

Chapitre 2

Symétries et lois de conservation

Transformations de Lorentz et notions en théorie des groupes
ou “l’absurde efficacité des mathématiques” (Wigner)

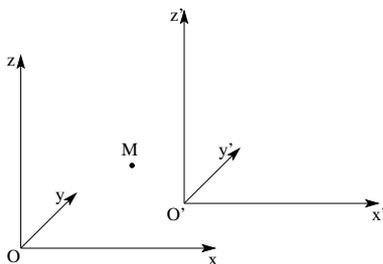
2.1 Cinématique relativiste

2.1.1 Postulats de la mécanique restreinte ou cinématique relativiste

Einstein base sa théorie sur deux postulats :

- Les lois physiques sont invariantes dans tout changement de référentiel galiléen (les résultats de toute expérience conduite à l’intérieur d’un référentiel sont indépendants de tout mouvement de translation rectiligne uniforme de ce référentiel par rapport à un référentiel galiléen).
- La vitesse de la lumière est une constante universelle. Elle est la même dans tous les repères galiléens.
- Remarque 1 : les lois de la Mécanique classique et la transformation de Galilée doivent être valables, en première approximation, lorsque les vitesses restent faibles devant c .
- Remarque 2 : la masse m , la charge q d’une particule sont propres à celle-ci c’est-à-dire invariantes par changement de référentiel galiléen

2.1.2 Abandon d’un temps universel



Soit deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , les directions Ox et O^*x^* coïncident. On règle les horloges de chaque référentiel de telle sorte que, pour $t = t^* = 0$, les origines O et O^* soient confondues.

On a $\vec{v}_{O^*/O} = v\vec{u}_x$.

Imaginons qu’un flash lumineux soit émis à $t = t^* = 0$, ie au moment où O et O^* sont confondues. Un détecteur de lumière est placé en M . L’instant de réception du signal s’écrit $t = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{c}$ dans \mathcal{R} . Et dans \mathcal{R}^* , (puisque c est une constante universelle) $\frac{\sqrt{x^{*2}+y^{*2}+z^{*2}}}{c} = t^* \neq t$ dans \mathcal{R}^* . Donc l’événement “réception du signal lumineux” n’a pas la même date dans \mathcal{R} et \mathcal{R}^* . Donc un événement est relaté par sa position et son temps (x, y, z, t) dans le référentiel galiléen où on l’examine.

Par contre dans chaque référentiel, on a $ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $ct^* = \sqrt{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}}$, on a

donc la métrique suivante :

$$ds^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = ds^{*2} = c^2t^{*2} - x^{*2} - y^{*2} - z^{*2} (= 0 \text{ car ici vitesse flash lumineux} = c)$$

Cela signifie aussi que cette grandeur ds^2 est invariante par changement de référentiel galiléen.

2.1.3 Transformations de Lorentz

La physique est la même quelque soit le référentiel, il doit exister une relation entre (x, y, z, t) et (x^*, y^*, z^*, t^*) . En d'autre terme, il existe une infinité continue de repères physiquement équivalents. Donc, en ce limitant à un espace à (1+1) dimensions (x et t), on a :

$$x^* = f(x, t, \phi_1, \dots, \phi_n) \text{ et } t^* = g(x, t, \phi_1, \dots, \phi_n) \text{ où les } \phi_n \text{ sont des paramètres à déterminer.}$$

Considérons un événement, ie que x et t sont donnés.

Avec un système d'équations de 2 équations et n inconnues, on obtient une, voir plusieurs solutions quelque soit (x^*, t^*) : ce qui est un peu trop.

Reste $n = 0$, mais $x^* = f(x, t)$ et $t^* = g(x, t)$ signifie qu'il n'y a que deux référentiels équivalents (c'est trop peu!).

Il reste donc $n = 1$ (comme dans le cas d'une rotation)! Le système d'équation *linéaire* à 1 paramètre s'écrit : $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix}$ avec la contrainte¹ de respecter $ds^2 = ds^{*2}$.

$$\text{Donc } c^2t^2 - x^2 = (C(ct^*) + Dx^*)^2 - (A(ct^*) + Bx^*)^2 = -(-C^2 + A^2)c^2t^{*2} + (D^2 - B^2)x^{*2} + 2(CD - AB)x^*(ct^*) = c^2t^{*2} - x^{*2}.$$

Donc $A^2 - C^2 = 1$, $D^2 - B^2 = 1$ et $CD - AB = 0$. La première relation nous dit qu'il existe un réel ϕ_1 tel que $A = \cosh \phi_1$, $C = \sinh \phi_1$; la deuxième nous dit qu'il existe un réel ϕ_2 tel que $D = \cosh \phi_2$, $B = \sinh \phi_2$; la dernière donne alors $\sinh \phi_1 \cosh \phi_2 - \cosh \phi_1 \sinh \phi_2 = \sinh(\phi_1 - \phi_2) = 0$ donc $\phi_1 = \phi_2$, on obtient donc :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix}$$

Si on regarde le point O^* ($x^* = 0$) dans le référentiel \mathcal{R} , on doit avoir $x_O = vt$. Ici on a :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \sinh \phi ct^* \text{ et } ct = \cosh \phi ct^*$$

$$\text{donc } x = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} ct \text{ on en conclut que } \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} c = v$$

Donc $\tanh \phi = \frac{v}{c} = \beta$ et $\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$, d'ou les transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^* \\ x^* \end{pmatrix}$$

Et sous une écriture plus commode avec la transformation inverse :

$$\begin{array}{ll} ct & = \gamma(ct^* + \beta x^*) & ct^* & = \gamma(ct - \beta x) \\ x & = \gamma(x^* + \beta ct^*) & x^* & = \gamma(x - \beta ct) \\ y & = y^* & y^* & = y \\ z & = z^* & z^* & = z \end{array}$$

¹Si vous remplacez ct par y et ct^* par y^* , et si imposez la condition $x^2 + y^2 = x^{*2} + y^{*2}$, vous allez retrouver la matrice de rotation

Nous montrons que $c^2 t^{*2} - x^{*2} - y^{*2} - z^{*2} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Cela signifie que la **norme carrée ainsi définie est invariante par changement de référentiel**.

