

Table des matières

1	CHAPITRE 1 - INTRODUCTION - PRINCIPE DES MILIEUX CONTINUS - NOTIONS TENSORIELLES ET OPERATEURS	6
1.1	Principes des milieux continus	6
1.1.1	<u>Représentation continue de la matière</u>	6
1.1.2	<u>Les équations de conservation</u>	7
1.1.3	<u>Les lois de comportement</u>	8
1.1.4	<u>Les conditions aux limites</u>	9
1.2	Rappels et notions tensorielles élémentaires	9
1.2.1	<u>Repérage dans l'espace et le temps</u>	9
1.2.2	<u>Notions tensorielles élémentaires</u>	10
2	CHAPITRE 2 - GRANDEURS PHYSIQUES ETUDIEES - CINEMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS	15
2.1	Principales grandeurs étudiées	15
2.1.1	<u>Thermique</u>	15
2.1.2	<u>Electromagnétisme</u>	16
2.1.3	<u>Mécanique</u>	17
2.2	Cinématique des milieux continus	17
2.2.1	<u>Description Lagrangienne du mouvement</u>	17
2.2.2	<u>Description Eulerienne du mouvement</u>	20
2.3	Dérivée particulière	21
2.3.1	<u>Application aux champs cinématiques</u>	22
2.3.2	<u>Application aux quantités électromagnétiques</u>	22
3	CHAPITRE 3 - DEFORMATION, CONTRAINTE	24
3.1	Déformations et taux de déformation	24
3.1.1	<u>Champ de vitesses dans un solide</u>	24
3.1.2	<u>Gradient des vitesses, taux de déformation</u>	25
3.1.3	<u>Opérateur des transformations, tenseur des déformations</u>	27
3.1.4	<u>Tenseur des déformations de Green-Lagrange</u>	29
3.1.5	<u>Hypothèse des petites perturbations - tenseur des déformations linéarisé</u>	31

3.1.6	<u>Equations de compatibilité des déformations</u>	34
3.2	Contraintes	36
3.2.1	<u>Rappels sur la schématisation des efforts extérieurs</u>	36
3.2.2	<u>Schématisation des efforts intérieurs</u>	38
4	CHAPITRE 4 - LOIS DE CONSERVATION	45
4.1	Dérivation par rapport au temps des intégrales spatiales	45
4.2	Conservation des quantités mécaniques	49
4.2.1	Conservation de la masse	49
4.2.2	Conservation de la quantité de mouvement	50
4.3	Conservation des quantités électromagnétiques	52
4.3.1	Conservation de la charge	52
4.3.2	Equations de Maxwell généralisées	52
4.3.3	Forces de Lorentz et de Laplace	53
4.4	Conservation de l'énergie	53
4.5	Second principe	58
5	CHAPITRE 5 - LOIS DE COMPORTEMENT - EQUATIONS DE MILIEU	60
5.1	Lois de comportement élastique	61
5.1.1	<u>Cadre général et hypothèses</u>	61
5.1.2	<u>Loi de comportement élastique isotherme</u>	63
5.1.3	<u>Loi de comportement élastique isotrope isotherme</u>	66
5.1.4	<u>Loi de Hooke</u>	68
5.2	Loi de comportement d'un fluide Newtonien	72
5.3	Lois de comportement anisotherme et milieux électromagnétiques	74
5.3.1	<u>Solide élastique anisotherme</u>	74
5.3.2	<u>Solide élastique électromagnétique</u>	77
6	CHAPITRE 6 - APPLICATION 1 - MECANIQUE DES SOLIDES ELASTIQUES	77
6.1	Principe de Saint-Venant, états de contrainte classiques	77
6.1.1	<u>Principe de Saint-Venant</u>	77
6.1.2	<u>Exemples d'états de contrainte classiques rencontrés dans les solides</u>	78
6.2	Dimensionnement - Critères de plasticité	80
6.2.1	<u>Contrainte "normale" et contrainte "tangentielle"</u>	80
6.2.2	<u>Cercle de Mohr des contraintes</u>	80
6.2.3	<u>Critères de limite élastique</u>	82

