

Remarque à propos de l'utilisation de l'opérateur de Levi-Civita
 On observe les propriétés remarquables suivantes:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6 \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijq} &= 2\delta_{kq} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ipq} &= \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}\end{aligned}$$

2 CHAPITRE 2 - GRANDEURS PHYSIQUES ETU- DIEES - CINEMATIQUE DES MILIEUX CONTI- NUS

Les grandeurs utilisées dans le cadre du cours sont les grandeurs mécaniques, électromagnétiques et thermiques. Nous resterons dans un cadre non relativiste (mécanique classique).

Introduction des principales grandeurs. Aspects élémentaires pour l'électromagnétisme (approfondissement dans les cours optionnels), puisqu'on se contentera d'observer leur influence sur l'équilibre mécanique.

La mécanique, l'électromagnétisme ou la thermique utilisent la notion de champ:
 => notion de champ: définition de la valeur d'une grandeur en un point.
 => notion de champ continu: modèle d'une réalité plus complexe (physique).

Description continue de la matière: échelle microscopique non pertinente

On préfère définir un ensemble d'atomes (molécules) à l'intérieur d'un volume de dimension caractéristique Ω_0 , lui-même à l'intérieur du domaine d'étude Ω .

=> suffisamment grand pour stabilité des moyennes

=> suffisamment petit pour observer des variations (résolution spatiale)

Exemple: vitesse d'une particule => vitesse barycentrique d'un ensemble de particules du volume élémentaire:

$$\vec{V}(M) = \frac{1}{m} \int_{V_0} \rho \vec{V}(M) dv \quad (32)$$

2.1 Principales grandeurs étudiées

2.1.1 Thermique

La variable mesurable de la thermique est la température.

Il s'agit d'un scalaire noté T : dépend du temps et de l'espace: $\Rightarrow T(x,y,z,t)$
La température s'exprime en Kelvin [K].

2.1.2 Electromagnétisme

La première grandeur utilisée est la charge, notée ρ_e . Cette charge peut être positive ou négative. Rapportée à un volume, elle s'exprime en Coulomb par mètre cube [C.m^{-3}]. La charge de l'électron vaut par exemple $q_0 = -1,6.10^{-19}\text{C}$. Toute charge vaut un entier relatif multiplié par la charge de l'électron rapportée au volume considéré: $\int_V \rho_e dv = K.q_0\text{C}$. On parlera également de charge surfacique, en particulier lorsqu'il s'agit de traiter les conditions limites des autres grandeurs électromagnétiques: $\int_S \rho_e^s ds = K.q_0\text{C}.\rho_e^s$ s'exprime en Coulomb par mètre carré [C.m^{-2}].

Dans un conducteur, les charges sont libres. Le "courant" dans le conducteur est dû à un mouvement ordonné des charges. La densité de courant de conduction est noté \vec{J} . Il s'exprime en ampère par mètre carré [A.m^{-2}], l'ampère correspondant à des Coulomb par seconde: [$1\text{A}=1\text{C.s}^{-1}$] et désigne l'intensité électrique. On parlera également de densité de courant surfacique \vec{J}_s . Il s'exprime en ampère par mètre [A.m^{-1}]

Le courant de conduction apparaît lorsque que le milieu est soumis à un champ électrique. Le champ électrique est noté \vec{E} . Il s'exprime en volt par mètre [V.m^{-1}].

Le champ électrique est à la source d'une induction électrique (ou densité de flux électrique) noté \vec{D} . L'induction électrique s'exprime en Coulomb-mètre [C.m]. Elle est fonction du milieu et en particulier fonction de l'existence de charges qui "polarisent" le matériau. On parlera de polarisation du matériau.

Le courant de conduction est également à la source du champ magnétique. Le champ magnétique est noté \vec{H} . Il s'exprime en ampère par mètre [A.m^{-1}].