2.1.4 Domaine de variation de β et γ

On a par définition que $\beta = \frac{v}{c}$, mais en cinématique relativiste aucun phénomène ne peut dépasser la célérité de la lumière sous peine d'une perte de la causalité ("flash lumineux reçu avant d'être émis"), donc β varie de 0 à 1 !

γ varie de 1 à $+\infty$.

Le cas classique (mécanique non relativiste) se trouve (ainsi que la transformation de Galilée) lorsque $\gamma \rightarrow 1$ et $\beta \rightarrow 0$. Dès que $\beta > 0.1$, il faut appliquer la cinématique relativiste.

2.1.5 Impulsion, énergie cinétique et énergie totale

Il faut aussi réécrire le principe fondamentale de la dynamique ($\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$), afin que cette loi soit invariante dans les transformations Lorentz. On montre que :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

où m est la masse de la particule quelque soit le référentiel. L'énergie cinétique s'obtient² avec $dT_c = dp.v$, puis par intégration³ $T_c = \gamma mc^2 + cst$. On veut $T_c = 0$ si $v = 0$ donc $cst = -mc^2$. Finalement :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \text{ et } T_c = \gamma mc^2 - mc^2 \Rightarrow \text{l'énergie totale } E = \gamma mc^2 = mc^2 + T_c$$

2.1.6 Place aux quadrivecteurs

On définit le quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule de masse m , d'énergie totale E et d'impulsion \vec{p} comme un vecteur à 4 dimensions qui s'écrit :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix} \text{ la norme s'écrit } \mathcal{P}^2 = E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 \gamma^2 (1 - \frac{v^2}{c^2}) = m^2 c^4$$

La norme est donc invariante par changement de référentiel. Dans le cas d'un système définissant l'état initial d'une collision (projectile sur cible), c'est la norme du quadrivecteur total qui est conservé par changement de référentiel.

Exemples :

- Particule de masse m au repos : $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} mc^2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{P}^2 = m^2 c^4$
- Particule de masse m d'impulsion \vec{p} : $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{P}^2 = E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$. donc $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, on a aussi $E = \gamma mc^2$, et $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $\vec{p}c = \gamma mc \vec{v} = \gamma mc^2 \vec{\beta} = E \vec{\beta}$.

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \text{ et } \vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{E}$$

²En classique $dT_c = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt = dp.v$, or $dp = mdv$, donc $T_c = \frac{1}{2}mv^2 + cst$ avec $cst = 0$ pour avoir $T_c = 0$ avec $v = 0$.

³Dérivez plutôt le résultat ! Attention $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

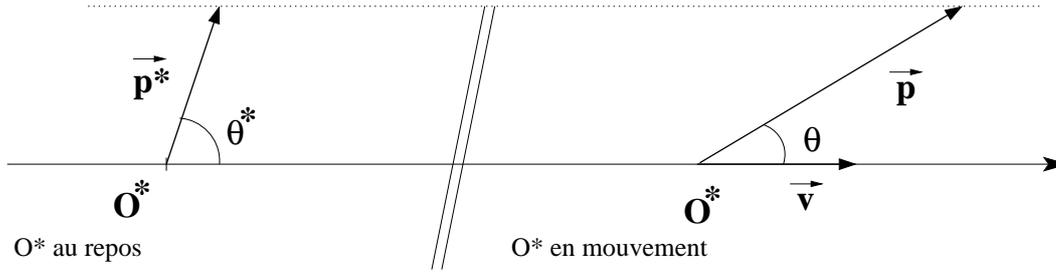


FIG. 2.1 – Changement de référentiel d’une impulsion \vec{p} . L’angle θ est défini entre l’impulsion et la vitesse de déplacement de O^*

- Soit un projectile p de masse m_p et d’impulsion \vec{p} bombardant une cible c de masse m_c au repos.

$$\mathcal{P}_p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix} \quad \mathcal{P}_c = \begin{pmatrix} m_c c^2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad s = (\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_c)^2 = \begin{pmatrix} E + m_c c^2 \\ \vec{p}c \end{pmatrix}^2 = (E + m_c c^2)^2 - p^2 c^2$$

Le scalaire \sqrt{s} est invariant par changement de référentiel, et représente physiquement l’énergie totale disponible pour la collision.

On a aisément $s^2 = E^2 - p^2 c^2 + m_c^2 c^4 + 2Em_c c^2 = m_p^2 c^2 + m_c^2 c^4 + 2Em_c c^2 = m_p^2 c^2 + m_c^2 c^4 + 2m_c c^2 \sqrt{m_p^2 c^2 + p^2 c^2}$

- Particule de masse nulle (le photon par exemple) $\mathcal{P}_p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}c \end{pmatrix}$ avec $E = pc = h\nu$. Il n’existe pas de référentiel où le photon est au repos, sa vitesse est c quelque soit le référentiel.

