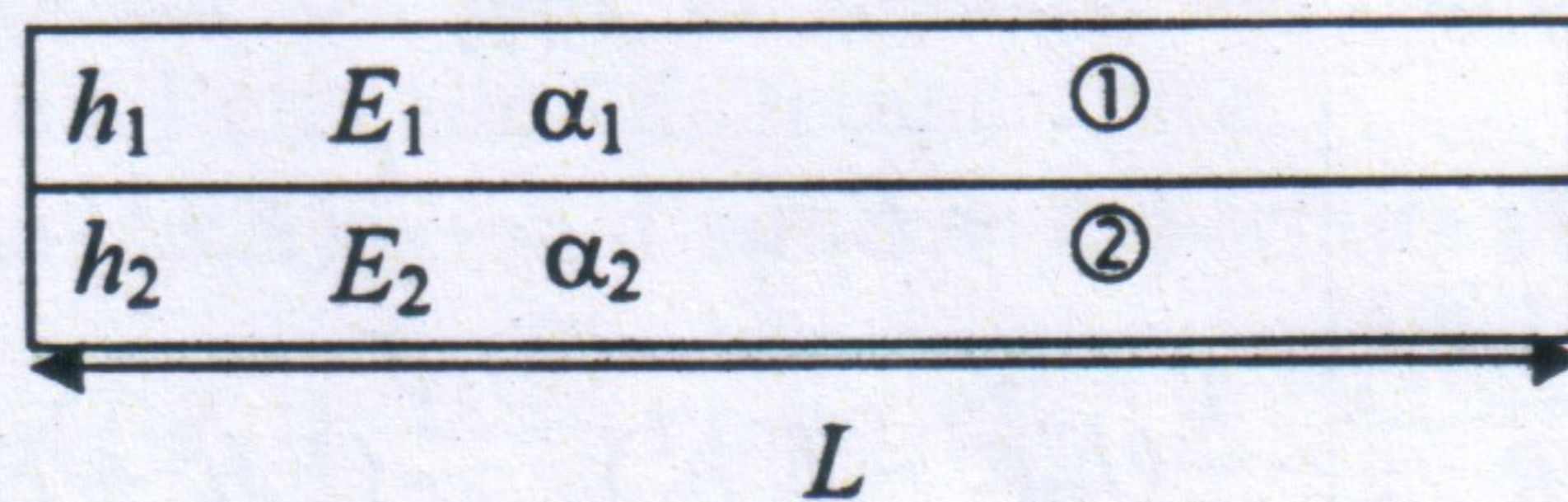


-Examen de MP114 du 17 Janvier 2014-

La durée prévue de l'examen est de 3 heures.
Les calculatrices et documents ne sont pas autorisés.

PROBLEME 1 : BILAME

La partie active d'un thermostat, le bilame, est constitué de deux lames métalliques ① et ② de modules d'Young E_1 et E_2 , d'épaisseurs h_1 et h_2 , de coefficient de dilatation thermique linéique α_1 et α_2 , de même longueur L et même largeur b assemblées entre elles de sorte que le bilame ainsi constitué soit à l'état de repos (non contraint) à la température T_a .



Données numériques :

Bilame : $T_a = 20\text{ °C}$ $L = 40\text{ mm}$ $b = 5\text{ mm}$

Lame	Métal	E (GPa)	h (mm)	α (K^{-1})
①	Cuivre	124	0,075	$1,65 \cdot 10^{-5}$
②	Zinc	69,75	0,1	$3,02 \cdot 10^{-5}$

A - Étude de la poutre composite du bilame

Avant de prendre en compte les effets des variations de température, étudions le comportement de cet assemblage à la température T_a lorsqu'il est soumis à des efforts externes de traction et/ou de flexion. Le bilame peut alors être vu comme une poutre composite. L'assemblage des deux lames est tel que l'adhérence soit parfaite entre les deux matériaux et qu'à l'interface la déformation résultante soit identique dans les deux matériaux.

