

### 3.2.3 Opérations sur le tenseur des contraintes

#### Déviateur des contraintes

Le déviateur des contraintes est défini comme:

$$\mathbb{S} = \sigma - \frac{1}{3}tr(\sigma)\mathbb{I} \quad (127)$$

Son expression indicielle est:  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}$

On note ainsi, quelque soit le tenseur  $\sigma$ ,  $\sigma_H = \frac{1}{3}tr(\sigma)$  la part hydrostatique du tenseur, ou simplement la contrainte hydrostatique. Ce terme renvoie à la notion de fluide. Dans un milieu fluide, la contrainte hydrostatique correspond à  $-p$ ,  $p$  étant la pression.  $\sigma_H$  est invariant par changement de repère. Quand  $\sigma_H = 0$ , on parlera d'état de contrainte purement déviatorique, état de contrainte caractéristique du cisaillement.

La trace du déviateur est par ailleurs toujours nulle.

#### Réciprocité des contraintes - théorème de Cauchy

soit  $\vec{T}(M, \vec{n})$  un vecteur contrainte tel que  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma(M) \cdot \vec{n}$ ,

$\forall (\vec{n}, \vec{n}')$  deux vecteurs unitaires, on montre que  ${}^t\vec{n}' \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = {}^t\vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}')$

Démonstration:  $n'_i \cdot (\sigma_{ij} \cdot n_j) = (n'_i \cdot \sigma_{ij}) \cdot n_j = n_j \cdot (\sigma_{ji} \cdot n'_i)$  - lié à la symétrie du tenseur des contraintes.

#### Conditions limites - surface libre

On a défini le vecteur contrainte à partir de 2 volumes imbriqués l'un dans l'autre. Quand on fait tendre le volume  $\Phi$  vers  $\Omega$ , les surfaces se confondent. Il y a donc correspondance entre le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  et la force surfacique appliquée au point  $M$  considéré de la surface. Si l'effort appliqué est un torseur équivalent, il y a correspondance entre la résultante du torseur et l'intégrale de surface du vecteur contrainte et entre le moment du torseur et l'intégrale de surface du moment du vecteur contrainte par rapport au même point.

Enfin si la surface n'est soumise à aucun effort, elle est dite "libre", le vecteur contrainte est donc nul au point  $M$  considéré.

## 4 CHAPITRE 4 - LOIS DE CONSERVATION

On présente dans ce chapitre les lois de conservation des grandeurs physiques utiles au physicien et au mécanicien.

On établit ces équations en effectuant un bilan des différentes grandeurs sur un volume  $\Omega$  fixe (description Eulerienne) limité par une surface  $\partial\Omega$ . L'intégrale de volume est l'outil essentiel utilisé ici. L'intégrale de surface est utilisée plus particulièrement en électromagnétisme.

### 4.1 Dérivation par rapport au temps des intégrales spatiales

En mécanique, lorsqu'on calcule une intégrale (de surface ou de volume), on peut utiliser aussi bien les coordonnées d'Euler et de Lagrange. Cela ne pose pas de problème particulier au niveau de l'intégration mais, en revanche, le comportement est différent vis-à-vis de la dérivation temporelle.

#### Dérivation d'une intégrale de volume

Dans le cas des représentations d'Euler, on s'intéresse à des volumes et des surfaces fixes. On souhaite pouvoir permuter dérivation et intégration pour une quantité  $A(\vec{OM}, t)$ .

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} A(\vec{OM}, t) dv = \iiint_{\Omega} \frac{dA(\vec{OM}, t)}{dt} dv + \iint_{\partial\Omega} \text{autre terme?} ds \quad (128)$$

**Le terme supplémentaire est un terme de flux (convection à travers la surface). Sa définition ne peut s'intuiter facilement !**

En revanche, si on utilise la représentation de Lagrange, le support d'intégration est mobile. Ainsi, à l'aide d'un changement de variable, on exprime l'intégrale de volume par rapport au volume initial  $\Omega_0$  :

$$\iiint_{\Omega(t)} A(\vec{OM}, t) dv = \iiint_{\Omega_0} A(\vec{\phi}(\vec{OM}_0, t), t) J dv_0 \quad (129)$$

avec  $\vec{OM} = \vec{\phi}(\vec{OM}_0, t)$ .  $J$  est le jacobien du changement de variable, ce qui est classique pour n'importe quel changement de variable. Le Jacobien est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne  $\mathbb{J}$ .

