

PHYTEM – LP353 – RELATIVITÉ

**EXAMEN**

Année Universitaire 2011-2012

**Documents, calculatrices, ordinateurs et téléphones sont interdits.**

**Pour les applications numériques, un résultat approché à 10% est suffisant.**

**1. Transformations de Lorentz, vitesse, énergie et impulsion**

1.1 — Écrivez les transformations des coordonnées  $(ct, x, y, z)$  d'un événement lors du passage d'un référentiel  $\mathcal{R}$  à un référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

1.2 — Déduisez-en les lois de transformation des composantes de la vitesse  $\mathbf{u}$  d'un point matériel  $M$  lors du passage du référentiel  $\mathcal{R}$  au référentiel  $\mathcal{R}'$ .

1.3 — Précisez les cas limites intéressants.

1.4 — Donnez la loi de transformation de l'intervalle de temps  $dt$ . Commentez.

1.5 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur vitesse  $\tilde{\mathbf{U}}$  du point matériel  $M$ . Comment ses composantes se transforment-elles lorsqu'on passe de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$ ? Que vaut la pseudo-norme de  $\tilde{\mathbf{U}}$ ? Est-ce un invariant?

1.6 — Rappelez la définition et l'expression du quadrivecteur accélération  $\tilde{\mathbf{A}}$  du point matériel  $M$ . Montrez que sa pseudo-norme carrée vaut  $-a^2$  où  $a$  est l'accélération propre mesurée dans le référentiel inertiel instantané (référentiel tangent).

1.7 — Rappelez la définition du quadrivecteur énergie-impulsion  $\tilde{\mathbf{p}}$  du point matériel  $M$ . Retrouvez l'expression de ses composantes et les identités remarquables associées (pseudo-norme, expressions simples de  $\beta$  et  $\gamma$  en fonction des composantes de  $\tilde{\mathbf{p}}$ , etc).

**2. Composition des vitesses**

*Voir figure page suivante.*

2.1 — Dessinez les trajectoires du vaisseau et du héros (dans sa bulle, voir fig. 1, page 2) dans un diagramme d'espace-temps, en vous plaçant : (a) dans le référentiel d'un observateur extérieur (celui du narrateur qui voit le vaisseau et le personnage se déplacer à  $v = 0.2c$ ); (b) dans le référentiel du vaisseau. On prendra les axes  $(Ox)$  et  $(Ox')$  orientés selon la direction du mouvement du héros.

2.2 — Calculez la vitesse relative du héros par rapport au vaisseau. Faites de même pour le vaisseau dans le référentiel du héros. Application numérique. Retrouvez-vous la valeur annoncée par le pilote du vaisseau?

