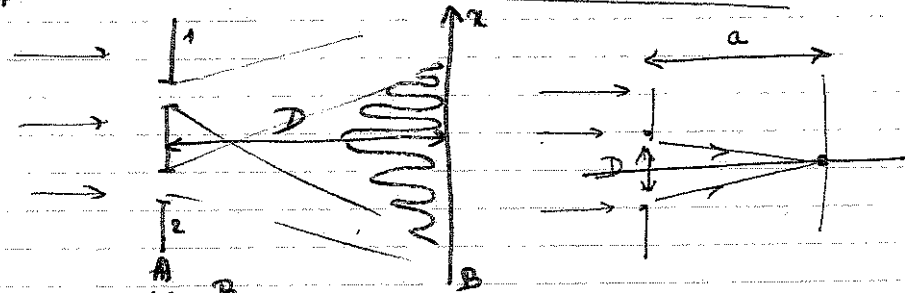


\* expérience d'interférence (de photon ou de matière)



On observe sur l'écran B des interférences parce que la particule a à sa disposition deux voies pour passer à travers l'écran A, ce qui paraît étrange.

Einstein (1927) : on doit pouvoir savoir par lequel des deux trous passe la particule (on ne peut pas le faire par une mesure "filtrante" : boucle, haute fréquence, car évidemment il n'y a plus d'interférence dans ce cas)

\* si elle passe en 1  $\rightarrow$   $\Delta p_x = -p \alpha \approx \hbar k \alpha$

\* si elle passe en 2  $\rightarrow$   $\Delta p_x = p \alpha = \hbar k \alpha$

La mesure de la quantité de mouvement de l'écran A permet de savoir par quel trou ce passe.

Bohr (après une nuit de réflexion)

non ça ne marche pas : pour mesurer l'impulsion de l'écran, il faut qu'il soit mobile.

la mesure de son impulsion  $\Delta p$  avec une grande précision  $\Delta p \leq p \alpha = \hbar k \alpha$  implique une indétermination sur sa position  $\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \geq \frac{\hbar}{p \alpha} = \frac{D}{k a}$

$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} \geq \frac{\hbar}{p \alpha} = \frac{D}{k a}$        $\frac{\hbar}{2p}$

$\approx \frac{\pi \lambda D}{a}$

Celui est de l'ordre de l'interfrange  $\rightarrow$  le système de frange sera donc brouillé et on ne verra plus l'oscillation. "Principe" de complémentarité :

$\rightarrow$  les aspects ondulatoires ( $p, \lambda$ ) et corpusculaires ( $x$ ) s'excluent mutuellement

Si on connaît le chemin de la particule, on "efface" les interférences

Le "principe" se démontre dans chaque cas particulière - Personne n'a démontré dans le cas général.

1 1 1 commutent  
 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \dots$  tels que  $\forall m, n \in \mathbb{N}$   $\hat{P}_m \hat{Q}_m \hat{R}_e \dots$  projette sur un espace de dimension 1  
 $\begin{matrix} a & b & c \\ \hat{P}_m & \hat{Q}_m & \hat{R}_e \end{matrix}$   $|\varphi_{mnl}\rangle \langle \varphi_{mnl}|$

en particulier

$$\text{Proba } |\psi\rangle (a_m, b_m, c_e \dots) = \|\hat{R}_e \hat{Q}_m \hat{P}_m |\psi\rangle\|^2 = \|\langle \varphi_{mnl} | \psi \rangle\|^2$$

$$= 1 \text{ si } |\psi\rangle = |\varphi_{mnl}\rangle$$

$$0 \text{ sinon}$$

$|\varphi_{mnl}\rangle$  est le seul état qui donne avec certitude la liste  $(a_m, b_m, c_e \dots)$

l'état conditionnel obtenu après mesure est unique  $|\varphi_{mnl}\rangle$

ECOC  $\rightarrow$  ensemble d'observables qui commutent telles

qu'il n'y a qu'un seul vecteur propre commun  $|\varphi_{mnl}\rangle$

correspondant à une liste quelconque de valeurs propres  $(a_m, b_m, c_e)$

de  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \rightarrow$  la mesure des valeurs propres spécifie complètement l'état

#### 4.4 conclusion

\* La mesure apporte une perturbation inévitable minimale au système mesuré.

Cette perturbation affecte essentiellement la variable conjuguée  $x \leftrightarrow p$ : "complémentaire"

\* Le monde quantique est-il déterministe ou indéterministe?

- Si on ne s'intéresse qu'aux valeurs moyennes, c'est tout à fait déterministe  
 (équation déf. du théorème d'Ehrenfest)

- Il y a un indéterminisme fondamental dans les systèmes individuels  
 (sauf s'ils sont états propres de la mesure)  $\rightarrow$  fluctuations quantiques autour  
 de la valeur moyenne.