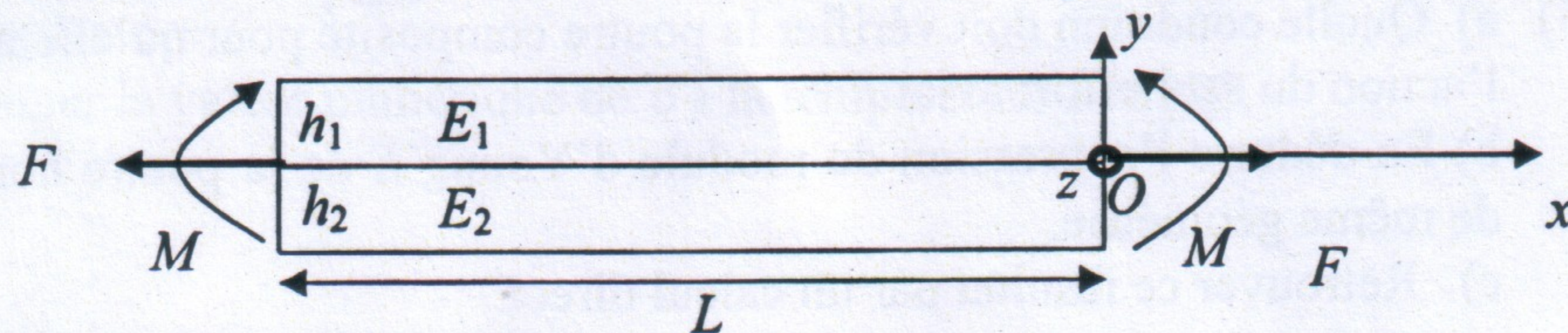


Figure 1 : Schéma de la poutre composite

Cette poutre est soumise à l'action conjointe d'une force de traction axiale F (selon x) et d'un moment de flexion M (selon z , c'est-à-dire que la flexion se produit dans le plan (x,y)). On se place dans le cas où F et M sont suffisamment faibles pour que le rayon de courbure R reste grand devant la longueur L de la poutre et que la flèche moyenne prise par l'ensemble reste petite devant l'épaisseur h_1+h_2 du bilame de sorte que les hypothèses de la résistance des matériaux (flexion faible) soient vérifiées.

- 1) On appelle ε_0 la déformation ε_{xx} de l'interface repérée par la côte $y=0$.
 - a) Faire un schéma de la poutre déformée.
 - b) Justifier que la loi de variation de la déformation $\varepsilon(y)$ de la poutre composite s'écrit : $\varepsilon(y) = \varepsilon_0 - y/R$
- 2) On appelle $\sigma_1(y)$ la contrainte de traction ou compression générée dans la partie ① de la poutre, soit pour $0 < y < h_1$. De même, on appelle $\sigma_2(y)$ la contrainte de traction ou compression générée dans la partie ② de la poutre, soit pour $-h_2 < y < 0$. Exprimer la loi de variation de la contrainte $\sigma_1(y)$ en fonction de E_1, R, ε_0 et y . De même, exprimer $\sigma_2(y)$ en fonction de E_2, R, ε_0 et y .
- 3) En écrivant les conditions d'équilibre mécanique de la poutre composite,
 - a) donner l'expression de la force de traction axiale F en fonction de ε_0 et $1/R$, et des paramètres mécaniques et géométriques de la poutre composite.
 - b) Donner l'expression du moment de flexion M en fonction de ε_0 et $1/R$, et des paramètres mécaniques et géométriques de la poutre composite.
 - c) En déduire que R et ε_0 sont liés aux efforts externes F et M appliqués, par la

relation matricielle suivante:
$$\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} E_1 h_1 + E_2 h_2 & -\frac{1}{2}(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2) \\ -\frac{1}{2}(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2) & \frac{1}{3}(E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix}$$

- 4) Sachant que le déterminant de A se simplifie en :

$$\det A = ac - d^2 = \frac{b^2}{12} \{E_1^2 h_1^4 + E_2^2 h_2^4 + 2E_1 E_2 h_1 h_2 (2h_1^2 + 3h_1 h_2 + 2h_2^2)\},$$

justifier qu'il existe toujours une solution et déterminer les expressions de ε_0 et de $\frac{1}{R}$ en fonction de $F, M, \det A, a, d$ et c , puis en fonction de $F, M, \det A$ et des paramètres mécaniques et géométriques de la poutre.

