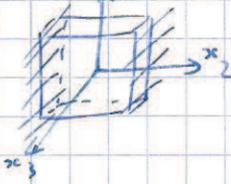


5) Exemples simples de $\vec{\sigma}$

a) Traction simple contrainte uniaxiale

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \\ \uparrow \\ \text{axe de traction} \end{matrix}$$

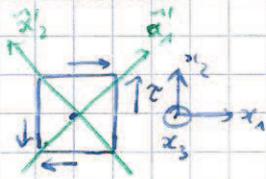
b) Contrainte plane plaq entre 2 parois latérales



dimension 1 \gg dim. 3

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

c) Cisaillement

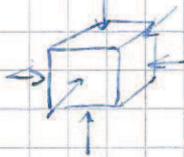


$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$$

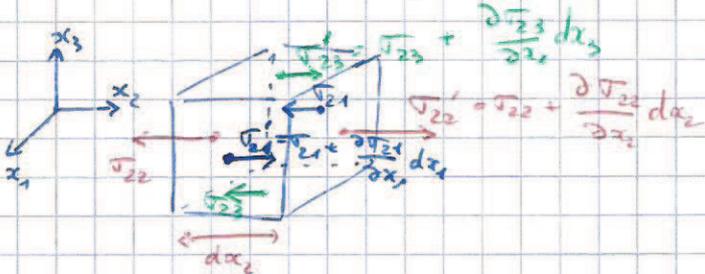
d) Contrainte isotrope
pression hydrostatique

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} = -P \vec{I}$$



$F(P_{hydro}) \perp$ surf
en compression

6) Equation du mouvement
Bilan des forces selon x_2



$$\begin{aligned} & (\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} dx_1 - \sigma_{21}) dx_2 dx_3 + \\ & (\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 - \sigma_{22}) dx_1 dx_3 + \\ & (\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_3 - \sigma_{23}) dx_1 dx_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + \rho \Delta \sigma_2 \right) dx_1 dx_3 \\ & \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} dx_1 dx_3 = \text{div}(\vec{\sigma})_2 \end{aligned}$$

Selon x_i , $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dx_1 dx_3$

Force selon x_i / volume : $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\text{div}(\vec{\sigma}))_i$ $\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right)_i$

* forces de volume

$$m\vec{g} \rightarrow \rho\vec{g} = \rho\vec{f}$$

généralisation

Bilan des forces par unité de volume

$$\operatorname{div}(\vec{\sigma}) + \rho\vec{f} = \vec{0} \quad (\text{en statique})$$

$$(\text{=} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad \text{en dynamique})$$

?) Décomposition de $\vec{\sigma}$

$$\vec{\sigma} = \vec{S}_\sigma + \vec{D}_\sigma$$

* partie sphérique \vec{S}_σ

$$\operatorname{TR}(\vec{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \operatorname{TR}(\vec{\sigma}_{\mathcal{R}^*})$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \mathcal{R}^*$$

(axes propres)

Contrainte moyenne: $\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \operatorname{TR}(\vec{\sigma})$

$$\vec{S}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \vec{\sigma} \quad \text{avec} \quad \vec{\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* partie déviatorique \vec{D}_σ

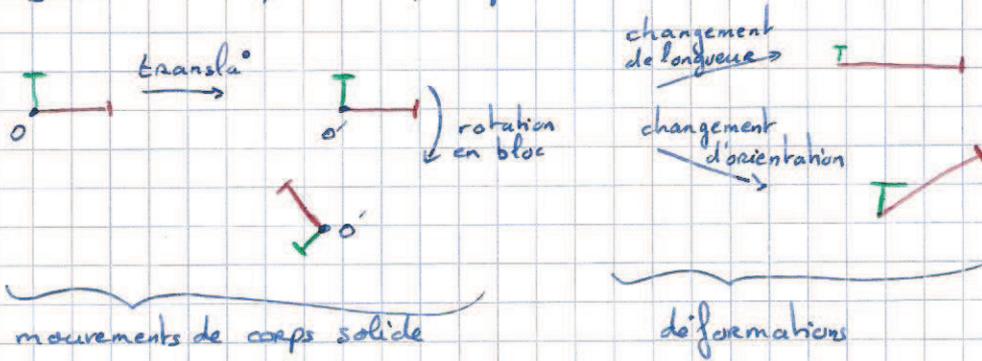
$$\vec{D}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{TR}(\vec{D}_\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 3\sigma_m = 0$$

