

INTRODUCTION À LA RELATIVITÉ

(Exercices)

Les exercices de cette première série sont pour la plupart des applications banales des équations de transformation de Lorentz (ETL). Pour certains de ceux qu'on vous demande de faire par vous-mêmes [↗], il faut simplement transformer les énoncés en équivalent analytique sur des intervalles de temps et d'espace et y aller hardiment. L'utilisation de la forme différentielle des ETL peut être pratique dans certains cas.

1. Invariance par transformation de Lorentz [↗]

Montrer que les équations de transformation de Lorentz entraînent l'invariance de l'intervalle élémentaire d'espace-temps :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

2. Approximations numériques (classique et ultra-relativiste) [↗]

- (a) On admettra que la mécanique classique reste valable tant que $\gamma \approx 1$ à 1 pour 1000 près. A quelle valeur de β correspond cette limite?
- (b) On admettra qu'on est dans le domaine ultra-relativiste quand $\gamma \geq 100$. A quel β cette limite correspond-elle?
- (c) Dans les situations ultra-relativistes, on peut écrire $\beta = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$). Donner alors une approximation simple de γ en fonction de ε .

[On n'utilisera pas de calculatrices pour faire cet exercice.]

Réponses : a-) $\beta \approx 0,04$; b-) $\beta \approx 0,99995$; c-) $\gamma \approx 1/\sqrt{2\varepsilon}$.

3. Notion de simultanéité

Utiliser les ETL pour montrer que deux événements simultanés dans un référentiel R ne le sont généralement pas dans un référentiel R' . Quelle est la situation unique qui fait exception à cette règle?

4. Notion de simultanéité (bis)

Montrer que si deux événements sont simultanés dans R :

- (a) Le temps qui les sépare dans R' peut avoir n'importe quelle valeur;
- (b) La distance qui les sépare dans R' peut être arbitrairement grande, mais est bornée inférieurement par une valeur qu'on précisera.

L'exercice qui suit est en principe extrêmement simple, à condition qu'on le traite proprement. Il est donc recommandé de le faire une première fois en état de panique (comme un jour d'examen) et une seconde fois posément, en définissant les "événements" et en appliquant les équations de transformation de Lorentz, même si on a l'impression que c'est inutilement compliqué.

5. Il est important de définir les événements !

Deux vaisseaux spatiaux (référentiels R et R' respectivement) se croisent parallèlement. Ils ont tous deux une longueur propre identique $L_0 = 230$ m. Leurs extrémités sont notées AB pour R , CD pour R' . Le pilote du vaisseau R , placé à l'avant A , mesure le temps écoulé entre son passage devant les deux extrémités C et D du vaisseau R' : il trouve $3,57 \mu\text{s}$. Quelle est la vitesse relative des deux vaisseaux?

Réponse : $\beta = 0,21$

6. Transformation du temps [↗]

Utilisez les ETL pour montrer qu'à chaque instant il existe un plan et un seul dans R dont les horloges indiquent le même temps que dans R' . Montrer que ce plan se déplace dans R avec la vitesse :

$$u = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma}c$$

L'exercice qui suit consiste à évaluer le temps mis pour effectuer un trajet aller-retour par un objet relativiste, tel qu'il est mesuré dans un référentiel fixe et le référentiel de l'objet mobile. Dans tout cet exercice, on admettra que les temps mis pour les périodes d'accélération et de décélération de l'objet mobile sont suffisamment petits pour être négligés : seules seront prises en compte les périodes pendant lesquelles celui-ci est animé d'un mouvement uniforme. La solution correcte de ce problème ne peut être établie que dans le cadre du formalisme des référentiels accélérés. Toutefois, la solution de la dernière question est une réponse correcte (mais approximative) au pseudo-paradoxe dit "des jumeaux de Langevin".

7. Voyage à Sirius - Ralentissement des horloges

Un vaisseau spatial (référentiel R') quitte la Terre (référentiel R) pour effectuer un voyage aller-retour vers l'étoile Sirius qui se trouve à une distance de 8,7 années-lumière de la Terre. (Rappel : une année-lumière est la distance parcourue par la lumière en une année.) Il effectue ce trajet à la vitesse $v = 0,75c$.