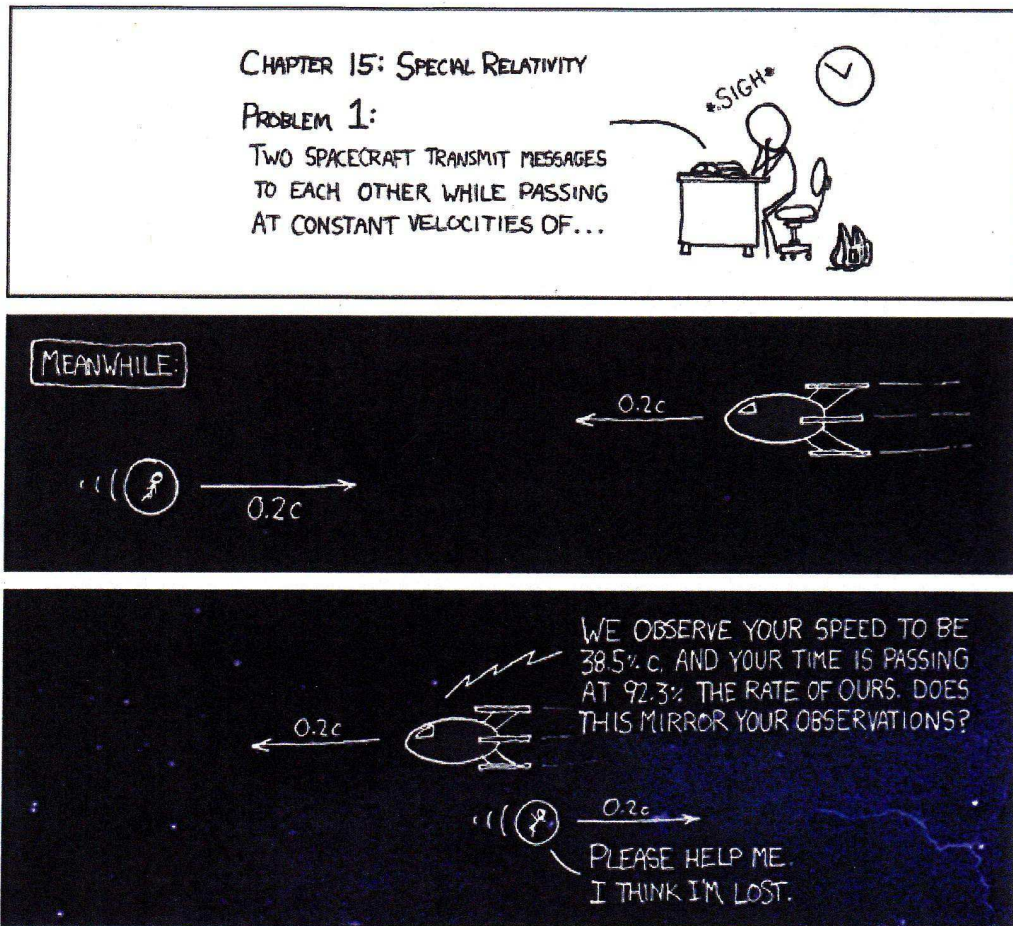


FIGURE 1 – Chapitre 15 : Relativité restreinte. Problème 1. Deux vaisseaux se croisent à vitesse constante  $v = 0.2c$  et se transmettent des messages...

Pendant ce temps : nous mesurons votre vitesse relative comme étant 38.5% celle de la célérité de la lumière  $c$ , et votre temps s'écoule 92.3% plus lentement que le nôtre. Est-ce que cela reflète vos observations? S'il vous plaît, aidez-moi, je suis perdu. (xkcd : <http://xkcd.com/265/>)

2.3 — Calculez le facteur  $\gamma$ (héros/vaisseau) entre les deux référentiels à partir de la vitesse calculée précédemment. Retrouvez l'expression du facteur  $\gamma$ (héros/vaisseau) en utilisant les quadrivecteurs vitesse des protagonistes et l'invariance du pseudo-produit scalaire. Application numérique.

2.4 — Si deux événements successifs de la vie du héros sont séparés par un temps  $\Delta\tau$  dans son référentiel, et par un intervalle  $\Delta t$  dans le référentiel du vaisseau, exprimez la relation entre  $\Delta\tau$  et  $\Delta t$ . Le message du pilote quant à la vitesse d'écoulement du temps vous semble-t-il correct?

Données :  $(0.96)^{-1} = 1.0416$      $(0.96)^{-1/2} = 1.0206$      $\sqrt{0.8521} = 0.9231$ .

### 3. Voyages intersidéraux

3.1 — Partant du système solaire, un vaisseau se rend à vitesse constante  $v$  sur une étoile située à  $D = 8$  années-lumière de la terre. Pour l'équipage de ce vaisseau, le voyage dure  $\Delta\tau = 8$  années. Quelle est la vitesse  $v$  du vaisseau dans le référentiel du système solaire?

Dans la question précédente, on a négligé les phases d'accélération et de décélération du vaisseau ce qui rend le voyage irréaliste. On se propose plutôt d'effectuer le même voyage en deux phases : une phase d'accélération à accélération propre constante  $a$  jusqu'à mi-parcours, et une phase symétrique de décélération à accélération propre constante  $-a$ , de telle sorte que le vaisseau parte sans vitesse initiale et s'arrête à destination.

3.2 — Dessinez cette trajectoire sur un diagramme d'espace-temps dans le référentiel du système solaire.

On souhaite, comme précédemment, que le voyage dure  $\Delta\tau = 8$  années pour les occupants du vaisseau.

3.3 — Soit  $\mathcal{R}$  le référentiel du système solaire (considéré comme galiléen) et  $\mathcal{R}'$  le référentiel tangent à la trajectoire du vaisseau à un instant  $t$  donné. Dans le référentiel tangent  $\mathcal{R}'$ , la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant  $t$  (ou  $t'$ ), et vaut  $dv'$  à l'instant  $t + dt$  (ou  $t' + dt'$ ). En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que

$$dv' = \gamma^2(v)dv$$

3.4 — Exprimez l'intervalle de temps propre  $d\tau = dt'$  en fonction de  $dt$  et  $\gamma(v)$ . Déduisez-en une expression de  $dv/dt$  en fonction de  $a$  et  $\gamma(v)$ .

3.5 — En utilisant les relations précédentes, montrez que  $d\tau$  est proportionnel à  $d\varphi$ . En intégrant sur la première moitié du parcours du vaisseau, exprimez  $\Delta\tau$  en fonction de la rapidité à mi-parcours  $\varphi_{1/2}$ .

3.6 — En se souvenant que  $dx = vdt$ , exprimez  $dx$  en fonction de  $d\varphi$ . Déduisez-en une expression de  $\varphi_{1/2}$  en fonction de la distance totale à parcourir  $D$ .