6.3	<u>Résolution des problèmes d'élasticité statique</u>	84
6.3.1	<u>Résolution standard</u>	84
6.3.2	<u>Résolution en déplacement: équations de Navier</u>	85
6.3.3	<u>Résolution en contrainte: équations de Beltrami</u>	87
6.3.4	<u>Exemple de résolution - équation de Navier</u>	89
7	CHAPITRE 7 - APPLICATION 2 - MECANIQUE LINEAIRE DES FLUIDES, MILIEUX VISQUEUX	90
7.1	<u>Description des fluides - Comportement</u>	90
7.2	<u>Dynamique des fluides</u>	91
7.2.1	<u>Equation de Navier-Stockes</u>	91
7.2.2	<u>Écoulements visqueux incompressibles stationnaires</u>	94
7.2.3	<u>Écoulements non visqueux incompressibles stationnaires</u>	97
7.3	<u>Cas particulier ultime: statique des fluides</u>	98
7.3.1	<u>Fluides incompressibles</u>	98
7.3.2	<u>Fluides compressibles</u>	99
7.4	<u>Efforts exercés par les fluides sur les solides</u>	100
7.4.1	<u>Statique des fluides</u>	100
7.4.2	<u>Dynamique des fluides</u>	101
8	CHAPITRE 8 - APPLICATION 3 - ACOUSTIQUE	104
8.1	Lois de conservation appliquée aux milieux compressibles – équation d'onde	104
8.2	Célérité, analyse fréquentielle, puissance sonore	104
8.3	Sources ponctuelles (sphère pulsante), sources planes	104

FONCTIONNEMENT DU MODULE

- Module d'introduction aux champs physiques utilisés en mécanique, thermique et électromagnétisme. Applications aux résolutions de pb de mécanique des solides et des fluides.

- Cours: Olivier HUBERT (PU ENS-Cachan), Laurent CHAMPANEY (PU ENS-Cachan) et Rachid BENNACER (PU ENS-Cachan)
 mail: xxx@ens-cachan.fr

- photocopié en ligne semaine par semaine: <http://elearn.ens-cachan.fr>

- TDs avec certaines orientations privilégiées: travail personnel encouragé => n'hésitez pas à interroger vos assistants à ce sujet

Enseignants: Farid BENBOUDJEMA (MCF ENS-Cachan), Luc LAURENT (Doctorant, Mission enseignement), Jérémy MARCHAIS (Doctorant, Mission enseignement),

Salle: Cf. emploi du temps

- Contenu des TPs: plateau TP du DGM

=> identification de coefficients élastiques de solides

=> introduction à l'anisotropie

=> états multiaxiaux des contraintes

=> analogies électriques

★ Enseignants: Olivier DORIVAL (PRAG ENS-cachan), Augustin PARRET-FREAUD (ATER DGC)

- Examen: 20% ex.1 (2 novembre 8h30-10h30 - 2h00); 50% ex.2 (janvier) 3h00; 30%-TPs; rattrapage: 70% 3h00.

- COURS - SAPH111 : 13 cours (26h00).

- Introduction aux milieux continus, notions tensorielles, cinématique (champ de vitesses), électromagnétisme (champs d'induction, champs électriques)
- Déformation, contrainte
- lois de conservation mécanique, thermique, électromagnétique
- lois de comportement: équations de milieu -Application 1: résolution d'un pb élastique, dimensionnement des structures
- Application 2: mécanique des fluides incompressibles, introduction aux milieux compressibles - acoustique

★ lien avec les autres modules:

- bases indispensable pour "matériaux" (SAPH-113)
- bases recommandées pour "électromagnétisme" (SAPH-121)
- introduction à des notions généralisées au 2eme semestre (SAPH-243, SAPH-244)

★ bibliographie:

- G. DUVAUT - Mécanique des Milieux Continus - Dunod -1989.
- H. DUMONTET & al. - Exercices corrigés de Mécanique des Milieux Continus - Dunod -1989.
- P. GERMAIN, P. MULLER - Introduction à la Mécanique des Milieux Continus - Masson -1994.
- J. COIRIER - Mécanique des Milieux Continus : cours et exercices corrigés, Dunod, 2001.
- L. CHEVALIER - Mécanique des systèmes et des milieux déformables, ellipses, 2004.
- P. CHALLANDE - Notes de cours de mécanique des milieux continus, UPMC.
- R. RABESAOTRA- Application de la dérivée partielle à la magnétodynamique des fluides électriquement chargés .
- J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE, R. DESMORAT- Mécanique des matériaux et des solides, Dunod, 2010.
- A. ERINGEN & G. MAUGIN- Electrodynamique des milieux continus.
- M. KANT- Introduction à l'électricité phénoménologique, Notes de cours .

1 CHAPITRE 1 - INTRODUCTION - PRINCIPE DES MILIEUX CONTINUS - NOTIONS TENSORIELLES ET OPERATEURS

- milieu continu: modèle descriptif de la matière - échelle "macroscopique" continue (ignore structure atomique)

Objectif 1: fournir une description et des outils de modélisation du comportement des objets déformables (solides, fluides, gaz)

Objectif 2: dimensionnement: résistance, dimensions..etc...

- Cadre de la mécanique classique. MAIS différent mécanique générale (solide rigide)

- Physiques concernées: Mécanique (mouvement et forces), électromagnétisme (champ et forces), thermique (dilatation)

- Les champs électromagnétiques et thermiques seront vus avant tout comme des chargements d'un problème mécanique - on ne s'intéressera pas à la résolution de problèmes purement électromagnétiques ou thermiques. L'influence du mouvement sur les équations de l'électromagnétisme sera néanmoins évoquée.

- Milieux classés en deux catégories liées à des comportements mécaniques et cinématiques particulières : solides et fluides (liquides et gaz).

1.1 Principes des milieux continus

=> Représentation MMC.

=> Conservation

=> Comportement

=> Conditions limites

1.1.1 Représentation continue de la matière

Objectif: cinématique du milieu

Solide rigide: 6 degrés de libertés associés: 3 translations + 3 rotations dans l'espace réel.

Solide déformable: la connaissance du mouvement d'un ou de plusieurs points ne permet pas forcément de déterminer le mouvement des autres

=> nombre infini de ddl.

=> encore plus évident pour les milieux fluides (particules indépendantes).

introduction de la notion de "champ"

=> grandeurs cinématiques: position (évidemment), déplacement, vitesse, induction, "champs" électrique et magnétiques, température.. etc.. sont des fonctions du temps MAIS AUSSI de l'espace

=> grandeurs à déterminer sur l'ensemble du milieu étudié: notations mathématiques: fonctions scalaire, vectorielle, ou tensorielle de l'espace et du temps

Remarques

=> mouvement = superposition de deux mouvements:

* un mouvement global (solide indéformable: (translation + rotation) - déplacement solide - considéré comme acquis / qqes éléments revus dans la cadre du cours (cadre local)

* un mouvement qui traduit les déformations du solide - problèmes d'élasticité

* mouvement des fluides: champ de vitesses

=> référentiels non galiléens non traités (extension et généralisation aisée - inertie)

1.1.2 Les équations de conservation

=> démarche est très générale en physique (lien entre grandeurs).

=> MMC, apparaissent **2 équations de conservation propres**:

* la conservation de la masse: variation de la masse contenue dans un volume est égal au flux de matière à travers la surface limitant ce volume;

* la conservation de la quantité de mouvement: mécanique classique résulte de l'application des théorèmes de la mécanique générale à l'ensemble des particules d'un milieu - la variation de quantité de mouvement due aux efforts exercés sur les particules (efforts volumiques), aux efforts surfaciques exercés sur la surface et à la quantité de mouvement transportée par les particules traversant la surface;

=> EMC, apparaissent **2 équations de conservation propres**:

- * la conservation de la charge électrique
- * la conservation du flux magnétique

=> MC: apparaît **1 équation de conservation générale** :

* la conservation de l'énergie : premier principe de la thermodynamique - la variation d'énergie contenue dans un volume est due au travail des efforts volumiques et surfaciques, à l'énergie électromagnétique transmise, au flux de chaleur, aux sources de chaleur et à l'énergie transportées par les particules traversant la surface.

