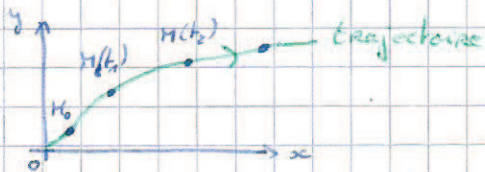


## II. Cinématique

### I) Lagrange et Euler

#### 1) Champ Lagrangien

Notion de "particule de fluide", identifiée par sa position initiale  $\vec{OM}_0$  à  $t=0$ .  
 Sa position à  $t$  est  $\vec{OM}(t) = X(t)\vec{x} + Y(t)\vec{y} + Z(t)\vec{z}$



champ scalaire : On suit la valeur de  $\theta$  portée par la particule  $\Rightarrow \theta(\vec{OM}_0, t)$   
 (trajectoire  $\theta$ )

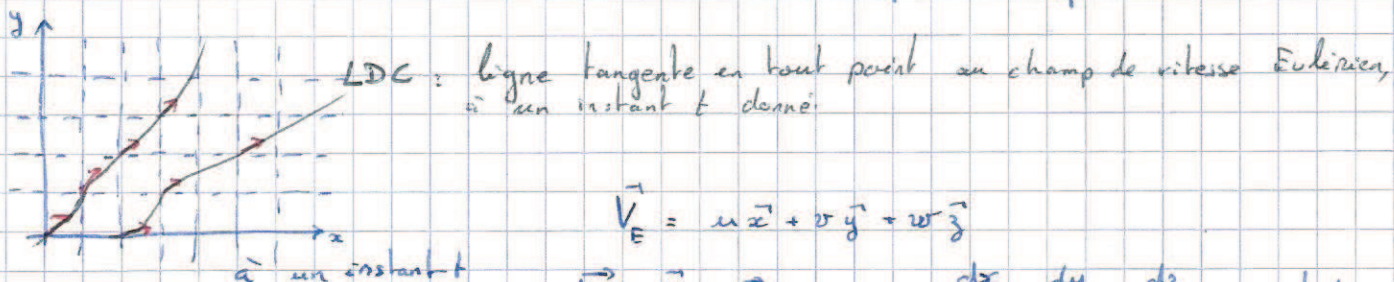
champ vectoriel :  $\vec{V}(\vec{OM}_0, t) = \frac{d\vec{OM}(\vec{OM}_0, t)}{dt}$   
 (vitesse)

Expérimentalement : colorant, traceur

#### 2) Champ Eulerien

Donnée d'une grandeur physique en chq pt fixe de l'espace et à l'instant  $t$   
 ( $\Rightarrow$  on observe  $\neq$  particules qui se succèdent à cet endroit)

On mesure par exemple  $\theta(x, y, z, t)$  ou  $V_E(x, y, z, t)$  où  $x, y, z$  sont des variables indépendantes entre elles et ne dépendent pas du temps.

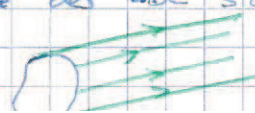


$$\vec{V}_E = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \vec{V}_E = 0 \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad \text{à } t \text{ donné}$$

Un écoulement est stationnaire si  $\frac{\partial \vec{V}_E}{\partial t} = \vec{0}$

Tube de courant : surface fermée composée des LDC s'appuyant sur une surface



En écoulement stat, le débit massif traversant les sections du tube de courant se conserve.

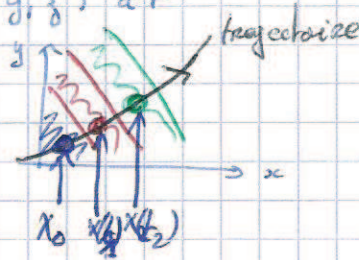
ligne d'émission: injection d'un traceur en continu en un pt fixe, on obtient l'ensemble des positions des particules de fluide qui sont passées antérieurement par le point d'émission

