

# Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations

Jean-Bernard Zuber

Service de Physique Théorique de Saclay \*  
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Cours donné au Magistère Interuniversitaire de Physique, Printemps 1994. (Réédition d'Octobre 2008)

---

\* Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Énergie Atomique



# Table des matières

CHAPITRE 1 : GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES. . . . .	1
1. Structure de groupe . . . . .	1
1.1. Définitions et exemples . . . . .	1
1.2. Classes d'un groupe . . . . .	1
2. Sous-groupes . . . . .	2
2.1. Définitions et exemples . . . . .	2
2.2. Ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini; théorème de Lagrange . . . . .	3
3. Homomorphismes de groupes . . . . .	3
3.1. Homomorphismes . . . . .	3
3.2. Automorphismes externes, internes . . . . .	3
4. Classes par rapport à un sous-groupe, sous-groupe invariant et groupe quotient . . . . .	4
4.1. Équivalence par rapport à un sous-groupe . . . . .	4
4.2. Sous-groupe invariant . . . . .	4
4.3. Groupe simple . . . . .	5
5. Produit direct, semi-direct de groupes . . . . .	5
6. Action d'un groupe sur un ensemble . . . . .	6
7. Le groupe symétrique . . . . .	7
8. Indications sur la classification des groupes finis . . . . .	9
Appendice A. Groupe libre. Groupe engendré par générateurs et relations . . . . .	12
CHAPITRE 2 : GÉNÉRALITÉS SUR LES REPRÉSENTATIONS. . . . .	14
1. Définitions de base . . . . .	14
1.1. Représentations équivalentes. Caractères . . . . .	15
1.2. Représentations réductibles et irréductibles . . . . .	15
1.3. Lemme de Schur . . . . .	18
2. Produit tensoriel de représentations ; décomposition de Clebsch-Gordan . . . . .	19
2.1. Produit tensoriel de représentations . . . . .	19
2.2. Décomposition de Clebsch-Gordan . . . . .	19
3. Représentation régulière . . . . .	21
3.1. Définition . . . . .	21
3.2. Cas d'un groupe fini . . . . .	22
4. Représentations des groupes finis . . . . .	22
4.1. Orthogonalité et complétude . . . . .	23
4.2. Conséquences . . . . .	26
5. Un groupe continu : $U(1)$ . . . . .	28
6. Symétries et Représentations en Mécanique Quantique . . . . .	30
6.1. Transformations d'un système quantique. Théorème de Wigner . . . . .	30
6.2. Groupe de transformations. Représentations projectives . . . . .	31

6.3. Transformations des observables. Théorème de Wigner-Eckart . . . . .	32
6.4. Invariance et lois de conservation . . . . .	33

CHAPITRE 3 : ROTATIONS DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS. . . . .	44
1. Un bref retour sur le groupe $SO(2)$ . . . . .	44
2. Rotations de $\mathbb{R}^3$ , les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$ . . . . .	47
2.1. Le groupe $SO(3)$ , groupe à trois paramètres . . . . .	47
2.2. Topologie du groupe $SO(3)$ , le groupe $SU(2)$ . . . . .	48
2.3. Mesure invariante sur $SU(2)$ . . . . .	50
3. Générateurs infinitésimaux. L'algèbre de Lie $su(2)$ . . . . .	51
3.1. Générateurs infinitésimaux de $SO(3)$ . . . . .	52
3.2. Générateurs infinitésimaux dans $SU(2)$ . . . . .	53
3.3. Algèbre de Lie $su(2)$ . . . . .	55
4. Représentations de $SU(2)$ . . . . .	57
4.1. Représentations de l'algèbre de Lie et représentations du groupe . . . . .	57
4.2. Représentations de l'algèbre $su(2)$ . . . . .	59
4.3. