pratiques où les hypothèses de la section 4.3.1 sont valides correspondent aux cas où :

- Les éléments piézoélectriques sont minces, ce qui valide les hypothèses 2 à 8.
- Le système est tel que les éléments sont du point de vue électrique comparables à un réseau de capacités indépendantes, ce qui valide les hypothèses 9 et 6.

Le premier point est clair, et le second point est ici éclairci : En posant l'hypothèse 9 on suppose que le champ de déplacement électrique D_i est négligeable dans Ω_s . Or d'après l'hypothèse 1, il n'y a pas d'effet piézoélectrique et $D_i = \epsilon_{ik} E_k$ dans Ω_s . Alors D_i dépend uniquement du champ électrique E_k et de la permittivité ϵ_{ik} de la structure.

La plupart des matériaux structurels, conducteurs et diélectriques, ont des permittivités de l'ordre de $3\epsilon_0$ (ϵ_0 étant la permittivité du vide), bien plus faible que celle de matériaux piézoélectriques qui peuvent atteindre $1000\epsilon_0$ [45]. L'hypothèse 9 est donc vraie si le champ électrique est de même ordre de grandeur ou inférieur dans la structure, comparé à sa valeur dans les patches. E_k étant le gradient du potentiel, son ordre de grandeur est la différence de potentiel entre les électrodes de divers éléments divisée par la distance entre ces électrodes. Ce champ pourra donc être important si deux conducteurs à des potentiels différents sont proches l'un de l'autre ; cette situation peut être évitée en éloignant des électrodes à des potentiels différents, ou en les ramenant à des potentiels proches. Un cas où l'on enfreindrait cette règle serait celui d'un élément piézoélectrique collé sur une structure conductrice, avec une différence de potentiel entre l'électrode collée et la structure, possible de par la présence d'un film de colle isolant. Il régnerait ainsi un champ électrique intense dans le film de colle, et celui-ci constituerait un condensateur plan de capacité non négligeable. Il faudrait alors tenir compte de cette capacité "parasite" dans la matrice \mathbf{K}_e .

Cette situation doit de toute façon être évitée, puisqu'une partie de l'énergie électrique que l'on souhaite utiliser (par exemple dans un shunt) ou que l'on amène avec un contrôleur actif serait stockée dans cette capacité ; l'efficacité² serait alors réduite.

Finalement, l'hypothèse 6 est vérifiée si la surface latérale $\Gamma_0^{(p)}$ est en contact avec un milieu diélectrique ne pouvant amener de charges libres.

Des cas pratiques vérifiant les hypothèses de la section 4.3.1 et permettant d'obtenir des systèmes efficaces sont introduits ci-dessous et présentés figure (4.3).

- Si Ω_s est constituée de matériau diélectrique, il faut vérifier que ϵ_{ik} est assez faible et que les éléments ne sont pas placés trop près l'un de l'autre. Certains éléments peuvent être inclus dans Ω_s (Figure 4.3(a)). C'est le cas typique d'une structure composite avec éléments inclus dans la matrice.
- Si Ω_s est intégralement conductrice (cas d'une structure métallique), il faut mettre toutes les électrodes en contact avec Ω_s au même potentiel que Ω_s , afin d'éviter les effets de capacité parasite du film de colle. Une bonne manière de procéder est d'utiliser une colle conductrice.
- Si certaines parties de Ω_s sont diélectriques et d'autres conductrices, il faut si possible imposer un potentiel identique à toutes les parties conductrices de Ω_s . Ainsi par exemple dans le cas d'une structure sandwich on évitera d'avoir des peaux à différents potentiels.

4.4 Réduction modale et coefficients de couplage

Dans cette section un modèle réduit du problème discrétisé obtenu à la section 4.3.3 est introduit, en projetant les inconnues du déplacement mécanique sur la base des modes en court-circuit. Il s'agit de la même démarche qu'au chapitre 3.4.1, à la différence que les modes sont ici issus du modèle élément finis.

