

5.1.4 Loi de Hooke

Les coefficients de Lamé ont été introduits de façon théorique. La mesure de ces coefficients requiert un ou plusieurs essais mécaniques d'identification. On peut proposer deux types d'essais standards: l'essai de traction et l'essai de torsion.

★ Essai de traction

Description d'une machine de traction...

Les mesures usuelles sont : la force axiale F (cellule de force), le déplacement \vec{u} , la déformation longitudinale et la déformation transversale (jauges de déformation, extensométrie, inter-corrélation d'images).

Nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité. Le tenseur des contraintes associé à une traction d'axe \vec{e}_z est diagonal:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (265)$$

tel que $\sigma = F/S$, S étant la section de l'éprouvette.

Champ de déplacement admissible dans la zone utile (on suppose une axisymétrie):

$$\vec{u}(r,z) = az.\vec{e}_z + br.\vec{e}_r \quad (266)$$

Le gradient du déplacement est symétrique. Il définit le tenseur des déformations.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_T & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_L \end{pmatrix} \quad (267)$$

ϵ_L représente la déformation mesurée dans le sens de la longueur; ϵ_T représente la déformation mesurée dans le sens de la largeur. Elle est généralement de signe opposé à la déformation longitudinale (sauf exceptions: composites, ...).

On note E le rapport entre la contrainte axiale et la déformation axiale. E est le module d'Young du matériau. On note ν le rapport entre la déformation latérale et la déformation axiale. ν est le coefficient de Poisson du matériau.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_L} \quad \text{et} \quad \nu = -\frac{\epsilon_T}{\epsilon_L} \quad (268)$$

Ces deux constantes matériau sont normalement suffisantes pour décrire le comportement élastique isotrope du matériau.

★ **Loi de Hooke**

On sait que:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda\text{tr}(\varepsilon)\mathbb{I} \quad (269)$$

Appliqué à l'essai de traction, on obtient les deux relations suivantes:

$$\sigma = 2\mu\epsilon_L + \lambda(\epsilon_L + 2\epsilon_T) = E\epsilon_L \quad (270)$$

$$0 = 2\mu\epsilon_T + \lambda(\epsilon_L + 2\epsilon_T) \quad (271)$$

La deuxième équation permet d'écrire:

$$\nu = -\frac{\epsilon_T}{\epsilon_L} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \quad (272)$$

La première équation permet d'écrire:

$$E\epsilon_L = 2\mu\epsilon_L + \lambda(\epsilon_L - 2\nu\epsilon_L) = \epsilon_L(2\mu + \lambda(1 - 2\nu)) \quad (273)$$

soit:

$$E = 2\mu + \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right) = 2\mu + \frac{\lambda\mu}{\mu + \lambda} = \frac{2\mu^2 + 3\lambda\mu}{\mu + \lambda} = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \quad (274)$$

On peut également exprimer les coefficients de Lamé en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson (fastidieux).

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (275)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (276)$$

Il peut également être intéressant d'exprimer la loi duale, permettant d'exprimer le tenseur des déformations en fonction du tenseur des contraintes.

Cette relation se démontre à l'aide des décompositions dans la base matricielle.

$$\varepsilon = \mathbf{d} + \frac{1}{3}(\text{tr}\varepsilon)\mathbb{I} \quad \sigma = \mathbf{s} + \frac{1}{3}(\text{tr}\sigma)\mathbb{I} \quad (277)$$

puisque $\sigma = 2\mu\mathbf{d} + K\text{tr}(\varepsilon)\mathbb{I}$, alors, par identification sur les 2 bases, on obtient: $\mathbf{s} = 2\mu\mathbf{d}$ et $\frac{1}{3}\text{tr}\sigma = K\text{tr}\varepsilon$.

$$\text{soit: } \mathbf{d} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{s} \text{ et } \text{tr}\varepsilon = \frac{1}{3K}(\text{tr}\sigma).$$

On obtient finalement

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\mathbf{s} + \frac{1}{9K}(\text{tr}\sigma)\mathbb{I} \quad (278)$$

puis en redécomposant le déviateur:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\sigma + \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6\mu}\right)(\text{tr}\sigma)\mathbb{I} \quad (279)$$

Finalement, on remplace les coefficients de Lamé par le module d'Young et le coefficient de Poisson pour obtenir l'expression de la relation duale aussi appelée loi de Hooke:

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\sigma)\mathbb{I} \quad (280)$$

★ Essai de torsion

L'essai de torsion consiste à imposer un couple C à une éprouvette cylindrique de rayon R et de longueur L (généralement tubulaire) et à mesurer l'angle de torsion α_0 associé.