On décompose le voyage en quatre *événements* successifs. Événement (1) : le vaisseau quitte la Terre (on prendra les coordonnées d'espace temps de cet événement comme origines $t_1 = t'_1 = 0$, $x_1 = x'_1 = 0$); événement (2) : le vaisseau atteint Sirius; événement (3) : le vaisseau quitte Sirius; événement (4) : le vaisseau revient sur Terre. Entre les événements (2) et (3), le vaisseau s'est posé sur une planète de Sirius et l'a explorée pendant 7 années.

A chacune des questions ci-dessous, on donnera le résultat littéral puis numérique. Dans toutes les applications numériques, *on donnera les distances en années-lumière et les temps en années*. La question (a) est indépendante des suivantes.

- (a) Au cours de son voyage aller puis de son voyage retour, le vaisseau émet chaque fois deux signaux lumineux espacés d'une année à son l'horloge. Quel est le temps qui sépare *la réception de ces signaux* sur Terre dans chacun des deux cas (à l'aller, puis au retour) ?
- (b) Quelles sont les coordonnées d'espace-temps des quatre événements dans le référentiel R ?
- (c) Quelle est la distance parcourue Terre-Sirius telle qu'elle est mesurée dans R et R' ?
- (d) Quels sont les intervalles de temps qui séparent les événements (1) et (2) d'une part, (3) et (4) d'autre part dans R' . On répondra à cette question en utilisant les deux méthodes suivantes :
 - i. Ecrire explicitement les transformations de Lorentz pour les deux intervalles demandés ;
 - ii. Utiliser l'invariance de l'intervalle *d'espace-temps*.
- (e) Quel a été le temps total mis par le vaisseau pour effectuer le voyage complet tel qu'il a été mesuré dans R et R' ? Si le pilote du vaisseau et son jumeau resté sur Terre avaient tous deux trente ans au moment du départ, quel âge ont-ils lorsqu'ils se retrouvent ?

Les théories fondamentales n'excluent pas l'existence de particules appelées "tachyons" qui auraient une vitesse toujours supérieure à c . Pour ces particules la causalité (la cause précède toujours l'effet) serait remise en cause. En particulier, de telles particules qui, dans certains référentiels sont émises puis interagissent avec une particule en un autre point, pourraient, vues d'autres référentiels, interagir avant même d'être créées. L'exercice qui suit illustre cette possibilité.

8. Causalité

- Montrer que si deux événements ont lieu en un même point dans un référentiel R donné, leur succession chronologique est la même dans tous les autres référentiels et que le temps qui les sépare est minimum dans R .
- Montrer que si deux événements (1) et (2) se succèdent dans cet ordre dans un référentiel R , il peut exister, dans certaines conditions, des référentiels R' dans lesquels l'ordre de ces événements est inversé.

9. Composition des vitesses et le 2^e postulat

Une source S mobile dans le référentiel R émet un signal lumineux dans la direction positive de l'axe Ox . En appliquant la transformation des vitesses, montrer que la vitesse du signal lumineux mesurée dans R vérifie bien le 2^e postulat d'Einstein. Attention aux signes !

OPTIQUE RELATIVISTE

10. Aberration de la lumière : effet "phare"

Une source (cela peut être une source radioactive émettant des γ , un radar, une lampe de poche etc...) émet des photons de manière isotrope dans son propre référentiel (soit R'). Ce référentiel est en mouvement avec une vitesse $v = \beta c$ par rapport à R . Quelle doit être la vitesse relative v pour que, vu de R , la moitié de l'intensité lumineuse émise se trouve à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet $\theta = 10^\circ$? Faites un dessin pour illustrer la situation et expliquez pourquoi on appelle parfois cette application simple de l'aberration "l'effet-phare".

Réponse : $v = 0,985c$

11. Aberration - Distributions angulaires

On reprend la situation de l'exercice précédent. On veut étudier de manière plus détaillée la direction d'émission des photons dans le référentiel R . La notion de *distribution angulaire* introduite ici sera abondamment utilisée par la suite en Licence et Maîtrise.¹ On fera l'hypothèse que le nombre total de photons émis pendant la durée de l'expérience par la source est N .

