

6 CHAPITRE 6 - APPLICATION 1 - MECANIQUE DES SOLIDES ELASTIQUES

6.1 Formulation d'un problème d'élasticité

On considère un domaine Ω occupé par un matériau solide dont le comportement élastique linéaire. Le domaine est soumis :

- à une densité de forces volumiques connue \vec{f}_v sur l'ensemble du domaine,
- à une densité surfacique de forces \vec{T}_d connue sur une partie $\partial\Omega_T$ du contour $\partial\Omega$,

Lorsque les effets d'inertie sont négligés, la résolution du problème d'élasticité consiste à chercher, en tout point M du domaine,

- le champ de déplacement $\vec{u}(M)$ par rapport à la configuration non chargée, sachant ces déplacements sont imposés à une valeur \vec{u}_d sur la partie complémentaire du bord $\partial\Omega_u$,
- le champ de contraintes $\sigma(M)$ généré par ce chargement.

On se place dans l'hypothèse où l'amplitude des déplacements est faible. La déformation est donc représentée par le tenseur des déformations linéarisés $\varepsilon(\vec{u})$.

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u}) \quad (1)$$

On considère que, par le biais de couplages faibles, une partie ε_d de cette déformation est donnée, par exemple une dilatation thermique.

6.1.1 Formulation locale

Les équations à résoudre ce problème et ainsi déterminer complètement \vec{u} et σ sont :

– les équations d'équilibre :

- $\overline{\text{div}} \sigma + \vec{f}_v = 0, \quad \forall M \in \Omega$
- $\sigma \vec{n} = \vec{T}_d, \quad \forall M \in \partial\Omega_T$
- σ est symétrique

qui traduisent l'admissibilité statique du champ des contraintes. On dit que σ est *Statiquement Admissible (SA)*.

– les équations de la cinématique :

- $\vec{u} = \vec{u}_d, \quad \forall M \in \partial\Omega_u$
- $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u}) \quad \forall M \in \Omega$

qui traduisent l'admissibilité cinématique du champ des déplacements. On dit que \vec{u} est *Cinématiquement Admissible (CA)*.

– la relation de comportement :

- $\sigma = \mathbf{K}(\varepsilon - \varepsilon_d), \quad \forall M \in \Omega$

où \mathbf{K} est l'opérateur de Hooke traduisant la comportement élastique et linéaire de ce matériau.

6.1.2 Formulation condensée

Le problème à résoudre peut donc se résumer à : trouver en tout point du domaine un champ de déplacements \vec{u} cinématiquement admissible et un champ de contraintes σ statiquement admissible qui soient reliés par la relation de comportement.

6.1.3 Opérateur de Hooke

L'opérateur de Hooke caractérise le comportement élastique et linéaire du matériau. En élasticité isotrope, il correspond à :

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon)\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon \quad (2)$$

Il permet de décrire l'énergie de déformation locale en terme de déformations :

$$E_d(\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathbf{K}\varepsilon : \varepsilon$$

Les propriétés de cet opérateur sont les suivantes :

– Linéarité :

$$\mathbf{K}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \mathbf{K}\varepsilon_1 + \mathbf{K}\varepsilon_2 \quad ; \quad \mathbf{K}(\alpha\varepsilon) = \alpha\mathbf{K}\varepsilon \quad (3)$$

– Symétrie :

$$\mathbf{K}\varepsilon_1 : \varepsilon_2 = \mathbf{K}\varepsilon_2 : \varepsilon_1 \quad (4)$$

– Positivité :

$$\mathbf{K}\varepsilon : \varepsilon \geq 0 \quad (5)$$

– Définition :

$$\mathbf{K}\varepsilon : \varepsilon = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = 0 \quad (6)$$

L'opérateur est donc un *Opérateur Linéaire, Symétrique, Défini et Positif*. L'opérateur inverse \mathbf{K}^{-1} correspond en isotrope à :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}(\text{tr } \sigma)\mathbb{I}$$

Il permet de définir l'énergie de déformation en termes de contraintes :

$$E_d(\sigma) = \frac{1}{2}\mathbf{K}^{-1}\sigma : \sigma \quad (7)$$

Il présente des mêmes propriétés que l'opérateur de Hooke.

