

On écrit:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}} \quad \text{contraintes visqueuses}$$

au repos: $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$

vectorielle contrainte $\vec{T}(M) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{M}} \vec{n}(M)$

$$= -p(M) \vec{n}(M) \rightarrow \text{effort normal}$$

mais $p(M)$ peut varier avec M

relation linéaire entre $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{D}}$?

$$\underline{\underline{D}}_{ij} = A_{ijkl} D_{kl}$$

isotropie $\Rightarrow A_{ijkl} = a \delta_{ik} \delta_{jl} + b \delta_{ij} \delta_{kl} + c \delta_{ij} \delta_{kl}$

symétrie de $\underline{\underline{D}}$: $A_{ijkl} = A_{jilk} \rightarrow a=b$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{\underline{D}}_{ij} &= (a (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ji} \delta_{kl}) + c \delta_{ij} \delta_{kl}) D_{kl} \\ &= a \underbrace{(D_{ij} + D_{ji})}_{2 D_{ij}} + c \delta_{ij} \frac{D_{ll}}{t_v(\underline{\underline{D}})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}} = 2\eta \underline{\underline{D}} + \eta' t_v(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I}}$$

↳ 2 scalaires analogues aux coeff de Lamé

ex: écoulement Newton:

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \eta \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \eta \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{loi de Newton sur la viscosité}$$

η : viscosité dynamique η' : "deuxième coeff de viscosité"

rappel: $\underline{\underline{t}} = \frac{1}{3} t_v(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I}} \rightarrow$ dilatation

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} t_v(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{I}} \rightarrow \text{déformation sans chg de volume}$$

$$\underline{\underline{D}} = 2\eta \underline{\underline{d}} + (\eta' + \frac{2}{3}\eta) 3 \underline{\underline{t}}$$

$$\text{on pose } \eta'' = \eta' + \frac{2}{3}\eta \Rightarrow \underline{\underline{D}} = 2\eta \underline{\underline{d}} + 3\eta'' \underline{\underline{t}}$$

$\eta'' = \text{viscosité de volume}$

- associé aux chgs de volume de la part. de fluide
- mesurée dans des exp de pomp du son.

⑤ $\underline{\underline{\epsilon}}$ de mouvement

on "injecte" la loi de comportement $\underline{\underline{\epsilon}} = f(\underline{\underline{\rho}})$ dans lois de opti de movt.

Il faut calculer :

$$\text{div}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \text{div}(-p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\zeta}})$$

$$\text{div}(\underline{\underline{\zeta}})_i = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\cdot (\text{div}(-p \underline{\underline{I}}))_i = \frac{\partial (-p \delta_{ij})}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} = -(\text{grad}(p))_i$$

$$\cdot (\text{div}(\underline{\underline{\zeta}}))_i = 2\eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) + \eta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right)$$

$$= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \eta' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)$$

$\Delta \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow$
 $\quad \quad \quad \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) \quad \quad \text{grad} \quad \text{div}(\vec{v})$

$$\text{div}(\underline{\underline{\zeta}}) = \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \eta') \text{grad}(\text{div}(\vec{v}))$$

$$\text{div}(\underline{\underline{\zeta}}) = \eta \Delta \vec{v} + \left(\eta'' + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad}(\text{div}(\vec{v}))$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho}} \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v} + \left(\eta'' + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) + \rho \vec{f} \quad \rightarrow \text{équation de N.S.} \\ \forall \text{ fluide Newtonien.}$$

• si fluide incompressible $\Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{\rho}} \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{f}$$

Resume

Statique des fluides:

$$\vec{\sigma} = \rho \vec{g} - \vec{g} \text{grad}(P)$$

si incompressible

$$\rho g z + P = \text{cte}$$

fluide en mouvement:

non-visqueux: $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{g} \text{grad}(P)$

Visqueux $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{g} \text{grad}(P) + \text{div}(\underline{\underline{\tau}})$

Newtonien

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{g} \text{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v} + \left(\eta + \frac{1}{3}\eta\right) \vec{g} \text{grad}(\text{div}(\vec{v}))$$

Newtonien et incompressible

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{g} \text{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

Chapitre 4

Écoulements à viscosité négligeable.