4.4.1 Modes propres en court-circuit

Les modes propres du système en court-circuit sont les solutions de l'équation (4.27) avec $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Les pulsations (liées aux valeurs) propres ω_r et modes (vecteurs) propres Φ_r (Φ_r étant un vecteur colonne de dimension N) sont les N solutions du problème :

$$\mathbf{K}_m \Phi - \omega^2 \mathbf{M}_m \Phi = \mathbf{0}, \quad (4.29)$$

²Souvent liée au coefficient de couplage électromécanique défini au chapitre 4.4, qui serait réduit par la capacité parasite. Sauf cas très particulier [8], les capacités parasites sont à éviter ; voir 9.1.2.

qui ne dépend que des propriétés élastodynamiques de Ω . Ces modes vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\forall(i, j), \quad \Phi_i^\top \mathbf{M}_m \Phi_j = \delta_{ij}, \quad \Phi_i^\top \mathbf{K}_m \Phi_j = \omega_i^2 \delta_{ij}. \quad (4.30)$$

avec les Φ_j normalisés par rapport à la matrice de masse³ :

$$\forall r, \quad \Phi_r^\top \mathbf{M}_m \Phi_r = 1. \quad (4.31)$$

4.4.2 Projection modale du problème général

Le vecteur déplacement est écrit sous la forme :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r q_r(t). \quad (4.32)$$

En insérant cette équation dans le système (4.27), en multipliant la partie mécanique du système par Φ_r^\top et en prenant l'orthogonalité des modes en compte (4.30), le problème s'écrit pour tout $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \Phi_r^\top \mathbf{K}_c \mathbf{V} = \Phi_r^\top \mathbf{F}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{K}_e \mathbf{V} - \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_c^\top \Phi_j q_j = \mathbf{Q} \quad (4.34)$$

Cet ensemble d'équations peut se réécrire en séparant les équations de chaque élément piézoélectrique :

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \sum_{p=1}^P \chi_r^{(p)} V^{(p)} = F_r, \quad \forall r \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (4.35a)$$

$$C^{(p)} V^{(p)} - Q^{(p)} - \sum_{j=1}^N \chi_j^{(p)} q_j = 0, \quad \forall p \in \llbracket 1, P \rrbracket, \quad (4.35b)$$

où $\chi_r^{(p)}$ est le coefficient de couplage du r -ième mode avec le p -ième élément piézoélectrique, défini par :

$$\left(\chi_r^{(1)} \chi_r^{(2)} \dots \chi_r^{(P)} \right) = \Phi_r^\top \mathbf{K}_c, \quad \forall r \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (4.36)$$

et $F_r(t) = \Phi_r^\top \mathbf{F}(t)$ le forçage externe sur le r -ième mode.

On peut obtenir une autre écriture du problème (4.35a,b) en substituant $Q^{(p)}$ à $V^{(p)}$ (d'après l'équation (4.35b)) dans l'équation (4.35a) :

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^N \frac{\chi_r^{(p)} \chi_k^{(p)}}{C^{(p)}} q_k + \sum_{p=1}^P \frac{\chi_r^{(p)}}{C^{(p)}} Q^{(p)} = F_r, \quad \forall r \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (4.37)$$

Avec les unités suivantes pour les paramètres : $\text{kg}^{1/2} \cdot \text{m}$ pour q_i , $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1/2}$ pour F_i et $\text{kg}^{1/2} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{V}^{-1}$ ($\text{kg}^{-1/2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$ en SI.) pour $Q^{(p)}$.

³Ce qui fait que les unités des déformées modales sont des $\text{kg}^{-1/2}$ pour les degrés de liberté de translation et $\text{kg}^{-1/2} \cdot \text{m}^{-1}$ pour les degrés de liberté en rotation ; voir (B.1) p. 255 pour les unités de \mathbf{M}_m .

La formulation élément finis de la section 4.3.3 peut ainsi être remplacée par la formulation modale (4.35a,b) ou (4.35a,4.37) dont les inconnues sont les N coordonnées modales q_r et les P paires différence de potentiel/charge $(V^{(p)}, Q^{(p)})$ associées à chaque élément. En pratique l'intérêt de ce type de formulation est de tronquer la base modale à quelques modes, par exemple les $\tilde{N} \ll N$. Les données nécessaires pour obtenir ce modèle sont :

- les \tilde{N} modes propres en court-circuit $(\omega_r, \Phi_r)_{r \in \llbracket 1, \tilde{N} \rrbracket}$, normalisés par rapport à la matrice masse (eq. 4.31) ;
- les forçages modaux F_i ;
- les $\tilde{N} \times P$ coefficients de couplage $(\chi_r^{(p)})_{r \in \llbracket 1, \tilde{N} \rrbracket, p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$.
- les P capacités des éléments piézoélectriques $C^{(p)}$, données par l'équation. (4.19).

