

Le courant diffusé $j_{diff} = |\vec{j}_{diff}| = \vec{j}_{diff} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{e}_r$

$$= \frac{\hbar}{m} \left| \text{Im} \left(\int_{\Omega} \left(i k \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \rho \right) \right| = \frac{\hbar k}{m} \left| \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \right|$$

On peut vérifier que les composantes suivant \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ sont en $\frac{1}{r^3}$, négligeables

$$j_{diff} = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} \left| \int_{\Omega} \rho(\theta, \varphi) \right|^2$$

$$dN_{diff} = j_{diff} \times dS = j_{diff} r^2 d\Omega = \frac{\hbar k}{m} \left| \int_{\Omega} \rho(\theta, \varphi) \right|^2 d\Omega \quad (N=1)$$

$$\left| \frac{dN}{d\Omega} = \left| \rho_k(\theta, \varphi) \right|^2 \right|$$

III) Equation intégrale de diffusion

→ Eq de S. $(1 + k^2) \psi_k = \tilde{V} \psi_k$, avec $\tilde{V} = \frac{2m}{\hbar^2} V$ résolue à l'aide de la fct de Green $G(\vec{r}, \vec{r}')$

$$(1 + k^2) G = S(\vec{r}) \Rightarrow G^+(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r} e^{i k r} \quad k r = |\vec{k}| \times |\vec{r}|$$

On garde l'onde sortante $G^+(r) = -\frac{1}{4\pi r} e^{i k r}$

On choisit une solution: $\psi_k(\vec{r}) = e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{2m}{\hbar^2} \int_{\Omega} d\vec{r}' G_k^+(\vec{r} - \vec{r}') V(\vec{r}') \psi_k(\vec{r}')$

↳ limite asymptotique: $|\vec{r}| \ll |\vec{r}'| \ll$ distance cible-détecteur

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta} \approx r - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \quad \Rightarrow \quad G_k^+(\vec{r} - \vec{r}') \approx -\frac{1}{4\pi r} e^{i k r - i \vec{k}' \cdot \vec{r}'} \quad \text{avec } \vec{k}' = k \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\rho_k(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3 r' V(\vec{r}') \psi_k(\vec{r}') e^{-i \vec{k}' \cdot \vec{r}'}$$

IV) Cas particulières

1) Approximation de Born

On calcule à l'ordre 1 en prenant pour $\psi_k(\vec{r}') = \psi_k(\vec{r}') = e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}'}$ l'onde plane incidente: $\psi_k(\vec{r}') \propto e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}'}$

$$\rho_k(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3 r' V(\vec{r}') e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}'}$$

$$\left| \frac{dN}{d\Omega} = \left| \int_{\Omega} \rho_k(\theta, \varphi) \right|^2 = \left| \frac{m}{2\pi \hbar^2} \right|^2 \left| \int_{\Omega} V(\vec{r}') (e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}'}) \right|^2 \right|^2$$

Domaine de validité: $\frac{\rho_k}{r} \ll 1$ avec $\rho_k \sim V_0 \frac{m}{\hbar^2} V_0 a^3$ à k portée du potentiel

$$\Rightarrow V_0 \ll \frac{\hbar^2}{m a^2} \leftarrow \text{énergie de confinement}$$

L'approximation est correcte pour un potentiel faible.

2) Collisions à basse énergie

On observe une diffusion isotrope. Il faut $m q \rho_k$ ne dépend pas de θ et φ .

$$\rho_k(\theta, \varphi) \propto \int d^3 r' V(\vec{r}') \psi_k(\vec{r}') e^{-i \vec{k}' \cdot \vec{r}'}$$

Où V prend des valeurs $\neq 0$ sur une taille caractéristique a . Si u est $\hbar k' u \ll 1$, alors ρ_k ne dépend pas de θ et φ .

Donc si $E \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ on a alors une diffusion isotrope

Dans ce cas on a $\psi(\vec{r}) = A(e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{\rho_k(\theta, \varphi)}{\rho_k} e^{-i \vec{k}' \cdot \vec{r}})$

Dans la suite on introduit la longueur de diffusion $a_D = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\rho_k}{\rho_k}$

On en déduit $\sigma = 4\pi a_D^2$

Dans l'approximation de Born, $a_D = \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3 r' V(\vec{r}')$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \ll \frac{\hbar^2}{2m a^2}$$

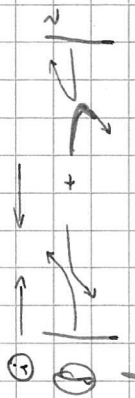
$$a_D = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\rho_k}{\rho_k} \quad (\text{dimension d'une longueur})$$

Plus généralement, on mg $f_k = \frac{-a}{1 + i k a - \frac{1}{2} k^2 a^2}$
 ↳ perte effective

