

4.3 Conservation des quantités électromagnétiques

Les relations entre quantités électromagnétiques sont généralement traitées dans le cadre d'un milieu immobile. Nous chercherons à généraliser cet aspect. Remarquons qu'à la différence des quantités mécaniques, les quantités électromagnétiques peuvent exister en absence de matière. Elles modifient donc l'espace environnant.

4.3.1 Conservation de la charge

Toute variation de charge est à la source d'une densité de courant selon:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = -\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_e dv \quad (161)$$

On reconnaît à droite une dérivée particulaire. La variation de la charge en fonction du temps vaut donc:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho_e dv = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}(\rho_e \vec{V}) dv \quad (162)$$

où \vec{V} désigne la vitesse du milieu. On a par ailleurs:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \iiint_{\Omega} \text{div} \vec{J} dv \quad (163)$$

ce qui permet d'aboutir à la forme locale de la relation de conservation de la charge:

$$\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} - \text{div}(\rho_e \vec{V}) \quad (164)$$

puis

$$\text{div}(\vec{J} + \rho_e \vec{V}) = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (165)$$

On note généralement $\vec{J}' = \vec{J} + \rho_e \vec{V}$ la densité de courant totale, somme d'une contribution statique et d'un effet de vitesse de charges du milieu. A la divergence de \vec{J}' dans le volume correspond un flux de courant de deux natures différentes.

4.3.2 Conservation du flux

On associe à l'existence de charges électriques au sein d'un milieu Ω une densité de flux électrique. Le flux électrique sortant d'une surface fermée s'écrit (\vec{n} étant une normale sortante):

$$\phi_e = \iint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot \vec{n} ds = \iiint_{\Omega} \rho_e dv \quad (166)$$

Cette relation ne fait pas intervenir de variations temporelles. Elle se réécrit selon:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{D} dv = \iiint_{\Omega} \rho_e dv \quad (167)$$

Soit la relation locale:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e \quad (168)$$

On associe à l'**inexistence** de charges magnétiques au sein d'un milieu Ω une densité de flux magnétique. Le flux magnétique sortant d'une surface fermée est nul ce qui s'écrit, \vec{n} étant une normale sortante:

$$\phi_m = \iint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (169)$$

Cette relation ne fait pas intervenir de variations temporelles. Elle se réécrit selon:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{B} dv = 0 \quad (170)$$

Soit la relation locale:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (171)$$

4.3.3 Equations de Maxwell généralisées

Les deux relations fondamentales dont nous avons besoin à ce stade sont la loi de Faraday et la loi d'Ampère. Ces deux relations font intervenir des variations temporelles

La loi de Faraday indique qu'une variation d'induction magnétique à travers une surface crée une circulation de champ électrique sur la ligne délimitant la surface, soit:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{n} ds \quad (172)$$

La formule de Stokes permet de passer de l'intégrale curviligne à une intégrale de surface:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{\text{rot}}\vec{E} \cdot \vec{n} ds = -\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{n} ds \quad (173)$$

On applique ensuite la dérivée particulière à l'intégrale de surface, soit:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{\text{rot}}\vec{E} \cdot \vec{n} ds = -\iint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\text{rot}}(\vec{B} \wedge \vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{div}(\vec{B}) \right) \cdot \vec{n} ds \quad (174)$$

ce qui donne la relation locale suivante:

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{\text{rot}}(\vec{B} \wedge \vec{V}) - \vec{V} \cdot \text{div}(\vec{B}) \quad (175)$$

La divergence de l'induction magnétique étant nulle, on obtient:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{V}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (176)$$

On note généralement $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{V}$ le champ électrique total, somme d'une contribution statique et d'un effet de vitesse du milieu.