L'intérêt principal de la méthode proposée est que les calculs ci-dessus ne nécessitent qu'une seule analyse modale du problème *elastodynamique*. Il s'agit donc :

- de calculer les matrices liées au problème (4.27), soit $\mathbf{M}_m, \mathbf{K}_m, \mathbf{K}_c$;
- de calculer les \tilde{N} fréquences propres ω_r et déformées modales Φ_r , par résolution du problème (4.29). C'est un cas classique faisant intervenir uniquement \mathbf{M}_m et \mathbf{K}_m ;
- d'appliquer la formule (4.36) pour obtenir $\chi_r^{(p)}$. La matrice \mathbf{K}_c est la seule matrice dont l'assemblage requiert la prise en compte des caractéristiques piézoélectriques.

4.4.3 Coefficient de couplage effectif

Cette section a pour but de montrer que le coefficient $\chi_r^{(p)}$ introduit ci-dessus est directement lié au coefficient introduit au chapitre 2.7.1 pour le matériau piézoélectrique et au chapitre 3.4.2 pour une structure de type poutre. Ce coefficient de couplage effectif caractérise l'échange d'énergie entre les éléments piézoélectriques et la structure mécanique. Il est défini pour le r -ième mode par la norme [2] :

$$k_{\text{eff},r}^2 = \frac{\hat{\omega}_r^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2}, \quad (4.38)$$

où ω_r et $\hat{\omega}_r$ sont les fréquences propres en court-circuit et circuit ouvert du r -ième mode. L'ensemble d'équations (4.37) tronqué à la i -ième ligne uniquement (c'est à dire $q_j(t) \equiv 0 \quad \forall j \neq r$) donne :

$$\ddot{q}_r + \left[\omega_r^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_r^{(p)})^2}{C^{(p)}} \right] q_r + \sum_{p=1}^P \frac{\chi_r^{(p)}}{C^{(p)}} Q^{(p)} = F_r. \quad (4.39)$$

En circuit ouvert ($Q^{(p)} = 0 \quad \forall p$), le problème s'écrit :

$$\ddot{q}_r + \hat{\omega}_r^2 q_r = F_r, \quad (4.40)$$

Et en comparant les équations (4.39) et (4.40) on obtient :

$$\hat{\omega}_r \simeq \omega_r^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_r^{(p)})^2}{C^{(p)}}. \quad (4.41)$$

Cette expression est une approximation de la fréquence du r -ième mode en circuit ouvert, notée $\hat{\omega}_r$, à condition que la troncature modale soit valide. Alors en combinant les équations (4.38) et (4.41), le coefficient de couplage modal pour le r -ième mode est :

$$k_{\text{eff},r}^2 \simeq \sum_{p=1}^P \left(k_r^{(p)} \right)^2, \quad (4.42)$$

où $k_r^{(p)}$, défini par

$$k_r^{(p)} = \frac{\chi_r^{(p)}}{\sqrt{C^{(p)}\omega_r}}, \quad (4.43)$$

est le coefficient de couplage réduit entre le r -ième mode et le p -ième élément piézoélectrique. En reprenant les définitions matricielles de $\chi_r^{(p)}$, ω_r et $C^{(p)}$ liées au problème initial (4.27) on obtient une autre expression pour $k_{\text{eff},r}$ d'après (4.42) :

$$k_{\text{eff},r}^2 \simeq \frac{\Phi_r^\top \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^\top \Phi_r}{\Phi_r^\top \mathbf{K}_m \Phi_r}. \quad (4.44)$$

Il faut ainsi distinguer le cas d'un élément piézoélectrique unique, où $k_{\text{eff},r}$ est directement lié à χ_r :

$$k_{\text{eff},r}^2 \simeq k_r^2 = \frac{\chi_r^2}{C\omega_r^2}, \quad (4.45)$$

avec C capacité de l'élément. Cette relation peut être généralisée au cas de plusieurs éléments en définissant le coefficient de couplage effectif entre le r -ième mode et le p -ième élément $k_{\text{eff},r}^{(p)}$ défini par la différence des pulsations entre la situation où tous les éléments sont en court-circuit et le cas où ils sont en court-circuit sauf le p -ième qui serait en circuit ouvert (pulsation notée $\hat{\omega}_r^{(p)}$); on a alors

$$\left(k_{\text{eff},r}^{(p)} \right)^2 = \frac{\left(\hat{\omega}_r^{(p)} \right)^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2}. \quad (4.46)$$