Le champ magnétique est à la source d'une induction magnétique (ou densité de flux magnétique) noté \vec{B} . L'induction magnétique s'exprime en volt-seconde par mètre carré [$V.s.m^{-2}$]. Cette unité un peu lourde correspond à du Tesla [T], unité plus fréquemment employée. L'induction magnétique est fonction du milieu et en particulier fonction de l'existence d'un couplage magnétique dans la matière (ferromagnétisme, ferrimagnétisme) qui "polarise" le matériau. On parlera d'aimantation du matériau.

Toutes ces quantités dépendent du temps et de l'espace. Nous reviendrons sur les relations entre ces grandeurs dans les chapitres suivants.

2.1.3 Mécanique

La première grandeur est la masse. Rapportée au volume, on utilise plus volontiers la masse volumique notée ρ dont l'unité est le kilogramme par mètre cube [$kg.m^{-3}$].

Viennent ensuite les grandeurs cinématiques: position \overrightarrow{OM} , vitesse \vec{V} et accélération $\vec{\gamma}$, obtenues par dérivations successives. Elles s'expriment respectivement en mètre [m], mètre par seconde [$m.s^{-1}$] et mètre par seconde au carré [$m.s^{-2}$].

Viennent enfin les grandeurs dynamiques que sont les forces, ponctuelles, linéaires, surfaciques ou volumiques: \vec{F} , \vec{f}_l , \vec{f}_s et \vec{f}_v , s'exprimant en Newton [N], Newton par mètre [$N.m^{-1}$], Newton par mètre carré [$N.m^{-2}$] et Newton par mètre cube [$N.m^{-3}$].

D'autres notions dérivées de ces quantités comme les contraintes, les déformations et taux de déformation seront introduites dans ce cours.

Toutes ces grandeurs dépendent du temps et de l'espace.

A la frontière entre mécanique et électromagnétisme, on citera en particulier les forces de Lorentz, sources originelle des couplages existants entre comportement mécanique et électromagnétique. Ce sont des forces volumiques qui s'expriment pour une milieu immobile selon:

$$\vec{f}_v = \rho_e \vec{E} \quad (33)$$

On constate une équivalence entre le Newton et Volt-Coulomb par mètre [$1N=1V.C.m^{-1}$].

La démonstration de cette expression utilise la mécanique quantique.

2.2 Cinématique des milieux continus

2.2.1 Description Lagrangienne du mouvement

Notre objectif: décrire le mouvement d'un milieu Ω dans R . Ce milieu peut être solide ou fluide.

A t_0 , le milieu est dans une configuration $\Omega(t_0)$ ou Ω_0 . Il évolue pour se transformer à t en configuration $\Omega(t)$ ou Ω .

(A t fixé: l'ensemble des point $M(t)$ définit le milieu $\Omega(t)$.)

L'application ϕ Lagrangienne qui permet de passer de: $\Omega_0 \rightarrow \Omega$ définit le mouvement Lagrangien.

M_0 fixé: l'ensemble des point $M(t)$ définit la **trajectoire** de la particule M initialement en $M(t_0)$ ou M_0

- La description Lagrangienne du mouvement privilégie donc une configuration à un instant donné (généralement l'instant initial) pour écrire les configurations suivantes (instant t). On notera ainsi indifféremment:

$$\overrightarrow{OM} = \underline{\phi}(t, \overrightarrow{OM_0}) \quad (34)$$

$$\overrightarrow{M} = \underline{\phi}(t, \overrightarrow{M_0}) \quad (35)$$

ou plus simplement:

$$M = \phi(t, M_0) \quad (36)$$

et en terme de coordonnées:

$$M(x_i) = \phi_i(t, x_j^0) \quad (37)$$

Les conditions usuelles sur l'application vectorielle ϕ sont:

- ϕ doit admettre un inverse (fonction bijective): $M_0 \rightarrow M \quad M \rightarrow M_0$
- ϕ doit être deux fois dérivables par rapport au temps: vitesse et accélération
- ϕ doit être continument dérivable par rapport à x_i : gradient, laplacien

