

Documents et calculatrices autorisés - On s'attachera à donner les résultats numériques dans des unités adaptées.

Exercice 1. Observation des étoiles

1. Bellatrix (γ Orionis) est la troisième étoile la plus brillante de la constellation d'Orion, après Bételgeuse et Rigel. Sa parallaxe vaut $\pi_1 = 1,3 \times 10^{-2}''$. Quelle est sa distance D_1 ?
2. Sa température effective vaut $T_1 = 20500$ K et sa luminosité $L_1 = 4000 L_\odot$. Quel est son rayon R_1 ?
3. En justifiant votre réponse, déterminez si Bellatrix est une naine rouge, une étoile de type solaire, une géante bleue, une géante rouge ou une naine blanche. Comment sa masse se compare à celle du Soleil ?
4. La magnitude apparente de Bellatrix vaut $m_1 = 1,6$. L'étoile Alfirk (β Cephei), la deuxième étoile la plus brillante de la constellation de Céphée, est une étoile de même classe et type spectral que Bellatrix. Sa magnitude apparente est $m_2 = 3,5$. Estimer sa distance.

Exercice 2. Vitesse de rotation maximum des étoiles. Dans cet exercice, les étoiles, même à forte rotation, restent supposées sphériques. On utilisera les notations habituelles pour la masse, le rayon, etc.

1. On considère un élément de volume dV situé sur l'équateur à la surface d'une étoile, supposée en rotation solide avec une vitesse angulaire Ω . Dans le référentiel en corotation avec l'étoile, faire le bilan des forces extérieures exercées sur cet élément de volume et écrire l'équation d'équilibre hydrostatique correspondante.
2. En déduire, en fonction de M et R , la valeur maximale de la vitesse angulaire, Ω_{\max} , au-delà de laquelle l'équilibre statique n'est plus possible.
3. Dans le cadre du modèle à 1 zone, déterminer, pour les étoiles de la séquence principale, et pour les naines blanches, comment varie Ω_{\max} avec la masse M (on ne cherchera pas à normaliser les lois d'échelle).
4. Donner l'expression de la période de rotation minimum d'une étoile en fonction de sa masse volumique. Que peut-on en déduire pour les pulsars (observation de périodes de rotation pouvant atteindre 1 ms) ?

Exercice 3. Luminosité d'Eddington et masse maximum des étoiles de la séquence principale

La luminosité d'Eddington L_{Edd} est la luminosité maximale au-delà de laquelle une étoile perd son enveloppe externe qui est éjectée par la force exercée sur la matière par le rayonnement. L_{Edd} ne dépend que de la masse M de l'étoile et vaut pour une enveloppe d'hydrogène pur dont l'opacité est donnée par l'opacité Thomson :

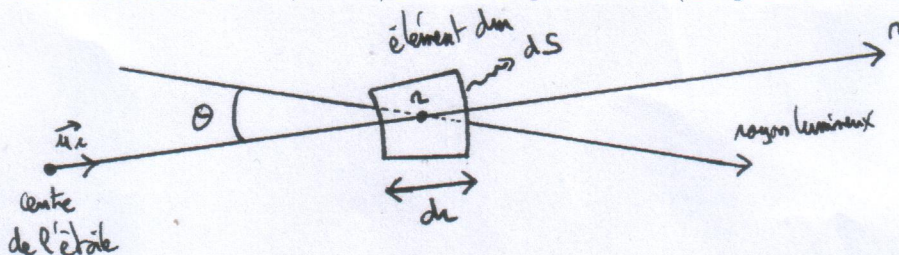
$$\frac{L_{\text{Edd}}(M)}{L_\odot} = K_{\text{Edd}} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \quad \text{avec } K_{\text{Edd}} \simeq 3.3 \times 10^4 .$$

On considère que les étoiles entre 10 et 90 M_\odot sur la séquence principale sont soutenues par la pression thermique du gaz, et que le transport de l'énergie s'y fait de manière radiative, l'opacité Thomson étant dominante.

