

# Examen d'Optique Quantique (3 pages)

Parcours Phytem

8 avril 2014

## 1 Limite de détection de l'absorption dans une cellule

On considère une cellule, dont on veut mesurer l'absorption  $A$ . On modélisera cette absorption à l'aide d'une lame séparatrice de réflexivité  $A = r^2 = 1 - t^2$  (avec le vide entrant dans la deuxième voie). On notera  $a$  et  $b$  les opérateurs annihilation dans les modes entrant sur cette la lame séparatrice ;  $c$ , l'opérateur annihilation dans la voie de sortie que l'on mesure.

Une première méthode simple consiste à mesurer l'intensité (le nombre de photon) dans un faisceau laser (modélisé par un état cohérent  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ) avant, puis après la cellule et à faire la différence.

1. On mesure le nombre de photons avant la cellule. Quel est le résultat moyen ? Quelle est la déviation standard associée à cette mesure ?
2. On effectue la même mesure après la cellule. Quel est le résultat moyen ? Quelle est la déviation standard associée à cette mesure ?
3. Pour avoir accès à l'absorption  $A$ , on fait la différence entre deux mesures avant et après la cellule. Les deux mesures sont effectuées l'une après l'autre ; elles sont donc indépendantes. Le signal est alors  $S = \langle a^\dagger a \rangle - \langle c^\dagger c \rangle$ . Calculer la valeur moyenne du signal  $S$  ainsi que sa variance  $(\Delta S)^2$ . On peut ainsi former le rapport signal à bruit  $S/\Delta S$ . Pour quelle valeur de l'absorption  $A$  a-t-on un rapport signal à bruit de 1 (cela correspond à la limite de détection) ? Comment varie cette limite de détection avec l'intensité du faisceau laser et avec le temps de mesure (d'intégration du signal) ?
4. On considère maintenant un état comprimé en nombre de photons. Quelle inégalité vérifie alors la valeur moyenne  $\bar{n} = \langle \hat{N} \rangle$  et la variance  $\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = (\Delta n)^2$  du nombre de photon. Calculer le signal à bruit de la mesure de la différence de nombre de photons avant et après la cellule.
5. Calculer la limite de détection dans les cas limites correspondant à un état nombre, puis à un état faiblement comprimé. Commenter chacun de ces deux cas.

## 2 Etats de photons jumeaux

On considère maintenant un dispositif utilisant un cristal non linéaire. Celui-ci couple le mode d'un faisceau pompe de pulsation  $\omega$  vers deux modes séparés spatialement mais de même fréquence. Ces deux modes sont initialement vides. On appellera  $a_1$  et  $a_2$  les opérateurs annihilation dans ces modes.

1. On peut écrire le hamiltonien du processus non linéaire  $H = ig(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)$ . Expliquer cette forme. A quelle type d'interaction non linéaire est-ce que cela correspond ? Quelle est l'énergie des photons dans les modes  $a_1$  et  $a_2$  ?
2. L'état quantique en sortie du cristal peut être mis sous la forme

$$|\phi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2 = \sum_n c_n |n, n\rangle.$$

Préciser la valeur des coefficients  $c_n$ . On utilisera l'égalité suivante :

$$e^{r(a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2)} = e^{\gamma a_1^\dagger a_2^\dagger} e^{-f(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)} e^{-\gamma a_1 a_2},$$

avec  $\gamma = \tanh(r)$  et  $f = \ln(\cosh(r))$ .

3. On ne mesure dans un premier temps que le mode 2. Quelle est la probabilité de trouver  $n$  photons dans ce mode ? A quel type d'état est-ce que cela correspond ? Quels sont le nombre moyen et la variance du nombre de photons ?
4. On utilise maintenant un état de photons jumeaux  $|\phi\rangle$  pour détecter l'absorption d'une cellule, comme dans l'exercice 1. On fait passer le faisceau du mode 1 dans la cellule. On mesure alors simultanément le nombre de photons après ce passage et le nombre de photons dans le mode 2. Quelle est alors la valeur moyenne de la différence entre ces deux signaux ? Quelle est sa variance ? Peut-on mesurer efficacement la valeur de l'absorption avec cette technique ? Commenter.
5. Proposer une méthode alternative pour mesurer  $A$  en utilisant à plein le potentiel des états de photons jumeaux avec le même dispositif.

## 3 Questions sur l'article, A. Zavatta, S. Viciani, M. Bellini, Science 306, 660 (2004)

1. Ecrire le hamiltonien de conversion paramétrique utilisé dans l'article. Quel est l'état à l'entrée du cristal non linéaire ? Quelle approximation est faite pour trouver l'état de l'équation (2) ?
2. La préparation de l'état  $a^\dagger|\alpha\rangle$  est dite conditionnelle. Expliquer ce que cela veut dire.