★ Construction du Jacobien

La matrice jacobienne permet un passage entre variables d'une configuration à une autre. On sait que le changement de configuration s'effectue selon  $\vec{dx} = \mathbb{F}\vec{dx}_0$ ,  $\mathbb{F}$  correspondant au gradient de la fonction vectorielle  $\vec{\phi}$ , c'est également la matrice Jacobienne.

$$F_{ij} = \frac{dx_i}{dx_j^0}$$

Exprimons alors le passage de  $V_0$  à  $V$ :

$$\text{volume: } V = (\vec{dx} \wedge \vec{dy}) \cdot \vec{dz} = dw_i dz_i = \epsilon_{ijk} dx_j dy_k dz_i = \epsilon_{ijk} F_{jm} dx_m^0 F_{kn} dy_n^0 F_{il} dz_l^0$$

$$\text{volume: } V_0 = (\vec{dx}^0 \wedge \vec{dy}^0) \cdot \vec{dz}^0 = \epsilon_{lmn} dx_m^0 dy_n^0 dz_l^0$$

On utilise la propriété:  $\epsilon_{lmn} \cdot \epsilon_{lmn} = 6$  pour écrire:  $\epsilon_{lmn} V_0 = 6 \cdot dx_m^0 dy_n^0 dz_l^0$ , soit finalement:

$$V = \left( \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} F_{jm} F_{kn} F_{il} \right) \cdot V_0 \quad (130)$$

On vérifie que la quantité  $\frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} F_{jm} F_{kn} F_{il}$  est le déterminant de  $\mathbb{F}$ , et que cette quantité est toujours positive (si produit mixte dans le sens direct). Puisque  $\mathbb{F}$  correspond à la matrice Jacobienne du changement de variable, le jacobien vaut  $J = \det(\mathbb{F})$ . La dérivée par rapport au temps devient donc:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} A(\vec{OM}, t) dv = \iiint_{\Omega_0} \frac{dA(\vec{\phi}(\vec{OM}_0, t), t)}{dt} J + A(\vec{\phi}(\vec{OM}_0, t), t) \frac{dJ}{dt} dv_0 \quad (131)$$

La jacobien est construit à partir des des composantes de  $\mathbb{F}$ , matrice exprimée dans un cadre lagrangien. La dérivée par rapport au temps de  $J$  est donc une dérivée ronde:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} F_{jm} F_{kn} \frac{\partial F_{il}}{\partial t} \quad (132)$$

On cherche ensuite à reconnaître le jacobien dans la dérivée par rapport au temps:

$$\frac{\partial F_{il}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial x_l^0} = \frac{\partial}{\partial x_l^0} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial V_i}{\partial x_l^0} = \frac{\partial V_i}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x_l^0} = V_{i,p} F_{pl} \quad (133)$$

Soit:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} F_{jm} F_{kn} F_{pl} V_{i,p} \quad (134)$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{F}) &= \frac{1}{6}\epsilon_{pjk}\epsilon_{lmn}F_{jm}F_{kn}F_{pl} \\ \epsilon_{pjk}\det(\mathbb{F}) &= \epsilon_{lmn}F_{jm}F_{kn}F_{pl}\end{aligned}$$

Soit:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk}\det(\mathbb{F})V_{i,p} \quad (135)$$

On utilise enfin la propriété:  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$  pour écrire:

$$\frac{dJ}{dt} = \delta_{ip}\det(\mathbb{F})V_{i,p} = \det(\mathbb{F})V_{i,i} = \det(\mathbb{F})\operatorname{div}({}^E\vec{V}) = J.\operatorname{div}({}^E\vec{V}) \quad (136)$$

Si on reprend maintenant l'expression de la dérivée de l'intégrale de volume,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} A(\overrightarrow{OM}, t) dv = \iiint_{\Omega_0} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(A).{}^E\vec{V} + A.\operatorname{div}({}^E\vec{V}) \right) J dv_0 \quad (137)$$

Cette expression se simplifie en observant que:  $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(A).{}^E\vec{V} + A.\operatorname{div}({}^E\vec{V}) = \operatorname{div}(A.{}^E\vec{V})$

On constate alors que:

$$\iiint_{\Omega_0} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A.{}^E\vec{V}) \right) J dv_0 = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A.{}^E\vec{V}) \right) dv \quad (138)$$