3.1. Masse maximum des étoiles de la séquence principale

1. La relation masse-luminosité de ces étoiles est du type $L/L_\odot = K (M/M_\odot)^x$, où K et x sont des constantes. Rappeler la valeur approximative de x . Déterminer K en sachant que $L \simeq 5000 L_\odot$ pour $M \simeq 10 M_\odot$.
2. En déduire que la luminosité d'Eddington impose une masse maximum aux étoiles de la séquence principale, masse dont on déterminera la valeur en unité de la masse du Soleil.

3.2. Luminosité d'Eddington. On considère une étoile de masse M et de luminosité L , et un élément de masse dm optiquement mince et non émissif, de volume $dV = dS dr$, placé à la distance r du centre de l'étoile, près de la surface. Sa masse volumique est $\rho = dm/dV$ et son opacité est κ (indépendante de la fréquence).



1. Soit un rayon lumineux faisant un angle θ avec \vec{u}_r . Son intensité entrante dans l'élément de masse dm est $I_{\text{in}}(\theta)$ (intégrée en fréquence). Montrer que l'intensité sortante de l'élément de masse vaut

$$I_{\text{out}}(\theta) = I_{\text{in}}(\theta) \left(1 - \frac{d\tau}{\cos \theta} \right) .$$

On précisera la définition de l'épaisseur optique $d\tau$ de l'élément de masse dm .

- Donner en fonction de $I_{\text{in}}(\theta)$ l'expression de la quantité de mouvement $dp_{\text{in}}(\theta)$ des photons issus de rayons lumineux dans l'angle solide $d\Omega$ autour de θ qui traversent pendant dt la face entrante de l'élément de masse dm . Faire de même pour la quantité de mouvement $dp_{\text{out}}(\theta)$ qui traversent la face sortante, en fonction de $I_{\text{out}}(\theta)$.
- La force radiale $d\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{u}_r$ exercée par le rayonnement sur l'élément de masse dm est la composante radiale de la quantité de mouvement des photons déposée dans dm par unité de temps. Montrer que

$$d\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{u}_r = d\tau dS \frac{F}{c},$$

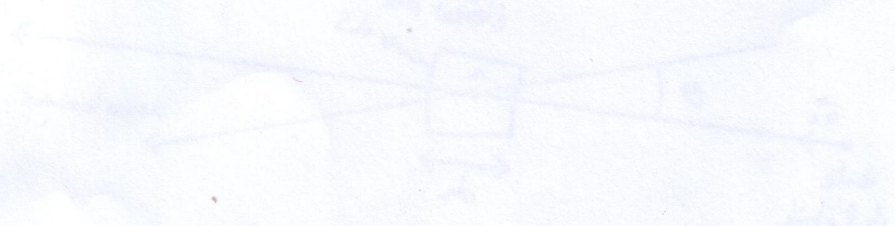
où F est le flux lumineux de l'étoile au rayon r .

- En déduire que

$$d\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{u}_r = \frac{L\kappa}{4\pi r^2 c} dm.$$

- Ecrire la force gravitationnelle $d\vec{F}_{\text{grav}}$ exercée par l'étoile sur l'élément de masse dm .
- Montrer qu'il existe une luminosité maximale, L_{Edd} , indépendante de r , au-delà de laquelle la force exercée par le rayonnement sur dm l'emporte sur la force gravitationnelle exercée par l'étoile. Vérifier que vous retrouvez l'expression de cette luminosité, dite d'Eddington, donnée en début d'exercice.

Handwritten notes:
 $L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi r^2 c}{\kappa} \frac{GM}{r^2}$
 $L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c GM}{\kappa}$



Eléments de correction

Exercice 1. Observation des étoiles

- $D_{1,pc} = 1/\pi_{1,''}$ donc $D_1 = 1/1,3 \times 10^{-2} = 77$ pc.
- Loi de Stefan : $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ donc $R_1/R_\odot = (L_1/L_\odot)^{1/2} / (T_1/T_\odot)^2$ soit $R_1 = 4000^{1/2} / (20500/5800)^2 = 5,1 R_\odot$.
- Rayon plus grand que celui du Soleil : une géante. Température de surface supérieure à celle du Soleil : l'étoile est bleue. Bellatrix est donc une géante bleue. Cours : les géantes bleues sont des étoiles plus massives que le Soleil.
- Les deux étoiles étant de même classe/type spectral, elles sont intrinsèquement semblables : $L_2 \simeq L_1$. Donc $m_2 - m_1 = -2,5 \log \frac{F_2}{F_1} = -2,5 \log \frac{L_2}{L_1} - 5 \log \frac{D_1}{D_2} = 5 \log \frac{D_2}{D_1}$, soit $D_2 = D_1 \times 10^{\frac{m_2 - m_1}{5}} \simeq 77 \times 10^{\frac{3,5 - 1,6}{5}} \simeq 180$ pc.