### 3) Relation entre Lagrange et Euler

La valeur du champ Eulerien de la quantité  $\Theta$  en  $(x, y, z)$  fixe, est portée par la particule fluide dont la position est  $(x, y, z)$  à  $t$

ca d

$$\begin{aligned} X(t) &= x \\ Y(t) &= y \\ Z(t) &= z \end{aligned}$$



Champ eulerien de température  $\Theta$  à  $t$ .  
On observe q la température de la particule change lorsqu'elle traverse le chp eulerien.

$$\Theta_E(x, y, z, t) = \Theta_L(X(t), Y(t), Z(t))$$

$$\vec{V}_E(x, y, z, t) = \vec{V}_L(X(t), Y(t), Z(t))$$

↳ se déplacer dans un chp Eulerien introduit des varia<sup>o</sup> temporelles de  $\Theta$ .

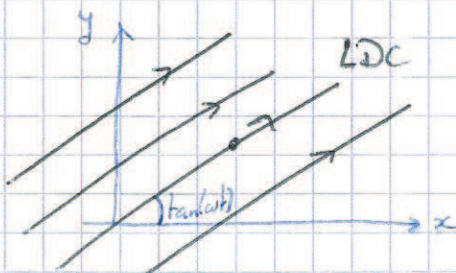
Exemple: Soit le chp de vitesse  $\vec{V} = \underbrace{V_0 \cos(\omega t)}_{u(x, y, z, t)} \vec{x} + \underbrace{V_0 \sin(\omega t)}_{v(x, y, z, t)} \vec{y}$

• LDC

$$d\vec{r} \wedge \vec{V}_E = \vec{0} \quad \text{à } t \text{ fixé}$$

$$\Rightarrow v dx - u dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\omega t) \quad \Rightarrow \quad y = \tan(\omega t)x + K \quad \text{à } t \text{ donné}$$



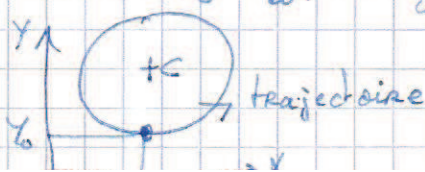
• trajectoires: il nous faut la vitesse Lagrangienne

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = u \\ \frac{dY(t)}{dt} = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) + X_0 \\ Y(t) = -\frac{V_0}{\omega} \cos(\omega t) + Y_0 + \frac{V_0}{\omega} \end{cases}$$

( $\vec{r}_0 = X_0 \vec{x} + Y_0 \vec{y}$  position initiale)

$$(X(t) - X_0)^2 + (Y(t) - Y_0 - \frac{V_0}{\omega})^2 = \frac{V_0^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \text{cercles de centre } (X_0, Y_0 + \frac{V_0}{\omega}) \text{ et de rayon } \frac{V_0}{\omega}$$

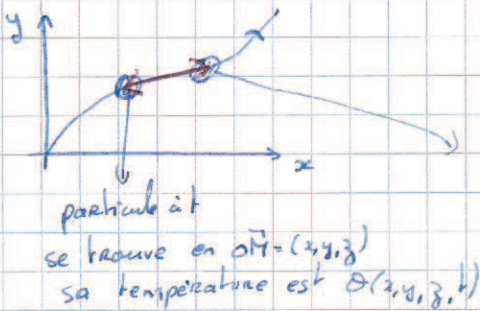


## II] Dérivation particulière

= dérivée temporelle d'une grandeur physique en suivant le mvmt de la particule, exprimée en variables Eulériennes

### 1) D'une grandeur scalaire

ex: température



la même particule à  $t+dt$   
se trouve en  $\vec{OM} + d\vec{M}$  avec  $\begin{cases} dx = u dt \\ dy = v dt \\ dz = w dt \end{cases}$   
et sa température est  $\Theta(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{D\Theta}{Dt} \Big|_{\text{suivant la particule}} = \frac{\Theta(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \Theta(x, y, z, t)}{dt}$$

$$= \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{dx}{dt}}_u + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \underbrace{\left( \frac{\partial \Theta}{\partial x} u + \frac{\partial \Theta}{\partial y} v + \frac{\partial \Theta}{\partial z} w \right)}_{\text{variation temporelle due à l'exploration d'un champ Eulérien de } \Theta \text{ non uniforme}}$$

variation temporelle au pt fixe

$$\boxed{\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \Theta}$$

↑  
dérivée convective

Si  $\frac{D\Theta}{Dt} = 0$  Alors la température de la particule ne varie pas au cours de son mvmt.

