

Examen du 24 Janvier 2014

Durée de l'épreuve : 3h

Les documents, calculatrices, téléphones, ... ne sont pas autorisés. Seul le formulaire est autorisé.

1 Gaz parfait de bosons à deux dimensions

On étudie un gaz parfait constitué de N bosons indépendants ($N \gg 1$) de masse m et spin nul.

1.1 Gaz parfait dans un piège harmonique

Dans cette partie les atomes sont confinés dans un piège harmonique isotrope à deux dimensions de pulsation ω : $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$.

1. Donner l'expression des énergies propres d'une particule dans ce piège. On introduira les nombres d'occupation n_x et n_y .

On se place dans l'approximation $\varepsilon \gg \hbar\omega$ et on néglige pour ce calcul de la densité d'états l'énergie de l'état fondamental.

2. Quel est le nombre d'états possibles $\Theta(\varepsilon)$ d'énergie inférieure à ε ? De même, quel est le nombre d'états $\Theta(\varepsilon + d\varepsilon)$ d'énergie inférieure à $\varepsilon + d\varepsilon$? En déduire que la densité d'états en énergie s'écrit $\rho(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(\hbar\omega)^2}$.

On souhaite maintenant étudier le phénomène de condensation de Bose-Einstein dans ce piège. On se place dans l'ensemble grand-canonique.

3. Quel est le domaine de variation du potentiel chimique μ ?
4. Calculer le nombre maximal d'atomes dans les états excités à la limite thermodynamique. Peut-on observer la condensation de Bose dans ce système?
5. Calculer la température critique. Faire l'application numérique pour un système de $N = 10^6$ atomes dans un piège de pulsation $\omega = 2\pi \times 100$ Hz.

1.2 Gaz parfait uniforme

Dans cette partie on suppose que les atomes sont libres mais confinés sur une surface d'aire S . On utilisera les conditions aux limites périodiques.

6. Donner les états et les énergies propres du système ainsi que la densité d'états en énergie $\rho(\varepsilon)$.
7. Ecrire la relation qui détermine le potentiel chimique μ en fonction de N , S et de la température T , dans l'hypothèse où le gaz n'a pas de fraction condensée.
8. Montrer que l'intégrale qui figure dans cette relation diverge lorsque μ tend vers zéro. En déduire qu'il existe, pour toute valeur de N/S et de T , une valeur de μ négative vérifiant la relation. Qu'en conclure pour le phénomène de condensation de Bose à deux dimensions?
9. Calculer le potentiel chimique μ en fonction de T et de N/S . Tracer la courbe représentant la fugacité $e^{\beta\mu}$ en fonction de T .
10. On pose

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2 N}{mk_B S}. \quad (1)$$

Montrer, en comparant la longueur d'onde thermique à la distance moyenne entre deux particules voisines, que des effets quantiques sont attendus pour $T \leq T_0$.

11. Montrer que le grand potentiel J et l'énergie E vérifient :

$$J = -E. \quad (2)$$

12. Montrer que la capacité calorifique à surface S et nombre de particules N constants s'écrit

$$C_S = \frac{2E}{T} - Nk_B \frac{T_0}{T} \frac{1}{e^{T_0/T} - 1}. \quad (3)$$

13. Donner une expression approchée de E et de C_S dans les domaines $T \ll T_0$ et $T \gg T_0$.

1.3 Gaz parfait uniforme de taille finie

On considère un gaz uniforme toujours à deux dimensions dans une boîte carrée de côté L et dans la suite on ne se placera pas la limite thermodynamique pour laquelle on fait tendre cette taille vers l'infini. On considère toujours les conditions aux limites périodiques.

1.3.1 Discussion qualitative

La description de ce système fait entrer en jeu trois énergies caractéristiques : le potentiel chimique μ , l'énergie thermique $k_B T$ et l'énergie E_0 associée au confinement sur la taille L .

14. Ecrire une expression donnant l'ordre de grandeur de E_0 en fonction de L .
15. En s'inspirant des résultats de la première partie dans un piège harmonique comment se compare les trois échelles d'énergies lorsqu'il y a condensation de Bose-Einstein ?
16. En déduire une condition sur le potentiel chimique pour qu'il y ait condensation de Bose. Vérifier que dans la limite $L \rightarrow \infty$ on retrouve la condition habituelle pour la condensation.
17. Comparer dans ce régime la longueur d'onde de de Broglie à L .

