

ENS DE CACHAN

PHYTEM

PHYSIQUE NON LINÉAIRE

Systemes dynamiques hamiltoniens

Auteur :
Louis D'ERAMO

d'après le cours de :
Jacques LASKAR

Table des matières

| | | |
|---|-------------------------------|---|
| 1 | introduction de l'hamiltonien | 2 |
|---|-------------------------------|---|

1 introduction de l'hamiltonien

Dans la plupart des cas on a :

$$\frac{d}{dt}(m_i, \vec{v}_i) = \vec{F}_i \text{ où } \vec{F}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

$$\text{soit } T = \frac{1}{2}m_i\vec{r}_i^2$$

$$\text{On a } L = T(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_i)$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0(1)} \rightarrow \text{réécriture des lois de Newton.}$$

$$\text{Soit } S_\gamma = \int_{t_2}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt \text{ nommé action.}$$

Proposition :

Les trajectoires de (1) sont les chemins γ qui extremalisent l'action parmi les chemins γ à extrémités fixe.

Démonstration :

$$\begin{aligned} S_{\gamma+\epsilon h} - S_\gamma &= \int_{t_2}^{t_1} (L(x + \epsilon h, \dot{x} + \epsilon \dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t)) dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \epsilon h + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \epsilon \dot{h} \right) \right) dt \\ &= \epsilon \left[\int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial x} h dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right]_{t_2}^{t_1} - \int_{t_2}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h dt \right] \end{aligned}$$

or $h(t_1) = h(t_2)$, d'où le terme intégré est nul

$$\begin{aligned} &= \epsilon \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h \right) h dt \\ &= 0 \quad \forall h \end{aligned}$$

Soit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ appelé mouvement généralisé

$$\text{On a donc } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ et } dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{D'où } dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{Et } p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$$

$$\text{D'où } dL - d(p_i \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Soit $dH = -\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$, où $H = p_i q_i - L$ est appelé Hamiltonien du système

$$\text{D'où } \begin{cases} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

→ pourquoi cette expression ?

Soit $T = \frac{1}{2} {}^t \dot{q} B \dot{q}$ où B est une matrice symétrique

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = B \dot{q}$$

$${}^t p \dot{q} = {}^t \dot{q} B \dot{q} = 2T$$

$$\begin{aligned} H &= 2T - L \\ &= 2T - (T - L) \\ &= T + U \end{aligned}$$

d'où → H est l'énergie totale du système → équation simple