

## MP111 : Physique statistique et évolution des systèmes quantiques PHYTEM 2012-2013

*Contrôle Continu du 26 Octobre 2012*

### 1 - Mesure des fonctions de Wigner des états $|0\rangle + |n\rangle$

Dans cet exercice nous étudions les fonctions de Wigner des états de l'oscillateur harmonique à une dimension de la forme  $|0\rangle + |n\rangle$ . La réalisation de ces états et leur tomographie a été décrite dans un article de 2009 d'un groupe de l'université de Californie (voir figure 1) sur des systèmes basés sur des résonateurs supraconducteurs.

#### Matrice densité

1. Calculer les éléments de matrice de l'opérateur densité de l'état pur  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  dans la base des états de Fock  $\{|n\rangle\}$ . Comparer avec les résultats de la figure 1 (panneau du bas).

#### Fonction de Wigner de l'état $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$

On rappelle la définition de la fonction de Wigner (en unités adimensionnées) :

$$\mathcal{W}[\hat{\sigma}] = W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int du \langle x - u/2 | \hat{\sigma} | x + u/2 \rangle e^{iup}$$

On donne aussi les fonctions d'onde adimensionnées des deux premiers niveaux de l'oscillateur harmonique :

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi^{1/4}} 2xe^{-x^2/2}$$

En TD, nous avons trouvé les expressions suivantes des fonctions de Wigner de l'état fondamental et du premier état excité de l'oscillateur harmonique :

$$W_0(x, p) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+p^2)} \quad \text{et} \quad W_1(x, p) = \frac{1}{\pi} (2x^2 + 2p^2 - 1) e^{-(x^2+p^2)}$$

2. En utilisant les résultats précédents en déduire celle de l'état  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ .
3. Représenter les coupes de la fonction de Wigner suivant les axes  $p = 0$  et  $x = 0$  et comparer avec la figure 1.

## Tomographie

Le but de la tomographie est de reconstituer expérimentalement la fonction de Wigner qui caractérise entièrement l'état. On peut le faire relativement simplement en utilisant des mesures de populations dans chaque état propre de l'oscillateur harmonique (qui en pratique s'effectue en étudiant la fréquence de transition vers un autre état). On va montrer que l'on peut reconstruire la fonction de Wigner à l'aide d'un ensemble de mesures de l'opérateur parité de l'état déplacé par l'ajout d'un champ cohérent de valeur variable.

L'opérateur parité est un opérateur hermitien défini par  $\hat{\mathcal{P}}|x\rangle = |-x\rangle$  où  $|x\rangle$  sont les états propres de l'opérateur position.

4. Montrer que en représentation position  $\hat{\mathcal{P}}\psi(x) = \psi(-x)$ .
5. Expliquer pourquoi on a aussi  $\hat{\mathcal{P}}|n\rangle = (-1)^n|n\rangle$  et montrer que la valeur moyenne de l'opérateur parité dans un état décrit par l'opérateur densité  $\hat{\sigma}$  peut s'écrire  $\sum_n (-1)^n \sigma_{nn}$ .  
( où  $\sigma_{nn} = \langle n|\hat{\sigma}|n\rangle$  )

On introduit l'opérateur déplacement  $\hat{\mathcal{D}}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}$  et on rappelle que

- $\hat{a} = (\hat{x} + i\hat{p})/\sqrt{2}$
- $e^{(\hat{A}+\hat{B})} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$  (avec  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  qui doivent commuter avec leur commutateur  $[\hat{A},\hat{B}]$ .)
- $[\hat{x},\hat{p}] = i$  et  $e^{i\hat{p}u}|x\rangle = |x-u\rangle$

6. Calculer  $\hat{\mathcal{D}}(\alpha)|u/2\rangle$  où  $|u/2\rangle$  est un ket position. On introduira  $x$  et  $p$  tels que  $\alpha = (x + ip)/\sqrt{2}$ .