### 2) D'une fonction vectorielle

ex: la vitesse  $\Rightarrow$  accélération particulière

$$\vec{V} = u \vec{x} + v \vec{y} + w \vec{z}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{Du}{Dt} \vec{x} + \frac{Dv}{Dt} \vec{y} + \frac{Dw}{Dt} \vec{z} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \right) (u \vec{x} + v \vec{y} + w \vec{z})$$

En cartésienne:  $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right] (u \vec{x} + v \vec{y} + w \vec{z})$

En cylindrique:  $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z} \right] (v \vec{e}_r + \frac{v}{r} \vec{e}_\theta + w \vec{e}_z)$

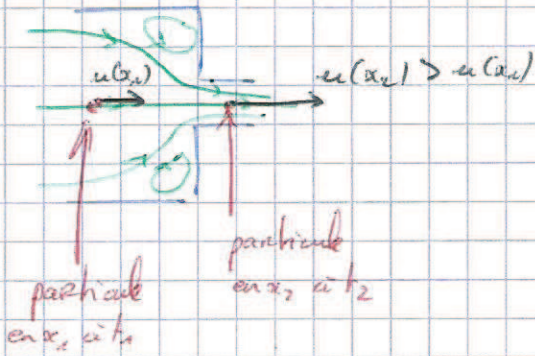
# Accélération particulaire

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{accélération convective due à l'évolution d'un champ de vitesse Eulerien non uniforme}} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}$$

due au caractère instationnaire de l'écoulement

accélération convective due à l'évolution d'un champ de vitesse Eulerien non uniforme.

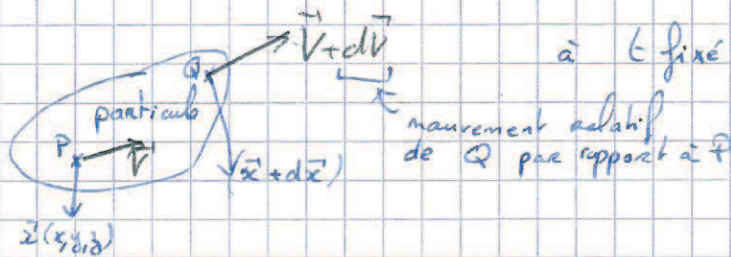
ex: écoulement stationnaire à travers une contraction brusque



## III.1 Déformation d'une particule de fluide

Un élément de fluide peut subir au cours de son mv. 3 changements :

- translation
- rotation
- déformation



La  $i$ -ème composante de  $d\vec{V}$  est  $dv_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$  gradient de vitesse

On a le tenseur des gradients de vitesse  $\underline{\underline{\nabla}} \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

$$|d\vec{V} = \underline{\underline{\nabla}} \vec{V} \cdot d\vec{x}|$$

Décomposition de  $\underline{\underline{\nabla}} \vec{V}$  :

$$\underline{\underline{\nabla}} \vec{V} = \frac{1}{2} \left[ \underline{\underline{\nabla}} \vec{V} + \underline{\underline{\nabla}} \vec{V}^T \right] + \frac{1}{2} \left[ \underline{\underline{\nabla}} \vec{V} - \underline{\underline{\nabla}} \vec{V}^T \right]$$

$\underline{\underline{\Sigma}}$  Symétrique tenseur des vitesses de déformation       $\underline{\underline{\Omega}}$  antisymétrique

Tenseur  $\underline{\underline{\Sigma}}$  des vitesses de déformation

$$1 \uparrow \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

$$\underline{D} = \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{d}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{D}) \underline{\underline{I}} \quad \text{tenseur sphérique}$$

$$\underline{\underline{d}} = \underline{D} - \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{tenseur de trace nulle}$$