En effet, en écrivant les équations (4.35a,b) tronquées au r -ième mode avec uniquement le p -ième élément en circuit ouvert on obtient :

$$\ddot{q}_r + \left[\omega_r^2 + \frac{\left(\chi_r^{(p)} \right)^2}{C^{(p)}} \right] q_r = F_r. \quad (4.47)$$

qui donne l'approximation suivante de $\hat{\omega}_r^{(p)}$:

$$\left(\hat{\omega}_r^{(p)} \right)^2 \simeq \omega_r^2 + \frac{\left(\chi_r^{(p)} \right)^2}{C^{(p)}}, \quad (4.48)$$

permettant finalement d'approcher $k_{\text{eff},r}^{(p)}$ du coefficient de couplage défini par (4.43) :

$$\boxed{k_{\text{eff},r}^{(p)} \simeq k_r^{(p)} = \frac{\chi_r^{(p)}}{\sqrt{C^{(p)}\omega_r}}.} \quad (4.49)$$

Cette équation montre le lien direct entre $\chi_r^{(p)}$ et le coefficient de couplage modal effectif avec l'élément concerné $k_{\text{eff},r}^{(p)}$.

On peut résumer les caractéristiques de ces divers coefficients de couplage comme suit :

- $\chi_r^{(p)}$ est issu de l'assemblage de la matrice piézoélectrique et des modes en court-circuit
- $k_r^{(p)}$ est lié à $\chi_r^{(p)}$ et présente l'avantage supplémentaire d'être sans dimension.
- $k_{\text{eff},r}^{(p)}$ est lié à $k_r^{(p)}$ et est facilement mesurable (il suffit en effet d'identifier les fréquences propres mentionnées dans la relation (4.46), comme cela a été fait par exemple §9.1.2). On pourrait aussi l'obtenir avec un code éléments finis permettant de trouver les fréquences propres avec un élément piézoélectrique en circuit ouvert.
- $k_{\text{eff},r}$ est le coefficient de couplage global et regroupe les participations de tous les éléments piézoélectriques.

On verra par la suite que ces coefficients sont capitaux pour la performance des applications de type shunt (§5.3.4, 5.4.4, [37, 32, 31]) ou switch (§7.4.4, [30]) ; il est souvent essentiel de le maximiser. C'est pourquoi un soin particulier a été pris de montrer qu'au moins deux méthodes (assemblage de matrices et différence de fréquences) permettent de les obtenir.

Il faut cependant remarquer que la formule (4.49) n'est pertinente que si la troncature à un mode est valide, ce qui exclut les cas de fréquences propres proches les unes des autres. Dans le cas où les modes seraient rapprochés, les définitions proposées peuvent être utilisées mais $k_i^{(p)}$ et $k_{\text{eff},i}^{(p)}$ pourraient être différents.

4.5 Application au cas d'une poutre stratifiée piézoélectrique

L'objectif de cette section est de proposer une formulation générale pour une poutre similaire à celle du chapitre 3 avec différentes couches, dont certaines piézoélectriques (Figure 4.4). On garde l'utilisation des notations de Voigt pour les composantes de tenseurs.

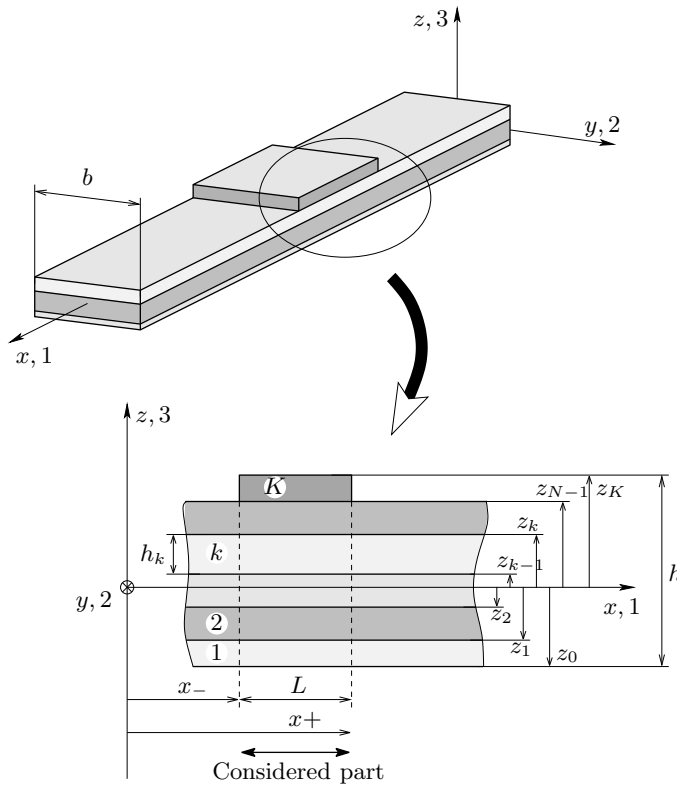


FIG. 4.4: Poutre laminée avec éléments piézoélectriques

4.5.1 Hypothèses sur les champs électriques et mécaniques

La poutre est modélisée avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli. Le champ de déplacement s'écrit :