Indication : On rappelle que la matrice inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} c & -d \\ -d & a \end{bmatrix}$$

- 5) a) Quelle condition doit vérifier la poutre composite pour qu'elle ne fléchisse pas sous l'action du seul effort axial F ?
 - b) En déduire l'expression du module d'Young E de la poutre homogène équivalente de même géométrie.
 - c) Retrouver ce résultat par un calcul direct.
- 6) a) Sous l'action du seul moment M , quelle condition doit vérifier la poutre composite pour que l'interface soit fibre neutre ?
 - b) En déduire l'expression de la raideur de flexion EI de la poutre homogène équivalente de même géométrie.
 - c) En déduire également que la condition $E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$ conduit à un découplage des effets induits par la force axiale F et le moment M .

B - Étude du bilame

Prenons maintenant en compte l'effet bilame et étudions le comportement de cet assemblage en fonction de la température, en l'absence de tous efforts externes appliqués.

- 1) a) Rappeler la définition d'un coefficient de dilatation thermique linéique α .
b) Exprimer en fonction de α_1 , α_2 , T et T_a les déformations thermiques libres ε_{th1} et ε_{th2} de chacune des lames prises séparément lorsque la température varie de T_a à T .

2) Dorénavant nous supposons que $T - T_a > 0$ et que $\alpha_1 < \alpha_2$. On se place dans le cas où $T - T_a$ est suffisamment faible pour que les hypothèses de la résistance des matériaux (flexion faible) soient vérifiées. Justifiez que la même variation de température de T_a à T sur le bilame (lames assemblées) produit une flexion dont on déterminera le sens (faire un schéma).

3) On rappelle que la déformation totale $\varepsilon(y)$ peut s'écrire comme la superposition d'une déformation thermique et d'une déformation mécanique :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_{th}(y) + \varepsilon_{mec}(y)$$

a) Déterminer la nature et le signe des contraintes mécaniques $\sigma_1(0)$ et $\sigma_2(0)$ qui se développent de part et d'autre de l'interface $y=0$ dans la poutre composite, suite à l'élévation de température.

b) Montrer que la condition d'adhérence parfaite implique la relation :

$$\alpha_1(T - T_a) + \frac{\sigma_1(0)}{E_1} = \varepsilon_0 = \alpha_2(T - T_a) + \frac{\sigma_2(0)}{E_2}$$

ε_0 désignant la déformation d'allongement de l'interface.

c) Ecrire l'expression des contraintes mécaniques $\sigma_1(y)$ en fonction de E_1 , R , ε_0 , y , α_1 , T et T_a , de même exprimer $\sigma_2(y)$ en fonction E_2 , R , ε_0 , y , α_2 , T et T_a .

4) Le bilame étant construit de telle manière que sa géométrie vérifie la condition $J = E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2$, on peut montrer qu'une augmentation de la température de T_a (le bilame n'est pas courbé à cette température) à T induit une courbure :

$$\frac{1}{R} = -\frac{3}{2} \frac{1}{h_1 + h_2} (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_a)$$

On suppose que le bilame est encastré à une de ses extrémités.

- a) Donner l'expression littérale de la flèche δ que donne le bilame à la température T .
- b) Donner la valeur numérique de δ à la température $T = 65^\circ\text{C}$.

C - Hygromorphes

Sur la figure 2a, on voit l'effet de l'humidité sur une pomme de pin. Quand l'air environnant est sec, la pomme de pin s'ouvre, alors qu'elle se referme pour des humidités environnantes plus importantes. La figure 2b montre le comportement d'une écaille individuelle de pomme de pin dans un environnement humide (i) (wet) ou sec (ii) (dry).