Dans un référentiel quelconque R , on appelle *distribution angulaire* la quantité :

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{N} \frac{dN}{d\Omega}$$

c'est-à-dire, la fraction du nombre total de photons émis dans un élément d'angle solide $d\Omega$ dans la direction θ .

- Exprimer $d\Omega$ en fonction de θ .

¹Le terme technique sera plutôt : *section efficace différentielle*.

(b) Calculer les distributions angulaires $\sigma(\theta')$ et $\sigma(\theta)$ dans les référentiels R' et R respectivement.

(c) Retrouver, à l'aide de ces résultats, celui de l'exercice précédent.

12. Effet Doppler [↗]

Quand une galaxie lointaine est en mouvement par rapport à la nôtre, on observe un décalage (vers le rouge ou vers le bleu selon que la galaxie s'éloigne ou se rapproche) des raies spectrales caractéristiques de certains atomes par rapport aux longueurs d'onde mesurées en laboratoire.

Soit une galaxie qui suit une trajectoire rectiligne par rapport à la nôtre avec une vitesse $v = 0,6c$ et un paramètre d'impact (distance minimum d'approche) $d = 10$ Mpc (1 parsec ou pc=3,26 années-lumière). Existe-t-il une position sur cette trajectoire où la lumière reçue ne présente aucun décalage spectral par rapport à celle émise? Si oui, à quelle distance se trouve la galaxie en ce point particulier de sa trajectoire?

Réponse : 10,61 Mpc.

13. Décalage vers le rouge - Âge de l'univers

Une galaxie (dont on a évalué la distance à 5 milliards d'années-lumière) émet un spectre où on retrouve la structure des raies de l'hydrogène mais avec un déplacement :

$$\lambda_0 = 487 \text{ nm} \quad \rightarrow \quad \lambda_{\text{obs}} = 730 \text{ nm}$$

(a) Calculez la vitesse relative de cette galaxie par rapport à nous. Dites si elle se rapproche ou s'éloigne de nous.

(b) En supposant que cette vitesse est restée constante au cours du temps, trouvez le temps dans le passé où cette galaxie et la nôtre étaient confondues.

[Bien qu'il s'agisse ici d'un calcul extrêmement rustique, c'est sur la base de telles observations et hypothèses qu'Edwin Hubble a pu proposer le modèle de l'univers en expansion d'où a émergé l'hypothèse du Big Bang.]

14. Il ne faut pas abuser du décalage vers le vert !

Un automobiliste arrêté pour avoir grillé un feu rouge affirme sa bonne foi en disant qu'il a été victime d'une illusion d'optique, la lumière lui ayant paru verte du fait de l'effet Doppler relativiste dû à la vitesse relative entre sa voiture et le feu. L'agent (qui n'est pas plus ignare que vous ou moi) lui propose alors de transformer le retrait de permis en une amende d'un euro par km/h au-dessus de la vitesse autorisée. Vérifiez si l'automobiliste a été très malin en cette occasion. On prendra comme longueurs d'onde du rouge et du vert respectivement 700 et 500 nm.

DYNAMIQUE RELATIVISTE - MASSE, ÉNERGIE, QUANTITÉ DE MOUVEMENT

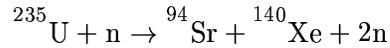
Les exercices suivants sont pour l'essentiel des applications simples des relations fondamentales entre les grandeurs dynamiques associées à une particule : sa masse au repos m_0 (certains auteurs sont hostiles à l'utilisation du concept de masse relativiste $m = \gamma m_0$), son énergie totale E , son énergie de mouvement ou énergie cinétique T , sa quantité de mouvement p (couramment appelée "impulsion" dans le jargon des physiciens des particules). On se familiarisera essentiellement avec la manipulation des unités naturelles en physique microscopique, l'électron-volt (rappel : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ joule) et les unités dérivées.

15. Un record du monde

La particule la plus énergétique jamais détectée (en 1992, dans l'Utah-USA) est un rayon cosmique dont l'énergie est de 320 EeV (le préfixe E -exa- indique le multiple 10^{18}). A quelle décimale la vitesse de cette particule (qu'on suppose être un proton) diffère-t-elle de c ? On prendra la masse au repos du proton approximativement égale à $1 \text{ GeV}/c^2$. Pas de calculettes!