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) + z\theta(x, t), \quad (4.50a)$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t), \quad (4.50b)$$

où u_x et u_z sont les déplacements axiaux et transverses ; u est le déplacement axial sur la fibre neutre de la poutre, w le déplacement transverse et θ la rotation des sections définie par :

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.51)$$

À partir des équations (4.5) et des hypothèses cinématiques la déformation s'écrit :

$$\varepsilon_1 = e + z\kappa, \quad (4.52)$$

où la déformation de membrane e et la courbure κ sont définies par

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{and} \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.53)$$

En ce qui concerne les aspects électrostatiques, toutes les hypothèses de la section 4.3.1 sont utilisées, ce qui fait que le champ électrique est normal aux électrodes et uniforme dans chaque élément. Sa seule composante non nulle est :

$$E_3^{(p)} = -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}}. \quad (4.54)$$

Enfin on utilise la constante de couplage piézoélectrique réduite e_{31} , tenant compte des hypothèses "poutre" (2.43).

4.5.2 Formulation variationnelle

En considérant une partie de la poutre comprise entre x^- et x^+ où ses caractéristiques sont constantes (longueur $L_e = x^+ - x^-$ avec K couches dont P éléments piézoélectriques), les équations (4.24) et (4.25) de la formulation variationnelle avec couplage électromécanique peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} \rho^k (\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_z \delta u_z) d\Omega + \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} c_{11}^k \varepsilon_1 \delta \varepsilon_1 d\Omega + \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \delta \varepsilon_1 d\Omega \\ & = \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_t^k} (t_x^k \delta u_x + t_z^k \delta u_z) dS + \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} (f_x^k \delta u_x + f_z^k \delta u_z) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$-\sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \varepsilon_1 d\Omega + \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)} \delta V^{(p)}}{(h^{(p)})^2} \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{33}^{(p)} d\Omega = \sum_{p=1}^P Q^{(p)} \delta V^{(p)}, \quad (4.56)$$

où ρ^k et Ω^k sont la densité et le domaine occupé par la k -ième couche. La poutre subit des efforts de axiaux et transverses de surface sur les extrémités (t_x^k, t_z^k) et volumiques (f_x^k, f_z^k).

Avant de détailler les termes de la formulation variationnelle on définit les moments d'ordre 0, 1 et 2 de chaque couche par :

$$\begin{aligned} [J_0^k, J_1^k, J_2^k] &= b \int_{z_{k-1}}^{z_k} [1, z, z^2] dz, \\ &= b \left[h^k, \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2}, \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \right], \end{aligned}$$

où b et h^k sont la largeur de la poutre et l'épaisseur de la k -ième couche. On reconnait alors dans la formulation variationnelle (4.55) et (4.56) les expressions suivantes

– Variation de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega^k} \rho^k (\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_z \delta u_z) d\Omega &= \int_{x^-}^{x^+} \left[I_0 (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) + I_1 (\ddot{u} \delta \theta + \ddot{\theta} \delta u) + I_2 \ddot{\theta} \delta \theta \right] dx \\ &= \int_{x^-}^{x^+} (\delta u \ \delta w \ \delta \theta) \begin{pmatrix} I_0 & 0 & I_1 \\ 0 & I_0 & 0 \\ I_1 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

où les moments d'inertie d'ordre 0, 1 et 2 sont :

$$[I_0, I_1, I_2] = \sum_{k=1}^N \rho^k [J_0^k, J_1^k, J_2^k].$$

– Variation d'énergie interne mécanique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega^k} c_{11}^k \varepsilon_1 \delta \varepsilon_1 d\Omega &= \int_{x^-}^{x^+} \left[A e \delta e + B (\kappa \delta e + e \delta \kappa) + D \kappa \delta \kappa \right] dx \\ &= \int_{x^-}^{x^+} (\delta e \ \delta \kappa) \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \kappa \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

où A est la rigidité globale, D la rigidité de flexion et B la rigidité de couplage membrane-flexion définies par