2.1.7 D’un référentiel à l’autre

La matrice de passage (transformation de Lorentz) est indépendante des quantités, donc :

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E^* + \beta c p_x^*) & E^* &= \gamma(E - \beta c p_x) \\ c p_x &= \gamma(c p_x^* + \beta E^*) & c p_x^* &= \gamma(c p_x - \beta E) \\ p_y &= p_y^* & p_y^* &= p_y \\ p_z &= p_z^* & p_z^* &= p_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E^* + \beta c p^* \cos \theta^*) & E^* &= \gamma(E - \beta p \cos \theta) \\ c p \cos \theta &= \gamma(c p^* \cos \theta^* + \beta E^*) & p^* \cos \theta^* &= \gamma(p \cos \theta - \beta E) \\ p \sin \theta &= p^* \sin \theta^* & p^* \sin \theta^* &= p \sin \theta \end{aligned}$$

La figure 2.1 donne la définition de l’angle θ . On remarque que la composante de l’impulsion transverse à la vitesse de déplacement dans \mathcal{R} n’est pas modifiée dans la transformation. Par contre, la composante longitudinale est modifiée ou “boostée” vers l’avant. La paramètre γ est ainsi appelé “boost” de Lorentz.

2.1.8 Frontière entre relativité et classique

Soit une particule de masse m , d’impulsion pc et d’énergie totale E , on a la relation

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

	Laboratoire	Centre de masse
Etat initial		
Etat final		
Conservation	$\vec{p}_p = \vec{p}_e + \vec{p}_d + \vec{p}_D$ $E_p + E_C = E_e + E_d + E_D$	$\vec{p}_p^* + \vec{p}_C^* = \vec{p}_D^* + \vec{p}_d^* + \vec{p}_e^*$ $E_p^* + E_C^* = E_e^* + E_d^* + E_D^*$
Invariance	$(E_p + E_C)^2 - (\vec{p}_p)^2 = (E_e + E_d + E_D)^2 - (\vec{p}_e + \vec{p}_d + \vec{p}_D)^2 = (E_p^* + E_C^*)^2 - (\vec{p}_p^* + \vec{p}_C^*)^2$ $= (E_e^* + E_d^* + E_D^*)^2 - (\vec{p}_D^* + \vec{p}_d^* + \vec{p}_e^*)^2$	

FIG. 2.2 – Schéma d’une réaction $p + C \rightarrow D + d + e$ dans le référentiel du laboratoire et du centre de masse. La conservation de l’énergie totale et de l’impulsion dans chaque référentiel est représentée.

Dans le cas où $mc^2 \gg pc$, on a :

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4}} = mc^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} + o\left(\frac{p^4 c^4}{m^4 c^8}\right) \right) \simeq mc^2 + \frac{p^2 c^2}{2mc^2}$$

On retrouve l’expression “classique” (non-relativiste) de l’énergie cinétique T_c .

2.1.9 Expression de l’énergie cinétique

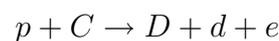
Dans le cas non-relativiste ($mc^2 \gg pc$), $T_c = \frac{p^2 c^2}{2mc^2}$

Dans le cas relativiste, $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = (mc^2 + T_c)^2$, donc $p^2 c^2 = T_c(T_c + 2mc^2)$, ou bien $T_c = E - mc^2$.

Dans le cas ultra-relativiste ($mc^2 \ll pc$), $E^2 = p^2 c^2$, $E = pc = mc^2 + T_c$, donc $T_c = pc$

2.1.10 Collision en subatomique

Soit une réaction dans laquelle on bombarde une cible de C avec un faisceau de particules p :



On définit deux référentiels :

– Le référentiel du laboratoire : c’est le référentiel lié à l’expérience.

– Le référentiel du centre de masse (cdm), dans lequel $\sum \vec{p}_{initiale} = \sum \vec{p}_{finale} = \vec{0}$

Il peut arriver que le cdm soit confondu avec le référentiel du laboratoire.

Conservations et invariance

Dans un des exemples précédents, on a défini le scalaire \sqrt{s} (invariant de Lorentz) qui est l’énergie totale disponible. Dans le cdm , cette énergie sert à créer l’ensemble des particules

de l'état final et le reste ($= \sqrt{s} - \sum_i m_i c^2$) est donné sous forme d'énergie cinétique à ces particules dans le respect de la conservation de l'impulsion.

Dans chaque référentiel, l'énergie et l'impulsion sont conservés. Cette double conservation s'écrit en terme de quadrivecteur sous la forme (voir la figure 2.2 pour les notations) :

$$\mathcal{P}_i = \begin{pmatrix} E_p + m_c c^2 \\ \vec{p}_p \end{pmatrix} = \mathcal{P}_f = \begin{pmatrix} E_D + E_d + E_e \\ \vec{p}_D + \vec{p}_d + \vec{p}_e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_i^* = \begin{pmatrix} E_p^* + E_c^* c^2 \\ \vec{p}_p^* + \vec{p}_c^* \end{pmatrix} = \mathcal{P}_f^* = \begin{pmatrix} E_D^* + E_d^* + E_e^* \\ \vec{p}_D^* + \vec{p}_d^* + \vec{p}_e^* \end{pmatrix}$$

Mais **le plus important** est l'invariance de la norme du quadrivecteur total par changement de référentiel, ie :

$$\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_f^2 = \mathcal{P}_i^{*2} = \mathcal{P}_f^{*2}$$

Transformations de Lorentz

Si les coordonnées d'un quadrivecteur sont connues dans le référentiel du *laboratoire* par exemple, l'expression de celles-ci sont obtenues dans le référentiel du *cdm* par la transformation de Lorentz, à conditions de connaître la vitesse du *cdm* dans le laboratoire. Par extension de la formule classique⁴ on a :

$$\vec{\beta}_{cdm} = \frac{\vec{p}_1 c + \vec{p}_2 c}{E_1 + E_2} = \frac{\vec{p}_p c + \vec{0}}{E_p + m_c c^2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{cdm}^2}}$$

Par exemple, dans la transformation du quadrivecteur décrivant la cible *C*, on a :

$$\begin{aligned} E_C^* &= \gamma(m_c c^2 - \beta_{cdm} 0) & E_C^* &= \gamma m_c c^2 \\ p_C^* \cos \theta^* &= \gamma(0 - \beta m_c c^2) & p_C^* &= -\gamma \beta m_c c^2 \\ p_C^* \sin \theta^* &= 0 & \theta^* &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

Dans beaucoup de problèmes, une grande partie des énergies et des impulsions sont connues, ce qui permet de simplifier énormément le système comme vous le verrez en TD.