Champ de déplacement: $\vec{u}(r,z) = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OM}$ cohérent avec le couple imposé: $\vec{C} = C\vec{e}_z$; avec $\vec{\alpha} = (\alpha_0 z/L)\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

Le champ de déplacement vaut: $\vec{u}(r,z) = (r\alpha_0 z/L)\vec{e}_\alpha$

Le gradient d'un vecteur $\vec{U}(u,v,w)$ en cylindrique s'exprime selon:

$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{U} = \begin{pmatrix} u_{,r} & \frac{1}{r}(u_{,\alpha} - v) & u_{,z} \\ v_{,r} & \frac{1}{r}(v_{,\alpha} + u) & v_{,z} \\ w_{,r} & \frac{1}{r}w_{,\alpha} & w_{,z} \end{pmatrix} \quad (281)$$

On calcule le tenseur des déformations associé:

$$\varepsilon = \frac{r\alpha_0}{2L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (282)$$

Le tenseur des contraintes est obtenue grâce à l'application de la loi de comportement élastique:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda\text{tr}(\varepsilon)\mathbb{I} \quad (283)$$

soit

$$\sigma = \frac{\mu r\alpha_0}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (284)$$

Considérons une section S placée à l'altitude z de normale \vec{e}_z . Le vecteur contrainte à un point M de cette surface vaut:

$$\vec{T}(M, \vec{e}_z) = \sigma \cdot \vec{e}_z = \left(0; \frac{\mu r\alpha_0}{L}; 0\right) \quad (285)$$

La résultante associée est nulle compte tenu de l'intégration du vecteur tournant \vec{e}_α . Le calcul du moment donne:

$$\vec{M}_{/O} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}(M, \vec{e}_z) ds = \frac{\mu\alpha_0}{L} \int_S r^2 ds \vec{e}_z = \frac{\mu\alpha_0 I_0}{L} \vec{e}_z \quad (286)$$

I_0 représente le moment polaire de la section. Avec $\vec{M}_{/O} = C\vec{e}_z$, on obtient finalement:

$$C = \frac{\mu\alpha_0 I_0}{L} \quad (287)$$

On observe une relation linéaire entre le couple et l'angle dépendant du module de cisaillement μ . Cet essai peut permettre une estimation expérimentale de ce coefficient de Lamé.

$$\mu = \frac{CL}{\alpha_0 I_0} \quad (288)$$

5.2 Loi de comportement d'un fluide Newtonien

On distingue le repos et le mouvement:

=> Un fluide au repos est soumis à des efforts extérieurs qui se traduisent par la pression. Un fluide en mouvement est soumis à des efforts extérieurs qui créent ce mouvement. Le tenseur des contraintes dans un fluide possède ainsi plusieurs caractéristiques.

- fluide soumis à une pression p . L'état de contrainte est hydrostatique tel que $\sigma_H = -p$.
- le lien existant entre pression et déformation volumique est la compressibilité, telle que chaque élément de la diagonale du tenseur des déformations vaut: $\epsilon_v = -\frac{1}{K}p$. On n'exprime généralement pas cette relation de comportement de manière explicite.
- on préfère exprimer l'état de contrainte dans un fluide statique à l'aide de la pression selon:

$$\sigma_1 = -p\mathbb{I} \quad (289)$$

=> Un fluide en mouvement est le lieu de contraintes visqueuses. La contrainte visqueuse est créée par les variations spatiales des vitesses des particules, qui s'exprime comme un gradient de vitesse ($\overline{\text{grad}}(\vec{V})$). Quand $\overline{\text{grad}}(\vec{V})$ est nul, les contraintes de viscosité sont nulles. Si on souhaite exprimer une relation linéaire entre la contrainte σ et le gradient de vitesse $\overline{\text{grad}}(\vec{V})$, on doit utiliser la partie symétrique du gradient, la partie antisymétrique correspondant à une rotation.

La partie symétrique du gradient de la vitesse est le tenseur des taux de déformation:

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}}(\vec{V}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\vec{V})) \quad (290)$$

Par analogie avec l'élasticité des solides, le comportement linéaire visqueux isotrope (fluide Newtonien) suppose l'existence de 2 paramètres matériaux tels que:

$$\sigma_2 = 2\mu_v\mathbb{D} + \lambda_v\text{tr}(\mathbb{D})\mathbb{I} \quad (291)$$

μ_v et λ_v sont les coefficients de viscosité. λ_v est un coefficient de viscosité associé aux changements de volumes. En effet, $\text{tr}(\mathbb{D}) = \text{tr}(\overline{\text{grad}}(\vec{V})) = \text{div}(\vec{V})$. μ_v est un coefficient de viscosité par cisaillement. C'est la viscosité ordinaire aussi appelée viscosité dynamique.