- La position lagrangienne s'exprime donc de la forme: $\overrightarrow{OM} = f_i(t, x_j^0) \cdot \vec{e}_i$
- On en déduit les expressions de la vitesse et de l'accélération lagrangiennes.

$${}^L\vec{V}(t, M_0) = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t} = \frac{\partial \phi(t, \overrightarrow{OM}_0)}{\partial t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (38)$$

$${}^L\vec{\Gamma}(t, M_0) = \frac{\partial {}^L\vec{V}(t, M_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi(t, \overrightarrow{OM}_0)}{\partial t^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad (39)$$

- Application de cette description: milieu solide où le mouvement des particules est généralement de petite amplitude (exemple traction)
- On associe ainsi à la configuration initiale la configuration "non déformée"

2.2.2 Description Eulerienne du mouvement

On ne privilégie aucune configuration a priori. Le mouvement ne correspond pas à celui d'une particule mais à l'ensemble de particules qui passeront par un point de l'espace: autrement dit: on fixe un point de l'espace et on "observe" le mouvement des particules (vitesse, accélération) passant par ce point. NB: changement de variable.

- Application de cette description: milieu fluide où le mouvement des particules est généralement de grande amplitude (exemple d'une conduite)

La position n'a qu'un sens limité dans la description Eulerienne: $\overrightarrow{OM} = x_i \cdot \vec{e}_i$
 - position fixée

On note: ${}^E\vec{V}(t, M)$ la vitesse eulerienne dépendant de la position M observée à l'instant t . Il s'agit d'un "champ" de vitesse, à la différence de la vitesse lagrangienne qui suit une particule en particulier.

On remarque que:

$${}^E\vec{V}(t, M) = \vec{V}(t, M) = \vec{V}(t, M = \phi(t, M_0)) = \vec{V}(t, M_0) = {}^L\vec{V}(t, M_0) \quad (40)$$

Il s'agit juste d'un changement de variables.

On remarque également:

$${}^E\vec{V}(t, M) \rightarrow \dot{x}_i = V_i(t, x_j) = f_i(t, x_j) \quad (41)$$

=> système d'équations différentielles

+ condition initiale $x_i(0) = x_i^0$ => permet de retrouver l'expression lagrangienne du mouvement (trajectoire etc...)

ATTENTION A L'ACCELERATION !! => Notion de dérivée particulière.

- "Lignes de courants": fonctions de l'espace $f_j(x_i) = 0$ décrivant le mouvement dans le cadre eulérien (pendant des trajectoires en lagrangien). Les lignes de courant sont des courbes de l'espace dont la vitesse eulérienne est une tangente.

- on considère un déplacement eulérien élémentaire: $d\vec{M} = dx_i \cdot \vec{e}_i$. Ce déplacement suit une ligne de courant quand il est colinéaire à la vitesse eulérienne ${}^E\vec{V}(t, M) = \dot{x}_i \cdot \vec{e}_i$, soit

$$d\vec{M} \wedge {}^E\vec{V}(t, M) = \vec{0} \quad (42)$$

ce qui donne trois équations scalaires aux dérivées partielles=> par intégration: équations des lignes de courant à une constante près.

2.3 Dérivée particulière

soit une fonction eulérienne vectorielle ou non ${}^E f(t, M) = {}^E f(t, x_i)$. Cette fonction est telle que les paramètres x_i dépendent également du temps. La dérivée de la fonction par rapport au temps s'écrit donc (dérivée partielle ou particulière):

$$\frac{D^E f(t, x_i)}{Dt} = \frac{\partial^E f(t, x_i)}{\partial t} + \frac{\partial^E f(t, M)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (43)$$

On reconnaît: $\frac{\partial^E f(t, M)}{\partial x_i} = \overrightarrow{\text{grad}}^E f(t, M)$ et $\frac{\partial x_i}{\partial t} = {}^E\vec{V}(t, M)$, soit:

$$\frac{D^E f(t, x_i)}{Dt} = \frac{\partial^E f(t, x_i)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}^E f(t, M) \cdot {}^E\vec{V}(t, M). \quad (44)$$