La loi d'Ampère indique qu'une densité de courant et une variation de densité de flux électrique à travers une surface créent une circulation de champ magnétique sur la ligne délimitant cette surface, soit:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} ds + \frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot \vec{n} ds \quad (177)$$

La formule de Stokes permet de passer de l'intégrale curviligne à une intégrale de surface:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{\text{rot}}\vec{H} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} ds + \frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot \vec{n} ds \quad (178)$$

On applique ensuite la dérivée particulière à l'intégrale de surface du flux électrique, soit:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{\text{rot}}\vec{H} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} ds + \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{\text{rot}}(\vec{D} \wedge \vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{div}(\vec{D}) \right) \cdot \vec{n} ds \quad (179)$$

ce qui donne la relation locale suivante:

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{\text{rot}}(\vec{D} \wedge \vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{div}(\vec{D}) \quad (180)$$

Si on utilise la loi de conservation du flux électrique $\text{div}(\vec{D}) = \rho_e$, on a:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{H} + \vec{V} \wedge \vec{D}) = \vec{J} + \rho_e \vec{V} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (181)$$

On retrouve la densité de courant totale $\vec{J}' = \vec{J} + \rho_e \vec{V}$. On note généralement $\vec{H}' = \vec{H} + \vec{V} \wedge \vec{D}$ le champ magnétique total, somme d'une contribution statique et d'un effet de vitesse du milieu.

Remarquons que si le milieu est immobile, on retrouve les équations de Maxwell sous leur forme classique

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

4.3.4 Forces de Lorentz et de Laplace

La force de Lorentz a pour définition:

$$\vec{f}_v^{Lo} = \rho_e \vec{E} \quad (182)$$

La force de Laplace a pour définition:

$$\vec{f}_v^{La} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (183)$$

Lorsque le milieu animé d'une vitesse \vec{V} , la densité de courant est incrémentée de la contribution des charges:

La force de Laplace se réécrit alors en:

Force de Laplace:

$$\vec{f}_v^{La} = (\vec{j} + \rho_e \vec{V}) \wedge \vec{B} \quad (184)$$

Lorsque le milieu animé d'une vitesse \vec{V} , le champ électrique est incrémenté de la contribution des charges:

La force de Lorentz se réécrit alors en:

Force de Lorentz:

$$\vec{f}_v^{Lo} = \rho_e (\vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{V}) \quad (185)$$

La force électromagnétique totale est donc inchangée par le mouvement puisque les produits vectoriels s'annulent:

$$\vec{f}_v^e = \rho_e \vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{V} + (\vec{j} + \rho_e \vec{V}) \wedge \vec{B} = \rho_e \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (186)$$

Remarque 1

On connaît une seconde expression de la force de Lorentz appliquée aux particules chargées animées d'une vitesse \vec{V}_p

$$\vec{f}_v^{Lo} = \rho_e(\vec{E} + \vec{V}_p \wedge \vec{B}) \quad (187)$$

Il est intéressant de remarquer qu'en présence du champ électrique total (le milieu a également une vitesse \vec{V}), la force de Lorentz donne:

$$\vec{f}_v^{Lo} = \rho_e(\vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{V} + \vec{V}_p \wedge \vec{B}) \quad (188)$$

On remarque en particulier que les effets de vitesse s'annulent lorsque vitesse du milieu et vitesse des particules sont égales.

Remarque 2

On peut associer à cette force électromagnétique de volume un état de contrainte. On parlera de tenseur des contraintes de Maxwell. Il vérifie:

$$\vec{f}_v^e + \overrightarrow{\text{div}} \sigma^E = \vec{0} \quad (189)$$

De cet état de contrainte peut découler une déformation dans un milieu solide. On parlera de déformation de magnétostriction ou l'électrostriction en fonction du type de chargement. Les microstructures magnétiques et électriques étant extrêmement complexes, cette approche n'a cependant une validité que très locale. On note par ailleurs l'existence d'un tenseur de Maxwell dans le vide. C'est une de ses particularités importante.

4.4 Conservation de l'énergie

L'énergie contenue dans le volume Ω correspond formellement à une somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne:

$$E = E_c + U \quad (190)$$

En expression intégrale, l'énergie contenue dans un volume Ω est la somme des quantités locales d'énergie cinétique et d'énergie interne selon:

$$E = \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho^E V^2 + \rho u \right) dv \quad (191)$$

Toute variation d'énergie totale correspond donc à:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (192)$$

La variation de l'énergie totale peut-être par ailleurs due à la puissance des forces extérieures et au taux de chaleur reçue par la système, soit:

$$\frac{dE}{dt} = P + \frac{dQ}{dt} \quad (193)$$

Exprimons chacun de ces termes séparément.