DEVIATEUR

- $\underline{\underline{\epsilon}}$  lié aux changements de volume ( $\text{tr}(\underline{D}) = \text{div}(\vec{V})$ )  
nul pour un écoulement incompressible

- $\underline{\underline{d}}$  lié aux déformations sans changement de volume qui peut se décomposer en
  - composantes diagonales
  - " non diag : cisaillement

• Tenseur  $\underline{\underline{\Omega}}$  antisym.

$$\hookrightarrow \text{tr}(\underline{\underline{\Omega}}) = 0$$

$\hookrightarrow$  comp. non diag opp.

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

correspond à la rotation en bloc du fluide

def  $\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{V})$  vorticité

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{V}) \quad \text{vecteur tourbillon}$$

Relation entre  $\underline{\underline{\Omega}}$  et  $\underline{\underline{\Omega}}$

$$\underline{\underline{\Omega}} d\vec{x} = \left( \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{V}) \right) \cdot d\vec{x} = \underline{\underline{\Omega}} \cdot d\vec{x}$$

En résumé,

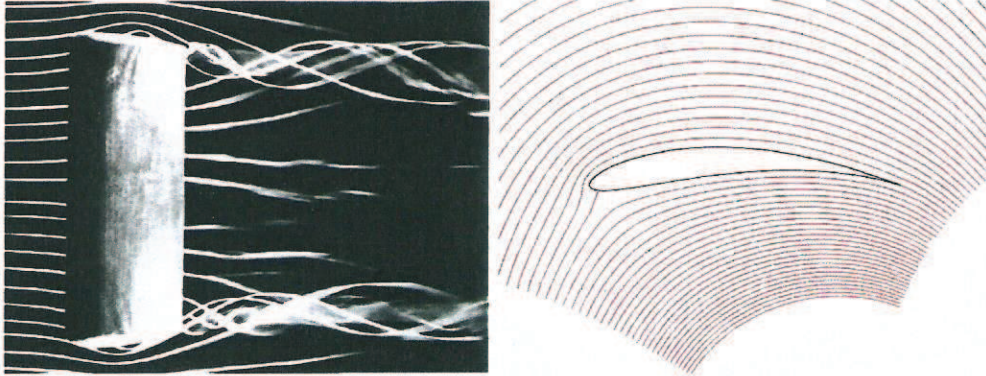
$$\vec{V}(\vec{x} + d\vec{x}) = \underbrace{\vec{V}(\vec{x})}_{\text{transl.}} + \underbrace{\underline{D} d\vec{x}}_{\text{déform.}} + \underbrace{\underline{\underline{\Omega}} \cdot d\vec{x}}_{\text{rotat.}}$$

---

## Cinématique des fluides

### TD

---



## Écoulements bidimensionnels

Le champ de vitesse Eulérien d'un écoulement bidimensionnel est de la forme :  
 $\vec{V} = (kx, ky, 0)$  en coordonnées cartésiennes.

1. Déterminer l'équation des lignes de courant et celles des trajectoires.  
Commenter.
2. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.
3. Déterminer l'évolution d'une particule de fluide de forme carrée et de côté  $a$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ . Commenter.
4. Reprendre les mêmes questions avec :
  - $\vec{V} = (ky, kx, 0)$
  - $\vec{V} = (-ky, kx, 0)$ .

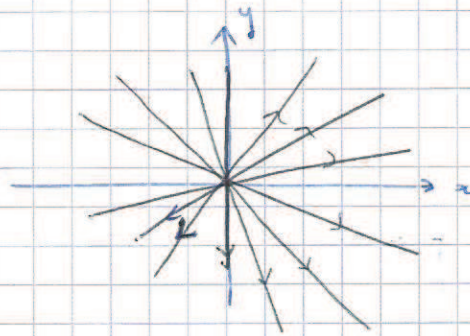
TD

$$\vec{V} = (kx, ky, 0)$$

$$1) \quad \vec{V} \wedge d\vec{H} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad kx \, dy = ky \, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \lambda x}$$