$$[A, B, D] = \sum_{k=1}^N c_{11}^k [J_0^k, J_1^k, J_2^k].$$

– Travail des efforts extérieurs

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_t^k} (t_x^k \delta u_x + t_z^k \delta u_z) dS + \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} (f_x^k \delta u_x + f_z^k \delta u_z) d\Omega \\ &= \sum_{k=1}^K \left\{ \left[\int_{\Sigma^k} (t_x^k \delta u + t_z^k \delta w - z t_x^k \delta \theta) dS \right]_{x^-}^{x^+} + \int_{\Omega^k} (f_x^k \delta u + f_z^k \delta w - z f_x^k \delta \theta) d\Omega \right\} \\ &= [N \delta u + T \delta w - M \delta \theta]_{x^-}^{x^+} + \int_{x^-}^{x^+} (n \delta u + t \delta w - m \delta \theta) dx, \end{aligned}$$

où Σ^k est la section droite de la couche k et les efforts (i) normaux , (ii) transverses et (iii) le moment de flexion des efforts de contact et volumiques sont :

$$[N, T, M] = \sum_{k=1}^K \left[\int_{\Sigma^k} t_x^k dS, \int_{\Sigma^k} t_z^k dS, \int_{\Sigma^k} z t_z^k dS \right]$$

et

$$[n, t, m] = \sum_{k=1}^K \left[\int_{\Sigma^k} f_x^k dS, \int_{\Sigma^k} f_z^k dS, \int_{\Sigma^k} z f_z^k dS \right].$$

– Contribution des effets piézoélectriques (direct et indirect) à la variation d'énergie

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \delta \varepsilon_1 d\Omega &= \sum_{p=1}^P \left[\int_{x^-}^{x^+} G_0^k V^{(p)} \delta e dx + \int_{x^-}^{x^+} G_1^k V^{(p)} \delta \kappa dx \right] \\ &= \sum_{p=1}^P \int_{x^-}^{x^+} (\delta e \ \delta \kappa) \begin{pmatrix} G_0^{(p)} \\ G_1^{(p)} \end{pmatrix} V^{(p)} dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \varepsilon_1 d\Omega &= \sum_{p=1}^P \left[\int_{x^-}^{x^+} G_0^{(p)} e \delta V^{(p)} dx + \int_{x^-}^{x^+} G_1^{(p)} \kappa \delta V^{(p)} dx \right] \\ &= \sum_{p=1}^P \int_{x^-}^{x^+} \delta V^{(p)} \begin{pmatrix} G_0^{(p)} & G_1^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \kappa \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

où $G_0^{(p)}$ et $G_1^{(p)}$ sont donnés par

$$\begin{bmatrix} G_0^{(p)} \\ G_1^{(p)} \end{bmatrix} = \frac{e_{31}^{(p)}}{h^{(p)}} \begin{bmatrix} J_0^{(p)} \\ J_1^{(p)} \end{bmatrix}.$$

– Partie électrostatique de la variation d'énergie

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)} \delta V^{(p)}}{(h^{(p)})^2} \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{33}^{(p)} d\Omega = \sum_{p=1}^P V^{(p)} C^{(p)} \delta V^{(p)}, \quad (4.63)$$

avec $C^{(p)}$ capacité de chaque élément, identique à (4.19) :

$$C^{(p)} = \frac{bL}{h^{(p)}} \epsilon_{33}^{(p)}, \quad (4.64)$$

– Travail de la charge sur les électrodes :

$$\int_{\partial\Omega^{(p)}} q \delta \psi dS = \sum_{p=1}^P Q^{(p)} \delta V^{(p)},$$

ce qui est similaire à l'équation (4.23).

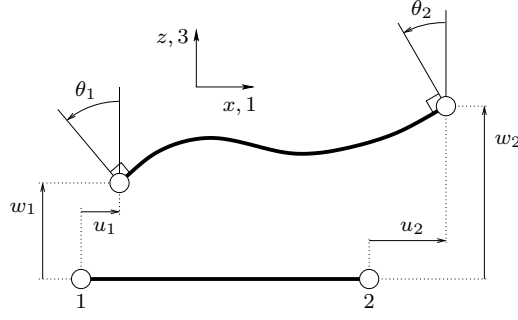


FIG. 4.5: Élément fini de poutre à deux nœuds

4.5.3 Discrétisation éléments finis

La formulation éléments finis de la poutre stratifiée est décrite dans cette section. Une notation indicielle e réfère à une quantité élémentaire. Les déplacements sont discrétisés avec des fonctions linéaires (pour le déplacement axial) et cubiques (pour le mouvement transverse). Les déplacements correspondants sont liés au vecteur des déplacement nœaux \mathbf{U}^e par