7. En déduire que  $W(x,p) = \frac{1}{\pi} \text{Tr} \left[ \hat{\mathcal{D}}(-\alpha)\hat{\sigma}\hat{\mathcal{D}}(\alpha)\hat{\mathcal{P}} \right]$ .

8. Justifier que l'on peut déterminer la fonction de Wigner en  $\alpha$  en mesurant les populations de l'état déplacé de  $\alpha$ .

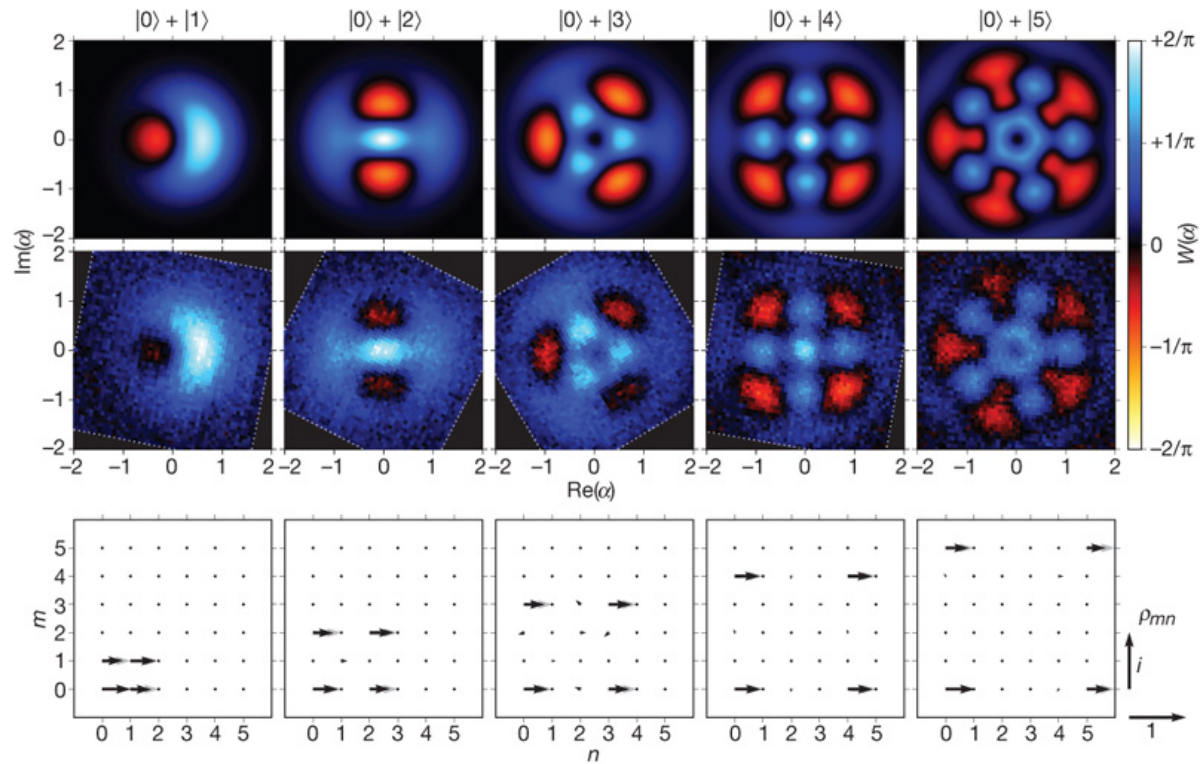


Figure 1: Figure extraite de *Nature* **459** 546 (2009). La ligne du haut représente les fonctions de Wigner théorique, la ligne du milieu les fonctions de Wigner mesurées et la ligne du bas les matrices densités. Les fonctions de Wigner sont représentées dans le plan  $(x, p)$  et les matrices densités sont représentées par des vecteurs dans le plan complexe pour chaque élément. (flèche horizontale=nombre réel). Pour plus de détails voir le cours du Collège de France 2010-2011 de S. Haroche.