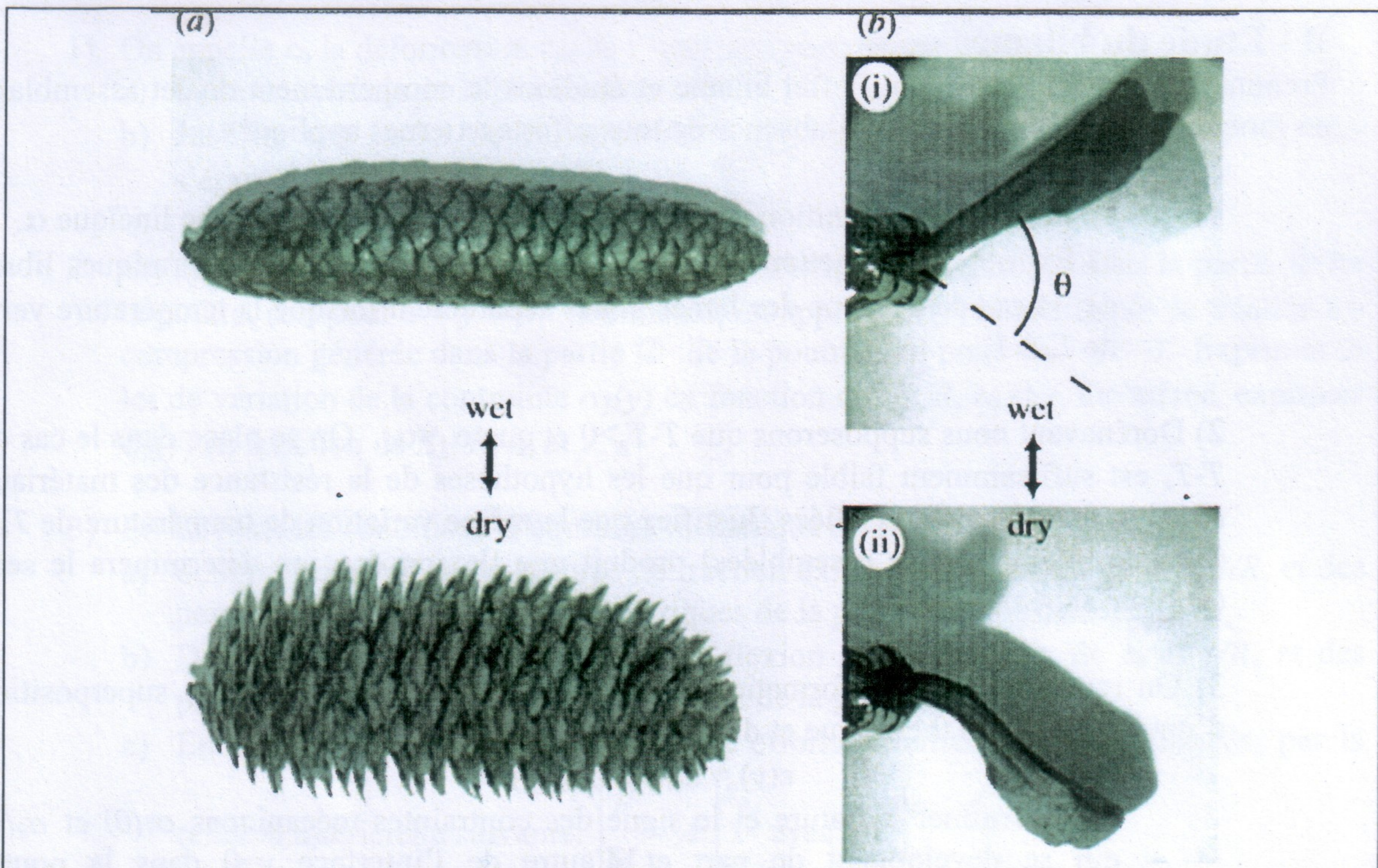
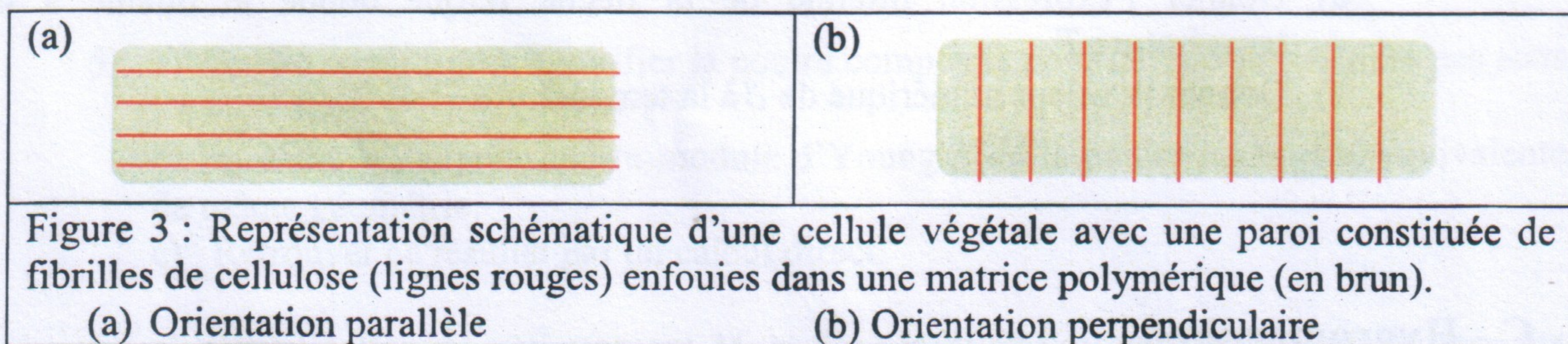