Exercice 2. Vitesse de rotation maximum des étoiles.

- L'élément de volume est soumis à son poids (dirigé vers le centre), aux forces pressantes (dirigées vers l'extérieur), et à la force centrifuge (dirigée vers l'extérieur). L'équilibre hydrostatique s'écrit donc :

$$\rho g = -\frac{dP}{dr} + \rho \Omega^2 r \quad \text{soit} \quad \rho \frac{GM}{R^2} = -\frac{dP}{dr} + \rho \Omega^2 R \quad \text{sur l'équateur à la surface.}$$

- L'équation ci-dessus se réécrit $-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{GM}{R^2} - \Omega^2 R$. Le terme de gauche est positif (la pression décroît du centre de l'étoile vers la surface) et l'équilibre n'est donc possible que si $\Omega^2 R < \frac{GM}{R^2}$. Au-delà, la force centrifuge l'emporte sur le poids et la matière est expulsée. On obtient donc une vitesse angulaire maximum $\Omega_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$.
- Pour une étoile de la séquence principale, le modèle à 1 zone montre que le rayon suit approximativement la loi d'échelle $R \propto M$. Cela donne $\Omega_{\max} \propto M^{-1}$: la vitesse angulaire maximum diminue avec la masse, les étoiles les moins massives peuvent tourner plus vite. Pour une naine blanche, $R \propto M^{-1/3}$, soit $\Omega_{\max} \propto M$: le comportement inverse des étoiles normales est observé, les naines blanches les plus massives peuvent tourner plus vite.
- A partir de $P_{\min} = 2\pi/\Omega_{\max}$ et $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$, on obtient $P_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\bar{\rho}}}$. Pour $P \simeq 1$ ms, on déduit $\bar{\rho} > 3\pi/(GP^2) \simeq 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$, soit 100 millions de tonnes au cm^3 . C'est très supérieure à la masse volumique moyenne d'une étoile de la séquence principale et même d'une naine blanche. Les pulsars sont forcément des étoiles à neutrons (pour $M \simeq 1.5 M_\odot$ et $R = 10$ km, on trouve $\bar{\rho} \simeq 7 \times 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$!).

Exercice 3. Luminosité d'Eddington et masse maximum des étoiles de la séquence principale

3.1 Masse maximum des étoiles de la séquence principale

- Cours : $x = 3$. A partir de $5000 \simeq K \times 10^3$, on obtient $K \simeq 5$, soit $L/L_\odot \simeq 5 (M/M_\odot)^3$.
- Pour $L > L_{\text{Edd}}$, une étoile ne peut plus exister puisque les couches externes sont expulsées par le rayonnement. Les étoiles de la séquence principale ne peuvent donc pas exister si $L(M) > L_{\text{Edd}}(M)$, soit $K (M/M_\odot)^3 > K_{\text{Edd}} (M/M_\odot)$, soit $M/M_\odot > (K_{\text{Edd}}/K)^{1/2}$, ce qui correspond à une masse maximum, $M_{\max} \simeq (K_{\text{Edd}}/K)^{1/2} M_\odot \simeq 80 M_\odot$ (ce calcul très simple sous-estime un peu la valeur de la masse maximum, sans doute plutôt entre 100 et 150 M_\odot , mais l'origine physique de l'existence d'une masse maximum est bien la limite d'Eddington. Une des sources d'imprécision est la relation $L-M$ utilisée : x devient moins élevé pour les étoiles très massives et tend asymptotiquement vers 1).