## 2 - Fluctuations du nombre de particules dans un gaz de Fermions.

On considère un gaz parfait de fermions identiques, de masse  $m$  et tous dans le même état de spin. Nous supposons que le gaz est confiné à une dimension et à l'équilibre thermodynamique. On définit un sous-système  $S$  de longueur  $L$  pouvant échanger des particules avec son environnement constitué du reste du gaz. Nous nous plaçons donc dans l'ensemble grand-canonique. Nous nous intéressons aux fluctuations du nombre total de particules ( $\Delta N = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}$ ) dans ce sous-système. On utilisera les variables  $L$ ,  $\beta$  et  $\mu$  pour décrire le système.

### Fluctuations dans le cas général

Les résultats généraux ci-dessous sont indépendants de la dimensionalité du système. On désigne par  $\{\ell\}$  l'ensemble des états microscopiques à plusieurs particules du système. On désigne par  $E_\ell$  et  $N_\ell$  l'énergie et le nombre de particules de l'état  $\ell$ .

1. Ecrire la forme générale de la fonction de partition grand canonique,  $\Xi$ , comme une somme sur  $\ell$ .
2. Donner la probabilité de réalisation du micro état  $\ell$ .
3. Exprimer le nombre moyen de particules en fonction d'une dérivée de  $\Xi$  par rapport à  $\mu$ . Exprimer l'énergie moyenne des particules en fonction d'une dérivée de  $\Xi$  appropriée.
4. Exprimer de même la valeur moyenne de  $N^2$  comme une dérivée de  $\Xi$  et en déduire que les fluctuations du nombre total de particules sont reliées à  $\langle N \rangle$  par la formule:

$$\Delta N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu}. \quad (1)$$

5. Soit maintenant  $\{\lambda\}$ , l'ensemble des états à 1 particule du système ( $\lambda$  représentant l'ensemble des nombres quantiques). On désigne par  $\epsilon_\lambda$  l'énergie de l'état  $\lambda$ . Donner l'expression des nombres d'occupation moyens  $n_\lambda$  des états  $\lambda$ .
6. Montrer que la variance du nombre total de particules s'écrit  $\Delta N^2 = \sum_\lambda (n_\lambda - n_\lambda^2)$ .
7. Déterminer  $\Delta N^2$  dans le régime de faible dégénérescence où le système est décrit par la statistique de Boltzmann.
8. Sur la figure 2 on a reporté la mesure expérimentale de la variance du nombre de particules dans un gaz de fermions. Deux séries de points expérimentaux pour deux températures différentes sont représentées et reliées par une courbe pour guider l'oeil. La droite en pointillés est une courbe théorique. Que représente-t-elle ? Quelle courbe attend-on à température nulle ? A votre avis laquelle des deux séries de points correspond à la température la plus faible ?

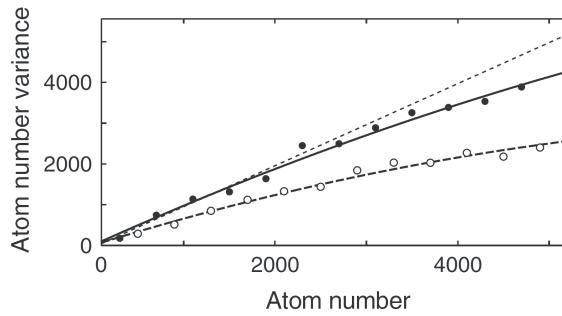


Figure 2: Figure extraite de *PRL* **105** 040402 (2010) du groupe de W. Ketterle au MIT. Variance du nombre de particules en fonction du nombre de particules pour deux températures différentes ( $T = 0.21 T_F$  et  $T = 0.6 T_F$ ). Les points sont reliés par une courbe pour guider l'œil et la courbe en pointillés est une courbe théorique. Les résultats sont obtenus sur un gaz tridimensionnel d'atomes fermioniques ( ${}^6\text{Li}$ ).