=> L'état de contrainte dans un fluide en mouvement est le résultat de la superposition des états de contrainte σ_1 et σ_2 , soit:

$$\sigma = 2\mu_v \mathbb{D} + (\lambda_v \text{tr}(\mathbb{D}) - p) \mathbb{I} \quad (292)$$

ou encore (rarement employé):

$$\sigma = 2\mu_v \mathbb{D} + (\lambda_v \text{tr}(\mathbb{D}) + K \epsilon_v) \mathbb{I} \quad (293)$$

Rmq 1: on peut mettre la loi de comportement sous une forme déviatorique / hydrostatique comme pour les solides.

Rmq 2: le coefficient de viscosité associé au changement de volume λ_v est généralement beaucoup plus faible que μ_v . Le terme de viscosité volumique est souvent négligé.

Rmq 3: si le milieu est incompressible ($\text{div}(\vec{V}) = 0$), alors \mathbb{D} est déviatorique. On obtient:

$$\sigma = 2\mu_v \mathbb{D} - p \mathbb{I}$$

Rmq 4: L'unité SI de la viscosité est le Poiseuille (Pl: $1Pl = 1N.m^{-2}.s^{-1}$). Le Poise est aussi employé: $1p = 0,1Pl$)

Rmq 5: La viscosité fortement dépendante des conditions de température et de pression.

Rmq 6: La contrainte étant reliée au gradient des vitesses, on doit ajouter une condition de **continuité de la vitesse tangentielle aux interfaces** pour éviter que la contrainte tende vers l'infini. => CL de type CA aux interfaces (analogue aux CL CA en déplacement pour les solides)

5.3 Lois de comportement anisotherme et milieux électromagnétiques

5.3.1 Solide élastique anisotherme

On prolonge la démarche appliquée dans le cas isotherme au cas général, c'est-à-dire s'il y a simultanément des variations mécaniques et thermiques. On reprend l'écriture de l'énergie élastique précédente fonction des deux premiers invariants.

$$u_e = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\varepsilon)^2 + \mu\varepsilon : \varepsilon \quad (294)$$

La prise en compte d'une variation de température revient à ajouter des termes à l'énergie interne fonction de la variation de température $\Delta T = T - T_0$: un terme entropique (forme en SdT , cadre réversible où la variation d'entropie n'intervient pas) et un terme linéaire en température de manière à décrire la dilatation thermique. Ce deuxième terme est un terme couplé. Il doit être à la fois une fonction linéaire de la température de manière à définir un coefficient de dilatation (constante matériau) constant en température et une fonction d'un invariant linéaire en déformation de manière à ce que la définition des coefficients d'élasticité reste inchangée: on utilise naturellement l'invariant I_1 ($\text{tr}\varepsilon$). On obtient:

$$u(\varepsilon, T) = u_e(\varepsilon, T_0) + s_0\Delta T + c(\text{tr}\varepsilon)\Delta T \quad (295)$$

soit

$$u(\varepsilon, \Delta T) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\varepsilon)^2 + \mu\varepsilon : \varepsilon + s_0\Delta T + c(\text{tr}\varepsilon)\Delta T \quad (296)$$

c est une constante "matériau".

Supposons un changement de température ΔT sans contrainte. La dérivée de l'énergie interne par rapport à la déformation, autrement dit, la contrainte, est nulle (autre vision: la déformation doit minimiser l'énergie).

$$\frac{du(\varepsilon, \Delta T)}{d\varepsilon} = \mathbb{O} \quad (297)$$

On obtient:

$$\lambda(\text{tr}\varepsilon)\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon + c\Delta T\mathbb{I} = \mathbb{O} \quad (298)$$

On décompose ensuite le tenseur des déformations en tenseur déviateur + tenseur identité, de manière à observer les projections de la base orthogonale.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} + \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} \quad (299)$$

Remarque: la base est orthogonale, signifie que:

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d} : \mathbf{d} + \frac{1}{3}(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2$$

car

$$\mathbf{d} : \mathbb{I} = 0$$

On obtient:

$$K(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} + 2\mu\mathbf{d} + c\Delta T\mathbb{I} = \mathbb{O} \quad (300)$$

on obtient par identification terme à terme que le déviateur des déformations est nul:

$$2\mu\mathbf{d} = \mathbb{O} \quad (301)$$

cette relation est complétée par la relation suivante:

$$K(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} + c\Delta T\mathbb{I} = \mathbb{O} \quad (302)$$

soit

$$K(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}) = -c\Delta T \quad (303)$$

★ Mesure de dilatation thermique

Prenons un élément de volume cubique de côté a_0 libre de contrainte. Il est soumis à une variation de température ΔT et se transforme en cube de côté a . On définit le coefficient de dilatation linéique le coefficient α_l ($^{\circ}K^{-1}$), tel que le cube se dilate dans toutes les directions d'une quantité $\alpha_l\Delta T a_0$, soit:

$$a = a_0(1 + \alpha_l\Delta T)$$

La déformation mesurée dans toute direction vaut alors

$$\epsilon = \frac{\Delta a}{a_0} = \alpha_l\Delta T$$

Le tenseur des déformations associé est hydrostatique et s'exprime selon:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha_l \Delta T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (304)$$

On observe alors que $\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = 3\alpha_l \Delta T$. Cette relation permet de définir la constante c dans l'équation précédente. On trouve:

$$c = -3K\alpha_l \quad (305)$$

Remarque: coefficient de dilatation volumique

Le coefficient de dilatation volumique α_v est défini à partir de la variation de volume du même cube, tel que: $V = V_0(1 + \alpha_v \Delta T)$. On injecte à cette relation la définition des volume:

$$a^3 = a_0^3(1 + \alpha_v \Delta T) = a_0^3(1 + \alpha_l \Delta T)^3$$

Quand les déformations $\alpha_l \Delta T$ sont petites ($\ll 1$), le terme $(1 + \alpha_l \Delta T)^3$ se linéarise en $(1 + 3\alpha_l \Delta T)$. On obtient finalement:

$$\alpha_v \approx 3\alpha_l$$

L'énergie interne se réécrit donc:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta T) = s_0 \Delta T + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} - K\alpha_v \Delta T (\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (306)$$

soit en indiciel:

$$u(\epsilon_{ij}, \Delta T) = s_0 \Delta T + \frac{\lambda}{2} (\epsilon_{kk})^2 + \mu \epsilon_{ij} : \epsilon_{ij} - K\alpha_v \Delta T (\epsilon_{kk}) \quad (307)$$

La contrainte étant définie comme la dérivée de l'énergie par rapport à la déformation, et avec $\epsilon_{kk} = \epsilon_{ij} : \delta_{ij}$, on a:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} - K\alpha_v \Delta T \delta_{ij} \quad (308)$$

soit:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + (\lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - K\alpha_v \Delta T) \mathbb{I} \quad (309)$$

Il s'agit de la loi de comportement élastique anisotherme.

=> Le terme $-K\alpha_v\Delta T\mathbb{I}$ correspond usuellement à la contrainte thermique, ou plus exactement la contrainte auquel le volume serait soumis si il était "bloqué" au cours de l'élévation de température.

=> La déformation thermique $\alpha_v\Delta T\mathbb{I}$ est la déformation auquel le volume serait soumis si il était complètement "libre" au cours de l'élévation de température.

On peut récrire la loi de comportement avec le déviateur des déformations selon:

$$\sigma = 2\mu\mathbf{d} + K(\text{tr}\varepsilon - \alpha_v\Delta T)\mathbb{I} \quad (310)$$

5.3.2 Solide élastique électromagnétique

Quand un milieu magnétique (ferro ou ferromagnétique) est soumis à un champ magnétique, il se déforme. cette déformation est appelée "magnétostriction". Quand un milieu diélectrique (ferroélectrique) est soumis à un champ électrique, il se déforme. Cette déformation est appelée "électrostriction". Ces deux phénomènes trouvent leur origine à l'échelle des couches électroniques. Ils peuvent s'interpréter et donc se modéliser, soit comme une déformation "classique"(élastique) d'un milieu soumis aux forces de Lorentz, soit comme une déformation de type thermique. La première voie semble la plus naturelle puisque l'expression des forces de Lorentz existe. Les forces agissant à l'échelle locale et la microstructure des matériaux considérés étant souvent très complexe, l'application de ce formalisme à un milieu supposé continu (alors qu'il ne l'est pas) conduit à des résultats souvent irréalistes. On lui préfère souvent la seconde voie.