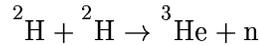
16. Conversion masse - énergie [\]

- Calculer la masse de matière qui serait nécessaire pour fournir les besoins énergétiques de la France pendant un an si on pouvait convertir totalement cette masse en énergie. Un français consomme environ 6000 kWh par an.
- Supposons que les réacteurs nucléaires fonctionnent exclusivement sur la conversion de l'énergie de fission mise en jeu dans la réaction :



Calculez la quantité d'uranium naturel pour fournir l'énergie annuelle de la France. Indications : la différence relative de masse au repos entre les états initial et final de cette réaction est de 9×10^{-4} ; la proportion d'uranium 235 (fissile) dans l'uranium naturel est de 0,7%. On suppose que la totalité de l'énergie libérée dans cette réaction est récupérée, ce qui est évidemment faux!

- Supposons qu'on a réussi à maîtriser l'énergie de fusion basée sur la réaction :



Calculez la quantité d'eau de mer nécessaire à l'alimentation énergétique annuelle de la France. Indications : la différence relative de masse au repos entre les états initial et final de cette réaction est la même que pour la réaction de fission ci-dessus (c'est une coïncidence!); la proportion de deutérium dans l'eau de mer est de 0,015%. Notez au passage qu'on estime la quantité totale de deutérium disponible dans les océans à environ 3×10^{13} tonnes, d'où l'intérêt des recherches menées sur la fusion contrôlée.

Réponses : a-) Approximativement le contenu d'une (grosse) poubelle; b-) Environ 2000 tonnes; c-) Environ 10^5 tonnes.

La conversion de l'énergie en masse est un des concepts de base de la physique des particules : c'est ainsi que, par exemple auprès des accélérateurs, on peut créer des particules qui n'existent pas à l'état naturel. Les exercices suivants doivent faire passer le message fondamental suivant : dans une collision entre particules, seule l'énergie mise en jeu dans le référentiel du centre de masse de ces particules est utilisable pour cette conversion.

17. Cible fixe ou collisionneur ?

L'accélérateur LHC du CERN actuellement en construction accélère deux faisceaux de protons circulant en sens inverse dans un tunnel commun. Chaque faisceau atteindra une énergie de 7 TeV (T pour tera ou 10^{12}). Combien de pions (particules le plus fréquemment produites dans une collision de ce type) peut-on créer dans une collision d'un tel faisceau si on le faisait entrer en collision avec des protons immobiles (mode dit "en cible fixe")? Même question dans une collision frontale entre les deux faisceaux (mode "collisionneur"). On prendra comme masse du pion $140 \text{ MeV}/c^2$.

Même dans les régions éloignées de tout système massif (galaxies, étoiles etc...) le "vide" de l'univers n'est qu'apparent. En réalité, l'univers est rempli de rayonnement (photons) dont la composante dominante est le rayonnement à 2,7K (dit "fossile"), relique d'époques proches du Big Bang. Le but de l'exercice qui suit est de traiter un simple aspect de l'énergétique des collisions entre les rayons cosmiques et les photons de basse énergie qui constituent le rayonnement "fossile".

18. Interaction proton-photon - Seuils d'énergie

On considère la situation suivante :

- Deux particules entrent en collision frontale ;
 - La particule (1) est un proton et la particule (2) est un photon.
- (a) Exprimer l'énergie disponible dans le centre-de-masse E_{CM} dans le cas particulier envisagé ci-dessus, en fonction des énergies $E_1 = E_0$ et $E_2 = E_\gamma$ dans le "laboratoire" et de la masse M du proton.
- (b) L'énergie moyenne des photons "fossiles" est $E_\gamma = 10^{-3}$ eV. Par ailleurs, la réaction inélastique dominante dans l'interaction des protons cosmiques avec ces photons est la suivante :



(la masse du pion neutre est $m = 135 \text{ MeV}/c^2$, celle du proton $M \approx 1 \text{ GeV}/c^2$). Calculer l'énergie-seuil E_0 du proton pour laquelle cette réaction devient énergétiquement possible. On pourra remarquer que $E_\gamma \ll m, M$ et faire les approximations résultantes.