1.3.2 Condition de condensation

Pour décrire la condensation dans ce cas il faut élargir la définition vue en cours. On utilise la fonction de corrélation d'ordre 1 qui décrit les corrélations entre particules en fonction de leur distance relative. Cette fonction est identiquement égale à 1 pour un condensat pur à 3 dimensions. Dans le cas à deux dimensions c'est une fonction décroissante de la distance. On considère qu'il y a un condensat si cette décroissance se fait sur une échelle de longueur de la taille du système considéré. Cette fonction de corrélation est définie par :

$$g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')}{\sqrt{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}} \quad \text{avec} \quad G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{r}' | \hat{\rho} | \vec{r} \rangle.$$

où $\hat{\rho}$ est l'opérateur densité du système. On considère que le système est dans un mélange statistique des différents états propres du hamiltonien à une particule. Le poids statistique est proportionnel au nombre d'occupation moyen de l'état de vecteur d'onde \vec{k} de la distribution de Bose-Einstein $n_{\vec{k}}$.

18. Montrer que

$$g^{(1)}(\vec{r}) = \frac{S}{N(2\pi)^2} \int n_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^2k$$

où $g^{(1)}(\vec{r}'') = g^{(1)}(\vec{r} - \vec{r}')$.

On s'intéresse maintenant aux états de basse énergie $\varepsilon_{\vec{k}} \ll 1$.

19. Montrer qu'on peut écrire

$$n_{\vec{k}} \approx \frac{4\pi}{\lambda_{dB}^2} \frac{1}{k^2 + k_c^2}$$

où k_c est à déterminer.

On admet ensuite que la transformée de Fourier de cette fonction donne

$$g^{(1)}(r) \approx e^{-r/\ell} \quad \text{avec} \quad \ell = 1/k_c$$

20. En utilisant les résultats de la partie sur le gaz uniforme, récrire ℓ en fonction de λ_{dB} et de la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} = n\lambda_{dB}^2$ (où $n = N/L^2$). On supposera $\mathcal{D} \gg 1$.
21. En déduire une condition sur \mathcal{D} en fonction de L^2/λ_{dB}^2 pour avoir condensation.
22. Faire l'application numérique pour une boîte de taille $L = 100\mu\text{m}$, et des atomes de masse $m = 10^{-25}\text{kg}$ à la température $T = 100\text{nK}$. Comparer avec le résultat pour un gaz uniforme à 3 dimensions vu en cours.
23. Récrire cette condition de condensation comme un critère comparant le potentiel chimique à E_0 et comparer avec le résultat de la discussion qualitative.

2 Photoionisation

On étudie ici l'ionisation d'un atome soumis à un champ lumineux. On traite le cas de l'atome d'hydrogène couplé à une onde monochromatique.

L'atome est modélisé de la façon suivante :

- Un état fondamental d'énergie $E_g < 0$ décrit par la fonction d'onde $\phi_g(\vec{r})$.
- Un continuum d'énergie $E > 0$ décrit par des états $|e\rangle$.

On suppose que les états du continuum ne sont pas influencés par le potentiel coulombien et l'électron émis est donc décrit comme une particule libre. On suppose que l'électron est contenu dans une boîte de volume V avec des conditions aux limites périodiques.

Le champ lumineux est décrit par son potentiel vecteur \vec{A} traité classiquement (le potentiel scalaire est supposé nul.) :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \vec{\epsilon} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

où $\vec{\epsilon}$ décrit la polarisation de l'onde, ω sa pulsation et \vec{k} son vecteur d'onde.

2.1 Ordres de grandeur

1. Donner un ordre de grandeur de l'énergie d'ionisation E_I d'un atome d'hydrogène dans son état fondamental. Calculer la longueur d'onde correspondante et la comparer à la taille typique de l'état fondamental.

2.2 Densité d'états

On veut calculer la densité d'états pour l'électron émis. On appelle \vec{k}_e le vecteur d'onde de l'électron émis par le processus de photoionisation et on pose \vec{u} le vecteur unitaire portant \vec{k}_e : $\vec{u} = \frac{\vec{k}_e}{k_e}$.