① Écoulement irrotationnel

- On se place à $Re \gg 1$ mais écoulement laminaire loin des parois.
- si les gradients de vitesse n'ont pas le temps de diffuser ($\propto \sqrt{t}$)

Condition aux limites :

$$(\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

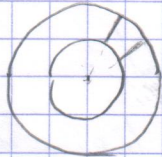
définition : $\forall t \forall M \quad \text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

↳ la particule de fluide au cours de son mouvement peut se déformer mais sans rotation sur elle-même.

ex:

- écoulement uniforme

- Tourbillon $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$



contraire ex:

Potentiel des vitesses:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \exists \Phi \text{ tel que } \vec{v} = \text{grad}(\Phi)$$

Propriété : $d\Phi = \text{grad}(\Phi) \cdot d\vec{M}$

$$\Rightarrow d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{M}$$

$$d\vec{M} \perp \vec{v} \Leftrightarrow d\Phi = 0 \rightarrow \text{les lignes de courants} = \text{lignes d'équipotential}$$

② Théorème de Bernoulli

hyp: fluide incompressible $\text{div}(\vec{v}) = 0$

① écoulement irrotationnel

$$\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \exists \Phi \quad \vec{v} = \text{grad}(\Phi)$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \text{div}(\text{grad}(\Phi)) = 0$$

$$\Delta \Phi = 0$$

Dans l'éq. de mouvement du fluide le terme de viscosité est $\eta \Delta \vec{v}$

$$\Rightarrow \Delta(\text{grad}(\Phi)) = \vec{0} \quad \text{car } \nabla \Phi = 0$$

On se retrouve avec l'équation d'Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad}(P) - \text{grad}(\rho g z)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \text{grad}(\Phi)) + \rho \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{grad}(P) + \text{grad}(\rho g z) = \vec{0}$$

$$\hookrightarrow \text{grad} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z \right) = \vec{0}$$

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = \text{cte dans tout le champ}$$

⑤ Théorème de Bernoulli:

fluide incompressible, viscosité négligée, écoulement permanent.

$$\rho \left(\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{v}) \right) + \text{grad}(P + \rho g z) = \vec{0}$$

en projetant sur une ligne de courant:

$$\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = \text{cte sur ligne de courant}$$

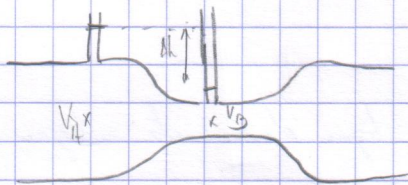
Applications:

• Torricelli

$$v = \sqrt{2gH}$$

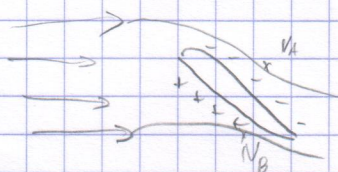


• effet Venturi



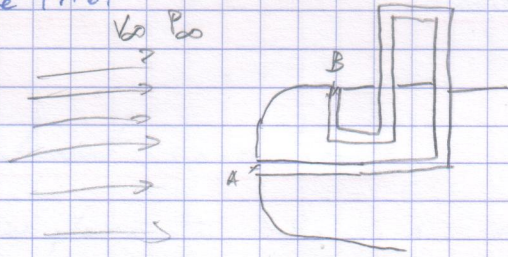
$$S_B v_B = S_A v_A \rightarrow v_B > v_A \rightarrow P_B < P_A$$

• Portance d'aile d'avion



$$v_A > v_B \rightarrow P_A < P_B \rightarrow \text{décollage}$$

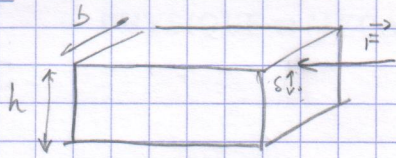
- tube de Pitot



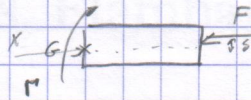
$$\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 + p_\infty = P_A$$

$$\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 + p_\infty = P_B + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 + p_\infty = P_A \\ \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 + p_\infty = P_B + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \end{array} \right\} \rightarrow P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2$$