- D'autres domaines de la physique ont aussi des fluctuations incontrôlées

\* physique statistique (fluctuations thermiques)

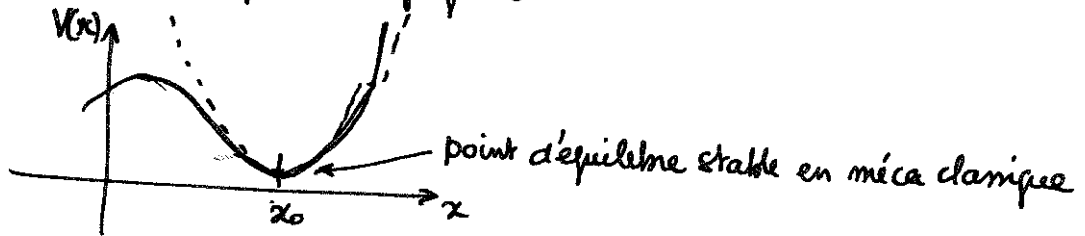
\* systèmes chaotiques (ex: météorologie, mais aussi système solaire!)

- L'incertitude quantique est de nature différente des cas précédents: elle  
 n'est pas due au fait qu'on ne connaît imparfaitement le système étudié  
 (on reviendra sur ce point plus tard)

# 5. L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

5-1)

On traite toujours d'une particule à 1 dimension soumise à un potentiel  $V(x)$ , mais qui a maintenant une forme plus compliquée



autour de  $x=x_0$  on peut approximer le potentiel par  $V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=x_0}$   
→ oscillateur harmonique

## 5-1 rappel classique

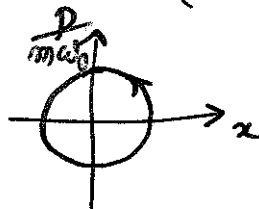
Le mouvement classique est une oscillation de fréquence  $\omega_0$  telle que  $\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{x=x_0}$

On prendra :

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad (x_0 = 0)$$

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$p = -m\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$



trajectoire elliptique dans l'espace des phases  $(x, p)$

état de plus basse énergie  $E=0$   $x=0$   $p=0$  (bille au repos au fond du potentiel)

## 5-2 approche par la fonction d'onde

### 5-2-1 états stationnaires

On cherche  $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$  avec  $\varphi$  tel que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi'' + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \varphi = E \varphi$$

- conditions aux limites  $\varphi \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow \pm\infty$

- équation quadratique bien connue des mathématiciens.

- Elle n'a de solution non divergente que pour des valeurs discrètes de l'énergie

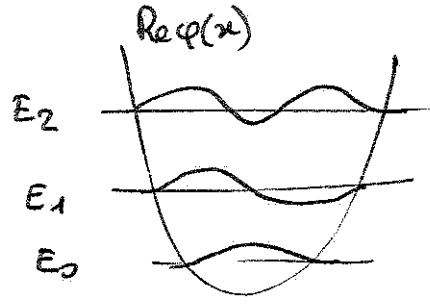
$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0$$

\* les fonctions d'onde correspondante s'écrivent

$$\varphi_n(x) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!} a} e^{-x^2/2a^2} H_n\left(\frac{x}{a}\right) \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$$

$H_n$ : polynome d'Hermite  $H_0(x) = 1$   $H_1 = 2x$   $H_2 = 4x^2 - 2$   $H_3 = 8x^3 - 12x$  ...

transparent



On remarque que les différences d'énergie  $E_m - E_{m'} = (m - m') \hbar \omega_0$  sont des multiples du "quantum"  $\hbar \omega_0$

5.2.2 état fondamental

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

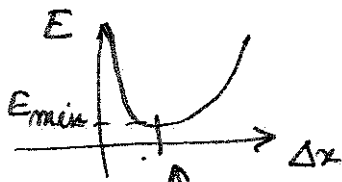
$$\varphi_0(x) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-x^2/2a^2}$$

$$\tilde{\varphi}_0(p) = \pi^{-1/4} \sqrt{\frac{a}{\hbar}} e^{-\frac{a^2 p^2}{2\hbar^2}}$$

probabilité de présence Gaussienne  $\Delta x = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta p = \frac{\hbar}{a\sqrt{2}}$

On voit bien que  $E_0 > 0$  l'état fondamental n'est pas le fond du puits, à cause de Heisenberg comme on l'a déjà vu. Peut-on retrouver simplement son énergie? La  $\neq$  avec le puits est que la taille du confinement n'est pas connue a priori. Elle change avec E. Appelons la  $\Delta x \rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{2\Delta x}$  pour le fondamental

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\Delta x)^2 + \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2}$$



$$\tilde{\varphi}_0(p) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{p_0}} e^{-p^2/2p_0^2} \quad p_0 = \frac{\hbar}{a} = \sqrt{\hbar m \omega_0}$$