6.1.4 Difficultés

Le problème posé ci-dessus consiste donc à trouver neuf valeurs scalaires en chaque point du domaine : trois composantes du champ de déplacement et six composantes du tenseur symétrique des contraintes. Le nombre de points dans le domaine étant infini, il s'agit d'un problème de *dimension infinie*.

Dans quelques rares cas où la géométrie du domaine Ω est simple et où le chargement est décrit analytiquement, il est possible de déterminer une solution analytique. Dans la plupart des cas, le solution est non analytique et on en cherchera une approximation.

6.2 Résolution d'un problème d'élasticité

Même lorsque qu'une solution analytique existe, il n'est en général par possible de la déterminer facilement. On procède par un algorithme de type essai/erreur dans lequel on commence par faire une hypothèse sur la forme de la solution. En suivant ce procédé, il existe deux approches : dans la première, on commence par faire une hypothèse sur la forme du déplacement et dans la seconde sur le champ des contraintes.

6.2.1 Approche en déplacement

Approche directe

1. Poser le problème
2. Choix d'une forme de champ de déplacement \vec{u} cinématiquement admissible par observation des propriétés du problème,
3. Calcul du champ de déformation ε ,
4. Calcul du champ des contraintes σ , après expression de la part de la déformation donnée ε_d ,
5. Vérification de l'admissibilité statique de σ . Si ce champ n'est pas admissible on retourne à l'étape 2.

Exemple : sphère sous pression On considère une sphère pleine de rayon R soumise uniquement à une pression p sur sa surface extérieure. Elle est constituée d'un matériau élastique caractérisé par ses coefficients de Lamé λ et μ .

1. Le problème est : trouver (\vec{u}, σ) tels que
 - Admissibilité Statique :
 - $\overrightarrow{\text{div}} \sigma = 0, \forall M \in \Omega$
 - $\sigma \vec{e}_r = -p \vec{e}_r, \forall M \in (r = R)$
 - Admissibilité Cinématique :
 - Pas de conditions aux limites
 - $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u})$
 - Comportement :
 - $\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr } \varepsilon)\mathbb{I}$
2. Choix d'une forme de champ de déplacement : compte-tenu de la symétrie sphérique du problème on se place dans un système de coordonnées sphériques et on fait l'hypothèse que le champ de déplacement est de la forme :

$$\vec{u}(r, \theta, \phi) = u_r(r)\vec{e}_r$$

3. Calcul du champ de déformation : $\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u})$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad ; \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} \quad ; \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{\theta\phi} = 0$$

4. Calcul du champ de contraintes : $\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\text{tr } \varepsilon)\mathbb{I}$

$$\sigma_{rr} = (2\mu + \lambda)\frac{du_r}{dr} + 2\lambda\frac{u_r}{r} \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \lambda\frac{du_r}{dr} + 2(\lambda + \mu)\frac{u_r}{r} \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0$$

5. Admissibilité statique de σ :

– Equilibre en volume : $\overrightarrow{\text{div}} \sigma = 0$

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma = \left(\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \right) \vec{e}_r = (2\mu + \lambda) \left[\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - 2\frac{u_r}{r^2} \right] \vec{e}_r = \vec{0}$$

soit

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r}{dr} - 2\frac{u_r}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right] = 0 \Rightarrow u_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

le point $r = 0$ appartenant au domaine, il faut nécessairement $C_2 = 0$ donc

$$u_r(r) = C_1 r.$$

– Conditions aux limites :

$$\sigma_{rr}(r = R) = -p = (3\lambda + 2\mu)C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu}$$

La solution est donc :

$$\vec{u} = -\frac{pr}{3\lambda + 2\mu} \vec{e}_r \quad ; \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -p \quad ; \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta\phi} = 0$$

