

Sujet examen M1 2013-2014 : Oscillateurs couplés

J. Laskar

aucun document n'est autorisé

12 janvier 2014

Dans sa thèse soutenue en 2012, Mario Mulansky, actuellement en post doc au Max Planck Institute à Dresde, étudie la diffusion dans les systèmes Hamiltoniens. Le but ultime de ces travaux est de relier la diffusion chaotique dans les systèmes Hamiltoniens à une meilleure compréhension des mécanismes en jeu dans la localisation d'Anderson dans le contexte des équations de Schrödinger nonlinéaires. Pour cela, on est amené à étudier un réseau d'oscillateurs couplés. Rassurez-vous, durant les 90 mn de cet examen, je ne vais pas vous demander de retrouver l'ensemble des résultats que Mario à obtenu pendant ses années de thèse à l'Université de Potsdam, mais nous allons cependant nous intéresser à quelques points clef de ce travail. C'est une manière de vous montrer que les notions étudiées pendant le cours s'appliquent dans des domaines variés de la physique d'aujourd'hui.

1 Oscillateur unique

on considère en un premier temps un oscillateur unique de Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \frac{1}{4}q^4. \quad (1)$$

avec pour variables canoniques conjuguées (p, q) (ces variables sont normalisées, et donc sans dimension).

a) Ce problème est-il intégrable ? pourquoi ?

b) Effectuez un changement de coordonnées polaire de la forme

$$p = f(I) \cos(\theta) ; \quad q = f(I) \sin(\theta) \quad (2)$$

tel que le changement de variable

$$(p, q) \longrightarrow (I, \theta) \quad (3)$$

soit symplectique avec $f(0) = 0$.

c) Donner l'expression du Hamiltonien dans les nouvelles variables, et l'exprimer sous la forme

$$H(I, \theta) = H_0(I) + H_1(I, \theta) \quad (4)$$

sol:

$$p = \sqrt{2I} \cos \theta ; q = \sqrt{2I} \sin \theta ; \quad (5)$$

d'où

$$H = I + I^2 \sin^4 \theta . \quad (6)$$

d) On se place dans le cas des énergies faibles ($|H| < \varepsilon \ll 1$). Montrez alors que

$$H_1/H_0 = O(\varepsilon). \quad (7)$$

Pour prendre ceci en compte formellement dans la suite, on notera H_1 sous la forme εH_1 ou ε sera un petit paramètre (constant) qui permettra d'identifier les ordres des développements.

1.1 Fréquence

On considère le Hamiltonien

$$H = I + \varepsilon I^2 \sin^4 \theta ; \quad (8)$$

avec pour variables canoniques (I, θ) .

a) En utilisant la méthode des séries de Lie, rechercher une fonction génératrice $W(I, \theta)$ qui transforme le Hamiltonien H en un Hamiltonien où la partie périodique en θ est d'ordre ε^2 . On donnera W et le nouvel Hamiltonien, limité à sa partie en ε .

sol:

$$W_1 = \frac{1}{32} \varepsilon I^2 (-8 \sin 2x + \sin 4x) \quad (9)$$

$$H' = I + \frac{3}{8} \varepsilon I^2 ; \quad (10)$$

b) En déduire l'expression de la fréquence Ω du mouvement, à l'ordre 1 en ε .

sol: $\Omega = 1 + \frac{3}{8} \varepsilon I$

2 Oscillateurs couplés

On considère une chaîne limitée à deux oscillateurs couplés, avec pour Hamiltonien

$$H = \frac{p'^2}{2} + \frac{q'^2}{2} + \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \frac{1}{4}(q - q')^4 . \quad (11)$$

Où les variables (p, q) et (p', q') sont canoniquement conjuguées.

On va même supposer que l'oscillateur (p', q') n'est pas influencé par l'oscillateur (p, q) .

a) En reprenant les résultats précédents, montrer que Le Hamiltonien du problème peut alors s'écrire de manière approchée sous la forme

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \Omega J + \frac{1}{4}(q - \alpha \sin \phi)^4 . \quad (12)$$

où les variables canoniques associées sont (p, q) et (J, ϕ) .