Appliqué à une quantité vectorielle \vec{A} , on obtient:

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \vec{A} \cdot {}^E\vec{V}. \quad (45)$$

2.3.1 Application aux champs cinématiques

Application au calcul de la vitesse eulerienne:

$${}^E\vec{V} = \frac{D\vec{OM}}{Dt} = \frac{\partial\vec{OM}}{\partial t} + \overline{\overline{grad\vec{OM}}}.{}^E\vec{V}. \quad (46)$$

avec $\vec{OM} = x_i.\vec{e}_i$, ce qui signifie que $\frac{\partial\vec{OM}}{\partial t} = \vec{0}$.
et $\overline{\overline{grad\vec{OM}}} = \mathbb{I}$.

=> aucun intérêt

Application au calcul de l'accélération eulerienne:

$${}^E\vec{\Gamma} = \frac{D{}^E\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial{}^E\vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{grad{}^E\vec{V}}}.{}^E\vec{V}. \quad (47)$$

$\frac{\partial{}^E\vec{V}}{\partial t}$ traduit les phénomènes transitoires (mvt instationnaire, turbulences)

$\overline{\overline{grad{}^E\vec{V}}}.{}^E\vec{V}$ traduit la contribution spatiale sur l'accélération (changement de section, coudes)

en indiciel:

$${}^E\Gamma_i = \frac{\partial{}^E V_i}{\partial t} + {}^E V_{i,j}.{}^E V_j. \quad (48)$$

=> intérêt majeur en mécanique des fluides !!

=> exemple du débitmètre à diaphragme.

NB: On retrouve l'accélération lagrangienne par simple changement de variable: $x_i = \phi(x_j^0, t)$.

2.3.2 Application aux quantités électromagnétiques

Ces équations permettent de traiter le problème des milieux électromagnétiques en mouvement.

=> on parlera d'électrodynamique des milieux continus.

Considérons un milieu électromagnétique en mouvement, la dérivée particulière du champ électrique s'exprime selon:

$$\frac{D\vec{E}}{Dt} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \overline{\text{grad}\vec{E}} \cdot \vec{V}. \quad (49)$$

La variation temporelle du champ électrique a deux sources: une variation locale, et une variation spatiale, dépendant de la vitesse de l'objet.

Tout comme les quantités mécaniques, les quantités électromagnétiques sont modifiées quand la vitesse des objets n'est plus négligeable devant la vitesse de la lumière. Nous considérons dans ce cours des vitesses à l'échelle "humaine". Ces modifications ne sont pas prises en compte. On se reportera aux ouvrages de références si nécessaire.

3 CHAPITRE 3 - DEFORMATION, CONTRAINTE

L'objet de ce chapitre est de définir les grandeurs représentatives de la géométrie ou de la cinématique du milieu et des efforts présents au sein de ce milieu.

3.1 Déformations et taux de déformation

3.1.1 Champ de vitesses dans un solide

On va repartir d'une cinématique bien connue: le solide indéformable. La vitesse de deux points M et N du solide S s'exprime dans un référentiel Galiléen \mathbf{R} :

$$\vec{V}(M \in S)/\mathbf{R} = \vec{V}(N \in S)/\mathbf{R} + \vec{\omega}(S/\mathbf{R}) \wedge \overline{NM} \quad (50)$$

où $\vec{\omega}(S/\mathbf{R})$ représente le vecteur rotation du solide dans l'espace.