Figure 2 : Pomme de pin (a) et écale de pomme de pin (b) dans un environnement humide (i) ou sec (ii). D'après Reyssat et Mahadevan, *J. R. Soc. Interface*, 2009

A l'échelle microscopique, les cellules végétales sont très anisotropes (Fig. 3) et leurs parois sont constituées de fibrilles de cellulose (très rigides) enfouies dans une matrice polymérique hygroscopique analogue à un gel (mou). Lorsque le milieu environnant devient plus sec, un dessèchement se produit qui conduit à une contraction du gel.

- 1) L'orientation des fibrilles de cellulose par rapport à l'axe longitudinal de la cellule conditionne la réponse en déformation du tissu à un assèchement. Suivant les tissus, cette orientation des fibrilles peut être différente. Dans la figure 3a, on considère un tissu (a) où les fibrilles de cellulose sont orientées parallèlement à l'axe longitudinal de la cellule. La figure 3b schématise un tissu (b) où les fibrilles sont perpendiculaires. Quel est le tissu ((a) ou (b) ?) qui se déforme le plus longitudinalement quand le milieu environnant devient plus sec. Justifier. Quel est le signe de la déformation longitudinale dans ce cas ?



- 2) Donner une explication plausible de la réponse des pommes de pin à une variation d'humidité environnante.

2. Ascension d'une bulle de gaz dans un liquide

Les bulles de gaz de quelques centimètres de diamètre qui remontent dans un liquide ont une forme de parachute : la partie avant de la bulle est sphérique, et sa partie arrière est à peu près plate. G.I. Taylor a étudié expérimentalement la relation entre la vitesse d'ascension U des bulles et le rayon de courbure R de la partie avant. Dans ses expériences, les bulles d'air s'élèvent dans du nitrobenzène, de viscosité cinématique $\nu = 0.015 \text{ cm}^2/\text{s}$ et de masse volumique $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$. Les rayons de courbure sont compris entre 2,4 et 4,8 cm ; les dimensions transverses ($2R \sin \theta_0$) entre 2,8 et 6,2 cm ; et les vitesses d'ascension entre 29 et 48 cm/s. Dans la suite, on se place dans le référentiel où la bulle est immobile et où le liquide se déplace avec une vitesse U loin de la bulle.