- Exemples :
 - atomes froids $a \sim 10 \text{ nm}$
 - basse énergie : $k_0 \frac{\hbar^2}{2ma^2} \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ $\Rightarrow \Gamma \ll 30/k$ (Rb)
 - neutrons thermal $k \approx \frac{\sqrt{m k_B T}}{\hbar} \approx 10^{10} \text{ m}^{-1}$; $a \approx 10^{-15} \text{ m} \Rightarrow ka \ll 1 \Rightarrow$ régime des collisions faibles

3) Particules identiques

- Régime basse énergie
- Fonction d'onde diffusée $\psi_d(\vec{r}) \propto \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}$ ← non symétrisée ! ne dépend q de $|\vec{r}|$
- Bosons : $\psi_d^B(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_d(\vec{r}_1) + \psi_d(\vec{r}_2)) \propto \sqrt{2} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}$
- Fermions : $\psi_d^F(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_d(\vec{r}_1) - \psi_d(\vec{r}_2)) \propto 0$: $|\sigma = F = 0| \rightarrow$ Principe de Pauli
 ↳ pas de état quantifié
 ↳ pas de collision



l'amplitude de diffusion est $\sqrt{2}$ fois plus gde : $|\sigma = 3 = 8\pi a_s^2|$

4) Pseudo-potentiel

But: Trouver un potentiel qui ne dépend que de la longueur de diffusion a_s pour décrire les collisions
 Choix simple : $V(\vec{r}) = g(a_s) \delta(\vec{r})$
 Approximation de Born (fausse a priori) : $a_s = \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3r g(\vec{r}) \Rightarrow |g| = \frac{2\pi \hbar^2 a_s}{m}$

↳ Donne une longueur de diffusion nulle, pour un calcul exact (cf 1.10)

On choisit donc en fait un potentiel effectif $\hat{V} \psi(\vec{r}) = g \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} (r \psi)$
 Pour quelle valeur g la forme asymptotique de l'onde diffusée est solution de l'éq. de S. $\psi(\vec{r}) = A(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{f(\theta)}{r})$

$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$

Pour l'onde plane : $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\hat{H} \psi = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + g \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} (r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cos(\theta)) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + g \delta(\vec{r})$

Pour l'onde sphérique : $\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}$

$\Delta \left(\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \right) = \Delta \left(\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - 1}{r} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - 1 \right] - 4\pi \delta(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - 4\pi \delta(\vec{r})$

$\hat{V} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} = \frac{ikg}{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{ikg}{2m} \left[\frac{4\pi \hbar^2}{2m} \delta(\vec{r}) + ikg \delta(\vec{r}) \right] = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi + \frac{g}{1 + ika} \left[g - \frac{2ika}{m} \right]$

TOTAL $\Rightarrow \hat{H} \psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi + g \delta(\vec{r}) - \frac{a}{1 + ika} \left[\frac{4\pi \hbar^2}{2m} \delta(\vec{r}) + ikg \delta(\vec{r}) \right] = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi + \frac{g}{1 + ika} \left[g - \frac{2ika}{m} \right] = 0$

Donc un potentiel en $\frac{2\pi \hbar^2}{m} \delta(\vec{r}) \frac{d}{dr} (r \cdot)$ donne une amplitude de diffusion $f = \frac{-a}{1 + ika}$
 ↳ Pour des collisions de 2 particules mobiles de masse $M = 2m$, $g = \frac{2\pi \hbar^2}{M} k$

5) Facteur de forme

- Cible pas fixe, mais reliée à $r=0$ par un potentiel central
- On considère un état propre donné du mt de la cible $\psi_c(\vec{r}_c)$

$|\psi_c(\vec{r}_c)|^2$: densité de proba. de présence de la cible en \vec{r}_c
 $\int d^3r_c |\psi_c(\vec{r}_c)|^2 = \int \frac{1}{(2\pi \hbar)^3} \int d^3r V(\vec{r} - \vec{r}_c) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}_c} = TF(\text{conval. de } \psi_c(\vec{r}_c) \text{ et } V(\vec{r}_c))$

$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\vec{r}_c=0} \times \underbrace{|F(\vec{k} - \vec{k}')|^2}_{\text{facteur de forme}}$

6) Paiss en compte du spin

- Neutrons sur protons (spin 1/2)
- Moment cinétique total conservé
- Moment cinétique orbital conservé à basse énergie
- ⇒ spin conservé

Base couple des 2 spins

$$\text{triplet} \begin{cases} |++\rangle \\ |+-\rangle + |-+\rangle \\ |--\rangle \end{cases} \quad \text{singulet} \begin{cases} |+-\rangle - |-+\rangle \\ \underline{S=0} \end{cases}$$

$$S=1$$

→ S doit être conservé

→ on introduit $a_3^{(S)}$ (singulet) et $a_3^{(T)}$ (triplet)

Système non polarisé : mélange $(|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle)$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{4} a_3^{(S)2} + \frac{3}{4} a_3^{(T)2}$$