

Homework 4 - Quantum interferometry

Due April 2nd 2013

Problem 1 - Squeezed vacuum

To produce a squeezed state of a single mode of the electromagnetic field, we send an intense light beam (the pump) of intensity I through a non-linear medium. The hamiltonian describing the coupling in the medium of the pump and a mode a , described by the operator \hat{a} and \hat{a}^\dagger , is

$$H = i\hbar\chi I(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2). \quad (1)$$

We want to calculate the state of the field when the mode is initially empty.

After propagation through the crystal of optical length L , the quantum state of the field in the mode a is

$$|\psi\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}\frac{L}{c}}|0\rangle, \quad (2)$$

with c the speed of light.

1. What is the initial number of photon in mode a ?
2. We assume a weak non-linear effect, so that $\epsilon = \chi IL/c \ll 1$. Develop the expression of state $|\psi\rangle$ to first order in ϵ .
3. Calculate the mean number of photons in mode a after the crystal. Comment.
4. Let the quadratures of the field in mode a be

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \text{ and } \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3)$$

Calculate $\langle\hat{Q}\rangle$ et $\langle\hat{P}\rangle$ in mode a .

5. Calculate also $\langle\hat{Q}^2\rangle$ and $\langle\hat{P}^2\rangle$ and deduce the variances $\Delta\hat{Q}$ and $\Delta\hat{P}$ to first order in ϵ .
6. Check that $\Delta\hat{Q} \cdot \Delta\hat{P} = \frac{1}{2}$ to first order in ϵ .
7. Justify the name "squeezed vacuum" given to the state in mode a after the crystal.

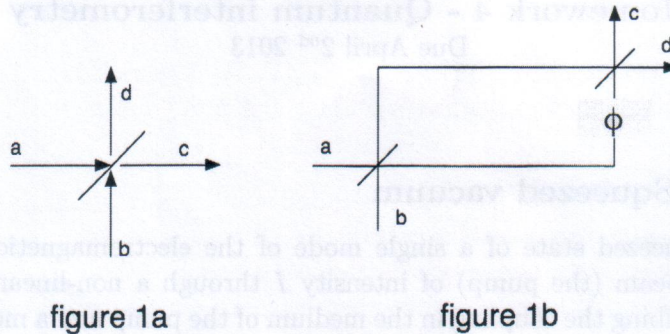


Figure 1: Une séparatrice et un interféromètre. Les séparatrices ont des coefficients de transmission et de réflexion $t = r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'interféromètre contient un déphasage de ϕ dans une voie.

Problème 2 - Effet d'une séparatrice sur des états multi-photons

Les questions portent sur les figures ci dessus. L'action de la lame sur les opérateurs d'annihilation des champs a, b, c et d est décrite par une matrice:

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix}$$

1. Deux états à N photons sont incidents sur des voies a et b de la séparatrice dans la figure 1a. L'état d'entrée, $|N, N\rangle_{a,b}$, peut s'exprimer en termes des états de sortie $|n, m\rangle_{c,d}$. Montrer que l'état à la sortie ne contient que des états à nombre pair de photons, c'est à dire que n et m sont pairs.
2. On considère maintenant l'interféromètre de la figure 1b. On injecte deux états à N photons sur les voies a et b de l'interféromètre. Quel est l'état de sortie pour un déphasage $\phi = 0$? Pour un ϕ arbitraire, écrire la matrice unitaire qui permet d'exprimer les opérateurs \hat{a} et \hat{b} en termes des opérateurs \hat{c} et \hat{d} .
3. Pour $N = 2$ écrire l'amplitude de trouver les deux voies de sortie de l'interféromètre (c et d) dans l'état $|3, 1\rangle$, en fonction de ϕ .
4. Pour $N = 2$, calculer la probabilité de trouver un nombre impair de photons dans une voie de l'interféromètre, en fonction de ϕ .
5. Décrire qualitativement une stratégie de détection qui pourrait mesurer cette probabilité de nombre impair de photons dans le cas $N = 2$? Cette expérience a été faite dans Walther *et al.* Nature **429**, 158 (2004) et Mitchel *et al.* Nature **429**, 161 (2004)