$k > 0$  (source)

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = kX \\ \frac{dY(t)}{dt} = kY \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(t) = X_0 e^{kt} \\ Y(t) = Y_0 e^{kt} \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{Y_0}{X_0} X$$

traj = LDC

$$2) \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = kx \frac{d\vec{V}}{dx} + ky \frac{d\vec{V}}{dy}$$

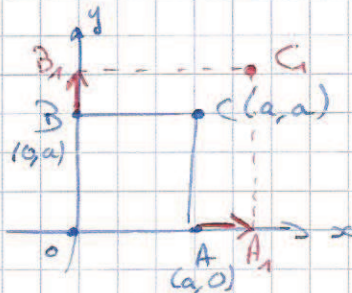
$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = (k^2x, k^2y, 0)$$

R) Accélération lagrangienne

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = k^2X$$

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = k^2Y$$

3)



Déplacement pdr dt :

$$\begin{cases} dx = kx \, dt \\ dy = ky \, dt \end{cases}$$

$$\vec{AA}_1 = ka \, dt$$

$$\vec{BB}_1 = ka \, dt$$

$\Rightarrow$  dilatation sans déformation  
ni rotation

$$\underline{\underline{\nabla \cdot \vec{V}}} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} \quad ; \quad \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}}$$

sphérique

4) •  $\vec{V} = (k_y, k_x, 0)$

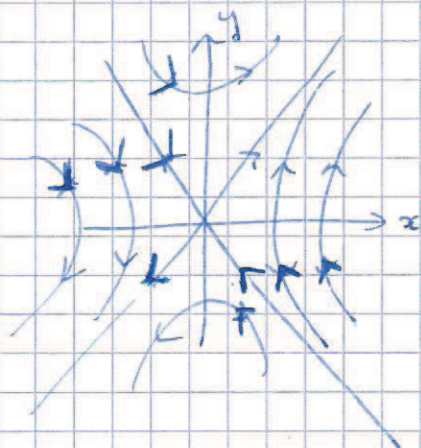
$$\underline{\underline{\nabla}} \cdot d\vec{r} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow$$

$$k_y dy = k_x dx$$

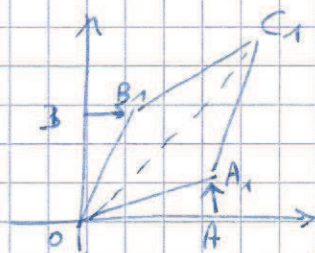
$$y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(y^2)}{dx} = x$$

$$\text{LDC: } \underline{\underline{y^2 = x^2 + C}}$$

hyperboles



k > 0



déforma<sup>o</sup> sans chgmt de volume

$$\underline{\underline{\nabla \cdot \vec{V}}} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}$$

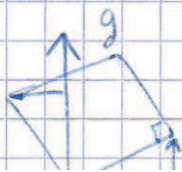
$\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{0}}$   
pas de rota<sup>o</sup>  
globale

$\text{tr}(D) = 0$   
pas de chgmt  
de volume

•  $\vec{V} = (-k_y, k_x, 0)$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(y^2)}{dx} = -x \Rightarrow \underline{\underline{y^2 = -x^2 + C}}$$

cercles



$\underline{\underline{\nabla \cdot \vec{V}}} = \underline{\underline{0}}$  sans déforma<sup>o</sup>  
ni dilatation  
ROTATION

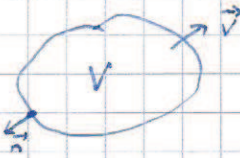




# Equations de bilan

## I) Conservation de la masse

Volume de controle **FIXE**  $V$   
 les particules de fluide le traversent  $\vec{n}$



bilan de masse:  $\frac{\partial m}{\partial t} = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$

$$m = \int_V \rho \, dV$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

Th. de la div.  $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \text{div}(\vec{A}) \, dV$