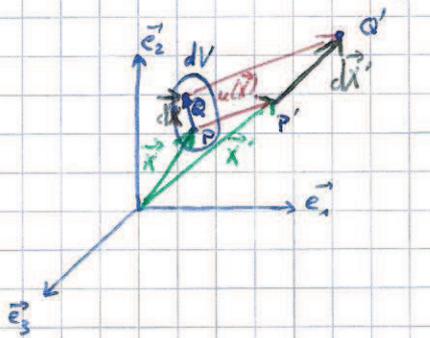
Chapitre 3 : Les déformations

I) Mouvements de corps rigides et déformations

1) Translation, rotation, déformation



2) Matrice des gradients de déplacement \bar{G}



$$P \rightarrow P' \quad \text{avec} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$Q \rightarrow Q' \quad \text{avec} \quad \vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}) \begin{cases} u_1 + du_1 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ u_2 + du_2 = u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots \\ u_3 + du_3 = u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \dots \end{cases}$$

$$du \ll u$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{X} \\ \vec{OP}' &= \vec{X}' = \bar{F}(\vec{X}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{X}) &= \vec{PP}' = \vec{X}' - \vec{X} \\ d\vec{X} &= \vec{PQ} \end{aligned}$$

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad d\vec{X} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}) = \vec{u}(\vec{X}) + \underbrace{\bar{G} d\vec{X}}_{\substack{\text{translation} \\ (\text{mvt corps rigide})}}$$

3) Décomposition de \bar{G} en $\bar{\Omega}$ et \bar{E}

$$\bar{G} = \bar{\Omega} + \bar{E} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{\Omega} = \frac{1}{2}(\bar{G} - \bar{G}^T) & \leftarrow \text{matrice antisymétrique} \\ \bar{E} = \frac{1}{2}(\bar{G} + \bar{G}^T) & \leftarrow \text{matrice symétrique} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

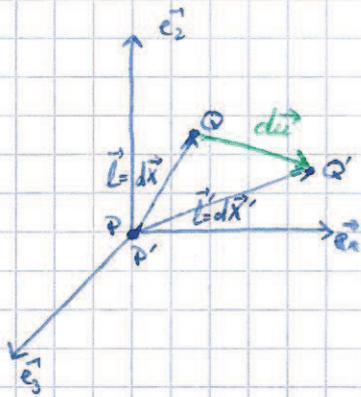
$$\text{vecteur rotation } \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{u})$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{u}(\vec{x} + d\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x}) + \underbrace{\vec{\Omega} d\vec{x}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\vec{\epsilon} d\vec{x}}_{\text{déformation}}$$

III) Interprétation de $\vec{\epsilon}$

1) Termes de $\vec{\epsilon}$



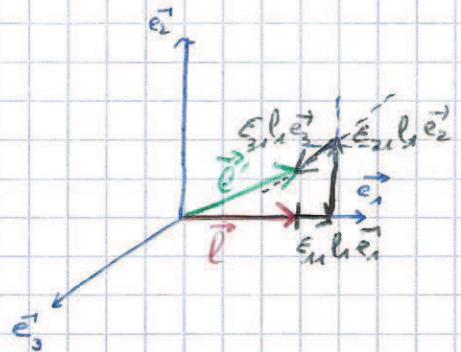
$$d\vec{u} = \vec{\epsilon} d\vec{x} \quad (\text{si on s'affranchit de la rotation})$$

$$\vec{l} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = d\vec{x}$$

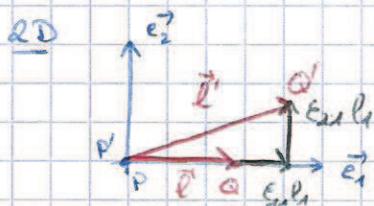
$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$d\vec{u} \begin{pmatrix} du_1 = \epsilon_{11} l_1 + \epsilon_{12} l_2 + \epsilon_{13} l_3 \\ du_2 = \epsilon_{21} l_1 + \dots \\ du_3 = \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Si}}: \vec{l} = l_1 \vec{e}_1, \quad d\vec{u} = \epsilon_{11} l_1 \vec{e}_1 + \epsilon_{21} l_1 \vec{e}_2 + \epsilon_{31} l_1 \vec{e}_3$$