⁴En mécanique classique : $\vec{v}_{cdm} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}$

2.2 Lois de conservation et Symétries continues

Les symétries sont reliées à des quantités conservées. En subatomique, elles nous aident à déterminer certains aspects des interactions. Les Lois d'Invariance sont à la base de la construction des théories de la physique des particules. Une symétrie est un opérateur pour lequel l'opération sur un système isolé laisse le système invariant.

Le principe de symétrie de Pierre Curie affirme que "Lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets."

De façon intuitive, une symétrie est dite continue lorsque les paramètres qui la déterminent varient de façon continue. C'est le cas de la symétrie de rotation qui est associée au groupe des rotations dans l'espace par exemple.

2.2.1 Invariance sous translation spatiale

Le résultat d'une expérience de physique est indépendante⁵ du lieu de réalisation. Si un système isolé est déplacé d'une position à une autre par une translation infinitésimale, on a alors $x_i \rightarrow x'_i = x_i + \delta x$. L'Hamiltonien d'une particule dans un potentiel V est invariant ($H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$).

Appelons \hat{D} l'opérateur de déplacement, et $\Phi(x, t)$ la fonction d'onde décrivant une particule : $\hat{D}\Phi(x, t) = \Phi(x + \delta x, t) = \Phi(x, t) + \delta x \cdot \nabla \Phi(x, t)$ or l'opérateur impulsion $\hat{P} = -j\hbar\nabla$, donc $\hat{D} = 1 + \frac{j}{\hbar}\delta x \cdot \hat{P}$. Soit $\Phi'(x, t)$ défini par $\Phi'(x, t) = H(x)\Phi(x, t)$, on a $\hat{D}\Phi'(x, t) = \hat{D}H(x)\Phi(x, t)$. Mais on a aussi $\hat{D}\Phi'(x, t) = \Phi'(x + \delta x, t) = H(x + \delta x)\Phi(x + \delta x, t) = H(x)\hat{D}\Phi(x, t)$. En réunissant ces deux équations $\hat{D}H(x)\Phi(x, t) = H(x)\hat{D}\Phi(x, t)$,

donc $[\hat{D}H(x) - H(x)\hat{D}]\Phi(x, t) = 0$, donc $[\hat{P}, H(x)] = 0$. L'opérateur impulsion commute avec l'Hamiltonien.

La valeur moyenne de l'impulsion s'écrit $\langle p \rangle = \int \hat{P}|\Phi(x, t)|^2 d^3r = \int \Phi^*(x, t)\hat{P}\Phi(x, t)d^3r$. donc :

$$\frac{\langle p \rangle}{dt} = \int \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \hat{P} \Phi(x, t) d^3r + \int \Phi^* \hat{P} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d^3r \quad \text{avec } H\Phi = j\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\text{et } H\Phi^* = -j\hbar \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \Rightarrow \frac{\langle p \rangle}{dt} = \frac{1}{j\hbar} \int \Phi^* [\hat{P}, H] \Phi d^3r$$

Comme l'opérateur impulsion commute avec l'Hamiltonien, l'impulsion est conservée.

En conclusion, l'invariance par translation d'un système entraîne la conservation de l'impulsion !!

2.2.2 Invariance sous rotation

Le résultat d'une expérience de physique est indépendante du choix de l'orientation des axes du repère servant à la décrire.

Imaginons une rotation infinitésimale autour de l'axe Oz , la matrice de rotation s'écrit :

$$\hat{R}(\delta\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\theta \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

⁵dans les mêmes conditions

Donc $\hat{R}(\delta\theta, z)\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x + y\delta\theta, y - x\delta\theta, z, t) = \Phi(x, y, z, t) + y\delta\theta\frac{\partial\Phi}{\partial x} - x\delta\theta\frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Mais $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge (-j\hbar\vec{\nabla})$, donc $\hat{L}_z = -j\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$. Donc :

$$\hat{R}(\delta\theta, z)\Phi(x, y, z, t) = (1 - \frac{j}{\hbar}\delta\theta\hat{L}_z)\Phi(x, y, z, t)$$

En généralisation pour une rotation quelconque, on a $[\hat{L}, H] = 0$ dans lequel où \hat{L} est le moment cinétique total. L'invariance par rotation d'un système isolé (à condition que le potentiel soit central) entraîne la conservation du moment cinétique total.

2.2.3 Invariance sous déplacement dans le temps

Le résultat d'une expérience de physique est indépendante du choix de l'époque ou de la date à laquelle cette expérience a ou eu lieu. L'Hamiltonien d'une particule dans un potentiel $V(r)$ ($H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$) est invariant dans une translation du temps.