Si M et N sont considérés suffisamment proche, on confond le vecteur \overline{MN} à la quantité élémentaire $d\vec{M}$. En décomposant $\overline{MN} = \overline{MO} + \overline{ON}$, et en dérivant par rapport au temps cette relation, on obtient:

$$\frac{d\overline{MN}}{dt} = -\vec{V}(M) + \vec{V}(N) \quad (51)$$

correspondant à la quantité $d\vec{V}(M)$. Soit:

$$d\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge d\vec{M} \quad (52)$$

Cette relation n'est valable que pour un solide indéformable

3.1.2 Gradient des vitesses, taux de déformation

Par ailleurs, on a montré que, la vitesse étant exprimée en eulerien :

$$d\vec{V}(M) = \overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M)).d\vec{M} \quad (53)$$

On décompose ensuite le gradient en une partie symétrique et une partie anti-symétrique.

$$\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M)) = \frac{1}{2}(\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M)) + {}^t\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M))) + \frac{1}{2}(\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M)) - {}^t\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M))) \quad (54)$$

On note respectivement : $\mathbb{D}(M)$ la partie symétrique - ou tenseur des taux de déformation, et $\Omega(M)$ la partie antisymétrique - ou tenseur des taux de rotation, associé au vecteur rotation.

Relation avec le mouvement de corps solide

Partons de la définition de la vitesse élémentaire lors du mouvement de corps solide:

$$d\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge d\vec{M} = (\epsilon_{ijk}\omega_j dM_k) \cdot \vec{e}_i = (-\epsilon_{ijk}\omega_k dM_j) \cdot \vec{e}_i = K_{ij} dM_j \cdot \vec{e}_i = \mathbb{K} \cdot d\vec{M} \quad (55)$$

\mathbb{K} est un tenseur antisymétrique défini par: $K_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega_k$.

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Comme on a défini le gradient comme somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique, K_{ij} correspond nécessairement à la partie antisymétrique du gradient. Soit:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M)) - {}^t\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M))) = \Omega \quad (57)$$

Par ailleurs, on remarque que le vecteur-rotation est tel que:

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk} \quad (58)$$

Démonstration:

$$\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega_k \Rightarrow \epsilon_{ijl}\Omega_{ij} = -\epsilon_{ijl}\epsilon_{ijk}\omega_k$$

$$\text{avec: } \epsilon_{ijl}\epsilon_{ijk} = 2\delta_{lk}$$

$$\text{soit: } \epsilon_{ijl}\Omega_{ij} = -2\delta_{lk}\omega_k \text{ et } -2\omega_l = \epsilon_{ijl}\Omega_{ij}$$

$$\text{par permutation: } \omega_l = -\frac{1}{2}\epsilon_{lij}\Omega_{ij}$$

si on utilise:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M)) - {}^t\overline{\overline{grad}}(\vec{V}(M))) = \frac{1}{2}(V_{i,j} - V_{j,i}) \quad (59)$$

on obtient:

$$\omega_i = -\frac{1}{4}\epsilon_{ijk}(V_{j,k} - V_{k,j}) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}V_{k,j} \quad (60)$$

On reconnaît dans le dernier terme l'expression du rotationnel de $\vec{V}(M)$, soit:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{V}(M) \quad (61)$$

Le calcul du rotationnel d'un champ de vitesse permet de détecter une rotation du milieu et de calculer le cas échéant le vecteur-rotation (ou tourbillon en fluide).
exemple du mouvement circulaire uniforme: calcul du vecteur-rotation

Dans un milieu quelconque, déformable ou non, le vecteur-vitesse élémentaire se décompose selon:

$$d\vec{V}(M) = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{V}(M) \wedge d\vec{M} + \mathbb{D}.d\vec{M} \quad (62)$$

si le solide est non déformable (distances conservées), cela signifie que $\mathbb{D} = \mathbf{0}$. Dans le cas contraire \mathbb{D} existe et mesure le taux de déformation du solide (aussi appelé tenseur des vitesses de déformation).

NB1: On remarque que $tr(\mathbb{D}) = tr(\overline{\overline{grad}(\vec{V}(M))}) = div(\vec{V}(M)). \Rightarrow$ Cf. conservation de la masse.

NB2: Le tenseur des vitesses de déformation est particulièrement utile en mécanique des fluides. \Rightarrow relation $\mathbb{D} \Rightarrow$ contrainte en milieu visqueux