$$u^e = \mathbf{N}_u \mathbf{U}^e \quad \text{et} \quad w^e = \mathbf{N}_w \mathbf{U}^e, \quad (4.65)$$

où

$$\mathbf{U}^e = (u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ | \ u_2 \ w_2 \ \theta_2)^\top,$$

u_1 , w_1 et θ_1 (resp. u_2 , w_2 et θ_2) étant liés au premier (resp. second) nœud (voir Figure 4.5). Dans l'équation (4.65), les vecteurs d'interpolation sont définis par

$$\mathbf{N}_u = (N_1 \ 0 \ 0 \ | \ N_2 \ 0 \ 0)$$

et

$$\mathbf{N}_w = (0 \ N_3 \ N_4 \ | \ 0 \ N_5 \ N_6),$$

avec pour tout $x \in [0, L_e]$

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L_e}; \quad N_2 = \frac{x}{L_e}; \quad N_3 = \left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{L_e}\right) \\ N_4 &= x \left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2; \quad N_5 = \frac{x^2}{L_e^2} \left(3 - \frac{2x}{L_e}\right); \quad N_6 = \frac{x^2}{L_e} \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que les équations (4.51), (4.53) et (4.65) amènent l'expression suivante des rotations, déformation de membrane et courbure élémentaires :

$$\theta^e = -\mathbf{N}'_w \mathbf{U}^e \quad \text{et} \quad e^e = \mathbf{N}'_u \mathbf{U}^e \quad \text{et} \quad \kappa^e = -\mathbf{N}''_w \mathbf{U}^e, \quad (4.66)$$

où $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$. En utilisant cette discrétisation les matrices de masse et de raideur ainsi que le vecteur des efforts généralisés au niveau de l'élément peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m^e &= \int_0^{L_e} (\mathbf{N}_u^T \ \mathbf{N}_w^T \ -\mathbf{N}_w'^T) \begin{pmatrix} I_0 & 0 & I_1 \\ 0 & I_0 & 0 \\ I_1 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_w \\ -\mathbf{N}_w' \end{pmatrix} dx, \\ \mathbf{K}_m^e &= \int_0^{L_e} (\mathbf{N}_u'^T \ -\mathbf{N}_w''^T) \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u' \\ -\mathbf{N}_w'' \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}^e = [N\mathbf{N}_u^T + T\mathbf{N}_w^T + M\mathbf{N}_w^T]_0^{L_e} + \int_0^{L_e} (n\mathbf{N}_u^T + t\mathbf{N}_w^T + m\mathbf{N}_w^T) dx.$$

Les matrices sont données en annexe B.

4.5.4 Matrice de couplage électromécanique

On utilise maintenant la discrétisation proposée pour assembler la matrice de couplage électromécanique \mathbf{K}_c , qui couple les N ddl mécaniques de \mathbf{U} au P différences de potentiel de \mathbf{V} :

$$\mathbf{K}_c = \left(\mathbf{K}_c^{(1)} \mathbf{K}_c^{(2)} \dots \mathbf{K}_c^{(P)} \right), \quad (4.67)$$

où $\mathbf{K}_c^{(p)}$ est le vecteur colonne des ddl mécaniques avec le p -ième élément. Un élément piézoélectrique est le plus souvent discrétisé par plusieurs éléments finis et $\mathbf{K}_c^{(p)}$ est obtenu par assemblage des matrices élémentaires $\mathbf{K}_c^{e(p)}$ définies par :

$$\mathbf{K}_c^{e(p)} = \int_0^{L_e} (\mathbf{N}_u^T - \mathbf{N}_w^T) \begin{pmatrix} G_0^{(p)} \\ G_1^{(p)} \end{pmatrix} dx. \quad (4.68)$$

L'expression de ces matrices de dimension (6×1) est donnée en annexe (Eq. (B.4)). En raison de leur forme particulière, lors de l'assemblage, toutes les composantes de $\mathbf{K}_c^{(p)}$ s'annulent excepté celles liées aux extrémités de l'élément piézoélectrique. Il y a ainsi couplage entre la différence de potentiel et le mouvement transverse et de rotation des extrémités uniquement ; l'effet indirect se traduit par des efforts et moments ponctuels à ces points, comme déjà constaté dans [25, 94].