Appelons \hat{T} l'opérateur de déplacement, et $\Phi(x, t)$ la fonction d'onde décrivant une particule : $\hat{T}\Phi(x, t) = \Phi(x, t + \delta t) = \Phi(x, t) + \delta t \cdot \partial_t \Phi(x, t)$ or l'opérateur énergie $\hat{E} = j\hbar\partial_t$, donc $\hat{T} = 1 + \frac{j}{\hbar}\delta t \cdot \hat{E}$. Soit $\Phi'(x, t)$ défini par $\Phi'(x, t) = H(x)\Phi(x, t)$, on a $\hat{T}\Phi'(x, t) = \hat{T}H(x)\Phi(x, t)$. Mais on a aussi $\hat{T}\Phi'(x, t) = \Phi'(x, t + \delta t) = H(x, t + \delta t)\Phi(x, t + \delta t) = H(x)\hat{T}\Phi(x, t)$. En réunissant ces deux équations $\hat{T}H(x)\Phi(x, t) = H(x)\hat{T}\Phi(x, t)$, donc $[\hat{T}H(x) - H(x)\hat{T}]\Phi(x, t) = 0$, donc $[\hat{T}, H(x)] = 0$. L'opérateur énergie commute avec l'Hamiltonien. On montre que cette commutation entraîne la conservation de l'énergie totale.

E. Noether (en 1917) a démontré une correspondance entre une transformation de symétrie et une loi d'invariance, et vice-versa. et donc à chaque règle de conservation correspond un invariant dans la loi physique. En d'autres termes, la connaissance de l'ensemble des règles de conservation permet d'en déduire la structure des interactions.

2.3 Carte d'identité d'une particule et symétries discrètes

L'ensemble des particules élémentaires est donné dans les tableaux 1.1 et 1.2 du chapitre 1. Les quarks (comme nous le verront dans un prochain chapitre) n'évoluent pas à l'état libre. Seuls les baryons (composés de 3 quarks), ou les antibaryons (composés de 3 antiquarks) ou les mésons (composés d'un quark et d'un anti-quarks) ont une évolution dans le temps. Devant le grand nombre de réactions ou de désintégrations du type $a + b(\text{état initial}) \rightarrow c + d(\text{état final})$, les quantités suivantes sont conservées entre l'état initial et l'état final dans toutes les interactions :

- impulsion totale, moment cinétique total et énergie totale (car les interactions ne dépendent pas de l'observateur !)
- la charge électrique (car les potentiels vecteur et scalaire sont définis à une phase près sans changer la physique)
- le nombre baryonique \mathcal{B} défini comme $\mathcal{B} = \frac{N(q) - N(\bar{q})}{3}$ où $N(q)$ est le nombre de quarks et $N(\bar{q})$ le nombre d'antiquark, donc :

$$\mathcal{B}(\text{baryon}) = +1 \quad \mathcal{B}(\text{antibaryon}) = -1 \quad \mathcal{B}(\text{méson}) = 0$$

– le nombre leptonique électronique, muonique et tauïque :

$$\begin{array}{lll}
 L_e(e^-) = L_e(\nu_e) = +1 & L_e(e^+) = L_e(\bar{\nu}_e) = -1 & L_e = 0 \text{ pour les autres particules} \\
 L_\mu(\mu^-) = L_\mu(\nu_\mu) = +1 & L_\mu(\mu^+) = L_\mu(\bar{\nu}_\mu) = -1 & L_\mu = 0 \text{ pour les autres particules} \\
 L_\tau(\tau^-) = L_\tau(\nu_\tau) = +1 & L_\tau(\tau^+) = L_\tau(\bar{\nu}_\tau) = -1 & L_\tau = 0 \text{ pour les autres particules}
 \end{array}$$

En conséquence, si il n'y a pas de lepton muonique dans l'état initial ($L_\mu(i) = 0$) alors dans l'état final il doit y avoir $L_\mu(f) = 0$, soit il n'y a effectivement pas, soit il y a des paires (μ^-, μ^+) par exemple.

D'autres quantités sont conservées uniquement par l'interaction forte et électromagnétique, c'est à dire que ces invariances ne sont pas respectées par l'interaction faible :

– la saveur : le nombre de quarks d'une saveur donnée (autres que u et d) est conservé, on définit donc 4 nombres quantiques additifs :

$$\begin{array}{llll}
 \text{Étrangeté } S & S(s) = -1 & S(\bar{s}) = +1 & S = 0 \text{ pour les autres particules} \\
 \text{Charme } C & C(c) = +1 & C(\bar{c}) = -1 & C = 0 \text{ pour les autres particules} \\
 \text{Beauté } B & B(b) = -1 & B(\bar{b}) = +1 & B = 0 \text{ pour les autres particules} \\
 \text{Vérité } T & T(t) = +1 & T(\bar{t}) = -1 & T = 0 \text{ pour les autres particules}
 \end{array}$$

On définit aussi un nouveau nombre quantique additif : l'hypercharge Y telle que :

$$Y = \mathcal{B} + S + C + B + T \quad (2.2)$$

- la parité : inversion des coordonnées spatiales
- la conjugaison de charge : changement des particules en leurs antiparticules
- le renversement du temps : inversion du temps

La donnée de l'ensemble de ces nombres vont définir une particule. Il faut y rajouter un nom, une masse, un spin intrinsèque et un temps de vie. Pour l'ensemble des nombres quantiques additifs, on parle aussi de charges par exemple de charge leptonique, baryonique ou d'étrangeté.

2.3.1 Parité

La parité \hat{P} est une transformation unitaire discrète, qui correspond à l'inversion des coordonnées spatiales : $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ dans le cas cartésien ; en coordonnées sphérique $(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \pi + \phi)$.

$$\hat{P}\Phi(\vec{r}, t) = \Phi(-\vec{r}, t) \text{ donc } \hat{P}^2 = 1 \text{ et les valeurs propres possibles sont } +1 \text{ ou } -1$$

Dans un système à symétrie sphérique, la parité est conservée puisque $H(-\vec{r}) = H(\vec{r})$. L'opérateur parité commute avec H et une fonction d'onde solution est une fonction propre de H et de \hat{P} , donc :

– la parité a une valeur définie et est conservé de l'état initial vers l'état final

On trouve expérimentalement que toutes les particules portent un parité intrinsèque, qui dépend de la nature et de la composition que la particule. Cette parité intrinsèque est complètement indépendante de la fonction d'onde orbitale.