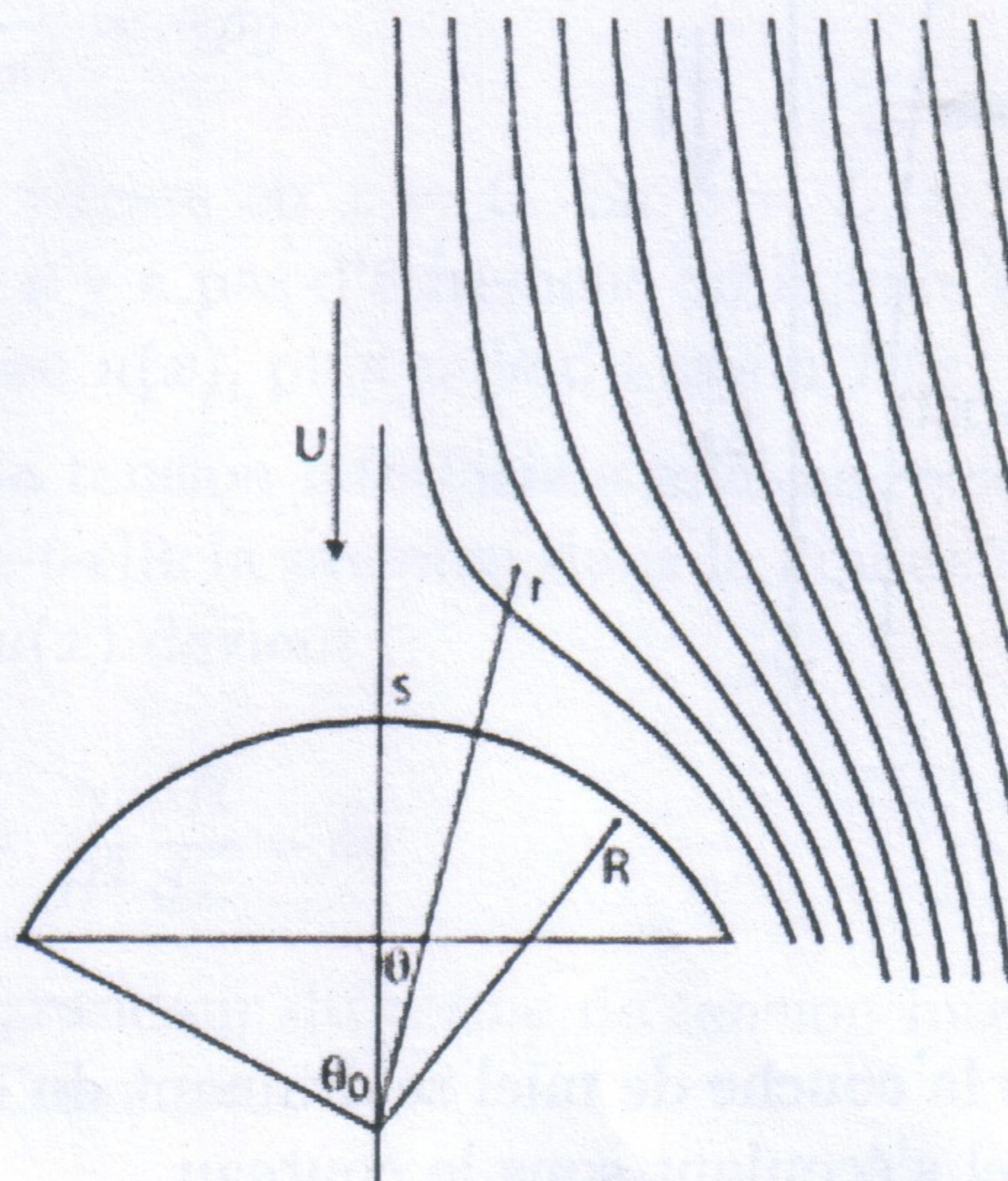


Photo d'une bulle parachute (ici de volume 40 cm^3) remontant dans l'eau. Schéma de l'écoulement autour de la bulle dans le référentiel où la bulle est immobile.

- Déterminer l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds dans les expériences décrites ci-dessus. Que peut-on en conclure ? Quelle relation peut-on utiliser pour relier la pression à la vitesse du fluide ?
- Que peut-on dire de la pression dans le liquide sur le pourtour de la partie sphérique de la bulle ? On supposera que la pression à l'intérieur de la bulle est constante. On notera γ la tension interfaciale liquide-air.
- Quelle est, en fonction de l'angle θ , la vitesse du liquide à la surface de la bulle, près du point de stagnation S (voir la figure ci-dessus) ? On pourra supposer que l'angle θ est petit et faire les approximations correspondantes.
- On fait l'hypothèse que l'écoulement du liquide autour de la partie sphérique de la bulle est le même que l'écoulement potentiel autour d'une sphère. Le champ de vitesse est alors donné par :

$$v_r(r, \theta) = U \cos \theta \left[1 - \frac{R^3}{r^3} \right] \quad v_\theta(r, \theta) = -U \sin \theta \left[1 + \frac{R^3}{2r^3} \right]$$

- Justifier cette hypothèse.
- Montrer que la vitesse d'ascension de la bulle est : $2/3 \sqrt{gR}$.