Equation de Navier Afin de trouver directement un champ de déplacement tel que le champ de contrainte associé sera en équilibre, on peut combiner toutes les équations en volume du problème en une seule de la manière suivante.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma} \quad (8)$$

Cette relation valable quelque soit le milieu peut être transposée en terme de déformation si on utilise la loi de comportement (isotrope) du solide :

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda \text{tr } \varepsilon \quad (9)$$

On peut de même exprimer le tenseur de déformation à l'aide du gradient du déplacement :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{u} + {}^t \overline{\text{grad}} \vec{u}) \quad (10)$$

En écriture indicelle, l'équation d'équilibre peut donc se réécrire :

$$\sigma_{i,j,j} + f_i = 2\mu\varepsilon_{i,j,j} + \lambda(\varepsilon_{kk}\delta_{ij})_{,j} + f_i = 2\mu\varepsilon_{i,j,j} + \lambda\varepsilon_{kk,j}\delta_{ij} + f_i = \rho\gamma_i \quad (11)$$

$$2\mu\varepsilon_{i,j,j} + \lambda\varepsilon_{kk,j}\delta_{ij} + f_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda u_{k,kj}\delta_{ij} + f_i = \rho\gamma_i \quad (12)$$

$$\mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ji} + \lambda u_{k,ki} + f_i = \rho\gamma_i \quad (13)$$

soit :

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma} \quad (14)$$

En développant $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) = \Delta \vec{u} + \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}$, cette relation peut également s'exprimer selon :

$$\boxed{(2\mu + \lambda) \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma}} \quad (15)$$

ou encore

$$\boxed{(2\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma}} \quad (16)$$

Ces trois équations sont appelées équations de Navier. Elles sont totalement équivalentes. Le choix de l'utilisation de l'une plutôt que de l'autre repose uniquement sur des considérations de simplicité des expressions, notamment dans les cas où des termes peuvent être nuls.

Si l'on se place dans une situation anisotherme, il faut prendre la loi de comportement complète :

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + (\lambda \text{tr } \varepsilon - K \alpha_v \Delta T) \mathbb{I} \quad (17)$$

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{div}} \sigma + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma} \quad (18)$$

En écriture indicielle, l'équation d'équilibre peut donc se réécrire :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 2\mu \varepsilon_{ij,j} + \lambda (\varepsilon_{kk} \delta_{ij})_{,j} - (K \alpha_v \Delta T \delta_{ij})_{,j} + f_i = \rho \gamma_i \quad (19)$$

Le terme supplémentaire : $-(K \alpha_v \Delta T \delta_{ij})_{,j}$ donne

$$-(K \alpha_v \Delta T)_{,i} = -K \alpha_v (T - T_0)_{,i} = -K \alpha_v T_{,i},$$

ce qui correspond à $-K \alpha_v \overrightarrow{\text{grad}} T$.

L'équation de Navier anisotherme prend donc la forme :

$$\boxed{\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) - K \alpha_v \overrightarrow{\text{grad}} T + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma}} \quad (20)$$

6.2.2 Approche en contraintes

Approche directe

1. Poser le problème
2. Choix d'une forme de champ de contraintes σ statiquement admissible par observation des propriétés du problème,
3. Calcul du champ de déformation ε après ajout de la part de la déformation donnée
4. Calcul du champ de déplacement \vec{u} par intégration de ε . Si la compatibilité des déformations n'est pas vérifiée, retour à l'étape 2.
5. Vérification des l'admissibilité cinématique de \vec{u} . Si ce champ n'est pas admissible on retourne à l'étape 2.

Exemple : traction pure On considère le problème de traction pure suivant. Le domaine étudié Ω est parallélépipède rectangle. les normales à ses faces sont alignées avec les vecteurs de la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La surface latérale, notée S_{lat} , est le regroupement des deux faces normales à \vec{e}_2 et des deux normales à \vec{e}_3 . Elle est libre d'effort. La face S_+ , de normale sortante \vec{e}_1 est soumise à une densité surfacique de charge $f\vec{e}_1$. La face S_- , de normale sortante $-\vec{e}_1$ est soumise à une densité surfacique de charge $-f\vec{e}_1$. f est un paramètre de charge donné. Le matériau est élastique linéaire de paramètres λ et ν . On se place dans l'hypothèse des petites perturbations et les effets dynamiques sont négligés.