La détermination de cette parité s'effectue de proche en proche, l'attribution de la valeur $+1$ ou -1 est une affaire de convention. On attribue :

$$\begin{array}{l}
 P_f = +1 \text{ pour } f = e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, u, d, s, c, b, t \\
 P_{\bar{f}} = -1 \text{ pour } \bar{f} = e^+, \mu^+, \tau^+, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{t}
 \end{array}$$

Parité intrinsèque d'un méson

Un méson est l'association d'un quark q_1 et d'un antiquark \bar{q}_2 , donc

$$P_m = P(q_1) \cdot P(\bar{q}_2) \cdot (-1)^\ell = (+1) \cdot (-1) \cdot (-1)^\ell = (-1)^{\ell+1}$$

où $P(q_1)$ est la parité intrinsèque de q_1 et $P(\bar{q}_2)$ celle de \bar{q}_2 . Le terme en $(-1)^\ell$ provient de la fonction d'onde spatiale du système, puisque ces deux quarks ont un moment angulaire relatif entre eux.

Si ce système est dans l'état d'énergie le plus bas, ie $\ell = 0$, on obtient $P_m = -1$.

Parité intrinsèque d'un baryon

Un baryon est l'association de 3 quark q_1, q_2 et q_3 donc

$$P_B = P(q_1) \cdot P(q_2) \cdot P(q_3) \cdot (-1)^{\ell+L} = (-1)^{\ell+L}$$

où ℓ est le moment angulaire orbital entre q_1 et q_2 , et L le moment angulaire orbital entre le centre de masse de (q_1, q_2) et q_3 .

Si ce système est dans l'état d'énergie le plus bas, ie $\ell + L = 0$, on obtient $P_B = +1$.

La parité est conservée dans les interactions forte et électromagnétique.

2.3.2 Conjugaison de charge

1. La Conjugaison de charge \hat{C} est une transformation unitaire discrète, qui change une particule en son antiparticule. Elle change le signe de l'ensemble des charges.
2. Seules les particules qui sont leur propre antiparticule sont des états propres de cette opérateur, il faut que l'ensemble de ses charges soient égales à zéro.
3. Il est raisonnable d'attribuer au photon un spin-parité-conjugaison de charge 1^{--} . Le pion π^0 se désintègre en 2 photons :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad \Rightarrow \quad \hat{C}|\pi^0\rangle = \hat{C}|\gamma\gamma\rangle = |\gamma\gamma\rangle = +|\pi^0\rangle$$

4. Conjugaison de charge d'un système particule-antiparticule $q\bar{q}$ dans un état de spin S et de moment orbital L

$$\begin{aligned} \hat{C}|q\bar{q}; \vec{r}, -\vec{r}; s, \bar{s}\rangle &= \eta_{q\bar{q}}|q\bar{q}; \vec{r}, -\vec{r}; s, \bar{s}\rangle \\ |q\bar{q}; \vec{r}, -\vec{r}; s, \bar{s}\rangle &= (-)|\bar{q}q; -\vec{r}, \vec{r}; \bar{s}, s\rangle && \text{fermions fct d'onde antisymétrique} \\ &= (-)(-1)^L|\bar{q}q; \vec{r}, -\vec{r}; \bar{s}, s\rangle \\ &= (-)(-1)^L(-1)^{S+1}|q\bar{q}; \vec{r}, -\vec{r}; s, \bar{s}\rangle && \text{Donc } \eta_{q\bar{q}} = (-1)^{L+S} \end{aligned}$$

2.3.3 Renversement du temps et théorème CPT

Le renversement du temps \hat{T} correspond à l'inversion de la coordonnée temporelle : $(x, y, z, t) \rightarrow (x, y, z, -t)$. On peut montrer que \hat{T} est un opérateur anti-linéaire qui s'écrit sous la forme $\hat{T}\Phi(x, y, z, t) = \Phi^*(x, y, z, -t)$ afin de laisser l'équation de Schrödinger invariante. Il n'a donc pas de vecteurs propres et n'est donc pas une observable.

Le théorème *CPT* dit que toutes les interactions sont invariantes sous les transformations successives C, P et T . Par ce théorème, une particule et son anti-particule ont la même masse, le même temps de vie, les mêmes charges en valeur absolue.

L'interaction faible ne respecte ni P , ni C , ni CP , elle respecte *CPT*.

$J^P = (1/2)^+$			$J^P = (0)^-$		
Baryons	Mass(MeV)	Nom	Mésons	Mass(MeV)	Nom
p, n	938.3, 939.6	nucléon	π^+, π^0, π^-	139.6, 135.0, 139.6	pion
Λ	1115.7	lambda	K^+, K^0	493.7, 497.7	kaon
$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	1189.4, 1192.6, 1197.4	sigma	\bar{K}^0, K^-	497.7, 493.7	antikaon
Ξ^0, Ξ^-	1314.9, 1321.3	xi	η	547.5	eta
			η'	957.8	eta prime

$J^P = (3/2)^+$			$J^P = (1)^-$		
Baryons	Mass(MeV)	Nom	Mésons	Mass(MeV)	Nom
$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$	≈ 1232	delta	ρ^+, ρ^0, ρ^-	768.5	rho
$\Sigma^{*+}, \Sigma^{*0}, \Sigma^{*-}$	1382.8, 1383.7, 1387.2	sigma étoile	ω	781.9	oméga
Ξ^{*0}, Ξ^{*-}	1530.8, 1535.0	xi étoile	K^{*+}, K^{*0}	891.6, 896.1	kaon étoile
Ω^-	1672.5	oméga	\bar{K}^{*0}, K^{*-}	896.1, 891.6	antikaon étoile
			ϕ	1019.4	phi

FIG. 2.3 – Liste non exhaustive des hadrons classés par leurs spins

2.4 Le spin-parité des hadrons : J^P

Les hadrons sont les particules sensibles à l'interaction forte (contrairement aux leptons). Ils sont composés de quarks qui sont des fermions de spin $\frac{1}{2}$.