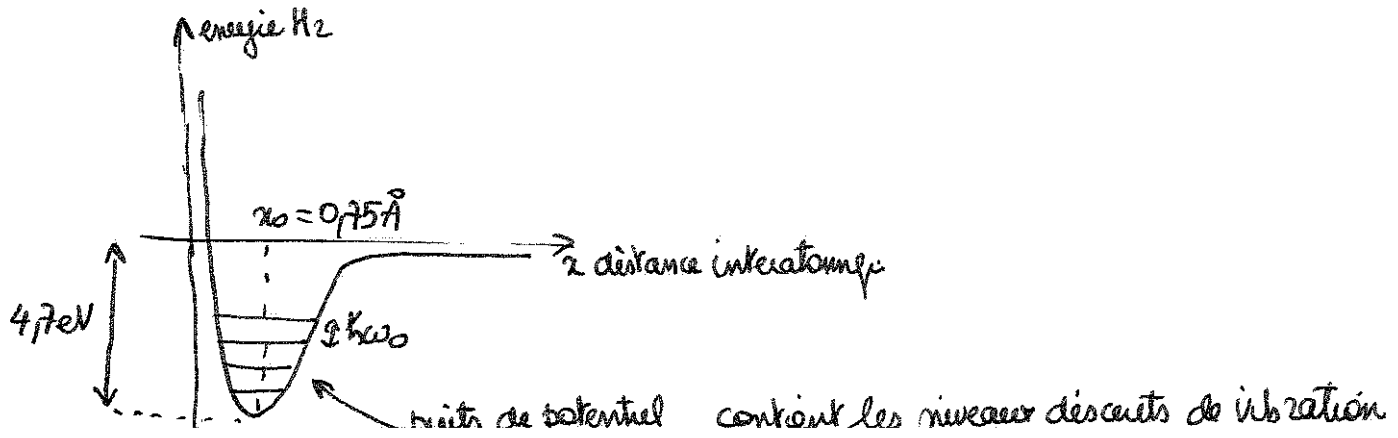
On trouve aisément que le minimum est pour  $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$  forme identique en x ou p.

$$E_{\min} \text{ vaut alors } \frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

On trouve exact<sup>+</sup> la bonne valeur car la fonction d'onde est Gaussienne et donne l'égalité de Hei. L'énergie du fondamental est l'énergie minimale compatible avec Heisenberg

5.2.3 molécule bi-atomique

Exemple  $H_2$  a une distance interatomique qui vaut  $x = x_0 = 0,75 \text{ \AA}$



Transitions entre ces niveaux s'effectuent sous l'effet d'un rayonnement incident à la fréquence  $m\hbar\omega_0$  (essentiellement  $m=1$ )  $\nu_0 = 5 \times 10^{13}$  Hz dans l'hydrogène ( $\lambda = 6 \mu\text{m}$ )  
 C'est une signature de la molécule (moyen de la détecter dans le milieu interstellaire)  
 (transparent) et H<sub>2</sub>  $\nu_0 = 7,68 \cdot 10^{13}$  Hz  $\text{CO}$   $6,42 \cdot 10^{13}$   
 ( $3,9 \mu\text{m}$ ) ( $4,7 \mu\text{m}$ )

### 5.3 Méthode opératoire

Nous allons voir si on peut trouver les éléments propres de l'hamiltonien par une méthode algébrique, en utilisant les relations de commutation.

#### 5.3.1 Hamiltonien de l'oscillateur harmonique

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{P}_x^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2 \quad \hat{P}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ ou } [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

On a vu qu'il y avait une taille caractéristique du problème  $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$

On écrit  $\hat{X} = \frac{\hat{x}}{a} \quad \hat{P} = \frac{a}{\hbar} \hat{p}_x \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i$

l'hamiltonien s'écrit alors  $\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} [\hat{X}^2 + \hat{P}^2]$  forme réduite

#### 5.3.2 opérateurs $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{N}$

La quantité classique  $\frac{1}{2}(X^2 + P^2)$  factorise en  $\frac{(X+iP)(X-iP)}{\sqrt{2}}$ . Nous allons introduire les opérateurs quantiques correspondants

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \Rightarrow \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$

$\hat{a}$  est un opérateur non hermitien. On a alors

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{1}{2} [\hat{X} + i\hat{P}, \hat{X} - i\hat{P}] = \frac{i}{2} ([\hat{X}, \hat{P}] + [\hat{P}, \hat{X}]) = 1$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1} \quad (\text{on écrit souvent } \hat{1} = 1)$$

On introduit aussi  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$   $\hat{N}$  est hermitien  $\hat{N}^\dagger = \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$

$$\hat{N} = \frac{1}{2} (\hat{X} - i\hat{P})(\hat{X} + i\hat{P}) = \frac{1}{2} (\hat{X}^2 - i\hat{P}\hat{X} + i\hat{X}\hat{P} + \hat{P}^2) \quad \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = i$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1)$$

D'où  $\hat{H} = \hbar\omega_0 (\hat{N} + \frac{1}{2})$