3.7 — On souhaite déterminer l'accélération  $a$  qui permettra à l'équipage d'effectuer ce voyage à la distance  $D = 8$  années-lumière en un temps propre de  $\Delta\tau = 8$  ans. Montrez que l'équation à résoudre est de la forme :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1$$

La solution de cette équation est  $8\xi \simeq 1.616$  soit  $\xi \simeq 0.202$ . Sachant que  $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , Exprimez  $a$  en unités  $c \times 1 \text{ an}^{-1}$  et en unités SI.

3.8 — Combien de temps dure le voyage pour les observateurs restés sur Terre? Exprimez  $\Delta t$  en fonction de  $c$ ,  $a$  et  $\varphi_{1/2}$ . Application numérique.

On donne :  $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , et  $\sinh(1.616) \simeq 2.417$ .

## 4. Collisionneurs

On s'intéresse à la collision de deux particules identiques de masse  $m$ .

### Collision élastique sur cible fixe : traitement classique

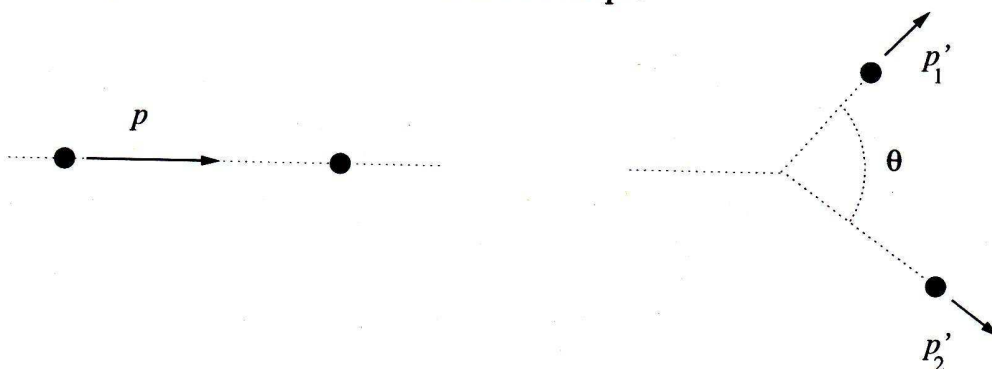


FIGURE 2 – Collision élastique sur cible fixe.

On s'intéresse à la collision élastique d'une particule de masse  $m$ , d'impulsion  $p$  et d'énergie cinétique  $T$  sur une particule identique, immobile (la "cible", fig. 2).

4.1 — Dans le cadre de la mécanique classique, écrivez la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement (impulsion).

4.2 — Montrez que l'angle  $\theta$  entre les impulsions  $\mathbf{p}'_1$  et  $\mathbf{p}'_2$  des particules après la collision est nécessairement égal à  $\pi/2$  dans le cadre classique.

### Collision élastique sur cible fixe : traitement relativiste

On traite maintenant le même phénomène dans le cadre de la dynamique relativiste.

4.3 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total lors de la collision.

4.4 — Exprimez l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{p}'_1$  et  $\mathbf{p}'_2$  en fonction de  $E$ ,  $m$ ,  $E'_1$  et  $E'_2$ , où  $E'_1$  et  $E'_2$  sont les énergies des deux particules après la collision.

4.5 — Dans le cas particulier où  $E'_1 = E'_2$ , exprimez  $\theta$  en fonction de  $E$  et  $m$ ; montrez que  $\theta$  est nécessairement inférieur à  $\pi/2$ . Comparez avec le résultat en mécanique classique.

4.6 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale  $E^*$  disponible dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ , en fonction de  $E$  et  $m$ ?

### Collisionneur symétrique

On considère maintenant le cas d'un collisionneur symétrique : dans le référentiel du laboratoire, les deux particules possèdent la même énergie  $E$  et des impulsions opposées de même norme  $p$  (fig. 3).

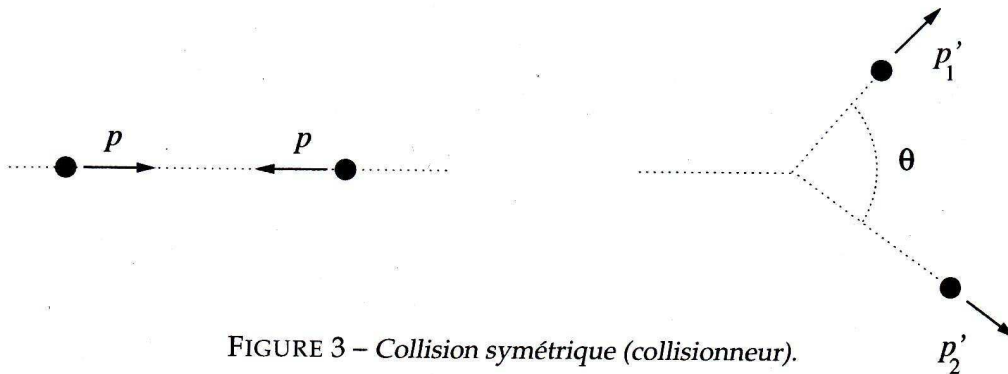


FIGURE 3 – Collision symétrique (collisionneur).