2) Variation de longueur $|\epsilon_{ii}|$



$$\vec{l} = l_1 \vec{e}_1 \rightarrow \vec{l}' = \vec{l} + (\epsilon_{11} l_1) \vec{e}_1 + (\epsilon_{21} l_1) \vec{e}_2$$

Allongement relatif:

$$\frac{\|\vec{l}'\| - \|\vec{l}\|}{\|\vec{l}\|} = \frac{\sqrt{(1 + \epsilon_{11})^2 l_1^2 + \epsilon_{21}^2 l_1^2} - l_1}{l_1}$$

$$= \left((1 + \epsilon_{11})^2 + \epsilon_{21}^2 \right)^{1/2} - 1$$

$$\approx 1 + \frac{2\epsilon_{11}}{2} - 1 = \epsilon_{11}$$

\hookrightarrow expansion si $\epsilon_{ii} > 0$

3) Variations d'orientation

$$\tan(\alpha) = \frac{\epsilon_{21} l_1}{(1 + \epsilon_{11}) l_1}$$

$$\epsilon_{11} \ll 1, \quad \tan(\alpha) \sim \epsilon_{21} \sim \kappa$$

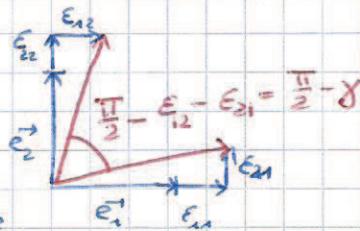
↳ ϵ_{ij} : déformation angulaire
($i \neq j$)

Distorsion : $\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ji} = 2\epsilon_{ij} = 2\epsilon_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

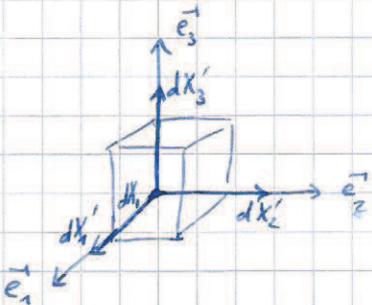
$$\vec{l} = \vec{e}_2$$

γ rapprochement angulaire
de 2 axes ⊥

$$\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \gamma$$



4) Dilatation volumique



$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{III} \end{pmatrix} \mathbb{R}^3$$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \rightarrow dV' = dx_1' dx_2' dx_3' = dx_1(1 + \epsilon_I) dx_2(1 + \epsilon_{II}) dx_3(1 + \epsilon_{III}) \approx (1 + \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}) dV$$

Variation relative de volume :

$$\Theta_V = \frac{dV' - dV}{dV} = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} = \text{TR}(\bar{\epsilon}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div}(\vec{u})$$

$$\Theta_V = 0 \rightarrow \text{div}(\vec{u}) = 0$$

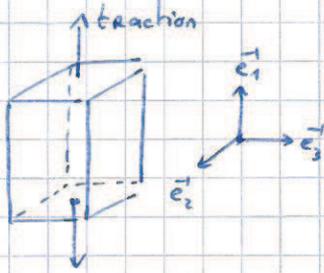
↳ transf. sans changement de volume.

Chapitre 4

Lois de comportement pour l'élasticité linéaire isotrope

I) Loi de Hooke généralisée

1) Traction ou compression uniaxiale



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{II} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{E} \quad \epsilon_{II} = -\nu \epsilon_{I} = \epsilon_{III}$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{II}}{E} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

De même, pour une traction selon e_2 , $\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} -\nu \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{II}}{E} \end{pmatrix}$

2) Superposition des effets

Il existe un repère \mathcal{R}^* d'axes propres dans lequel $\underline{\underline{M}}$ est diagonale :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{II}}{E} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}^*} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{II}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}^*} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{II}}{E} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}^*}$$

\hookrightarrow 3 tractions uniaxiales

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{II}}{E} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{II}}{E} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{III}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{II}}{E} - \frac{\nu}{E} (\frac{\sigma_{II}}{E} + \frac{\sigma_{III}}{E}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{III}}{E} - \frac{\nu}{E} (\frac{\sigma_{II}}{E} + \frac{\sigma_{III}}{E}) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}^*}$$