Remarque: grandeurs physiques transportées par les particules : notion de convection. => notion de flux

1.1.3 Les lois de comportement

=> relation au niveau local entre cause et effet

=> électromagnétisme: relation entre grandeurs électromagnétiques: champ / induction - courant / tension

=> mécanique: cinématique / dynamique au niveau local: "déformation" / "efforts" ou "taux de déformation" / "efforts" (fluides)

exemple: ressort: "déformation" linéaire avec "l'effort" appliqué (niveau local et global)

Etablissement à partir des invariants des grandeurs physiques.

IMPORTANT: les lois de comportement \neq lois de conservation : caractéristiques des milieux étudiés (modélisation du milieu).

Les milieux étudiés dans ce cours se caractériseront par les propriétés suivantes :

- * l'homogénéité (même comportement en tout point du milieu) ;
- * l'isotropie (même comportement dans toutes les directions de l'espace) ;
- * la linéarité (proportionnalité des effets).

1.1.4 Les conditions aux limites

- relation milieu / environnement

=> caractérisation d'un milieu: lois de conservation + lois de comportement

=> système particulier: relations avec son environnement

* déplacement (ou vitesse) ou efforts (sur les "bords").

* potentiel électrique, charges.

* temps (conditions initiales)

1.2 Rappels et notions tensorielles élémentaires

1.2.1 Repérage dans l'espace et le temps

* **repérage dans le temps**

- espace des instants: \mathcal{T} espace affine, dimension 1 dans \mathbb{R} et orienté (\vec{u})

- repérage: élément τ de \mathcal{T}

- dans un repère galiléen avec temps t et instant initial t_0 , on définit:

$$t_0 \vec{t} = \tau \vec{u} \quad (1)$$

si $t_0=0, t=\tau$

* **repérage dans l'espace**

- espace affine euclidien ϵ tridimensionnel, dans \mathbb{R}^3 , orienté ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$), produit scalaire, produit vectoriel.

- un milieu Ω est une partie de ϵ .

- on définit un espace ϵ par milieu Ω .

* **Mouvement d'un point**

- fonction = application de $\mathcal{T} \rightarrow \epsilon: t \rightarrow M(t)$

- O: origine de ϵ => mouvement défini par une fonction vectorielle telle que:

$\mathcal{T} \rightarrow \epsilon: t \rightarrow \vec{OM}(t)$ => position du point M

Si utilisation d'une base $B=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, mouvement défini par 3 fonctions scalaires:

$\tau \rightarrow \epsilon: t \rightarrow (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, coordonnées de M dans le repère $\mathbf{R} (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$O\vec{M} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \quad (2)$$

Rmq: on confond généralement ϵ et \mathbf{R} .

=> vitesse:

$$\vec{V}(M, t) = \frac{dO\vec{M}}{dt} l_R = \dot{x}_1 \cdot \vec{e}_1 + \dot{x}_2 \cdot \vec{e}_2 + \dot{x}_3 \cdot \vec{e}_3 \quad (3)$$

=> accélération:

$$\vec{\Gamma}(M, t) = \frac{d^2O\vec{M}}{dt^2} l_R = \ddot{x}_1 \cdot \vec{e}_1 + \ddot{x}_2 \cdot \vec{e}_2 + \ddot{x}_3 \cdot \vec{e}_3 \quad (4)$$

1.2.2 Notions tensorielles élémentaires

MMC fait appel aux tenseurs. => qqes outils nécessaires à la manipulation des tenseurs.

★ Définitions

On se place de \mathbf{R} , qu'on prendra toujours orthonormé direct.