Exercice n°11) Transport de l'axe \rightarrow

$$\begin{cases} X = F \\ \Gamma = FS \end{cases}$$

2) $\sigma_x = -\frac{F}{bh}$ contrainte de compression.3) $\sigma_{xx}(y)$? $M = EI/p = EIK$.

$$\text{et } E_{xx}(y) = -yK$$

$$\sigma_{xx}(y) = EE_{xx}(y) = -KEy$$

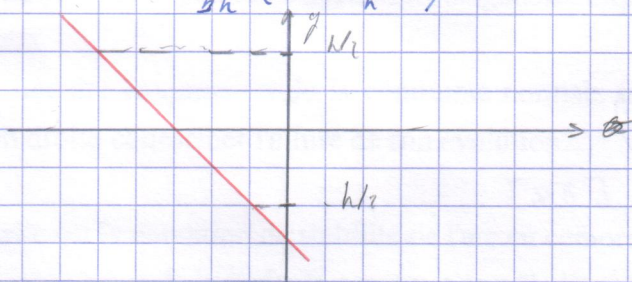
$$\sigma_{xx}(y) = -\frac{My}{I}$$

4) $\sigma(y) = \sigma_x + \sigma_{xx}(y)$

$$= -\frac{F}{bh} - \frac{My}{I}$$

$$\text{or } I = \frac{bh^3}{12} \text{ et } M = FS$$

$$\sigma(y) = -\frac{F}{bh} \left(1 + \frac{12yS}{h^2} \right)$$

5) On veut éviter la traction $\rightarrow \sigma(y) < 0 \forall y$ soit $\sigma(-h/2) < 0$

$$\text{d'où } -\frac{F}{bh} \left(1 - \frac{6S}{h} \right) < 0 \rightarrow -\frac{1}{6} < \frac{S}{h} < \frac{1}{6}$$

D'où excentrement de la force dans le tiers médian de la poutre.

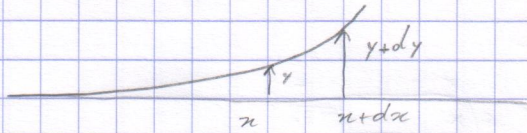
Exercice 2

$$\begin{aligned} 1) \quad \Gamma &\sim FS \\ &= \frac{EI}{p} = EIK \text{ or } EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$M \sim \frac{E I \delta}{L^2}$$

$$\hookrightarrow F \propto \frac{E I}{L^2}$$

2)



$\sum \vec{M} = \vec{0}$ sur tronçon $x - x+dx$

$$M_f(x+dx) + Fdy - M_f(x) = 0$$

$$\frac{dM}{dx} + F \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{et } M = \frac{E I}{\rho} \sim E I \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\hookrightarrow E I \frac{d^3 y}{dx^3} + F \frac{dy}{dx} = 0$$

$$CL \quad \begin{cases} y(0) = 0 & M_f(L) = 0 \\ \frac{dy(0)}{dx} = 0 & \frac{d^2 y}{dx^2}(L) = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{dy}{dx} = v(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

$$v(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$y(x) = -\frac{A}{k} \cos(kx) + C$$

$$y(0) = 0$$

$$\hookrightarrow y(x) = \frac{A}{k} (-\cos(kx) + 1)$$

$$\text{et } Ak \cos(kL) = 0 \rightarrow k = \frac{\pi}{2L} \left[\frac{\pi}{L} \right]$$

$$\text{or } k^2 = \frac{F}{E I}$$

$$\text{d'où soit de Floydsage } \left\{ F_c = \frac{\pi^2}{4L^2} E I \right.$$

3) tige soumise à son poids \rightarrow centre de gravité au milieu de la tige subit mg .

$$\hookrightarrow \rho L \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 g = \frac{\pi^2}{4 \left(\frac{L}{2} \right)^2} E I$$

$$L^3 = \left(\frac{4\pi EI}{\rho g D^2} \right)$$

$$\text{et } I = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\text{d'où } L = \left(\frac{\pi^2 E D^2}{16 \rho g} \right)^{1/3}$$

$$\hookrightarrow L \propto D^{2/3}$$

4) même argument que pour les arbres \rightarrow plus grand = plus trappa.