La généralisation donne $\epsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \delta_{ij}$

3) Repère \mathcal{R} quelconque

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\mathcal{R}} = {}^t \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\sigma}}_{\mathcal{R}^*} \underline{\underline{Q}} \quad \text{où } \underline{\underline{Q}} \text{ est la matrice de passage de } \mathcal{R}^* \text{ à } \mathcal{R}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{\mathcal{R}} = {}^t \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{\epsilon}}_{\mathcal{R}^*} \underline{\underline{Q}}$$

— Mécanique des solides déformables —

Exercice 1 : Solide d'isocontrainte (ou d'égale résistance)

Un support de révolution (autour d'un axe vertical Oz orienté vers le bas), de hauteur h et de masse volumique ρ , encaissé à son extrémité supérieure $z = 0$ une charge F . On souhaite dimensionner ce support de sorte que la contrainte normale dans le plan de toute section droite horizontale $z = Cte$ soit constante. On notera σ_0 la valeur absolue de cette contrainte. Quelle doit être alors l'évolution de l'aire $S(z)$ des sections horizontales en fonction de σ_0 , F , h , ρ et de l'accélération de la pesanteur g ? Citer des exemples possibles de ce type de forme.

Exercice 2 : Sollicitations d'une poutre élastique hétérogène

Une poutre horizontale selon la direction x et encastrée en $x=0$, de section droite rectangulaire et de longueur L est constituée de l'assemblage de deux poutres géométriquement identiques de longueur $L/2$ mais formées de matériaux élastiques linéaires et isotropes différents. On supposera que chaque demi-poutre est homogène et non pesante. Les modules d'Young et les coefficients de dilatation thermiques linéaires respectifs sont E_1 et β_1 pour $0 < x < L/2$ et E_2 et β_2 pour $L/2 < x < L$. Donner l'expression du déplacement horizontal $u(x)$ en tout point x le long de l'axe de la poutre et en particulier à son extrémité $x=L$ pour les deux sollicitations suivantes a) et b). Commenter les résultats.

- On soumet cette poutre à un essai de traction uniaxiale suivant x avec une contrainte q .
- La poutre est maintenant soumise à une variation de température $\Delta T = T - T_0$, sa longueur totale L étant maintenue constante. Calculer la contrainte interne q pour une poutre de longueur $L=2m$, constituée d'une partie 1 en laiton ($E_1 = 120 \text{ GPa}$, $\beta_1 = 18,7 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) et d'une partie 2 en acier ($E_2 = 200 \text{ GPa}$, $\beta_2 = 11,7 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) et soumise à une variation de température $\Delta T = 80^\circ\text{C}$.

Exercice 3 : Cheville à écartement

Une cheville à écartement, positionnée dans un béton dur, est constituée d'un boulon d'acier à extrémité filetée entouré d'un manchon cylindrique d'élastomère mis en compression par un système rondelle-écrou (voir figure).

Elastomère :

Module d'Young $E = 7 \text{ MPa}$

Coefficient de Poisson $\nu = 0,498$

Rayon extérieur du manchon $R = 5 \text{ mm}$

Longueur du manchon $L = 50 \text{ mm}$

Coefficient de frottement $\mu = 0.5$ (béton – élastomère)

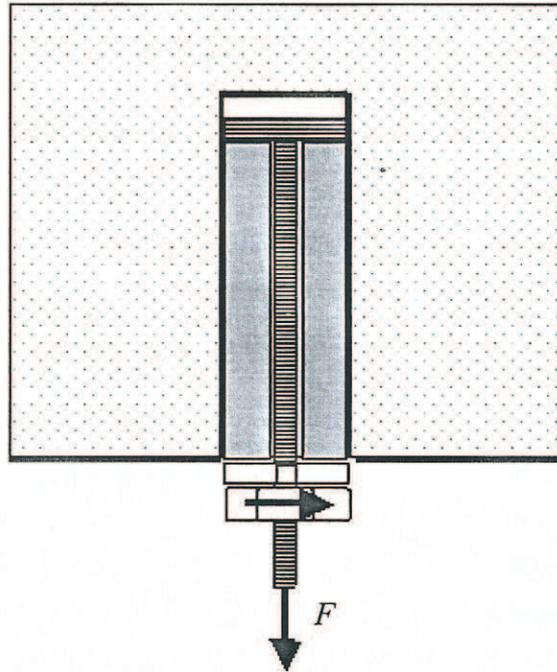
Boulon :

Pas de la tige filetée $p = 0.75 \text{ mm}$

Nombre de tours de serrage $\alpha = 0,25$

- a) Donner l'expression de la charge maximale admissible F en fonction du nombre α de tours de serrage de l'écrou et sa valeur pour un serrage d'un quart de tour.
- b) Quels arguments donneriez-vous pour justifier le choix d'un élastomère comme matériau constitutif du manchon?