1. Problème

$$\operatorname{div} \sigma = 0, \quad \forall M \in \Omega$$

$$\sigma \pm \vec{e}_2 = \sigma \pm \vec{e}_3 = 0, \quad \forall M \in S_{lat} \quad ; \quad \sigma \vec{e}_1 = f\vec{e}_1, \quad \forall M \in S_+ \quad ; \quad \sigma(-\vec{e}_1) = -f\vec{e}_1, \quad \forall M \in S_-$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\sigma\mathbb{I}, \quad \forall M \in \Omega \quad ; \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\overline{\operatorname{grad}} \vec{u} + \overline{\operatorname{grad}}^T \vec{u})$$

2. Choix d'une forme de champ de contraintes : compte tenu des conditions aux limites on suppose

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où σ est un scalaire à définir. Ce champ est tel que :

- $\operatorname{div} \sigma = 0$
- $\sigma \vec{e}_1 = f\vec{e}_1$ uniquement si $\sigma = f$
- toutes les autre conditions d'admissibilité statique

3. Calcul du champ de déformation :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{f}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}f & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}f \end{pmatrix}$$

4. Calcul du champ de déplacement (voir formulaire d'intégration :

$$\vec{u}(M) = \frac{f}{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p, q,$ et r sont les paramètres du mouvement de solide rigide.

5. Il n'y a pas de conditions aux limites

Equation de Beltrami Pour garantir la compatibilité du champ de déformation dès les choix de forme du tenseur des contraintes, on peut chercher à traduire les conditions de compatibilité sur les composantes des contraintes. La recherche d'une forme différentielle sur les termes du tenseur des contraintes passe par l'expression des équations de compatibilité. On rappelle que le champ de déformation d'un milieu continu doit vérifier :

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} = \epsilon_{ik,jl} + \epsilon_{jl,ik} \quad (21)$$

ce qui signifie six équations non-colinéaires. On conserve les six équations en posant $k = l$, soit :

$$\epsilon_{ij,kk} + \epsilon_{kk,ij} = \epsilon_{ik,jk} + \epsilon_{jk,ik} \quad (22)$$

On utilise ensuite la loi de comportement duale :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \mathbb{I} \quad (23)$$

Cela donne en indiciel :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (24)$$

On identifie les expressions dans l'équation de compatibilité :

$$\epsilon_{ij,kk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,kk} \delta_{ij} \quad (25)$$

$$\epsilon_{kk,ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kk,ij} - \frac{3\nu}{E} \sigma_{kk,ij} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk,ij} \quad (26)$$

$$\epsilon_{ik,jk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,jk} \delta_{ik} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} \quad (27)$$

$$\epsilon_{jk,ik} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ik} \delta_{jk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} \quad (28)$$

L'équation

$$\epsilon_{ij,kk} + \epsilon_{kk,ij} = \epsilon_{ik,jk} + \epsilon_{jk,ik} \quad (29)$$

donne donc :

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij,kk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,kk} \delta_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk,ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik,jk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk,ik} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll,ij} \quad (30)$$

$$(1+\nu) \sigma_{ij,kk} - \nu \sigma_{ll,kk} \delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} = (1+\nu) (\sigma_{ik,jk} + \sigma_{jk,ik}) \quad (31)$$

On transforme ensuite cette expression de manière à y introduire les forces volumiques \vec{f} à travers l'équation d'équilibre statique ($\text{div } \sigma + \vec{f}_v = \vec{0}$). On reconnaît ainsi :

$$\sigma_{ik,jk} = (\sigma_{ik,k})_{,j} = -f_{i,j} \quad \text{et} \quad \sigma_{jk,ik} = (\sigma_{jk,k})_{,i} = -f_{j,i} \quad (32)$$

soit :

$$(1 + \nu)\sigma_{ij,kk} - \nu\sigma_{ll,kk}\delta_{ij} + \sigma_{kk,ij} + (1 + \nu)(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \quad (33)$$

Cette première équation différentielle en contrainte est généralement transformée de manière à remplacer le terme $\sigma_{ll,kk}$.

