

Théorème d'Ehrenfest

Pour un opérateur \hat{A} **indépendant du temps**, l'évolution de sa valeur moyenne dans un état $|\Psi\rangle$, $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$, est donnée par :

$$\boxed{i\hbar \frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle} \quad (1)$$

Démonstration :

Rappel :

$$\frac{d}{dt} \langle \Phi | \Psi \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \Phi | \right) | \Psi \rangle + \langle \Phi | \left(\frac{d}{dt} | \Psi \rangle \right).$$

Donc

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = i\hbar \left(\left(\frac{d}{dt} \langle \Psi | \right) \hat{A} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \frac{d}{dt} (\hat{A} | \Psi \rangle) \right). \quad (2)$$

Or

$$\frac{d}{dt} | \Psi \rangle = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} | \Psi \rangle \quad (3)$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi | = \frac{-1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{H}^+ = \frac{-1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{H}$$

car \hat{H} est hermitien.

Donc dans l'équation 2 :

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = i\hbar \left(\frac{-1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{H} \hat{A} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{A} \frac{d}{dt} | \Psi \rangle \right). \quad (4)$$

car \hat{A} est indépendant du temps. Soit d'après l'équation 3

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = i\hbar \left(\frac{-1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{H} \hat{A} | \Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | \hat{A} \hat{H} | \Psi \rangle \right) \quad (5)$$

$$= \langle \Psi | \hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A} | \Psi \rangle \quad (6)$$

$$= \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \Psi \rangle \quad (7)$$

Cas général

De l'équation 2, si \hat{A} **dépend du temps**, on obtient facilement le cas général du théorème d'Ehrenfest :

$$\boxed{\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle + \frac{1}{i\hbar} \left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle} \quad (8)$$