

5 CHAPITRE 5 - LOIS DE COMPORTEMENT - EQUATIONS DE MILIEU

Relation entre contraintes et déformations - nécessité?

=> bilan des inconnues d'un pb de mécanique et équations disponibles:

=> inconnues milieu solide:

- Contraintes: σ - 6
- Déformations: ε - 6
- Déplacements: \vec{u} - 3

=> inconnues milieu fluide:

- Contraintes: σ - 6
- Taux de déformation: \mathbb{D} - 6
- Vitesses: \vec{V} - 3

=> équations

- Equilibre: $\vec{\text{div}}\sigma + \vec{f}_v = \vec{0}$ - 3 (+ condition de surface $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{f}_s$)
- Gradient: $\varepsilon = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + {}^t\vec{\nabla}\vec{u})$ - 6 (+ conditions limites en déplacement)

=> manquent 6 équations définissant les relations entre le tenseur des contraintes et celui des déformations

=> inconnues milieu électromagnétique:

- Inductions: \vec{B}, \vec{D} - 6
- Champs: \vec{H}, \vec{E} - 6
- Courants: \vec{j} - 3

=> équations: nous avons 2 relations:

- Equilibre: $\vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ - 3
- Equilibre: $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ - 3

en effet, la conservation de la charge est obtenue par divergence de la 2ème relation; les conservations du flux magnétique et électrique sont déjà prises en compte.

=> manquent 9 équations définissant les 3 relations vectorielles entre les champs, courants et inductions.

5.1 Lois de comportement élastique

=> comportement des solides fortement dépendant de l'amplitude des déformations.

=> ici: petits déplacements

=> Attention: grande déformation de solides signifie: lois de comportement adaptées

5.1.1 Cadre général et hypothèses

Loi de comportement: modélisation du matériau sous certaines hypothèses:

- solides homogènes (comportement indépendant de la position) (milieux hétérogènes en M2)
- solides isotropes (comportement indépendant de la "direction" de la sollicitation) (cadre anisotrope en M1)
- matériau élastique: les efforts développés ne dépendent que de son état de déformation. (plasticité en matériaux)

En particulier, si on impose une déformation puis on la supprime, le solide revient dans son état initial

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \text{ tel que } \sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (229)$$

=> réversibilité de la transformation: pas d'hystérésis

=> σ et ε peuvent être considérées comme des variables thermodynamiques

HPP => linéarité du comportement (terme de second ordre du gradient négligés)

$$\sigma(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) = \alpha\sigma(\varepsilon_1) + \beta\sigma(\varepsilon_2) = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 \quad (230)$$

Cadre thermodynamique:

On a vu que la puissance des efforts extérieurs s'écrit:

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot {}^E \vec{V} dv + \iint_{\partial\Omega} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot {}^E \vec{V} ds = \iiint_{\Omega} (\vec{f}_v \cdot {}^E \vec{V} dv + \text{div}(\sigma \cdot {}^E \vec{V})) dv \quad (231)$$

On peut alors définir le travail élémentaire dW fourni lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{u}$ tel que:

$$dW = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot d\vec{u} + \text{div}(\sigma \cdot d\vec{u}) dv \quad (232)$$

En l'absence de vitesse (statique) et de source chaleur (et de conduction), et en condition isotherme, il y a correspondance entre le travail élémentaire et la variation élémentaire d'énergie interne dU qu'on identifie comme variation d'énergie élastique dU^e . On développe par ailleurs:

$$\begin{aligned} \text{div}(\sigma.d\vec{u}) &= (\sigma_{ij}du_j)_{,i} = (\sigma_{ij,i}du_j) + (\sigma_{ij}du_{j,i}) = (\sigma_{j,i,i}du_j) + (\sigma_{ji}du_{j,i}) \\ \text{div}(\sigma.d\vec{u}) &= \overrightarrow{\text{div}}(\sigma).d\vec{u} + \sigma : \overline{\text{grad}}(d\vec{u}) \end{aligned}$$

soit:

$$dU^e = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v.d\vec{u} + \overrightarrow{\text{div}}(\sigma).d\vec{u} + \sigma : \overline{\text{grad}}(d\vec{u})dv \quad (233)$$

La variation d'énergie élastique locale est alors définie par l'intégrande:

$$du^e = (\vec{f}_v + \overrightarrow{\text{div}}(\sigma)).d\vec{u} + \sigma : \overline{\text{grad}}(d\vec{u}) \quad (234)$$

avec par application de l'équation d'équilibre: $\vec{f}_v + \overrightarrow{\text{div}}(\sigma) = \vec{0}$; et développement du gradient en partie symétrique et partie antisymétrique (resp. incrément de tenseur des déformations et incrément de tenseur des rotations): $\overline{\text{grad}}(d\vec{u}) = d\varepsilon + d\omega$.