3. Drainage d'un fluide visqueux.

On s'intéresse à un fluide visqueux Newtonien et incompressible de viscosité dynamique $\eta = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, par exemple du miel. Il est tout à fait possible de sortir le miel de son pot à l'aide d'un couteau tenu verticalement. Sur le couteau maintenu vertical et fixe, le miel s'écoule ensuite, la couche de miel s'amincissant au cours du temps. Sous l'extrémité du couteau, un filet de miel libre s'écoule également. Nous allons décrire ces deux écoulements.

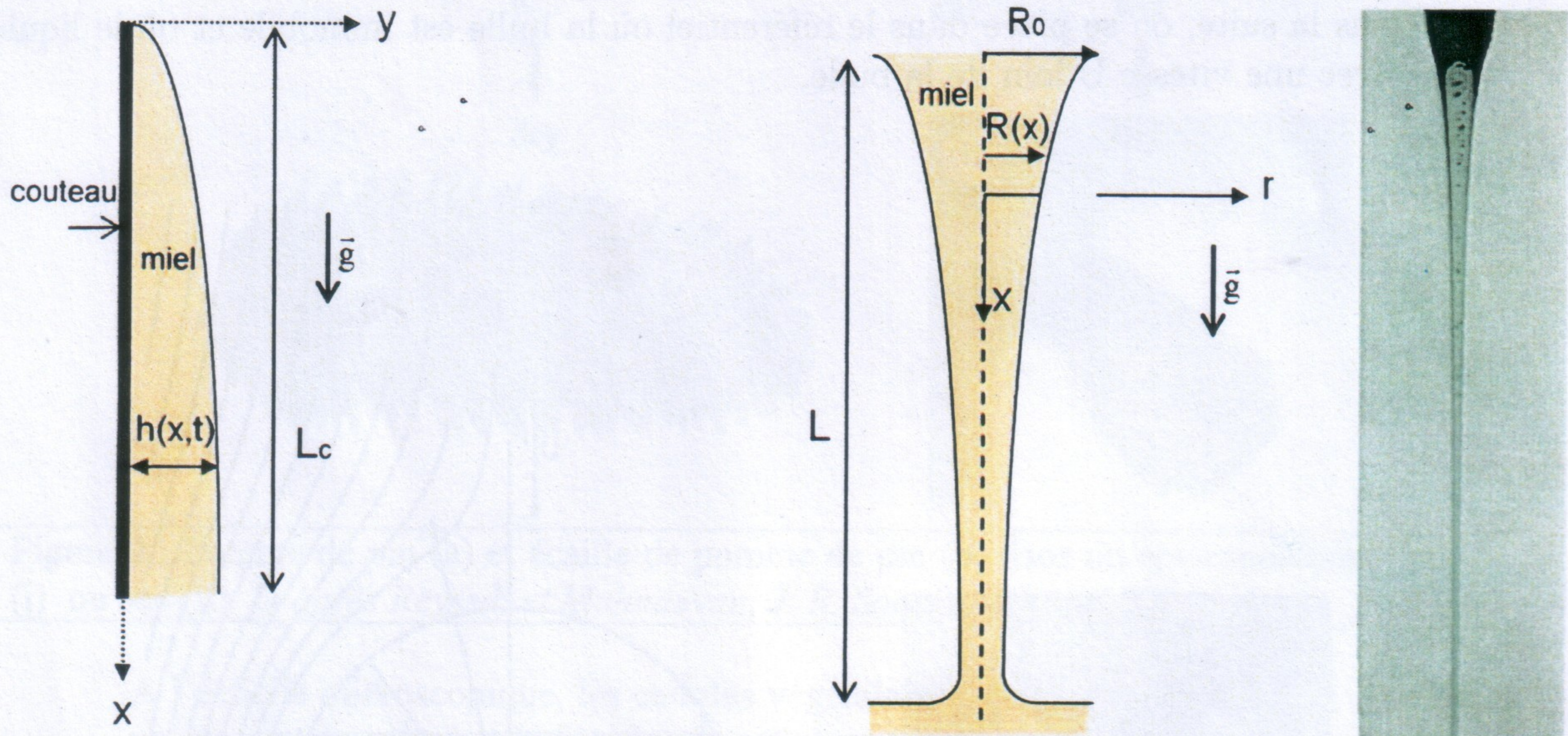


Schéma de la couche de miel se drainant du couteau (à gauche). Schéma et photo (à droite) du filet de miel s'écoulant sous le couteau

3.1. Ecoulement le long du couteau

1. - On note $h(x, t)$ l'épaisseur locale de la couche de miel déposée le long du couteau, et L_c sa longueur. On suppose que $h(x, t)$ varie lentement avec x . Justifier l'approximation de lubrification utilisée dans ce problème.
- Justifier le fait que la pression est constante dans la couche de miel (on remarquera que l'interface miel-air est très peu courbée). Donner l'équation du mouvement du fluide simplifiée en projection suivant \vec{x} . Quelles sont les conditions aux limites en $y=0$ et $y=h$? Déterminer le profil de vitesse $u(x, y)$ dans la couche de miel, et la vitesse moyenne $\langle u \rangle$ dans une section, à un instant t donné.
2. En écrivant la conservation de la masse dans une tranche d'épaisseur dx , montrer que l'épaisseur locale $h(x, t)$ obéit à l'équation :

$$\frac{\partial [\langle u \rangle h]}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

3. On cherche des solutions sous forme de variables séparées : $h(x, t) = f(x)k(t)$. Quelle est alors la forme de la couche de miel et comment son épaisseur varie-t-elle avec le temps ?

3.2. Écoulement sous le couteau

