

3.1.3 Opérateur des transformations, tenseur des déformations

Le tenseur des déformations est adapté à la description des solides déformables. On peut raisonner en coordonnées d'Euler et se servir des résultats précédents simplifiés au cadre des petites déformations. L'autre alternative est d'utiliser les coordonnées de Lagrange.

Définition

Un solide se déforme dans une direction et à un point M donnés si et seulement si une ligne matérielle infiniment courte tracée dans cette direction a une longueur qui n'est pas constante au cours du temps.

(dessin !)

- soit $d\vec{l}_0$ un vecteur élémentaire pris à l'instant 0 au point M_0 .
- soit $d\vec{l}$ le vecteur élémentaire après déformation, pris à l'instant t au point M .

Il existe une application vectorielle $\underline{\phi}$ assurant la transformation du solide telle que $\overrightarrow{OM} = \underline{\phi}(\overrightarrow{OM}_0, t)$. En différentiant cette relation, on écrit:

$$d\overrightarrow{OM} = \overline{\overline{\text{grad}}\underline{\phi}} \cdot d\overrightarrow{OM}_0 \quad (63)$$

Le gradient de la transformation permet le passage de la configuration initiale à la configuration déformée. On définit ainsi pour tout vecteur initial $d\vec{l}_0$:

$$d\vec{l} = \mathbb{F} \cdot d\vec{l}_0 \quad (64)$$

avec $\mathbb{F} = \overline{\overline{\text{grad}}\underline{\phi}}$, tenseur gradient de transformation.

- A une situation non déformée et translatée correspondra un tenseur \mathbb{F} valant l'identité.
- A une situation non déformée et tournée correspondra un tenseur \mathbb{F} orthogonal (tenseur de rotation - matrice de passage).
- la "dimension" minimale de $d\vec{l}_0$ dépend de l'homogénéité de \mathbb{F} dans le volume.

Exemples

- traction uniaxiale homogène d'un solide cubique de côté l_0 : allongement Δl
tq $l = l_0 + \Delta l$:

-traction uniaxiale homogène d'un solide cubique de côté l_0 : avec contraction latérale $-\alpha\Delta l$ tq $l' = l_0 - \alpha\Delta l$

-cisaillement homogène d'angle γ d'un solide cubique de côté l_0

3.1.4 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

On souhaite raisonner non plus sur un passage vecteur => vecteur mais longueur => longueur.

$d\vec{l} = \mathbb{F}.d\vec{l}_0$ conduit à ${}^t d\vec{l} = {}^t d\vec{l}_0.{}^t \mathbb{F}$ puis à:

$$dl^2 = {}^t d\vec{l}.d\vec{l} = {}^t d\vec{l}_0.{}^t \mathbb{F}\mathbb{F}.d\vec{l}_0 \quad (65)$$

soit

$$dl^2 - dl_0^2 = {}^t d\vec{l}_0.({}^t \mathbb{F}\mathbb{F} - \mathbb{I}).d\vec{l}_0 \quad (66)$$

- $\mathbb{C} = {}^t \mathbb{F}\mathbb{F}$ est le tenseur des dilatations: $\sqrt{C_{11}}, \sqrt{C_{22}}, \sqrt{C_{33}} \Rightarrow$ 3 dilatations de l'espace

- On note \mathbb{E} le tenseur de Green-Lagrange défini par:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}.({}^t \mathbb{F}\mathbb{F} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}.(\mathbb{C} - \mathbb{I}) \quad (67)$$

\mathbb{E} permet donc de jauger l'écart quadratique des longueurs.

Propriétés de \mathbb{E} :

- \mathbb{E} est symétrique
- \mathbb{E} vaut $\mathbf{0}$ si le solide est non déformé => \mathbb{F} orthogonal (matrice de passage=rotation)
- les composantes de \mathbb{E} sont sans unité => la déformation est une quantité sans unité

NB: l'écart quadratique des longueurs peut se jauger d'une manière différente: Ainsi, on peut adopter une vision eulerienne de la déformation:

$$dl_0^2 = {}^t d\vec{l}_0.d\vec{l}_0 = {}^t d\vec{l}.({}^t \mathbb{F}^{-1}\mathbb{F}^{-1}).d\vec{l} = {}^t d\vec{l}.(\mathbb{F}^t \mathbb{F})^{-1}.d\vec{l} \quad (68)$$

soit

$$dl^2 - dl_0^2 = {}^t d\vec{l}.(\mathbb{I} - (\mathbb{F}^t \mathbb{F})^{-1}).d\vec{l} \quad (69)$$

- $\mathbb{B} = \mathbb{F}^t \mathbb{F}$ est le tenseur des dilatations "gauche".

- On note \mathbb{A} le tenseur d'Euler-Almansi défini par:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{I} - (\mathbb{F}^t \mathbb{F})^{-1}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{I} - \mathbb{B}^{-1}) \quad (70)$$

\mathbb{A} permet également de jauger l'écart quadratique des longueurs, mais dans le cadre d'un référentiel eulerien.

Tenseurs de Green-Lagrange et d'Euler-Almansi ont la même signification dans le cadre des petites perturbations.

