

Standard Map Bis

Pendule simple TD

On considère un pendule simple à tige rigide de longueur l . Soit θ l'angle du pendule avec la verticale.

1) Calculer l'énergie totale du système (avec les hypothèses d'usage).

Montrer que les équations du mouvement forment un système Hamiltonien avec pour Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2} - a \cos q \quad (1)$$

et variables conjuguées (p, q) ;

2) On veut étudier le comportement des trajectoires dans l'espace des phases (p, q) (mettre q en abscisse).

a) Trouver les points fixes. Etudier la stabilité des points fixes.

b) Tracer les trajectoires du mouvement.

Pendule excité périodiquement

On suppose maintenant que le champ de pesanteur n'est activé que de manière impulsionnelle périodique, et que le Hamiltonien prend alors la forme

$$H = \frac{p^2}{2} - a \cos q \delta_{(1)}(t) \quad (2)$$

avec pour variables canoniques (p, q) , et où $\delta_{(1)}(t)$ est une fonction de Dirac périodique de période 1. Donner la série de Fourier de $\delta_{(1)}(t)$.

1) On se propose de calculer l'application "premier retour" obtenue en calculant les intersections successives des trajectoires avec le plan de coordonnées $t = 0 \pmod{1}$. Pour cela, écrire les équations du mouvement.

2) Calculer ensuite l'application premier retour en décomposant le mouvement en deux parties : On prend ε petit. On calcule l'évolution sur une période pour t de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ puis de $+\varepsilon$ à $1 - \varepsilon$.

On fait ensuite tendre ε vers 0.

Montrer que les équations obtenues sont celles du Standard map (ou d'un de ses cousins).

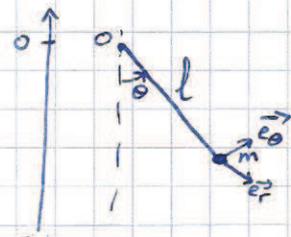
3) Faire le même calcul en inversant la décomposition : $+\varepsilon$ à $1 - \varepsilon$ suivi de $1 - \varepsilon$ à $1 + \varepsilon$.

Intégration symplectique du pendule

On utilise un intégrateur symplectique d'ordre 1 pour intégrer le mouvement du pendule. Montrer que l'on obtient alors une application symplectique qui est le standard map (sous certaines conditions).

TD 3

Pendule simple TD



1) $E = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mg l \cos(\theta)$

$q = \theta$
 $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$ avec $\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{p = J \dot{\theta}}$

$\hookrightarrow H = \frac{p^2}{2J} - mgl \cos(q)$

On pose $\tau = \frac{t}{J}$

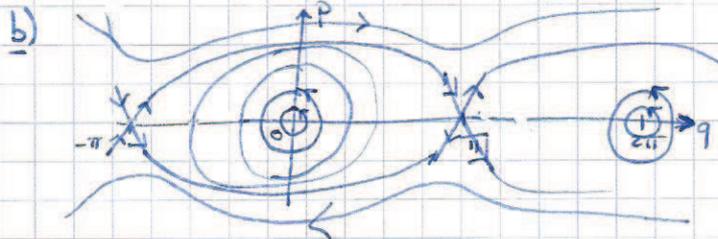
$\hookrightarrow H = \frac{p^2}{2} - \underbrace{mgl \cos(q)}_a$

2) a) $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = p = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial q} = a \sin(q) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \text{ ou } \pi \end{cases}$
 pts fixes: $\dot{p} = \dot{q} = 0$

Autour de $q=0$, $a \cos(q) \searrow$, $H \nearrow$ donc $q=0$ stable
 Autour de $q=\pi$, $a \cos(q) \nearrow$, $H \searrow$ donc $q=\pi$ instable

ou $\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\lambda^2 + a = 0$ avec $a > 0$
 $\hookrightarrow \lambda_{\pm} = \pm i\sqrt{a}$



$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{a} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
 $u = u_0 e^{i\sqrt{a}t}$ et $v = v_0 e^{-i\sqrt{a}t}$

et pour $q=\pi$: $\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{a}$
 \rightarrow divergence.

Pendule excité périodiquement

1) $H = \frac{p^2}{2} - a \cos(q) \delta_{\omega}(t)$

$\delta_{\omega}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2ik\pi t}$ avec $a_k = \int_{-1/2}^{1/2} \delta_{\omega}(t) e^{-2ik\pi t} dt = 1$
 $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2ik\pi t}$

Re $e^{iq} \delta_{\omega}(t) = \text{Re} \left(e^{iq} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2ik\pi t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(q + 2k\pi t)$

$\begin{cases} p' = -a \sin(q) \delta_{\omega}(t) \\ q' = p \end{cases}$

2) Autour de $t=0$: $p' = -a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sin(q + 2k\pi t) = -a \text{Im} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i(q + 2k\pi t)} \right) = -a$

$p(1+\epsilon) = p(\epsilon) + \int_{\epsilon}^{1+\epsilon} p'(t) dt = p(\epsilon) + \underbrace{\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} p'(t) dt}_0 + \underbrace{\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} p'(t) dt}_{-a \sin(q(1))}$

$q(1+\epsilon) = q(\epsilon) + \int_{\epsilon}^{1+\epsilon} q'(t) dt = \underbrace{q(\epsilon)}_{p(\epsilon)} + \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} q'(t) dt$

p borné par $M \Rightarrow q(1+\epsilon) < q(\epsilon) + p(\epsilon)(1-2\epsilon) + 2\epsilon M$

$\epsilon \rightarrow 0: q(1) = q(0) + p(0)$
 $\boxed{p' = p - a \sin(q)}$