- Un vecteur \vec{v} s'écrit:

$$\vec{v} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \quad (5)$$

ou encore:

$$\vec{v} = x_i \cdot \vec{e}_i \quad (6)$$

en utilisant la convention de sommation des indices répétés ou convention d'Einstein. i : indice muet.

Exemple matrice \mathbb{A} , telle que:

$$\mathbb{A} = A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

indice répété => signification de trace : $tr(\mathbb{A}) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii}$

Matrice identité

matrice identité \mathbb{I} ou matrice de Krönerker: δ_{ij} .
tel que

$$\mathbb{I} \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

soi en indiciel:

$$\delta_{ij} \cdot v_j = v_i$$

=> cette matrice a la propriété d'échange des indices.

Exemple d'application: changement de base

Le changement de base de $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}^*$ permet de définir de 2 manières différentes le vecteur \vec{v} :

$$\vec{v} = x_i \cdot \vec{e}_i = x_i^* \cdot \vec{e}_i^* \quad (7)$$

Un changement de base est défini par le passage de l'ancienne base à la nouvelle:

$$\vec{e}_i^* = \alpha_{ij} \cdot \vec{e}_j \quad (8)$$

Les α_{ij} sont les 9 éléments d'une matrice \mathbb{A} 3x3, dite matrice de changement de base, orthogonale et vérifiant $\mathbb{A}^{-1} = {}^t\mathbb{A}$.

Il vient par ailleurs:

$$x_i^* = \vec{v} \cdot \vec{e}_i^* = (x_k \cdot \vec{e}_k) \cdot \alpha_{ij} \vec{e}_j = (x_k \alpha_{ij}) \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j \quad (9)$$

Le produit scalaire $\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j$ vaut 1 si $k = j$, 0 si $k \neq j$.

=> définition de la matrice identité \mathbb{I} : δ_{kj} .

On en déduit:

$$x_i^* = (x_k \alpha_{ij}) \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = (x_k \alpha_{ij}) \delta_{kj} = \alpha_{ij} x_j \quad (10)$$

Relation simple de calcul des coordonnées dans la nouvelle base.

Tenseurs usuels:

tenseur d'ordre 0: défini dans \mathbf{R} par une valeur a : scalaire

tenseur d'ordre 1: défini dans \mathbf{R}^3 par trois valeurs a_i : vecteur. *changement de base:*

$$a_i^* = \alpha_{ij} a_j$$

=> représentation vectorielle: \vec{a} ou \underline{a}

tenseur d'ordre 2: défini dans $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ par neufs valeurs a_{ij} : matrice . *changement de base*:

$$a_{ij}^* = \alpha_{ik} \alpha_{jl} a_{kl}$$

=> représentation matricielle: \mathbb{A} ou $\underline{\underline{A}}$ ou \bar{A}

★ Propriétés des tenseurs d'ordre 2

- tenseur symétrique: $\mathbb{A} = {}^t\mathbb{A}$ ($a_{ij} = a_{ji}$); tenseur antisymétrique: $\mathbb{A} = -{}^t\mathbb{A}$ ($a_{ij} = -a_{ji}$) => décomposition d'un tenseur:

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + {}^t\mathbb{A}) + \frac{1}{2}(\mathbb{A} - {}^t\mathbb{A}) = \text{Sym} + \text{antiSym} \quad (11)$$

- invariants d'un tenseur: ne dépendent pas de la base choisie (scalaires caractéristiques).

Invariants classiques: trace, déterminant et formes quadratiques.

Construction à partir du polynôme caractéristique ($\det(\lambda \cdot \mathbb{I} - \mathbb{A})$ est également un invariant):

$$P(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{I} - \mathbb{A}) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 \quad (12)$$

Donc les les termes I_1 , I_2 et I_3 sont également des invariants par changement de base.

