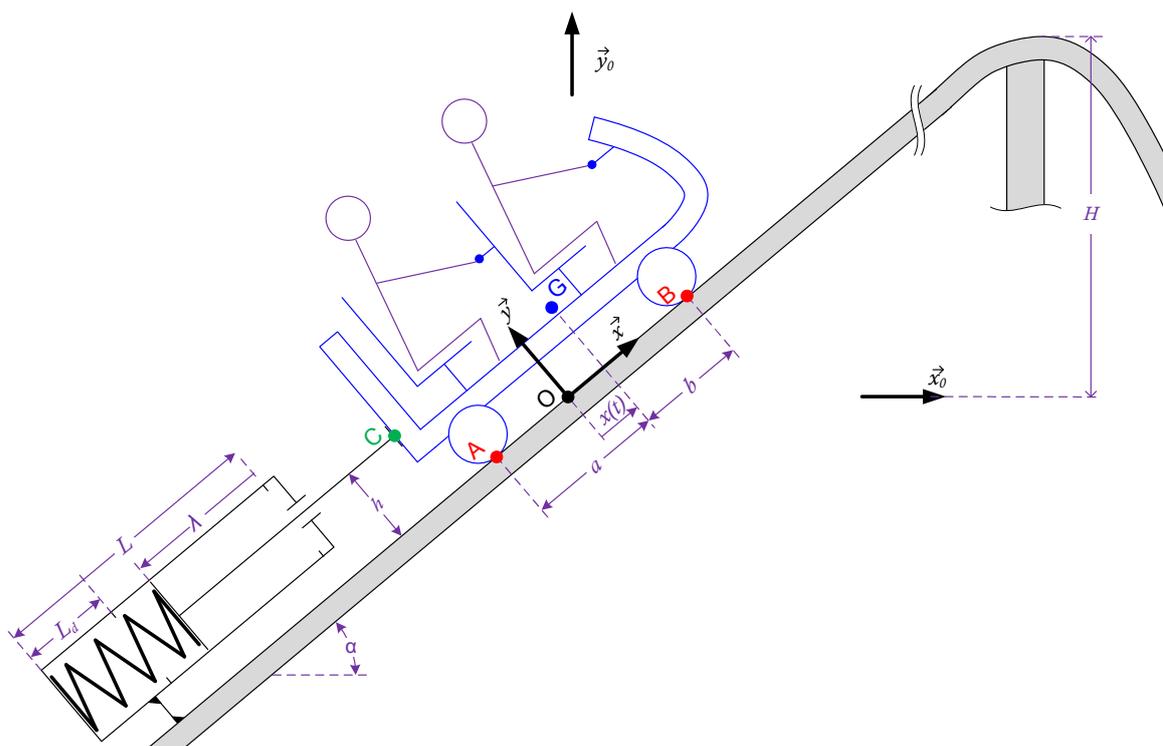


Problématique : Dans une phase de conception d'une montagne russe d'un parc d'attraction, le constructeur souhaite vérifier que son système de lancement est suffisant pour la hauteur prévue de son manège.

Le train se compose d'un seul wagon reposant au moyen de 4 roues sur deux rails inclinés d'un angle α . La propulsion initiale s'effectue grâce à une catapulte. Cette catapulte est constituée d'un ressort de raideur K comprimé pour le départ à une longueur L_d . Il atteint un état libre en fin de lancement ($F = 0$) pour la longueur L du ressort. A $t = 0$, la catapulte est déclenchée. Pour $t \geq t_1$, la catapulte n'agit plus sur le wagon, le wagon est lancé.



Hypothèses :

- Les repères sont : $\mathcal{R} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $\mathcal{R}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z})$
- le problème est de plan $(\vec{x}O\vec{y})$
- tous les frottements sont négligés
- l'ensemble S de masse m constitué du wagon et des 4 passagers (ensemble indéformable). Son centre de gravité est G tel que $\overrightarrow{OG}(t) \cdot \vec{x} = x(t)$ avec $x(t=0) = 0$.