★ **variation de l'énergie cinétique**

$$E_c = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \rho^E V^2 dv \quad (194)$$

Sa dérivée par rapport au temps vaut:

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho^E V^2}{\partial t} + \text{div}(\rho^E V^2 \cdot {}^E \vec{V}) \right) dv \quad (195)$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot {}^E V^2 + \rho \frac{\partial {}^E V^2}{\partial t} + {}^E V^2 \overrightarrow{\text{grad}} \rho \cdot {}^E \vec{V} + \rho \overrightarrow{\text{grad}} {}^E V^2 \cdot {}^E \vec{V} + \rho^E V^2 \text{div}({}^E \vec{V}) \right) dv \quad (196)$$

qu'on regroupe en:

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \rho \cdot {}^E \vec{V} + \rho \text{div}({}^E \vec{V}) \right) \cdot {}^E V^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial {}^E V^2}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} {}^E V^2 \cdot {}^E \vec{V} \right) dv \quad (197)$$

On reconnaît à gauche un terme nul si on utilise le principe de conservation de la masse. On reconnaît à droite la dérivée particulaire du produit scalaire de la vitesse eulerienne. Soit:

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \frac{d^E V^2}{dt} dv \quad (198)$$

★ **variation de l'énergie interne**

De manière identique à l'énergie cinétique, on obtient, en utilisant l'hypothèse de conservation de la masse:

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{\Omega} \rho \frac{du}{dt} dv \quad (199)$$

★ Puissance des efforts extérieurs

La puissance locale est définie comme le produit scalaire d'une force par une vitesse: $p = \vec{f} \cdot \vec{V}$. On définit la puissance globale en faisant la somme des contributions des puissances volumiques et surfaciques (vecteur contrainte):

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot {}^E \vec{V} dv + \iint_{\partial\Omega} \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot {}^E \vec{V} ds \quad (200)$$

On introduit alors le tenseur des contraintes:

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot {}^E \vec{V} dv + \iint_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \vec{n}) \cdot {}^E \vec{V} ds \quad (201)$$

On observe que: $(\sigma \cdot \vec{n}) \cdot {}^E \vec{V}$ s'écrit en indiciel: $\sigma_{ij} n_j V_i$, qui devient, compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes: $\sigma_{ji} V_i n_j$, soit $(\sigma \cdot {}^E \vec{V}) \cdot \vec{n}$. On en déduit en utilisant le théorème de Gauss-ostrogradski que:

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot {}^E \vec{V} dv + \iiint_{\Omega} \text{div}(\sigma \cdot {}^E \vec{V}) dv \quad (202)$$

On constate également que $\text{div}(\sigma \cdot {}^E \vec{V}) = (\sigma_{ij} \cdot {}^E V_j)_{,i} = \sigma_{ij,i} \cdot {}^E V_j + \sigma_{ij} \cdot {}^E V_{j,i} = \sigma_{ji,i} \cdot {}^E V_j + \sigma_{ji} \cdot {}^E V_{j,i} = \overrightarrow{\text{div}}(\sigma) \cdot {}^E \vec{V} + \sigma : \overline{\text{grad}}^E \vec{V}$. On introduit cette nouvelle relation dans l'équation précédente

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot {}^E \vec{V} dv + \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\sigma) \cdot {}^E \vec{V} dv + \iiint_{\Omega} \sigma : \overline{\text{grad}}^E \vec{V} dv \quad (203)$$

Parallèlement, le produit contracté (somme sur 2 indices) $\sigma : \overline{\text{grad}}^E \vec{V}$ peut s'écrire en introduisant les tenseurs des taux de déformation et taux de rotation selon:

$$\sigma : \overline{\text{grad}}^E \vec{V} = \sigma : \mathbb{D} + \sigma : \Omega \quad (204)$$

Or le produit contracté entre un tenseur symétrique et un tenseur anti-symétrique est nul: $\sigma_{ij} \omega_{ij} = 0$. On obtient finalement:

$$P = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{V} dv + \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\sigma) \cdot {}^E \vec{V} dv + \iiint_{\Omega} \sigma : \mathbb{D} dv \quad (205)$$

$\sigma : \mathbb{D}$ correspond à une expression locale de la puissance des interefforts.

Remarque: le produit contracté vaut également le la trace du produit matriciel:
 $\sigma : \mathbb{D} = \text{tr}(\sigma \mathbb{D})$.