4.7 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

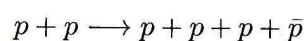
4.8 — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système  $\mathcal{R}^*$ ?

4.9 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale  $E^*$  disponible dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ , en fonction de  $E$  et  $m$ ?

### Collision inélastique : production des anti-protons

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction suivante, qui vise à produire des anti-protons  $\bar{p}$  en faisant collisionner des protons  $p$  :



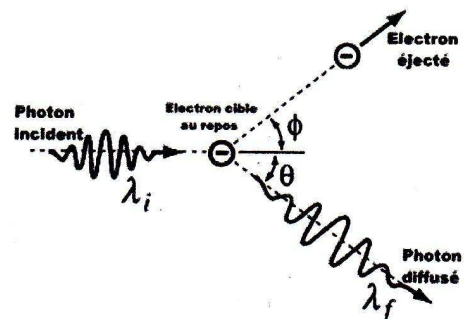
4.10 — En utilisant la notion de masse invariante, déterminer l'énergie cinétique minimale  $T_1$  qu'il faut donner aux protons d'un faisceau qui frappe une cible d'hydrogène, pour produire effectivement des antiprotons (scénario "cible fixe"). Application numérique.

4.11 — En procédant de même, déterminer l'énergie cinétique minimale  $T_2$  qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire des antiprotons (scénario "collisionneur symétrique"). Application numérique.

4.12 — Entre ces deux types d'expériences, quelle est la méthode qui semble la plus avantageuse ? Commentez. Données : masse du proton et de l'anti-proton :  $m_p = m_{\bar{p}} = 938 \text{ MeV}/c^2$ .

## 5. Interactions entre photons et matière : effet Compton, effet Compton inverse, effet photo-électrique et production de paires

5.1 — En 1923, Arthur H. Compton (1892-1962) découvre que lorsqu'un photon diffuse sur un électron, la longueur d'onde du photon diffusé est modifiée, et que ce changement de longueur d'onde  $\Delta\lambda$  dépend de l'angle de diffusion  $\theta$ . Ce phénomène, inexplicable par l'électromagnétisme classique, ne peut être compris que dans le cadre relativiste ; la découverte de l'effet Compton établit définitivement l'idée de dualité onde-corpuscule pour le photon.



On considère la collision d'un photon d'énergie  $h\nu_i$  avec un électron libre au repos (approximation raisonnable lorsque l'énergie du photon incident est grande devant l'énergie de liaison des électrons). Ecrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire.

Déduisez-en le décalage de longueur d'onde  $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i$  du photon diffusé en fonction de son angle de diffusion  $\theta$ .

5.2 — Le processus inverse de l'effet Compton, baptisé diffusion Compton inverse, se produit lorsque des électrons très énergétiques sont freinés par les photons du milieu. Ce phénomène est observé en astrophysique, par exemple lorsque les photons du rayonnement fossile micro-onde interagissent avec les électrons très énergétiques du gaz chaud d'un amas de galaxies (effet Sunyaev-Zel'dovich).

Montrez que dans ce cas, le photon diffusé gagne de l'énergie aux dépens de l'électron (astuce : reprendre le calcul précédent en se plaçant dans le référentiel de l'électron après la collision).

5.3 — Montrez qu'un processus où un photon disparaîtrait par absorption par un électron libre est impossible, du fait des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Commentez pour l'effet photoélectrique : pourquoi l'absorption d'un photon par un électron lié est-elle possible ?

5.4 — Un photon peut aussi disparaître et se matérialiser sous la forme d'une paire électron-positron  $e^- e^+$ . Quelle est l'énergie minimale qu'un photon doit posséder pour produire une paire  $e^- e^+$  ? Montrez que ce processus de production de paire ne peut pas se produire dans le vide (il ne se produit en fait qu'en présence d'un champ électromagnétique externe, par exemple dans la matière à proximité d'un noyau atomique).

Montrez, de même, que l'annihilation d'une paire  $e^+ e^-$  ne peut pas s'effectuer en produisant un photon unique, mais au minimum deux photons (la désintégration d'une paire  $e^+ e^-$  s'effectue en fait en produisant soit deux photons, soit trois photons).