2.1 Résonance

On va comme précédemment (section 1) se placer en variables action angle (I, θ) .

a) Ecrire le Hamiltonien en variables action angles (I, θ) et (J, ϕ) .

b) On s'intéresse à la résonance entre la fréquence ω de l'oscillateur (p, q) et la fréquence de forçage Ω . Au voisinage de la résonance, on aura donc $\omega - \Omega \approx 0$. On va donc s'intéresser à l'argument résonant $\psi = \theta - \phi$. Pour cela on effectue un changement de variable $\psi = \theta - \phi$ que l'on complète en un changement de variable canonique. Donner cette transformation.

c) Pour éviter de s'encombrer de tous les termes non résonants qui influent peu sur le mouvement, on moyennise par rapport à tous les angles qui ne sont pas des harmoniques de ψ . Indiquez comment on peut, grâce aux séries de Lie,

définir une telle transformation de manière propre, extensible le cas éventuel à des ordres supérieurs.

d) Montrer que le Hamiltonien moyenné à l'ordre 1 prend la forme

$$H_r = \left(1 + \frac{3}{4}a^2\right)I + \frac{3}{8}I^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8}(I^{1/2}a^3 + 2I^{3/2}a)\cos\psi + \frac{3}{8}Ia^2\cos 2\psi. \quad (13)$$

Que peut-on dire de ce Hamiltonien ?

e) On se place dans le cas où $I \approx a$ tous deux étant petits. En limitant le Hamiltonien aux termes les plus significatifs, on donnera un aperçu de l'espace des phases du problème, au voisinage de la résonance $\omega - \Omega \approx 0$.

2.2 quelques formules

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= (1 + \cos 2x)/2 ; \\ \cos^3 x &= (3 \cos x + \cos 3x)/4 ; \\ \cos^4 x &= (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)/8 ; \\ \sin^2 x &= (1 - \cos 2x)/2 ; \\ \sin^3 x &= (3 \sin x - \sin 3x)/4 ; \\ \sin^4 x &= (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)/8 .\end{aligned} \quad (14)$$

Épreuve d'examen

Durée : 1h30

Tous les documents de cours, notes manuscrites, travaux dirigés, photocopiés, sont interdits. Il est demandé d'indiquer soigneusement les chiffres et lettres qui permettent d'identifier une question avant la solution présentée.

Une onde laser à la fréquence $\omega_1 = \omega$ se propage suivant la direction Oz dans un cristal non-linéaire de susceptibilité $\chi^{(2)}$. L'onde complexe associée est notée:

$$E_1(z, t) = A_1(z) \exp(-i(\omega_1 t - k_1 z)). \quad (1)$$

Elle y donne naissance à une onde oscillant à la fréquence $\omega_2 = 2\omega$, écrite :

$$E_2(z, t) = A_2(z) \exp(-i(\omega_2 t - k_2 z)). \quad (2)$$

On notera n_1 et n_2 les indices du matériau aux fréquences ω et 2ω et $\Delta k = 2k_1 - k_2$ avec $k_j = n_j \omega_j / c$ ($j = 1, 2$).

On suppose les champs et les susceptibilités scalaires. On considère que l'absorption est négligeable dans le milieu aux longueurs d'onde considérées.

1 (2 points) - Donner l'expression du terme de la polarisation non-linéaire macroscopique d'ordre 2 dans le cristal, que l'on notera:

$$P^2(z, t) = \sum_j P_j^{(2)}(z) \exp(-i\omega_j t) + c.c. \quad (3)$$

2 (3 points) - En écrivant l'équation de propagation des champs dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, montrer que:

$$\frac{dA_j}{dz} = \frac{i\omega_j}{2\epsilon_0 n_j c} P_j^{(2)} \exp(-ik_j z), \quad (4)$$

avec $P_j^{(2)}$ le terme de la polarisation $P^{(2)}(z, t)$ oscillant à ω_j .