– Pour les mésons :

$$\hat{J}_m = \hat{J}(q_1) \oplus \hat{J}(\bar{q}_2) \oplus \ell = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \ell = \hat{0} \oplus \ell \text{ ou } \hat{1} \oplus \ell$$

où ℓ est le moment cinétique orbital entre les quarks q_1 et \bar{q}_2 . Dans le cas où $\ell = 0$, on obtient soit $J_m = 0$ soit $J_m = 1$, et avec l'aide du paragraphe 2.3.1 une parité $(-)$. En d'autres termes, les mésons les plus légers ont un spin-parité soit 0^- soit 1^- .

Remarque : $J = 0$ "fait" penser à un scalaire, mais qui se transforme par parité comme un pseudoscalaire, on parle de mésons pseudoscalaires. De même $J = 1$ est relié à un vecteur, on parle de mésons vectoriels.

La liste de ces mésons légers est donnée dans la figure 2.3.

Les pions π^+ , π^0 et π^- sont donc dans un état singulet de spin résultant de la composition des spins des quarks qui les composent ($\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$). L'état de spin des pions s'écrit donc :

$$\pi \quad (J = 0) \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

– Pour les baryons :

$$\hat{J}_b = \hat{J}(q_1) \oplus \hat{J}(q_2) \oplus \hat{J}(q_3) \oplus \ell \oplus L = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \ell = \frac{1}{2} \oplus \ell \oplus L \text{ ou } \frac{3}{2} \oplus \ell \oplus L$$

les moment cinétique relatif ℓ et L sont explicités au paragraphe 2.3.1. Dans le cas où $\ell = 0$ et $L = 0$, on obtient soit $J_b = \frac{1}{2}$ soit $J_b = \frac{3}{2}$, et avec l'aide du paragraphe 2.3.1 une parité $(+)$. En d'autres termes, les baryons les plus légers ont un spin-parité soit $\frac{1}{2}^+$ soit $\frac{3}{2}^+$.

La liste de ces baryons légers est donnée dans la figure 2.3.

2.5 Classification des hadrons

L'état de spin permet une première classification de l'ensemble des particules observées, mais n'explique ni pourquoi elles se classent par familles (\equiv multiplet) de doublets comme le proton et le neutron ou de triplets comme les sigmas (Σ). Ces multiplets ne reflètent-ils pas une symétrie ?

2.5.1 Introduction de l'isospin

Le proton et le neutron ont pratiquement la même masse, ont le même spin et sont confinés à l'intérieur du noyau atomique. Sur cette base, Heisenberg a proposé que le proton et le neutron étaient en réalité deux états possibles d'une même particule, le nucléon. L'écriture de ces états nécessite l'introduction d'un nouvel sous-espace des états, l'isoespace. Dans cet espace, les particules sensibles à l'interaction forte ont une représentation.

Afin de donner deux états possibles au nucléon, il faut lui attribuer un isospin $\frac{1}{2}$, ie :

$$|\text{proton}\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{et} \quad |\text{neutron}\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

L'invariance par rotation dans cet espace conduit à considérer que le proton et le neutron sont indifférenciables pour l'interaction forte : c'est la même particule !

Isospin du deuton : le deuton est le noyau du Deutérium, il contient un proton et un neutron.

C'est donc un noyau qui résulte de la composition de deux isospins $I = \frac{1}{2}$. On peut emprunter tout l'appareillage des moments angulaires (du groupe $SU(2)$), on obtient donc un état triplet et un état singulet :

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle && \equiv |pp\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) && \equiv |pn\rangle + |np\rangle \\ |1, -1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle && \equiv |nn\rangle \\ \text{et} &&& \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) && \equiv |pn\rangle - |np\rangle \end{aligned}$$

Si notre théorie décrit correctement la nature, l'ensemble des particules du triplet ou du singulet doivent exister. Par contre, si une particule manque dans un multiplet, c'est le multiplet qui est une solution non-physique à notre problème. Dans la nature, on a jamais observé un noyau di-proton, donc le triplet n'est pas une solution. Le deuton est forcément le singulet d'isospin.

Remarque : la fonction d'onde totale du deuton peut s'écrire sous la forme : $\Phi_{\text{totale}} = \phi(\text{orbitale})\alpha(\text{spin})\chi(\text{isospin})$.

2.5.2 Classification des particules avec l'isospin

Les lois de conservation de l'interaction forte conduisent à donner plutôt l'équivalence d'identité aux quarks u et d . L'équivalence entre le proton et le neutron pour l'interaction forte résulte de leurs compositions en quarks.

Plus fondamentalement, cette symétrie ($u \equiv d$) provient de la très faible différence de masse entre u et d . Par contre, cette symétrie est fautive avec les autres quarks qui ont des masses beaucoup plus élevées.

Imaginons un monde avec uniquement les quarks u et d et leurs anti-quarks associés \bar{u} et \bar{d} .

Cette relation donne un statut particulier Y , puisque la charge électrique et I_3 sont conservés par une réaction.

2.5.4 Conservation de l'isospin dans les réactions et désintégrations

Dans l'espace réel, une théorie invariante par le groupe des rotation entraîne la conservation du moment cinétique. Il en est de même dans l'isoespace, si l'Hamiltonien de l'interaction forte est invariant par "rotation", l'isospin est conservé.