4.5.5 Association de plusieurs éléments piézoélectriques

Dans un des cas étudiés expérimentalement, deux éléments piézoélectriques identiques ont été utilisés, reliés en série avec le même shunt. On explique ici comment est formulé le problème associant deux éléments piézoélectriques de capacité C identique, en partant de l'écriture (4.27) avec une matrice de couplage constituée de deux colonnes $\mathbf{K}_c = [\chi_1 \chi_2]$:

$$\begin{pmatrix} M_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_m & \chi_1 & \chi_2 \\ -\chi_1^\top & C & 0 \\ -\chi_2^\top & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

On définit alors les vecteurs et matrices suivantes :

- V_S est la somme des tensions dans les éléments $V_S = V_1 + V_2$
- V_D est la différence des tensions dans les éléments $V_D = V_1 - V_2$
- \mathbf{K}_S est la matrice de couplage entre la partie mécanique et la moitié de V_S : $\chi_S = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$
- \mathbf{K}_D est la matrice de couplage entre la partie mécanique et la moitié de V_D : $\chi_D = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2}$

et on peut alors réécrire le système (4.27) sous la forme

$$\begin{cases} M_m \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_m \mathbf{U} + \chi_S V_S + \chi_D V_D = \mathbf{F} \\ -2\chi_S^\top \mathbf{U} + C V_S = Q_1 + Q_2 \\ -2\chi_D^\top \mathbf{U} + C V_D = Q_1 - Q_2 \end{cases} \quad (4.70)$$

Cas parallèle

En connectant les deux éléments en parallèle à un circuit on impose la situation suivante :

- La tension est la même dans les deux éléments, donc la différence est nulle $V_D = 0$;
- La tension totale dans chaque élément est celle dans le circuit $V = \frac{V_S}{2}$;
- La charge libre circulant dans le circuit est la somme de celle présente dans les électrodes
 $Q = Q_1 + Q_2$

L'équation (4.70) permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} M_m \ddot{U} + K_m U + 2\chi_S V = F \\ -2\chi_S^\top U + CV_S = Q_1 + Q_2 \end{cases},$$

ou encore

$$\begin{cases} M_m \ddot{U} + K_m U + (\chi_1 + \chi_2)V_S = F \\ -(\chi_1 + \chi_2)^\top U + 2CV = Q \end{cases}. \quad (4.71)$$

On constate ainsi qu'en utilisant les éléments piézoélectriques en parallèle on obtient un système couplé par la somme des matrices de couplage et dont la capacité est double de celle des éléments piézoélectriques. La tension dans le circuit est la tension dans chaque élément, et le charge qui circule est la somme des charges libres sur les électrodes des éléments. Si l'on ouvre le circuit, en imposant $Q = 0$, on obtient le système suivant en éliminant V :

$$M_m \ddot{U} + (K_m + 2\frac{\chi_S \chi_S^\top}{C})U = F. \quad (4.72)$$

On observe un ajout de raideur par rapport à la situation circuit fermé.

Cas série

En connectant les deux éléments en série on impose la situation suivante :

- La charge à la surface des électrodes des deux éléments est identique : $Q_1 - Q_2 = 0$;
- La tension dans le circuit est la somme des tensions dans les éléments : $V = V_S$;
- La charge circulant dans le circuit est $Q = Q_1 = Q_2$.

En partant de l'équation (4.70) et en remplaçant la valeur de V_D qui se déduit de la condition $Q_1 - Q_2 = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} M_m \ddot{U} + (K_m + 2\frac{\chi_D \chi_D^\top}{C})U + \chi_S V = F \\ -\chi_S^\top U + \frac{C}{2}V = Q \end{cases}.$$

On constate donc que le fait de relier les éléments piézoélectriques en série fait apparaître un couplage par la demi-somme des matrices de couplage et une capacité moitié de celle des éléments piézoélectriques. Ce qui est surtout remarquable est un terme de raideur ajoutée de la forme $2\frac{\chi_D \chi_D^\top}{C}$ qui s'explique par l'impossibilité d'avoir une charge électrique différente sur certaines électrodes. Ce terme n'apparaît pas dans le cas du couplage en parallèle. Si l'on ouvre maintenant le circuit, en imposant $Q = 0$ dans (4.73) il vient :

$$M_m \ddot{U} + (K_m + 2\frac{\chi_D \chi_D^\top}{C} + 2\frac{\chi_S \chi_S^\top}{C})U = F, \quad (4.73)$$

il y a donc un *ajout supplémentaire de raideur avec l'association série*. D'autrepart, comme la tension observée est la somme des tensions, mais que la charge circulant n'est que celle présente à la surface de chaque élément, pour un mouvement identique de la structure et par rapport à la mise en parallèle des éléments piézoélectriques *on observe une tension double et une courant moitié*.