Exemples

-traction uniaxiale homogène d'un solide cubique de côté l_0 : allongement Δl

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1 \right)$$

$$E_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{l_0^2 + 2l_0 \Delta l + \Delta l^2}{l_0^2} - 1 \right) = \frac{\Delta l}{l_0} + \frac{\Delta l^2}{2l_0^2}$$

-linéarisation si $\Delta l \ll l_0 \Rightarrow$ on remarque que composante $E_{11} \approx \frac{\Delta l}{l_0}$
 \Rightarrow mesure "classique" de la déformation en mécanique (RDM, cours L1,L2,Prépa)

Dans le cadre Eulerien, la définition de la déformation axiale est légèrement différente:

on montre que:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta l}{l} & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{\partial l}{l}$$

la déformation cumulée sur un parcours de déformation où l'élément de volume passe de la longueur l_0 à l vaut:

$$A_{11}^{tot} = \int_{l_0}^l \frac{\partial x}{x} = \ln(l) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right)$$

On observe que $A_{11}^{tot} = E_{11}$ quand $\frac{\Delta l}{l_0} \ll 1$.

Rmq: ordres de grandeurs

- élasticité des métaux: $\frac{\Delta l}{l_0} \approx 10^{-4} - 10^{-2}$
- élasticité des bétons: $\frac{\Delta l}{l_0} \approx 10^{-3}$
- plasticité des métaux: $\frac{\Delta l}{l_0} \approx 10^{-2} - 10^{-1} \Rightarrow$ on sort du cadre des "petites déformations"
- mise en forme des métaux: $\frac{\Delta l}{l_0} \gg 10^{-1} \Rightarrow$ "grandes déformations": emploi de la description Eulerienne.

- milieux pâteux, fluides ...etc... \Rightarrow grandes déformations \Rightarrow taux de déformations (Cf. loi de comportement)

3.1.5 Hypothèse des petites perturbations - tenseur des déformations linéarisé

\Rightarrow utile pour les solides élastiques + description lagrangienne naturellement

On a vu qu'il existait une application vectorielle $\underline{\phi}$ assurant la transformation du solide telle que $\overrightarrow{OM} = \underline{\phi}(\overrightarrow{OM}_0, t)$. On note $\vec{u}(M_0, t)$ le déplacement du point M_0 (notion Lagrangienne), ici de M_0 à M . $\vec{u}(M_0, t)$ vérifie:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + \vec{u}(M_0, t) \tag{71}$$

En différentiant cette relation, on écrit:

$$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}_0 + \overline{\text{grad}}\vec{u}(M_0, t).d\overrightarrow{OM}_0 = (\mathbb{I} + \overline{\text{grad}}\vec{u}).d\overrightarrow{OM}_0 \tag{72}$$

ce qui peut s'écrire:

$$d\vec{l} = (\mathbb{I} + \overline{\text{grad}}\vec{u}).d\vec{l}_0 \tag{73}$$

Or, on a introduit \mathbb{F} tel que: $d\vec{l} = \mathbb{F}.d\vec{l}_0$. On constate alors que \mathbb{F} peut s'écrire:

$$\mathbb{F} = \mathbb{I} + \overline{\text{grad}}\vec{u} = \mathbb{I} + \overline{\nabla}\vec{u} \tag{74}$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit finalement:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}.({}^t\mathbb{F}\mathbb{F} - \mathbb{I}) = \frac{1}{2}.({}^t(\mathbb{I} + \overline{\nabla}\vec{u})(\mathbb{I} + \overline{\nabla}\vec{u}) - \mathbb{I}) \tag{75}$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}.((\mathbb{I} + {}^t\overline{\nabla}\vec{u})(\mathbb{I} + \overline{\nabla}\vec{u}) - \mathbb{I}) \tag{76}$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\nabla} \vec{u} + {}^t \overline{\nabla} \vec{u} + {}^t \overline{\nabla} \vec{u} \cdot \overline{\nabla} \vec{u}) \quad (77)$$

Si les "perturbations" (déformation mais aussi rotations) sont petites, le gradient du déplacement est petit et le terme quadratique peut être négligé. C'est ce qu'on appellera l'hypothèse des petites perturbations (HPP) fréquemment employé en élasticité des solides.

On définit alors un tenseur des déformations linéarisé:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\nabla} \vec{u} + {}^t \overline{\nabla} \vec{u}) \quad (78)$$

en indiciel (cartésien):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (79)$$

C'est un tenseur correspondant à la partie symétrique du gradient du déplacement. Son calcul suppose de connaître le champ de déplacement et pas seulement le déplacement de qqes points.

ϵ est symétrique donc diagonalisable \Rightarrow déformations principales (valeurs propres) et directions principales (vecteurs propres) - dilatations/contraction suivant les 3 axes sans distorsion.

Exemples

-traction uniaxiale homogène d'un solide cubique de côté l_0 : allongement Δl

-recherche de $\vec{u}(x_j)$ admissible:

$$\vec{u}(x_j) = u_i(x_j) \cdot \vec{e}_i \quad (80)$$

\Rightarrow 3 fonctions dépendant de 3 paramètres.

\Rightarrow simplifications par observation des invariances et nullité de deux projections.

\Rightarrow on aboutit à: $\vec{u}(x_1) = \frac{\Delta l \cdot x_1}{l_0} \cdot \vec{e}_1$

soi $\epsilon_{11} = \frac{1}{2}(u_{1,1} + u_{1,1}) + \text{autres termes nuls}$

$\Rightarrow \epsilon_{11} = (u_{1,1}) = \frac{\Delta l}{l_0}$ CQFD