On supposera négligeables les déformations du béton, du boulon, de la rondelle et de l'écrou.



Exercice 4 : Ballon gonflé

Un ballon en caoutchouc est gonflé jusqu'à une pression $P = 60$ kPa. A cette pression, le rayon du ballon est $R = 115$ mm et l'épaisseur de la paroi est de $t = 1.2$ mm. Le caoutchouc a un module d'Young $E = 3.5$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.45$. Déterminer les contraintes et déformations maximales dans le ballon.

Exercice 5 : Résistance d'un câble composite

Un câble composite est constitué d'une âme en acier (diamètre $a = 1,25$ mm, module d'Young E_a , coefficient de Poisson ν_a , limite élastique R_a) et d'une gaine en aluminium (diamètre $b = 2,5$ mm, module d'Young E_b , coefficient de Poisson ν_b , limite élastique R_b). Il est soumis à un effort de traction.

	Module d'Young	Coefficient de Poisson	Limite élastique
Acier	210 GPa	0,3	200 MPa
Aluminium	70 GPa	0,3	70 MPa

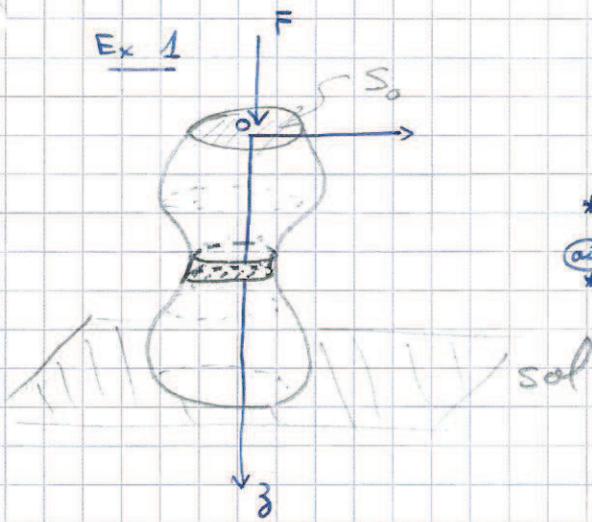
- a) Montrer que le module d'Young E du câble s'exprime sous la forme:

$$E = E_a(\rho + \chi(1 - \rho))$$

avec $\chi = E_b/E_a$ et $\rho = (a/b)^2$ et donner sa valeur. On justifiera les hypothèses faites pour aboutir à ce résultat.

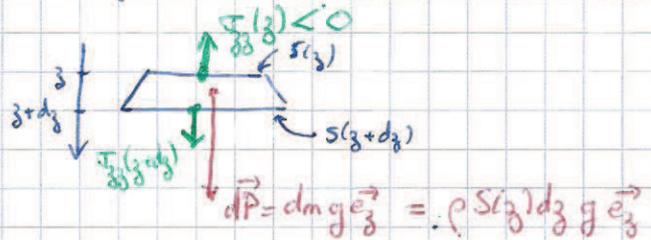
- b) Quel est le métal qui se plastifie en premier? Exprimer littéralement puis numériquement la limite élastique R du câble composite. Quel rôle joue le noyau central? Quelle est l'utilisation de ce type de câble?