La seconde voie est une voie plus phénoménologique: la déformation thermique est par exemple considérée comme linéaire avec la température, ce qui revient à un postulat. De même l'électrostriction est généralement considérée comme linéaire avec la polarisation électrique, et la magnétostriction comme une fonction paire de l'aimantation. Nous retiendrons cette approche, bien que n'apportant qu'une vision partielle des couplages.

Il existe également des voies intermédiaires dites "multiéchelles", où le milieu est discrétisé par "phase" et l'énergie interne sera le résultat de la somme de l'énergie interne de chacune des phases. Ces approches permettent souvent une description plus riche et donc plus réaliste du comportement de ces matériaux.

Elles sortent du cadre de ce cours.

Lois de comportement électromagnétique

La décomposition de la puissance électromagnétique fait apparaître trois termes, auquel on peut associer une énergie libre. On a :

Ainsi, la puissance électromagnétique se dissipe en trois termes :

$$P^e = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} dv \quad (311)$$

- $\iiint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} dv$ correspond à la puissance magnétique emmagasinée.
- $\iiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} dv$ correspond à la puissance diélectrique emmagasinée.
- $\iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dv$ correspond aux pertes par effet Joule.

On peut construire une énergie interne pour les deux premiers termes dans un cadre linéaire (invariants produits scalaires) selon :

$$u(\vec{H}, \vec{E}) = a \cdot \vec{H} \cdot \vec{H} + b \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \quad (312)$$

L'induction magnétique correspondant à la dérivée de l'énergie par rapport au champ magnétique, on a :

$$\frac{du(\vec{H}, \vec{E})}{d\vec{H}} = 2a \cdot \vec{H} = \vec{B} \quad (313)$$

la constante $2a$ est la perméabilité magnétique. On la note généralement μ telle que : $\mu = 2a$.

L'énergie magnétique vaut ainsi dans le cadre linéaire :

$$W_H = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Le cadre linéaire réversible n'est certainement pas le plus adapté pour le comportement magnétique des matériaux magnétiques (sauf aux très bas champs, ou en ne considérant que des variations faibles). On se reportera au cours d'électromagnétisme et de matériau pour les situations plus réalistes.

L'induction électrique correspondant à la dérivée de l'énergie libre par rapport au champ électrique, on a:

$$\frac{du(\vec{H}, \vec{E})}{d\vec{E}} = 2b \cdot \vec{E} = \vec{D} \quad (314)$$

La constante $2b$ est la permittivité diélectrique. On la note généralement ϵ telle que: $\epsilon = 2b$. L'énergie diélectrique vaut ainsi dans le cadre linéaire:

$$W_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

=> Le cadre linéaire réversible est un cadre assez bien adapté au comportement diélectrique des matériaux, compte tenu des gammes d'utilisation. On se reportera au cours d'électromagnétisme et de matériau pour plus de détail à ce sujet.

La dernière relation de comportement utile est à caractère dissipative: la densité de courant de conduction s'exprime en fonction du champ électrique par l'intermédiaire de la loi d'Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

où σ désigne ici la conductivité électrique.

=> On remarque les relations de milieu fournissent 9 relations scalaires complémentaires aux 6 équations d'équilibre. On aboutit à 15 équations permettant de déterminer les 15 inconnues d'un problème électromagnétique.

Lois de comportement couplées

On entre ici dans le cadre de comportements dits couplés, où une partie de l'énergie va être exprimée en fonction de deux physiques différentes. Dans un cadre élastique isotherme découplé, on écrira par exemple que l'énergie interne s'exprime selon:

$$u(\sigma, \vec{H}, \vec{E}) = \frac{1}{2} \lambda_\sigma (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_\sigma \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mu_H \cdot \vec{H} \cdot \vec{H} + \frac{1}{2} \epsilon_E \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \quad (315)$$

On adopte ici des notations spécifiques aux constantes mécaniques et électromagnétiques pour éviter les confusions. Au titre que l'élasticité peut se

mettre sous la forme d'un tenseur d'ordre 4 \mathbb{K} et conduise au scalaire par double produit contracté sur le tenseur des déformations, les énergies magnétique et électrique s'expriment en fonction d'un tenseur de perméabilité et de permittivité:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{H}, \vec{E}) = \frac{1}{2} {}^t \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} {}^t \vec{H} \underline{\mu}_E \vec{H} + \frac{1}{2} {}^t \vec{E} \underline{\epsilon}_E \vec{E} \quad (316)$$

ce qui en indiciel donne:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{H}, \vec{E}) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} K_{ijkl} \epsilon_{kl} + \frac{1}{2} H_i \mu_{ij}^E H_j + \frac{1}{2} E_i \epsilon_{ij}^E E_j \quad (317)$$

Le cadre couplé permet de prendre en compte des phénomènes comme l'existence d'une déformation lorsque le matériau est soumis à un champ magnétique ou électrique, ou encore l'influence d'un état de contrainte sur le comportement magnétique ou diélectrique.