La conservation de l'isospin dans les processus d'interaction forte permet d'obtenir des règles de sélection. Mais, on peut encore la mener plus loin en l'utilisant pour prédire des rapports de sections efficaces.

Considérons les deux réactions $p + n \rightarrow d + \pi^0$ et $p + p \rightarrow d + \pi^+$. Pour l'interaction forte, ces deux réactions ne sont qu'une seule et même réaction $N + N \rightarrow d + \pi$, puisque p et n sont les deux états du nucléon N , le deuton est un deuton, et les π^+, π^0, π^- les 3 états du π , donc :

$$\begin{aligned} |p\rangle &|p\rangle \equiv |1/2, 1/2\rangle |1/2, 1/2\rangle = |1, 1\rangle \\ |p\rangle &|n\rangle \equiv |1/2, 1/2\rangle |1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |1, 0\rangle) \\ |d\rangle &|\pi^0\rangle \equiv |0, 0\rangle |1, 0\rangle = |1, 0\rangle \\ |d\rangle &|\pi^+\rangle \equiv |0, 0\rangle |1, 1\rangle = |1, 1\rangle \end{aligned}$$

En d'autres termes, le système $(p + p)$ est un état pur $I = 1$, et le système $(p + n)$ une superposition linéaire des états $I = 1$ et $I = 0$. le rapport des sections efficaces s'écrit :

$$\frac{\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+)}{\sigma(p + n \rightarrow d + \pi^0)} = \left| \frac{\langle 1, 1 | T | 1, 1 \rangle}{\langle 1, 0 | T | \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |1, 0\rangle) \rangle} \right|^2 = \left| \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right|^2 = 2$$

L'expérience montre à 600 MeV que $\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+) = (3, 15 \pm 0, 22)$ mb et $\sigma(p + n \rightarrow d + \pi^0) = 1, 5 \pm 0, 3$ mb. L'accord confirme aussi que dans ces réactions à cette énergie est bien dominée par l'interaction forte, et que les processus électromagnétiques sont négligeable.

2.6 Conclusions

Lois de conservation \Rightarrow invariances \Rightarrow symétries
Modèles des quarks \Rightarrow Classification des particules

2.7 Retour sur les rotations et saut dans les groupes

Ce paragraphe sera non traité en cours et en plus la rédaction n'est pas finie !!

Ce paragraphe sera non traité en cours et en plus la rédaction n'est pas finie !!

2.7.1 Représentation du groupe des rotations en 3 dimensions : $SO(3)$

La matrice $\hat{R}(\delta\theta, z)$ (voir equation 2.1) s'écrit aussi sous la forme $\mathbb{I} + j\delta\theta J_z$ avec :

$$J_z = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -j & 0 \\ j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour une rotation d'angle θ fini autour de Oz , il suffit de faire un succession de N rotations d'angle $\delta\theta = \frac{\theta}{N}$ avec $N \rightarrow +\infty$, donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (\mathbb{I} + j\delta\theta J_z)^N = \exp(j\theta J_z) = \hat{R}(\theta, z)$$

On remarquera aisément que :

$$\hat{R}(\theta, z) = \mathbb{I} + j\theta J_z + \frac{(j\theta)^2}{2} J_z^2 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\theta^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une rotation autour d'un axe quelconque \vec{n} s'obtient en généralisant le calcul précédent, $\hat{R}(\theta, \vec{n}) = \exp[j(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)]$. Dans cette expression J_x et J_y sont obtenues à partir d'une rotation infinitésimale autour O_x et de O_y respectivement.

$$J_x = J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j \\ 0 & j & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -j & 0 \\ j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En résumé, on peut construire n'importe que rotations à partir de ces 3 générateurs infinitésimaux J_i de $SO(3)$ ⁶. C'est la représentation du groupe $SO(3)$ sur la base du repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. De plus on a :

$$[J_i, J_j] = j \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} J_k \quad \text{avec } \varepsilon_{123} = +1 \quad (2.3)$$

où ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique. Cette relation de commutation forme l'algèbre de Lie du groupe des rotations. On remarquera aussi que $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ est proportionnelle à l'identité.

2.7.2 Représentation du groupe des rotations à 1 dimension 1

On recherche donc 3 \mathcal{J}_i qui sont des nombres réels et qui vérifient l'algèbre du groupe (équation 2.3). Hors tous les nombres réels commutent entre eux. La seule solution est $\mathcal{J}_i = 0$, soit pour la matrice de la représentation à 1 dimension $\hat{R}(\theta) = \exp(j\theta 0) = 1 \Rightarrow$ un scalaire est invariant sous les rotations.

2.7.3 Représentation du groupe des rotation à 2 dimension : $SU(2)$

On recherche donc 3 \mathcal{J}_i qui sont des matrices 2×2 et qui vérifient l'algèbre du groupe (équation 2.3). Ce sont les matrices de Pauli, et par respect des conventions, nous le notons :

$$\frac{\sigma_x}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\sigma_y}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\sigma_z}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de la représentation autour l'axe 3, s'écrit $\hat{R}(\theta) = \exp(j\theta \frac{\sigma_z}{2}) = \cos \frac{\theta}{2} \mathbb{I} + j \sin \frac{\theta}{2} \frac{\sigma_z}{2}$. Cette matrice est à coefficients complexes, de déterminant 1 et unitaire ($U^* = U^{-1}$), et appartient donc au groupe $SU(2)$.

puis :

⁶S=spécial = $\det R = +1$; O = orthogonal réel ${}^t R = R^{-1}$; 3= 3 dimensions

- définition d'un groupe
- SU(2) donne SO(3)
- “dédoublé de SO(3)”, plus besoin de matrice orthogonale, matrice diagonale = i matrice diagonale pour J_3
- introduction SU(3) = i 8 matrices dont 2 diagonales = i I_3 et Y