TD 1



* Statique $\text{div}(\vec{\sigma}) + \rho \vec{g} = \vec{0}$

au * Bilan des forces en statique sur une tranche élémentaire



$$\sigma_0 = \left| \frac{F}{S_0} \right|$$

$$-\sigma_{33}(z)S(z) + \sigma_{33}(z+dz)S(z+dz) + \rho S(z)dzg = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(\sigma_{33}S)}{\partial z} = -\rho S(z)g$$

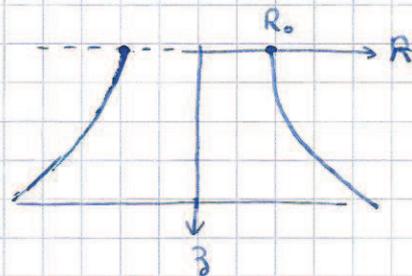
avec $\sigma_{33}(z) = -\sigma_0 \forall z$
 ↑ compression

Ainsi

$$\frac{\partial S}{\partial z} = + \frac{\rho g}{\sigma_0} S(z)$$

$$\Rightarrow \left| S(z) = S_0 e^{\rho g \frac{S_0}{F} z} \right|$$

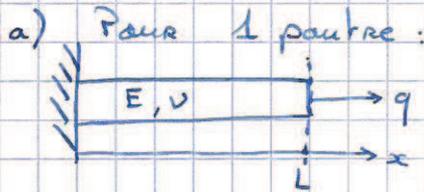
En terme de rayon, $\left| R(z) = R_0 e^{\frac{\rho g}{\sigma_0} \frac{S_0}{F} z} \right|$



forme qui s'évase

On rencontre cette forme pour certain pont, arbre...

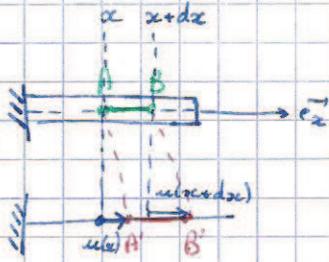
Ex 2.



(non pesante)

Traction uniaxiale : $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_R \rightarrow \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} q/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu q/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu q/E \end{pmatrix}$

$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$



$\epsilon_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'A + B'B'}{dx} = \frac{-u(x) + u(x+dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$

$\hookrightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{E} \right|$

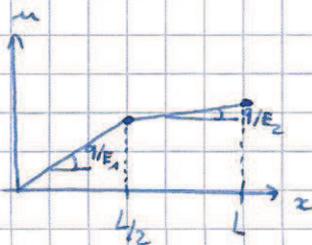
$\Rightarrow \left| u(x) = \frac{q}{E} x \right| \quad (\text{car } u(0) = 0)$

Pour la barre composite,

$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{E_1} \Rightarrow u(x) = \frac{q}{E_1} x$

$\frac{L}{2} \leq x \leq L \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q}{E_2} \Rightarrow u(x) = \frac{q}{E_2} \left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{qL}{2E_1} = \frac{q}{E_2} x + \frac{qL}{2} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right)$

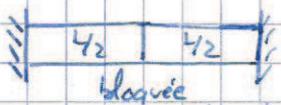
$u(L) = \frac{qL}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) = \frac{2}{E_{eff}} = \alpha \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}$



b) Dilatation thermique

$\beta = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T}$

$\hookrightarrow \left| \frac{\vec{\epsilon}^th}{\Delta T > 0} = \beta \Delta T \vec{\delta} \right|$
Dilatation isotherme



Si $T \uparrow$, le matériau se dilate
 la dilatation thermique empêchée par les parois fixes le long de l'axe x génère une
 contrainte équivalente q (de compression)

En l'absence des parois:

$$0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad E_{xx} = \beta_1 \Delta T = \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad u_1(x) = \beta_1 \Delta T x + C_1$$

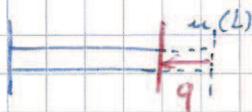
avec $u(0) = 0$

$$\Rightarrow u_1(x) = \beta_1 \Delta T x$$

$$L/2 \leq x \leq L \quad E_{xx} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \beta_2 \Delta T \quad \Rightarrow \quad u_2(x) = \beta_2 \Delta T (x - \frac{L}{2}) + \beta_1 \Delta T \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow u(L) = u_2(L) = (\beta_2 + \beta_1) \Delta T \frac{L}{2}$$

Avec paroi à droite



On ramène $u(L)$ à 0 par contrainte de compression q

Question a: $u(L) = \frac{qL}{E_{eff}}$ (en traction)

$$\Rightarrow (\beta_2 + \beta_1) \Delta T \frac{L}{2} + \frac{qL}{E_{eff}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = -\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \Delta T E_{eff}}$$