Prenons le cas particulier $i = j$, on procède à une sommation sur cet indice (attention : $\delta_{ii} = 3!$) :

$$(1 + \nu)\sigma_{ii,kk} - 3\nu\sigma_{ll,kk} + \sigma_{kk,ii} + 2(1 + \nu)f_{i,i} = 0 \quad (34)$$

$\sigma_{ii,kk}$ a alors le même sens que $\sigma_{ll,kk}$ et $\sigma_{kk,ii}$. On obtient finalement

$$\sigma_{ll,kk} = -\frac{(1 + \nu)}{1 - \nu} f_{i,i} \quad (35)$$

relation qu'on introduit dans la forme générale (simplifiée de $(1 + \nu)$) :

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{\nu}{1 - \nu} f_{k,k}\delta_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk,ij} + (f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \quad (36)$$

On obtient six équations, nommées les équations de Beltrami. Ces équations s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\Delta\sigma + \frac{\nu}{1 - \nu} \text{div } \vec{f}_v \mathbb{I} + \frac{1}{1 + \nu} \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{tr } \sigma) + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{f}_v + {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \vec{f}_v = \mathbb{O} \quad (37)$$

Elles présentent l'intérêt de se simplifier dans un certain nombre de configurations. En particulier, dans le cas où les forces volumiques sont uniformes (ce qui est généralement le cas), on obtient :

$$\Delta\sigma + \frac{1}{1 + \nu} \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{tr } \sigma) = \mathbb{O} \quad \text{ou encore} \quad \sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk,ij} = 0 \quad (38)$$

6.2.3 Solutions particulières

On considère un repère orthonormé et une base cartésienne $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Etat de contrainte sphérique

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (39)$$

Ce tenseur est naturellement invariant par changement de repère (exemple du milieu fluide). A la "pression" correspond un état de contrainte sphérique ou "hydrostatique".

Remarque La trace de ce tenseur vaut 3σ . Chaque terme vaut donc la contrainte hydrostatique σ_H . Le déviateur est donc nul pour ce type de chargement.

Etat de contrainte uniaxial

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (40)$$

Exemple d'une traction/compression suivant l'axe \vec{e}_1 .

Etat de contrainte plan ou antiplan

$$\sigma_{\text{plan}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} ; \quad \sigma_{\text{antiplan}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (41)$$

Exemple1 : "contrainte plane" film mince en bitraction

Exemple2 : "contrainte antiplan" - "traction/torsion" d'axe \vec{e}_1 .

Etat de contrainte de cisaillement pur

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \quad (42)$$

6.3 Existence et Unicité de la solution

Afin d'étudier les propriétés d'unicité de la solution du problème d'élasticité on commence par faire une formulation globale du problème.

6.3.1 Espaces d'admissibilité

Soient \vec{u} et \vec{v} deux champ de déplacement cinématiquement admissibles. Le champ $\vec{u}^* = \vec{u} - \vec{v}$ est dit *cinématiquement admissible à zéro*. En effet, il appartient à l'espace :

$$\vec{u}^* \in \mathcal{U}^0 = \{ \vec{u}^*, \text{ régulier} / \vec{u}^* = 0, \forall M \in \partial\Omega_u \}$$

L'espace \mathcal{U}^0 des champs cinématiquement admissibles à zéro est un *espace vectoriel*.

Remarque Si \vec{u} est solution du problème d'élasticité alors tout champ cinématiquement admissible est du type $\vec{u} + \vec{u}^*$ où \vec{u}^* est cinématiquement admissible à zéro.