L'intégrale de volume se décompose en 2 contributions puisque le théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence) indique,  $\vec{n}$  définissant la normale locale à la surface, que:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{u}) dv = \iint_{\partial\Omega} \vec{u}.\vec{n} ds \quad (139)$$

On a donc l'expression finale suivante:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} A(\overrightarrow{OM}, t) dv = \iiint_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} dv + \iint_{\partial\Omega} A.{}^E\vec{V}.\vec{n} ds \quad (140)$$

On remarque que les variations sont dues d'une part aux variations de  $A$  sur tout le volume et d'autre part à un effet de frontière correspondant au déplacement de matière à travers la surface  $\partial\Omega$  et n'impliquant que les valeurs de  $A$  sur  $\partial\Omega$ .

### Dérivation d'une intégrale de surface

L'intégrale de surface est utilisée en particulier lorsqu'il s'agit de calculer des circulations via la formule de Stokes. Sa dérivation par rapport au temps permet de traiter le cas des circulations dans un milieu mobile (expressions généralement non traitées en électromagnétisme).

On s'intéresse en particulier à la dérivation par rapport au temps de l'intégrale suivante:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega} \vec{A}(\vec{OM}, t) \cdot \vec{n} ds \quad (141)$$

$\vec{A}(\vec{OM}, t)$  est une quantité vectorielle,  $\vec{n}$  la normale sortante à la surface  $\partial\Omega$ .

A l'aide d'un changement de variable, on exprime l'intégrale de surface par rapport à la surface initiale  $\partial\Omega_0$  de normale sortante  $\vec{n}_0$ ,  $\vec{n}$  étant le résultat de la transformation de  $\vec{n}_0$  par  $\mathbb{F}$ .

$$\iint_{\partial\Omega(t)} \vec{A}(\vec{OM}, t) \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega_0} \vec{A}(\vec{\phi}(\vec{OM}_0, t), t) \cdot \mathbb{F} \cdot \vec{n}_0 J ds_0 \quad (142)$$

avec  $\vec{OM} = \vec{\phi}(\vec{OM}_0, t)$ .  $J$  est le jacobien du changement de variable.

La dérivée par rapport au temps devient donc:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega(t)} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega_0} \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \mathbb{F} \cdot \vec{n}_0 J + \vec{A} \cdot \frac{d\mathbb{F}}{dt} \cdot \vec{n}_0 \cdot J + \vec{A} \cdot \mathbb{F} \cdot \vec{n}_0 \frac{dJ}{dt} ds_0 \quad (143)$$

On montre facilement que le jacobien déterminé pour l'intégrale de volume reste valable.

$$\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega(t)} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega_0} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overline{\text{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{V} \right) \cdot \mathbb{F} \cdot \vec{n}_0 J + \vec{A} \cdot \frac{d\mathbb{F}}{dt} \cdot \vec{n}_0 \cdot J + \vec{A} \cdot \mathbb{F} \cdot \vec{n}_0 \text{div}(\vec{V}) J ds_0 \quad (144)$$

La dérivée par rapport au temps de  $\mathbb{F}$  a déjà été établie.

$$\frac{d\mathbb{F}}{dt} = \overline{\text{grad}}(\vec{V}) \mathbb{F}$$

On obtient finalement:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega(t)} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega_0} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overline{\text{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{V} + \vec{A} \cdot \overline{\text{grad}}(\vec{V}) + \vec{A} \cdot \text{div}(\vec{V}) \right) \cdot \mathbb{F} \vec{n}_0 J ds_0 \quad (145)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega(t)} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overline{\text{grad}}(\vec{A}) \cdot \vec{V} + \vec{A} \cdot \overline{\text{grad}}(\vec{V}) + \vec{A} \cdot \text{div}(\vec{V}) \right) \cdot \vec{n} ds \quad (146)$$

On montre également que cette relation est équivalente à:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\partial\Omega(t)} \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{div}(\vec{A}) \right) \cdot \vec{n} ds \quad (147)$$

## 4.2 Conservation des quantités mécaniques

### 4.2.1 Conservation de la masse

On regarde l'évolution temporelle de la masse  $m$  contenue dans le volume  $\Omega$  fixe (eulerien). Par définition:

$$m(t) = \iiint_{\Omega} \rho dv \quad (148)$$

la variation de masse en fonction du temps vaut donc.