Compte tenu du produit contracté avec le tenseur symétrique σ , il reste:

$$du_e = \sigma : d\varepsilon \quad (235)$$

5.1.2 Loi de comportement élastique isotherme

Nous nous plaçons dans un cadre isotherme, c'est à dire $T = T_0$.

On a vu que la contrainte évolue de manière linéaire avec la déformation. La relation la plus générale entre tenseur des contraintes et des déformations est donc la suivante:

$$\sigma = \mathbb{K} : \varepsilon \quad (236)$$

où \mathbb{K} est un tenseur d'ordre 4 représentant la rigidité (ou raideur) du matériau. \mathbb{K}^{-1} est appelé tenseur de souplesse ou de complaisance. L'expression en indiciel donne:

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (237)$$

\mathbb{K} possède en théorie 81 coefficients ($3 \times 3 \times 3 \times 3$) \Rightarrow passage à 36 coefficients (6×6) compte tenu de la symétrie des 2 tenseurs. Si on met le tenseur des contraintes et celui des déformations sous une forme en colonne $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\epsilon}$, il sont reliés par l'intermédiaire de la matrice 6×6 constitués des éléments K_{uv} de la matrice de rigidité, ij correspondant à u , et kl à v .

L'approche énergétique précédente a montré que:

$$du_e = \sigma : d\mathcal{E} \quad (238)$$

La contrainte est donc le résultat de la dérivation de l'énergie élastique par rapport à la déformation

$$\sigma = \frac{du_e}{d\mathcal{E}} \quad (239)$$

soit:

$$\frac{du_e}{d\mathcal{E}} = \mathbb{K} : \mathcal{E} \quad (240)$$

En indiciel, cela donne:

$$\sigma_{ij} = \frac{du_e}{d\epsilon_{ij}} \quad (241)$$

$$\frac{du_e}{d\epsilon_{ij}} = K_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (242)$$

\Rightarrow intégration ?

Si on part de:

$$A = \epsilon_{ij} K_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (243)$$

on peut écrire:

$$\frac{dA}{d\epsilon_{ij}} = K_{ijkl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ij} K_{ijkl} \frac{d\epsilon_{kl}}{d\epsilon_{ij}} \quad (244)$$

avec

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (245)$$

soit

$$\frac{d\epsilon_{kl}}{d\epsilon_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (246)$$

soit

$$\frac{dA}{d\epsilon_{ij}} = K_{ijkl}\epsilon_{kl} + \epsilon_{ij}K_{ijkl}\delta_{ik}\delta_{jl} = K_{ijkl}\epsilon_{kl} + \epsilon_{kl}K_{ijkl} = 2.K_{ijkl}\epsilon_{kl} = 2\frac{du_e}{d\epsilon_{ij}} \quad (247)$$

On en déduit que $du_e = dA$, soit l'expression de l'énergie élastique:

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}K_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (248)$$

=> L'intégration permet d'aboutir à une forme quadratique en déformation (ou en contrainte) de l'énergie élastique:

$$u_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{K}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (249)$$

Remarquons alors que

$$\frac{d^2u_e}{d\epsilon_{ij}d\epsilon_{kl}} = K_{ijkl} = \frac{d^2u_e}{d\epsilon_{kl}d\epsilon_{ij}} = K_{klij} \quad (250)$$

Le résultat de ces dérivées secondes étant le même, cela signifie que $K_{ijkl} = K_{klij}$, soit $K_{uv} = K_{vu}$. la matrice 6x6 de rigidité est donc symétrique, ce qui conduit à réduire le nombre de coefficients indépendants à $(36-6)/2+6=21$.

Si les 21 coefficients sont effectivement différents, la situation correspond à une anisotropie totale de la matière (système cristallin triclinique par exemple - Cf cours de matériaux). L'hypothèse d'isotropie réduit ce nombre à seulement 2 paramètres indépendants. On peut le montrer en considérant les symétries de la matière et une indépendance à l'orientation de la sollicitation mécanique. On peut également adopter une approche énergétique simplifiée.