★ Puissance électromagnétique

La puissance électromagnétique correspond à la divergence du vecteur de Poynting. Le vecteur de Poynting est le vecteur \vec{S} tel que:

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

La puissance électromagnétique dans un domaine Ω de surface $\partial\Omega$ de normale \vec{n} vaut le flux de \vec{S} à travers la surface:

$$P^e = - \iint_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot \vec{n} ds = - \iiint_{\Omega} \text{div} \vec{S} dv \quad (206)$$

On utilise un signe (-) par convention, la normale étant définie sortante. On a par ailleurs:

$$\text{div} \vec{E} \wedge \vec{H} = \epsilon_{ijk} (E_j H_k)_{,i} = \epsilon_{ijk} (E_j H_{k,i} + E_{j,i} H_k) = \epsilon_{jki} H_{k,i} E_j + \epsilon_{kij} E_{j,i} H_k$$

soit

$$\text{div} \vec{E} \wedge \vec{H} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{H} - \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \cdot \vec{E}$$

En introduisant à ce stade les équations de Maxwell (milieu immobile), on obtient:

$$\text{div} \vec{E} \wedge \vec{H} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} - \vec{J} \cdot \vec{E} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Ainsi, la puissance électromagnétique se dissipe en trois termes:

$$P^e = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} dv \quad (207)$$

- $\iiint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} dv$ correspond à la puissance magnétique emmagasinée.

- $\iiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} dv$ correspond à la puissance diélectrique emmagasinée.
- $\iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dv$ correspond aux pertes par effet Joule.

L'expression complète de ces termes utilise les lois de milieu.

Les deux premiers termes sont des termes purement électromagnétiques. Le dernier correspond à un terme source dans un bilan thermique.

La puissance dissipée en chaleur r^e s'exprime comme le produit scalaire entre le champ électrique et la densité de courant de conduction. Si on tient compte maintenant de la vitesse du milieu, on a:

$$r^e = \iiint_{\Omega} \vec{E}' \cdot \vec{J}' dv \quad (208)$$

où \vec{E}' et \vec{J}' représentent les champs électriques et densité de courant totaux.

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{V} \\ \vec{J}' &= \vec{J} + \rho_e \vec{V} \end{aligned}$$

On obtient:

$$r^e = \iiint_{\Omega} (\vec{E} + \vec{B} \wedge \vec{V}) \cdot (\vec{J} + \rho_e \vec{V}) dv \quad (209)$$

$$r^e = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{J} \cdot \vec{B} \wedge \vec{V} + \rho_e \vec{E} \cdot \vec{V} + \rho_e \vec{V} \cdot \vec{B} \wedge \vec{V} dv \quad (210)$$

on reconnaît un produit mixte:

$$\vec{J} \cdot \vec{B} \wedge \vec{V} = (\vec{J} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V}$$

On a également : $\vec{V} \cdot \vec{B} \wedge \vec{V} = 0$

On factorise par la vitesse dans l'expression de la puissance:

$$r^e = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} + (\vec{J} \wedge \vec{B} + \rho_e \vec{E}) \cdot \vec{V} dv \quad (211)$$

On reconnaît entre parenthèses l'expression de la force volumique électromagnétique:

$$\vec{f}_v^e = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (212)$$

soit

$$r^e = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{f}_v^e \cdot \vec{V} \cdot dv \quad (213)$$

Ainsi l'effet joule pour un milieu en mouvement peut être vu comme la somme d'un effet joule classique et de la puissance des forces électromagnétiques. Cette dernière peut être en partie conservative (aimantation ou polarisation du milieu) et dissipative (aire des cycles magnétiques ou diélectriques). Nous ne retiendrons la contribution électromagnétique pour la suite que pour son rôle de source de chaleur locale.

★ expression du taux de chaleur

La quantité de chaleur globale est l'intégrale sur le volume de la quantité de chaleur locale notée q (dont la puissance électrique peut être la source - nous la séparerons formellement du reste de la quantité de chaleur pour la suite).

$$Q = \iiint_{\Omega} q dv \quad (214)$$

Sa variation par rapport au temps, autrement dit le taux de chaleur a pour origine, de façon analogue à la puissance des efforts extérieurs, une contribution volumique et une contribution surfacique. Le signe négatif sur la contribution de surface permet qu'un flux entrant (produit scalaire négatif) conduit à une augmentation de la quantité de chaleur.