### Fonction de corrélation à température non nulle

On rappelle que l'on se place de nouveau dans l'ensemble grand-canonique et on considère ici exclusivement le cas d'un gaz à une dimension de longueur  $L$  avec des conditions aux limites périodiques. On fera les calculs dans la limite thermodynamique.

9. Calculer le vecteur d'onde de Fermi  $k_F$  du gaz 1D en fonction de  $\rho_0 = \langle N \rangle / L$ . Cette relation sera utilisée tout au long de l'exercice.
10. Rappeler la valeur du potentiel chimique  $\mu$  à température nulle en fonction de l'énergie de Fermi.
11. A l'aide du développement à basse température établi en cours:

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \simeq \int_0^\mu g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6} g'(\mu) (k_B T)^2 + \dots \quad (2)$$

où  $g(\epsilon)$  est une fonction régulière (continue et dérivable) de l'énergie  $\epsilon$ , calculer  $\langle N \rangle$  en fonction de  $\mu$  au second ordre en température  $T$ .

12. Ecrire  $\mu$  sous la forme d'un développement en  $T/T_F$  jusqu'à l'ordre 2 inclus et en déduire que  $\mu = \epsilon_F (1 + \frac{\pi^2}{12} (T/T_F)^2)$ .
13. En utilisant les résultats de cette partie et de la première partie, déterminer l'expression de  $\Delta N^2 / \langle N \rangle$  en fonction de  $T/T_F$ . Que vaut-elle pour  $T = 0$  ?

### Fonction de corrélation à température nulle

A température nulle il n'est plus justifié de décrire le système de longueur  $L$  dans l'ensemble grand-canonique. Par contre on peut réaliser un traitement exact reposant sur la fonction de corrélation à deux corps.

Nous rappelons que l'opérateur nombre de particules dans l'intervalle de longueur  $L$  s'écrit

$$\hat{N} = \int_0^L dx \hat{\rho}(x) = \int_0^L dx \sum_{i=1}^N |i : x\rangle \langle i : x| \quad (3)$$

et la fonction de corrélation à deux corps

$$g^{(2)}(x, x') = \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} |i : x\rangle \langle i : x| \otimes |j : x'\rangle \langle j : x'| \right\rangle, \quad (4)$$

où  $|i : x\rangle$  désigne l'état de position déterminée pour la particule  $i$ .

14. Justifier que dans le système qui nous intéresse,  $g^{(2)}(x, x')$  ne dépend que de  $|x - x'|$ .

15. En utilisant les équations (3) et (4), montrer que

$$\langle N^2 \rangle = \langle N \rangle + \int_0^L dx \int_0^L dx' g^{(2)}(x - x').$$

16. Montrer que

$$\int_0^L dx \int_0^L dx' g^{(2)}(x - x') = 2 \int_0^L du (L - u) g^{(2)}(u).$$

*On pourra faire le changement de variable  $u = x - x'$  et  $v = x + x'$*

17. Pour des fermions sans interaction à température nulle en 1D, nous avons établi en TD que

$$g^{(2)}(u) = \rho_0^2 [1 - \text{sinc}^2(k_F u)] \quad (5)$$

Montrer que, dans la limite  $k_F L \gg 1$ , les fluctuations du nombre de particules sont

$$\Delta N^2 \simeq \frac{1}{\pi^2} [1 + \gamma + \ln(2k_F L)].$$

Expliciter la variation de  $\Delta N^2$  avec  $N$ .

On rappelle que dans la limite  $x \rightarrow \infty$ ,

$$\int_0^x dt \frac{\sin^2 t}{t^2} \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2x} + o(x^{-1}) \quad \text{et} \quad \int_0^x dt \frac{\sin^2 t}{t} \simeq \frac{1}{2} \ln(2x) + \frac{1}{2} \gamma + o(1)$$

où  $\gamma \simeq 0.577$  est la constante d'Euler.