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dv = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot {}^E \vec{V}) dv \quad (149)$$

On retrouve deux contributions, l'une liée à "compressibilité" du milieu (variation de masse volumique), l'autre liée au déplacement des particules c'est-à-dire au flux à travers la surface. L'hypothèse de conservation de la masse implique la nullité de  $\frac{dm(t)}{dt}$ , ce qui implique la nullité de l'intégrale mais également de l'intégrande, soit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot {}^E \vec{V}) = 0 \quad (150)$$

Elle peut se mettre sous la forme développée suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \cdot {}^E \vec{V} + \rho \cdot \text{div}({}^E \vec{V}) = 0 \quad (151)$$

ou encore

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \text{div}({}^E \vec{V}) = 0 \quad (152)$$

- Si on traite d'un fluide incompressible,  $\rho$  est constant, ce qui se traduit par:  $\text{div}({}^E\vec{V}) = 0$

- Dans le cas stationnaire (pas de transitoire), l'équation devient:  $\text{div}(\rho \cdot {}^E\vec{V}) = 0$

#### 4.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

On reprend le même principe que pour la conservation de la masse, et on étudie les variations temporelles de la quantité de mouvement contenue dans le volume  $\Omega$ . La quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{P}(t) = \iiint_{\Omega} \rho {}^E\vec{V} dv \quad (153)$$

C'est une quantité vectorielle. La relation générale 138 a été exprimée pour un scalaire. Elle est donc valable pour chaque composante du vecteur (cela s'applique aux tenseurs d'un ordre supérieur), donc pour le vecteur lui-même.

La variation de la quantité de mouvement en fonction du temps s'écrit:

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho {}^E\vec{V} dv = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho {}^E\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\rho {}^E\vec{V} \otimes {}^E\vec{V}) \right) dv \quad (154)$$

On développe:  $\overrightarrow{\text{div}}(\rho {}^E\vec{V} \otimes {}^E\vec{V}) = (\rho V_i V_j)_{,i} = \rho_{,i} V_i V_j + \rho V_{i,i} V_j + \rho V_i V_{j,i}$

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} {}^E\vec{V} + \rho \frac{\partial {}^E\vec{V}}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \cdot {}^E\vec{V}) \cdot {}^E\vec{V} + (\rho \text{div}({}^E\vec{V})) \cdot {}^E\vec{V} + \rho \overrightarrow{\text{grad}}({}^E\vec{V}) \cdot {}^E\vec{V} \right) dv \quad (155)$$

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \cdot {}^E\vec{V} + \rho \text{div}({}^E\vec{V}) \right) {}^E\vec{V} + \rho \left( \frac{\partial {}^E\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}({}^E\vec{V}) \cdot {}^E\vec{V} \right) dv \quad (156)$$

On reconnaît l'expression de la conservation de la masse et l'accélération eulérienne, soit:

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \iiint_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial {}^E\vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}({}^E\vec{V}) \cdot {}^E\vec{V} \right) dv = \iiint_{\Omega} \rho {}^E\vec{\Gamma} dv \quad (157)$$

Il faut ensuite faire le bilan des éléments qui peuvent faire varier la quantité de mouvement au sein de  $\Omega$  :

-les efforts volumiques :  $\vec{f}_v \Rightarrow \iiint_{\Omega} \vec{f}_v dv$

-les efforts exercés sur la surface  $\partial\Omega$  (contraintes):  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{T} ds$

La conservation de la quantité de mouvement s'exprime donc selon:

$$\iiint_{\Omega} \rho^E \vec{\Gamma} dv = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v dv + \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} ds \quad (158)$$

Soit, par application du théorème de Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_{\Omega} \rho^E \vec{\Gamma} dv = \iiint_{\Omega} \vec{f}_v dv + \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) dv \quad (159)$$

En regroupant et en constatant que cette équation est indépendante du volume:

$$\overrightarrow{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) + \vec{f}_v = \rho^E \vec{\Gamma} \quad (160)$$

★ Différentes explicitations de la relation de conservation de la quantité de mouvement (sans loi de comportement)

– fluides: hydrostatique:  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  soit  $\overrightarrow{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) = -(p\delta_{ij})_{,j} = -p_{,i} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)$

L'accélération est par ailleurs nulle. La seule force agissante est le poids, soit:  $\vec{f}_v = \rho\vec{g}$ . On obtient:  $\overrightarrow{\text{grad}}(p) = \rho\vec{g}$ .

– solides: statique-élastique (élasticité): accélération nulle:  $\overrightarrow{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) + \vec{f}_v = \vec{0}$