3.2 Luminosité d'Eddington

- En l'absence d'émission, l'équation du transfert radiatif le long du rayon lumineux est $\frac{dI}{ds} = -\alpha I = -\rho \kappa I$, où $\alpha = \rho \kappa$ est le coefficient d'absorption. Le rayon traverse l'élément dm sur une longueur $ds = dr/\cos\theta$. La solution est donc $I_{\text{out}}(\theta) = I_{\text{in}}(\theta) e^{-\alpha ds} \simeq I_{\text{in}}(\theta) \left(1 - \frac{d\tau}{\cos\theta}\right)$ avec $d\tau = \alpha dr = \rho \kappa dr$ l'épaisseur optique de l'élément de masse.
- Par définition, l'énergie dE_{in} qui traverse la face entrante de l'élément de masse dm pendant dt venant des rayons dans l'angle solide $d\Omega$ autour de θ est $dE_{\text{in}} = I_{\text{in}}(\theta) \cos\theta dS dt d\Omega$ (cours). On obtient donc $dp_{\text{in}}(\theta) = \frac{dE_{\text{in}}}{c} = \frac{I_{\text{in}}(\theta) \cos\theta}{c} dS dt d\Omega$. De même $dp_{\text{out}}(\theta) = \frac{I_{\text{out}}(\theta) \cos\theta}{c} dS dt d\Omega$.
- Par définition $d\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{u}_r$ est la quantité de mouvement le long de \vec{u}_r transférée à l'élément de masse par unité de temps. La contribution des rayons venant de $d\Omega$ autour de θ à cette force est donc

$$\frac{dp_{\text{in}}(\theta) - dp_{\text{out}}(\theta)}{dt} \cos\theta = \frac{(I_{\text{in}}(\theta) - I_{\text{out}}(\theta)) \cos^2\theta}{c} dS d\Omega = \frac{I_{\text{in}}(\theta) \frac{d\tau}{\cos\theta} \cos^2\theta}{c} dS d\Omega = \frac{I_{\text{in}}(\theta)}{c} \cos\theta d\tau dS d\Omega$$

(le facteur $\cos\theta$ supplémentaire vient du fait que seule la composante de la quantité de mouvement le long de \vec{u}_r est prise en compte). En intégrant sur toutes les directions d'arrivées possibles, on obtient la force totale :

$$d\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{u}_r = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{I_{\text{in}}(\theta)}{c} \cos\theta d\tau dS d\Omega = \frac{d\tau dS}{c} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\text{in}}(\theta) \cos\theta d\Omega.$$

Par définition, l'intégrale $F = \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\text{in}}(\theta) \cos\theta d\Omega$ est le flux entrant dans l'élément dm , c'est à dire le flux lumineux de l'étoile au rayon r , soit le résultat demandé $d\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{u}_r = d\tau dS \frac{F}{c}$.

- En remplaçant F par $F = \frac{L}{4\pi r^2}$ et $d\tau$ par $d\tau = \rho \kappa dr$, on obtient $d\vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{u}_r = \rho \kappa dr dS \frac{L}{4\pi r^2 c} = \frac{L \kappa}{4\pi r^2 c} dm$.

- $d\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GM dm}{r^2} \vec{u}_r$.

- L'équilibre de dm est possible pour $d\vec{F}_{\text{grav}} + d\vec{F}_{\text{press}} + d\vec{F}_{\text{rad}} = \vec{0}$, où $d\vec{F}_{\text{press}}$ est la force pressante exercée par le gaz. La première force $d\vec{F}_{\text{grav}}$ est attractive et les deux autres sont répulsives. Tant que la norme de $d\vec{F}_{\text{rad}}$ est plus petite que celle de $d\vec{F}_{\text{grav}}$, la force de pression peut s'ajuster pour l'équilibre. Au cas limite où les deux normes sont égales, l'équilibre est toujours possible mais la force de pression devient nulle. Au-delà, l'équilibre n'est plus possible. La limite pour que l'équilibre de dm soit possible est donc $\frac{GM dm}{r^2} \geq \frac{L \kappa}{4\pi r^2 c} dm$, soit $L \leq L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G c}{\kappa} M$. En calculant la valeur de la constante $4\pi G c/\kappa$, on retrouve la valeur de K_{Edd} donnée en début d'exercice.