On considère maintenant le filet de miel de section circulaire qui s'écoule sous le couteau. La situation considérée est stationnaire, le débit volumique Q de miel est constant. Le rayon immédiatement sous le couteau (en $x = 0$) est $R_0 = 4 \text{ mm}$ et la hauteur du filet (entre le couteau et le pot de miel) est $L = 10 \text{ cm}$.

1. Dans un premier temps, on néglige les effets de la tension interfaciale miel-air.
 - Quelle est alors la pression à l'intérieur du filet de liquide ?
 - Pourquoi peut-on supposer que la vitesse u du liquide est indépendante de la coordonnée radiale r ?
 - Montrer que la vitesse du liquide $u(x)$ obéit à l'équation suivante :

$$\eta \frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho g \quad (2)$$

- Ecrire la condition à la limite pour la vitesse en $x = 0$. En $x = L$, à l'endroit où le liquide rejoint le bain, on supposera qu'il n'y a pas d'étirement du liquide ($du/dx = 0$ en $x = L$). En déduire l'évolution de la vitesse $u(x)$, puis celle du rayon $R(x)$.
2. On prend en compte à présent l'effet de la tension interfaciale miel-air, $\gamma = 50 \text{ mN/m}$.
 - Comment la tension interfaciale modifie-t-elle la pression dans le liquide ?
 - Montrer que l'équation pour la vitesse $u(x)$ devient :

$$\eta \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\gamma}{R^2} \frac{dR}{dx} - \rho g \quad (3)$$

- Estimer dans cette équation l'ordre de grandeur du terme de tension interfaciale et du terme de gravité. Lequel est dominant ? Conclure.

3.3. Écoulement à la sortie d'un robinet d'eau

On souhaite comparer ici le filet de miel avec le filet d'eau qui sort d'un robinet de rayon $R_0 = 1 \text{ cm}$ avec une vitesse $U_0 = 0.1 \text{ m/s}$.

- Quel est le nombre de Reynolds associé à cet écoulement ? Dans ce cas, quel est le terme dominant dans l'équation du mouvement du fluide ?
- Donner l'équation définissant $u(x)$.
- En déduire l'évolution du rayon $R(x)$.