1 Phase de lancement $0 \leq t \leq t_1$

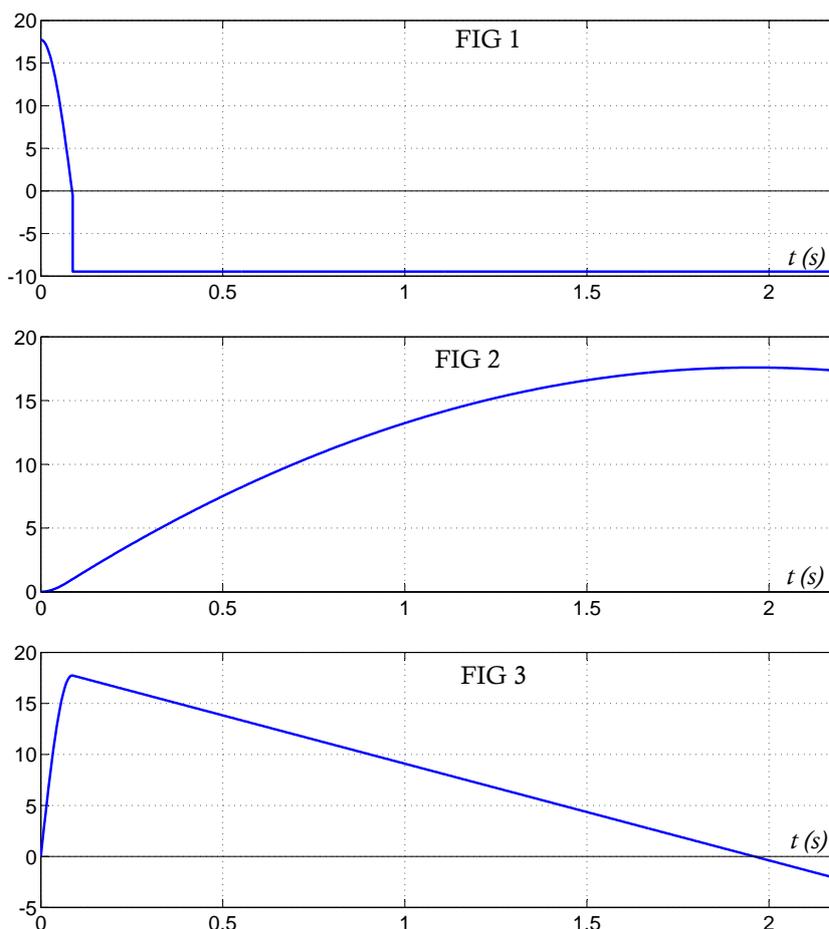
- Q1.1 :** L'effort $F(t)$ du ressort sur le wagon est proportionnel à son allongement $\lambda(t)$. Après avoir donné la relation entre $F(t)$, K et $\lambda(t)$, établir l'expression de l'effort $F(t)$ du ressort sur le wagon en fonction du déplacement $x(t)$ du wagon et de L_d , L et K . (Dans cette question faire particulièrement attention aux signes.)
- Q1.2 :** Le lanceur a été conçu pour que : $\vec{CG} \wedge \vec{x} = \vec{0}$. Qu'est ce que cela signifie pour les points C et G . Donner les coordonnées de G dans \mathcal{R} .
- Q1.3 :** On isole l'ensemble S . Le wagon a un mouvement de translation rectiligne repéré par $x(t)$, la position de son centre de gravité G . Écrire le torseur dynamique $\{\mathcal{D}(S/\mathcal{R})\}$. Justifier.

- Q1.4 :** Effectuer le bilan des actions mécaniques. Exprimer ces 4 torseurs au même point et dans le repère \mathcal{R} .
- Q1.5 :** Appliquer les Principe Fondamental de la Dynamique au solide S et donner le système de 3 équations.
- Q1.6 :** En remplaçant $F(t)$, avec l'expression de **Q1.1** ;, donner l'équation du mouvement du système de la forme : $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = b$ (E). Exprimer ω_0 et b .
- Q1.7 :** L'équation du mouvement (E) a une solution de la forme : $x(t) = K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t) + b/\omega_0^2$. Grâce aux conditions initiales $x(t=0)$ et $\dot{x}(t=0)$, exprimer les constantes K_1 et K_2 en fonction de b et ω_0 .

2 Etude qualitative : détermination de H_{max}

- Q2.1 :** Sachant que toutes les forces sont constantes pour $t > t_1$, que dire de l'accélération $\ddot{x}(t)$ pour $t > t_1$?

Sur les trois tracés ci-dessous, figurent la position $x(t)$, La vitesse $\dot{x}(t)$ et l'accélération $\ddot{x}(t)$ de G pour le mouvement du wagon sur une rampe de longueur infinie et inclinée d'un angle α (hauteur H non fixée pour l'instant). Les résultats de la partie lancement ($t < t_1$) y sont tracés. Ceux de la partie ascension libre aussi (non limitée pour l'instant). Attention, les figures ne sont pas forcément dans l'ordre.



- Q2.2 :** A partir de raisonnements simples, justifier à quelle courbe correspond $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$.
- Q2.3 :** A partir des courbes uniquement, estimer approximativement la hauteur maximale H_{max} pour que ce lancement soit suffisant. Donnée : $\alpha = 75^\circ$