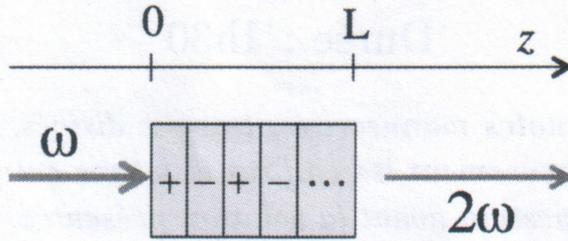
Donner le système d'équations couplées d'évolution des enveloppes $A_1(z)$ et $A_2(z)$ (on négligera les autres termes).

3 (3 points) - On se place dans l'approximation paramétrique, dans laquelle la pompe est suffisamment intense pour pouvoir considérer son enveloppe comme constante : $A_1(z) = A_1(z=0) = A_1$.

- Calculer $A_2(z)$ dans la situation où seul le fondamental est injecté dans le cristal au départ.
 - Représenter la variation $I_2(z)$ de l'intensité de l'harmonique et donner sa période spatiale en fonction de Δk .

- Calculer cette période $\Lambda = 2l_c$, où l_c est la longueur de cohérence, pour un cristal de LiNbO_3 pour une longueur d'onde de 1550 nm. Les indices du LiNbO_3 aux longueurs d'onde 1550 nm et 775 nm sont respectivement 2,138 et 2,178.

4 (2 points) - Supposons qu'on sépare le cristal (de longueur L) en N parties différentes. La susceptibilité $\chi^{(2)}$ de chaque partie possède une signe "+" ou "-", c'est à dire que $d(z)$ accepte $\pm d_{eff}$ ($d(z)$ est le constant diélectrique). Notons g_m ($m = 1, 2, \dots$) le signe et l_m la longueur de m^{eme} partie. Calculer $A_2(L)$.



5 (2 points) - Considérons une structure "quasi-accord de phase (QPM)" parfaite, le signe est changé à la position $z_{m,0}$ qui est satisfaite:

$$\exp(-i\Delta k_0 z_{m,0}) = \exp(-i\phi_{m,0}) = (-1)^m, \quad (5)$$

où Δk_0 est le vecteur du désaccord de phase du cristal à une longueur d'onde choisie et $z_{m,0} = ml_c$. Calculer $A_2(L)$ et le comparer avec le résultat du cas d'accord de phase parfait de la question 3.

6 (3 points) - Considérons maintenant une structure QPM non-parfaite dont les erreurs sont définies comme suivant:

$$\delta z_m = z_m - z_{m,0}, \quad (6)$$

$$\delta \Delta k = \Delta k - \Delta k_0. \quad (7)$$

- Calculer l'erreur du déphasage ($\delta\phi_m = \phi_m - \phi_{m,0}$) au bord de chaque m^{eme} partie.
- Supposons que N est très grand et négligeons les erreurs d'ordre élevé, re-écrire $A_2(L)$ en fonction de $\delta\phi_m$.
- Supposons que $\delta\phi_m = 0$, retrouver le résultat de la question 5.

7 (3 points) - Il est important de calculer la tolérance des paramètres expérimentaux (température, longueur d'onde, périodicité, etc.) d'une telle structure QPM. Tous ces paramètres peuvent affecter le désaccord de phase Δk_{QPM} . De façon générale, Δk_{QPM} est une fonction d'un paramètre x et de longueur d'onde λ de la lumière, qu'on peut écrire sous une forme d'une série de Taylor:

$$\Delta k_{QPM}(x, \lambda) = (x - x_0) \frac{\partial \Delta k_{QPM}}{\partial x} + (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial \Delta k_{QPM}}{\partial \lambda}. \quad (8)$$

Notons que nous avons ignoré les ordres élevés de la série de Taylor et $\Delta k_{QPM}(x_0, \lambda_0) = 0$.

- Déterminer la tolérance, $\delta x = 2(x - x_0)$, en choisissant $\lambda = \lambda_0$. Notons que l'efficacité de l'effet non-linéaire diminue la moitié quand $\Delta k_{QPM}L/2 = 0,4429\pi$.

8 (2 points) - Appliquer le résultat précédent pour calculer la tolérance de la période de la structure QPM d'un cristal de LiNbO_3 pour une longueur d'onde de 1550 nm. Les paramètres sont donnés dans la question 3.

Fin de l'épreuve