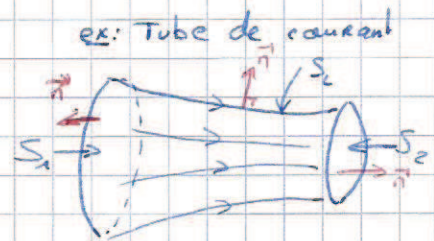
$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV + \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) \, dV = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

conservation de la masse sous sa forme locale "eq. de continuité"

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho) + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0}$$

fluide incompressible  $\Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$   
 $\oint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0$



sur  $S_2$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$

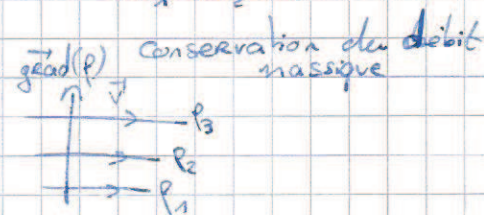
$$\int_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \Leftrightarrow -Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2$$

• écoulement permanent  $\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0$   
 $-m_1 + m_2 = 0$

⚠  $\text{div}(\vec{v}) = 0 \not\Rightarrow \rho = \text{cste}$

ex: écoulement permanent et  $\text{div}(\vec{v}) = 0$   
 $\Rightarrow \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho) = 0 \Rightarrow \text{grad}(\rho) \perp \vec{v}$



R) fluide incomp si  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  reste petit lorsq  $\rho$  ou  $T$  varient

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad \text{à } T = \text{cste}$$

eau  $\chi_T = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  air  $\chi_T = 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$   
 $\hookrightarrow$  quasi incompressible

### Condition sur l'écoulement :

Ordres de grandeur • des variations de pression dues à écoulement de vitesse  $U$ :  $\frac{\partial \rho}{\partial p} \rho U^2$   
 • des variations de densités dues à la compressibilité  $\frac{\partial \rho}{\partial p} \rho \chi_T \rho U^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial p} \rho \approx \chi_T \rho U^2$$

la lettre  $\rho$  et la lettre  $\rho$

incompressibilité  $\Leftrightarrow \chi_T U^2 \ll 1 \Leftrightarrow U \ll \frac{1}{\sqrt{\chi_T}}$

Nombre de Mach :  $Ma = \frac{U}{c}$  (en pratique  $Ma < 0,2$ )

Interprétation de  $\text{div}(\vec{V})$  :  $\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\text{div}(\vec{V})$  (conservation masse)

masse vol:  $\rho = \frac{\delta m}{\delta V}$   $\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{\delta V} \left( \frac{D\delta V}{Dt} \right)$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = \text{div}(\vec{V}) \right|$$

variation relative de volume de l'élément de fluide au cours de son mvt

ex:  $\vec{V} = kx\vec{x} + ky\vec{y}$

$\text{div}(\vec{V}) = 2k$



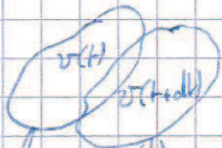
$\vec{V} = ky\vec{x} + kx\vec{y}$

$\text{div}(\vec{V}) = 0$



### II] Conservation de la q<sup>te</sup> de mvt.

RFD appliquée à un volume  $V$  "matériau" de fluide = constitué des m<sup>es</sup> particules de fluide que l'on suit au cours du mvt



le volume  $V(t)$  se déforme au cours du temps

RFD:  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS$   
forces volumiques forces surfaciques

lemme:  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$

(th. de transport de Reynolds)

#### 1) Forme locale

composante n° i :  $\int_S \tau_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV$

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_V \left( \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV \Rightarrow \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[ \rho \frac{dv_i}{dt} - \rho f_i \right]}_{\text{rotable } \forall \text{ fluide}} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

#### 2) Forme globale

On reprend de la forme locale :  $\rho \left[ \frac{dv_i}{dt} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$

OR  $\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$

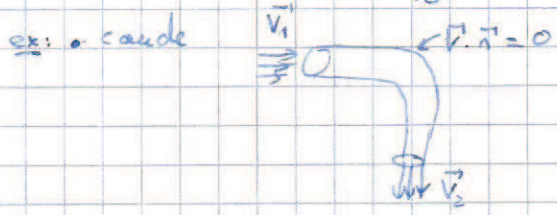
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + v_j \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$