Mathématiquement parlant, cela revient à ajouter des termes dans l'énergie libre fonctions d'au moins deux quantités physiques de nature différente: il peut s'agir d'une expression fonction d'invariants (pas forcément facilement exprimables), ou plus simplement d'un scalaire construit à partir des quantités désirées et d'un tenseur dont les constantes constituent les paramètres matériau du couplage. Les réalités physiques mesurables associées sont la magnétostriction (déformation d'origine magnétique) ou l'électrostriction (déformation d'origine électrique). Ils correspondent à des réalités très complexes (fonctions non-linéaires, non monotones, hystérésis...) que nous ne pouvons aborder dans le cadre de ce cours.

La prise en compte d'une variation de champ magnétique ou électrique sur la déformation revient à ajouter des termes à l'énergie interne fonction de ces champs. Pour l'électrostriction, on peut se contenter d'un terme couplé linéaire en champ électrique et linéaire en déformation de manière à ce que la définition des coefficients d'élasticité reste inchangée. On utilise alors la forme suivante:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{E}) = u(\mathbb{O}, \vec{0}) + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} K_{ijkl} \epsilon_{kl} + \frac{1}{2} E_i \epsilon_{ij}^E E_j - D_{ijk} \epsilon_{ij} E_k \quad (318)$$

\mathbb{D} est le tenseur de piézoélectricité (ordre 3).

On utilise un signe (-) par convention de manière à exprimer des constantes matériau positives.

La relation $\frac{du(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{E})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{O}$ implique $K_{ijkl}\epsilon_{kl} = D_{ijk}E_k$ soit $\epsilon_{kl} = K_{ijkl}^{-1}D_{ijk}E_k$. On obtient la relation matricielle suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{K}^{-1}\mathbb{D}\vec{E}$$

qui correspond à l'électrostriction ou effet piézoélectrique inverse.

La relation $\frac{du(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{E})}{d\vec{E}} = \vec{0}$ implique $\epsilon_{ij}^E E_j = D_{jki}\epsilon_{jk}$ soit $D_i = D_{jki}\epsilon_{jk}$. On obtient la relation vectorielle suivante:

$$\vec{D} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

qui correspond à la création d'induction électrique (polarisation) par action mécanique, ou effet piézoélectrique direct.

Pour la magnétostriction, le terme couplé doit être une fonction paire du champ magnétique (quadratique) et linéaire en déformation de manière à ce que la définition des coefficients d'élasticité reste inchangée. On utilise alors la forme suivante:

$$u(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{H}) = u(\mathbb{O}, \vec{0}) + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}K_{ijkl}\epsilon_{kl} + \frac{1}{2}H_i\mu_{ij}^H H_j - H_l E_{ijkl}\epsilon_{ij} H_k \quad (319)$$

\mathbb{E} est le tenseur de piézo-magnétisme (ou tenseur de magnétostriction) (ordre 4).

On utilise un signe (-) par convention de manière à exprimer des constantes matériau positives.

La relation $\frac{du(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{H})}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{O}$ implique $K_{ijkl}\epsilon_{kl} = H_l E_{ijkl} H_k$ soit $\epsilon_{kl} = K_{ijkl}^{-1} H_l E_{ijkl} H_k$. On obtient la relation matricielle suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t \vec{H} \mathbb{K}^{-1} \mathbb{E} \vec{H}$$

qui correspond à la magnétostriction.

La relation $\frac{du(\boldsymbol{\varepsilon}, \vec{H})}{d\vec{H}} = \vec{0}$ implique $\mu_{ij}^H H_j = E_{ijkl}\epsilon_{jk} H_l$ soit $B_i = E_{ijkl}\epsilon_{jk} H_l$. On obtient la relation vectorielle suivante:

$$\vec{B} = \mathbb{E}\boldsymbol{\varepsilon}\vec{H}$$

qui correspond à la création d'induction magnétique (aimantation) par action mécanique, ou effet piézo-magnétique direct (ou magnétostrictif inverse). On remarque qu'aucune induction ne peut être produite mécaniquement en absence de champ.