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\Omega} \rho q_v dv - \iint_{\partial\Omega} \vec{q}_s \cdot \vec{n} ds \quad (215)$$

q_v définit l'apport de chaleur massique (Watt/kg). \vec{q}_s définit le flux de chaleur conductif (Watt/m²). En appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradski à l'intégrale de surface, cette expression prend la forme:

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\Omega} \rho q_v dv - \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{q}_s) dv \quad (216)$$

★ Equilibre énergétique

La somme de la variation de l'énergie cinétique et de l'énergie interne vaut la somme des puissances des forces extérieures et du taux de chaleur, auquel on ajoute des sources externes comme l'effet joule.

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dU}{dt} = P + r^e + \frac{dQ}{dt} \quad (217)$$

On utilise l'expression du milieu en mouvement pour la source électrique:

$$r^e = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{f}_v^e \cdot \vec{V} \cdot dv$$

Le bilan énergétique est une somme d'intégrales de volumes. L'intégrande s'exprime selon:

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d^E V^2}{dt} + \rho \frac{du}{dt} = \vec{f}_v \cdot {}^E \vec{V} + \overrightarrow{\text{div}}(\sigma) \cdot {}^E \vec{V} + \sigma : \mathbb{D} + \vec{f}_v^e \cdot {}^E \vec{V} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \rho q_v - \text{div}(\vec{q}_s) \quad (218)$$

Or $\frac{1}{2} \frac{d^E V^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ({}^E \vec{V} \cdot {}^E \vec{V}) = {}^E \vec{\Gamma} \cdot {}^E \vec{V}$, soit, en factorisant les produits scalaires avec la vitesse:

$$(\rho {}^E \vec{\Gamma} - \vec{f}_v - \vec{f}_v^e - \overrightarrow{\text{div}}(\sigma)) \cdot {}^E \vec{V} + \rho \frac{du}{dt} = \sigma : \mathbb{D} + \rho q_v - \text{div}(\vec{q}_s) \quad (219)$$

L'expression de gauche, correspondant à la conservation de la quantité de mouvement, est nulle. L'expression se simplifie en:

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma : \mathbb{D} + \vec{J} \cdot \vec{E} + \rho q_v - \text{div}(\vec{q}_s) \quad (220)$$

La variation de l'énergie interne se trouve alors fonction de la puissance des inter-efforts, de la puissance dissipée par effet joule, du taux de chaleur massique et des échanges de chaleur par conduction.

★Application: loi de Fourier - équation de la chaleur

Considérons que l'énergie interne spécifique n'augmente que sous l'effet de la température. La variation d'énergie interne est liée à la chaleur spécifique massique c tel que:

$$\frac{du}{dt} = c \frac{dT}{dt} \quad (221)$$

La loi de Fourier indique par ailleurs que le flux conductif de chaleur est proportionnel au gradient de température selon:

$$\vec{q}_s = -k \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \quad (222)$$

où k est la conductivité thermique. En absence de sources de chaleur ponctuelles ($q_v=0$, $\vec{J} \cdot \vec{E} = 0$), la conservation de l'énergie conduit à l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \sigma : \mathbb{D} + k \cdot \Delta T \quad (223)$$

On constate que la puissance des efforts intérieurs joue le rôle de source ponctuelle de chaleur. la quantité $k/(\rho c)$ a la dimension d'un coefficient de diffusion.

★**Remarque: équation de diffusion**

On part de l'expression de la conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho^E \vec{V}) = 0 \quad (224)$$

masse volumique et concentration ont des définitions proches. la concentration se rapporte à plusieurs composés dans un volume.

$$C = \frac{m_c}{V} \quad \text{tandis que} \quad \rho = \frac{m_{tot}}{V} \quad (225)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C^E \vec{V}) = 0 \quad (226)$$

On définit le flux de composés comme $\vec{j} = C^E \vec{V}$.

La loi de Fick indique par ailleurs que le flux de composé est proportionnel au gradient de concentration de ce composé:

$$\vec{j} = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}C} \quad (227)$$

D , correspondant au coefficient de diffusion du composé dans le milieu (pris constant a priori). En introduisant cette expression dans l'équation de conservation de la masse, on obtient:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}C}) = D \Delta C \quad (228)$$

qui correspond à l'équation de diffusion d'un milieu dans un autre.