$\int_V \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} dV + \int_V v_j \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} dV = \int_V \rho f_i dV + \int_S \tau_{ij} n_j dS$

Vectoriellement  $\Rightarrow \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \rho \vec{f} dV + \oint_S \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS$

V volume fixe délimité par la surface S fermée surface globale

En régime permanent,  $\oint_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F}_{ext \rightarrow fluide}$



efforts exercés par le fluide sur les parois du coude

$$\vec{F}_{fluide \rightarrow paroi} = -\vec{F}_{ext \rightarrow fluide} = - \left[ \oint_S \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \right]$$

hypothèse:  $\vec{v}$  uniforme dans section

$$\vec{F}_{fluide \rightarrow paroi} = - \left[ \rho \vec{v}_1 (-v_1) S_1 + \rho \vec{v}_2 (+v_2) S_2 \right] = \rho Q [\vec{v}_1 - \vec{v}_2]$$

$S_1 = S_2 = S$   
donc  $v_1 = v_2$  (cons. de la masse)

• jet sur une plaque



• force sur un auge de turbine



### III] Navier - Stokes

1) loi de comportement

= relation entre  $\vec{\tau}$  et les déformations ou les vitesses de déformation  $\vec{D}$

- solide élastiq
  - fluide visqueux Newtonien
  - matériaux viscoélastiq
- relation linéaire, indépendante du tps
- la relation dépend du tps
- fluide non-newtonien } relation non-linéaire et dépend du temps

1. Le fluide Newtonien

pression thermodynamiq

- au repos le tenseur des contraintes est sphérique:  $-\rho \vec{\Pi}$
- en écoulement: la partie visqueuse de  $\vec{\tau}$ , appelée  $\vec{\sigma}$ , ne dépend q de  $\vec{D}$

La relation entre  $\vec{\tau}$  et  $\vec{D}$  est linéaire  
La pas de direction privilégiée (ISOTROPE)

On a  $\vec{\tau} = -\rho \vec{\Pi} + \vec{\sigma}$

• au repos:  $\vec{\tau} = -\rho \vec{\Pi}$   
*(fluide au repos)*

vecteurs contraintes:  $\vec{\tau}(M) = \vec{\tau}(M) \vec{n}(M) = -p(M) \vec{n}(M)$   
(compression unif - la  $\vec{n}$  ds les 3 directions)

Relation linéaire entre  $\vec{\tau}$  et  $\vec{D}$  ?  
 de la forme :  $\tau_{ij} = A_{ijkl} D_{kl}$

tenseur d'ordre 4

isotropie  $\Rightarrow A_{ijkl} = a \delta_{ik} \delta_{jl} + b \delta_{il} \delta_{jk} + c \delta_{ij} \delta_{kl}$   
 symétrie de  $\vec{\tau} \Rightarrow A_{ijkl} = A_{jilk} \Rightarrow a = b$

$$\Leftrightarrow \tau_{ij} = [a(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + c \delta_{ij} \delta_{kl}] D_{kl}$$

$$= a \underbrace{(D_{ij} + D_{ji})}_{2D_{ij}} + c \delta_{ij} \underbrace{D_{kk}}_{\text{tr}(\vec{D})}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = 2\eta \vec{D} + \eta' \text{tr}(\vec{D}) \vec{I}$$

$\rightarrow$  2 scalaires analogues aux coef. de Lamé de l'élasticité linéaire  
 isotrope

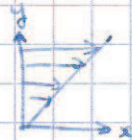
$\eta$  : viscosité dynamique du fluide

Vérification : écoulement de cisaillement simple

$$\vec{V} = v(y) \vec{x}$$

$$\nabla(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{tr}(\vec{D}) = 0$$

loi de comportement  $\Rightarrow$

$$\vec{\tau} = 2\eta \vec{D} \Rightarrow \tau_{xy} = \eta \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\eta$  : "deuxième coef. de viscosité"

Loi de Newton pour la viscosité