2. Quels sont les états propres et les énergies propres correspondantes ?
3. Calculer $\rho(E, \theta, \phi)$ la densité d'état en énergie pour un angle donné du vecteur d'onde \vec{k}_e et une polarisation donnée $\vec{\epsilon}$ où θ et ϕ sont les angles en coordonnées sphériques (voir figure 1).
On a donc $\rho(E, \theta, \phi)dEd\Omega$ le nombre d'états d'énergie comprise entre E et $E + dE$ et avec un vecteur d'onde faisant un angle (θ, ϕ) avec la direction z à $d\Omega$ près.

2.3 Hamiltonien de couplage

On rappelle le hamiltonien de couplage vu en cours :

$$\hat{V} = -\frac{q_e}{m} \hat{p} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

où m est la masse de l'électron et q_e sa charge.

4. Qu'appelle-t-on approximation dipolaire électrique ? Expliquer pourquoi elle n'est pas applicable si $\hbar\omega \gg E_I$.
5. Expliciter l'élément de matrice $\langle e | \hat{V} | g \rangle$. Montrer qu'il se décompose en deux termes et expliquer précisément pourquoi un seul des deux est pertinent dans notre étude.
Si vous ne savez pas quel terme choisir la réponse se trouve à la question suivante.

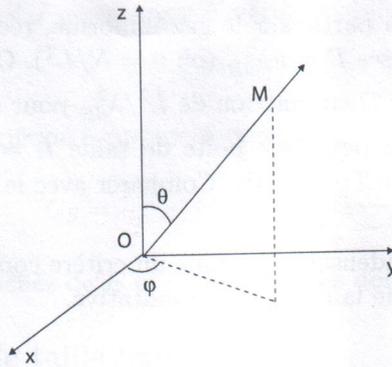


FIGURE 1 - Coordonnées sphériques.

6. Calculer $|\langle e|\hat{V}|g\rangle|^2$ et montrer qu'il s'exprime en fonction de la transformée de Fourier de $\phi_g(\vec{r})$ définie par :

$$\tilde{\psi}_g(\vec{q}) = \int d^3r e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \phi_g(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{q} = \vec{k}_e - \vec{k}$$

et de $(\vec{u}\cdot\vec{\varepsilon})^2$. On exprimera le résultat en fonction de k_e la norme du vecteur \vec{k}_e .

2.4 Taux de photoionisation

7. En utilisant la règle d'or de Fermi déterminer le taux de photoionisation dans une direction donnée $\frac{d\Gamma}{d\Omega}$ à partir des résultats précédents.
8. Quelles sont les conditions pour pouvoir appliquer la règle d'or de Fermi ?

2.5 Section efficace différentielle de photoionisation

On peut interpréter l'étude précédente comme la diffusion d'un photon sur un atome.

9. Donner la définition de la section efficace différentielle.
10. Ecrire le flux de photons incidents en fonction de \mathcal{A}_0 , la vitesse de la lumière c , de l'énergie d'un photon $\hbar\omega$ et de la constante diélectrique du vide ε_0 .
On rappelle que la puissance électromagnétique traversant une surface est donnée par le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ à travers cette surface et que $\vec{\Pi} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$.
11. En déduire la section efficace différentielle de photoionisation.

2.6 Dépendance angulaire

On souhaite expliciter maintenant la dépendance angulaire de la section efficace différentielle. On suppose que l'énergie de l'électron émis est très grande devant son énergie de liaison initiale. On considère un atome dans l'état fondamental soit $\phi_g(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$ où a_0 est le rayon de Bohr. Enfin on pose \vec{k} suivant la direction z .

12. En déduire que $\frac{k}{k_e} \approx \frac{1}{2} \frac{v}{c}$ où v est la vitesse de l'électron après ionisation. Dans la suite on se place à la limite $\frac{v}{c} \ll 1$.
13. Expliquer pourquoi $k_e a_0 \gg 1$.

On suppose que la polarisation de l'onde incidente est suivant \vec{e}_x . On donne la transformée de Fourier de e^{-r/a_0} :

$$\int d^3r e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} e^{-r/a_0} = \frac{8\pi a_0^3}{(q^2 a_0^2 + 1)^2}$$

14. Montrer que la section efficace différentielle vaut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8q_e^2}{\pi c \varepsilon_0 \omega a_0^5 m k_e^5} \frac{\cos^2 \phi \sin^2 \theta}{(1 - \frac{v}{c} \cos(\theta))^4}$$

15. Dans quelle direction est émis l'électron avec la plus grande probabilité ?