5.1.3 Loi de comportement élastique isotrope isotherme

On souhaite exprimer l'énergie en fonction de la déformation. L'isotropie traduit le fait que l'énergie libre ne dépend pas du repère du tenseur des déformations, c.a.d. que n'importe quelle désorientation (matrice de passage) conduit à la même énergie.

Il est donc possible d'exprimer l'énergie en fonction des invariants quadratiques de la déformation: quadratique puisqu'on se retrouve avec un produit de 2 tenseurs des déformations

Les invariants du tenseur des déformations ε sont les grandeurs caractéristiques du tenseur qui ne dépendent pas de la base choisie pour exprimer les composantes. On les construit à partir du polynôme caractéristique: $P(\lambda) = \det(\varepsilon - \lambda \mathbb{I})$ qui est indépendant de la base : On obtient:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 \quad (251)$$

les trois invariants sont:

$$I_1 = \text{trace}(\varepsilon) \quad (252)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((I_1)^2 - (\varepsilon : \varepsilon)) \quad (253)$$

$$I_3 = \det(\varepsilon) \quad (254)$$

On peut donc construire en théorie l'énergie élastique en fonction de la combinaison des 3 invariants. On développe:

$$u_e(\varepsilon) = aI_1 + bI_2 + cI_3 + dI_1^2 + eI_2^2 + fI_3^2 + gI_1I_2 + hI_1I_3 + iI_2I_3 \quad (255)$$

Les seules combinaisons physiquement réalistes (et cohérentes avec notre hypothèse de linéarité) sont celles où on retrouve une forme quadratique en déformation, de sorte que $\frac{d^2u_e}{d\varepsilon^2} = Cte$. Les constantes c, e, f, g, h, i sont nulles. La constante a est nulle puisqu'elle correspondrait à un état de contrainte constant. L'énergie élastique ne peut donc prendre que la forme simplifiée suivante, b et d étant des constantes matériau à déterminer.

$$u_e(\varepsilon) = dI_1^2 + bI_2 \quad (256)$$

On constate ainsi que le comportement isotrope nécessite 2 paramètres indépendants.

Par ailleurs, on préfère usuellement décomposer I_2 en $\frac{1}{2}(I_1^2 - \varepsilon : \varepsilon)$ pour obtenir:

$$u_e(\varepsilon) = (d + \frac{b}{2})I_1^2 - \frac{b}{2}\varepsilon : \varepsilon = (b + \frac{b}{2})(\text{tr}\varepsilon)^2 - \frac{b}{2}\varepsilon : \varepsilon \quad (257)$$

qu'on réécrit :

$$u_e(\varepsilon) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\varepsilon)^2 + \mu\varepsilon : \varepsilon \quad (258)$$

soit en indiciel:

$$u_e(\epsilon_{ij}) = \frac{\lambda}{2}(\epsilon_{kk})^2 + \mu\epsilon_{ij} : \epsilon_{ij} \quad (259)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé. La contrainte étant définie comme la dérivée de l'énergie élastique par rapport à la déformation, on a:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\lambda}{2} \frac{\partial(\epsilon_{kk})^2}{\partial \epsilon_{ij}} + \mu \frac{\partial \epsilon_{ij} : \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (260)$$

avec $\epsilon_{kk} = \epsilon_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \epsilon_{ij} : \delta_{ij}$, la relation se simplifie en:

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (261)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} \quad (262)$$

On préfère parfois à cette expression une forme où apparaissent séparément la contribution hydrostatique de la déformation (trace) et sa contribution déviatorique. Le déviateur des déformations s'exprime selon:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} \quad (263)$$

Le tenseur des contraintes s'exprime alors selon:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{d} + \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} = 2\mu\boldsymbol{d} + K\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} \quad (264)$$

Conséquence

★ Quand le tenseur des déformations est hydrostatique, le déviateur est nul et la contrainte est également hydrostatique. $K = (3\lambda + 2\mu)/3$ représente alors le coefficient de compressibilité du matériau: par exemple, $\sigma_{11} = 3K\epsilon_{11}$ (idem pour les 3 autres directions).

★ Quand le tenseur des déformations est déviatorique, la trace des déformation est nulle et la contrainte est purement déviatorique (cisaillement). μ représente alors le module de cisaillement du matériau, ou module de Coulomb: $\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij}$ ($i \neq j$).