On peut réécrire le polynôme si il est diagonalisable selon:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \quad (13)$$

L'équation $P(\lambda) = 0$ admet trois racines: les λ_i sont les valeurs propres du tenseur (ou valeurs principales). Cela signifie qu'il existe une base (base principale) dans laquelle le tenseur s'exprime selon:

$$\mathbb{A}^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{BP} \quad (14)$$

Les invariants pour les grandeurs électromagnétiques sont construits à partir du produit matriciel

$$\mathbb{B} = \vec{B} \otimes \vec{B} \quad (15)$$

la trace du tenseur \mathbb{B} vaut ainsi la norme de \vec{B} au carré.

- opérations: *trace*, produit scalaire de vecteurs, contraction, produit doublement contracté

$$tr(\mathbb{A}) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii} \quad (16)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i \vec{e}_i \cdot v_j \vec{e}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \quad (17)$$

$$\mathbb{A} \cdot \vec{V} = A_{ij} V_j \vec{e}_i = W_i \vec{e}_i = \vec{W} \quad (18)$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = A_{ij} B_{jk} = C_{ik} = \mathbb{C} \quad (19)$$

$$tr(\mathbb{A}\mathbb{B}) = tr(\mathbb{C}) = C_{ii} = A_{ij} B_{ji} = \mathbb{A} : \mathbb{B} \quad (20)$$

★ Analyse tensorielle

- NB: pseudo-tenseur: le tenseur "spin" (dit de Levi-Civita)

Les pseudo-tenseurs permettent de réaliser des opérations de symétrie par rapport à des plans ou des points. Le tenseur "spin" noté ϵ_{ijk} est un de ces tenseurs. Il possède les valeurs suivantes:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \text{ et } k \text{ sont en permutation paire (ou circulaire) ex: } 1 - 2 - 3 \\ -1 & \text{si } i, j \text{ et } k \text{ sont en permutation impaire (ou anti-circulaire) ex: } 1 - 3 - 2 \\ 0 & \text{si } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } k=i \end{cases} \quad (21)$$

et s'applique, par exemple, pour le calcul indiciel du produit vectoriel:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = w_i \vec{e}_i = (\epsilon_{ijk} u_j v_k) \vec{e}_i \quad (22)$$

ou encore du double produit vectoriel...

- Gradient d'un tenseur: différentielle du tenseur par rapport aux variables d'espace

=> Si f est un champ scalaire, on a:

$$df = \overrightarrow{grad}(f) \cdot d\vec{M} = f_{,i} dM_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} dM_i \quad (23)$$

=> Si \vec{V} est un vecteur tel que $\vec{V} = V_i \vec{e}_i$ on a pour chaque composante:

$$dV_i = \overrightarrow{grad}(V_i) \cdot d\vec{M} = V_{i,j} dM_j \quad (24)$$

soit:

$$d\vec{V} = \overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{V}) \cdot d\vec{M} \quad (25)$$

- Divergence d'un tenseur: somme des différentielles du tenseur par rapport aux variables d'espace

=> Si \vec{V} est un vecteur tel que $\vec{V} = V_i \vec{e}_i$ on a :

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = V_{i,i} = V_{i,j} \delta_{ij} = \text{tr}(\overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{V})) \quad (26)$$

=> Si \mathbb{A} est un tenseur d'ordre 2, on a :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\mathbb{A}) = A_{ij,j} \vec{e}_i \quad (27)$$

- Rotationnel d'un vecteur $\vec{V} = V_k \vec{e}_k$. On définit: $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = W_i \vec{e}_i$, avec:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{V}$$

On obtient:

$$W_i = \epsilon_{ijk} V_{k,j} \quad (28)$$

- Laplacien d'un tenseur: somme des dérivées secondes => Si f est un champ scalaire, on a:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = f_{,ii} = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) \quad (29)$$

=> Si \vec{V} est un vecteur tel que $\vec{V} = V_i \vec{e}_i$ on a pour chaque composante:

$$\Delta V_i = V_{i,jj} \quad (30)$$

soit:

$$\Delta \vec{V} = \overrightarrow{\overrightarrow{\text{div}}}(\overline{\overline{\text{grad}}}(\vec{V})) \quad (31)$$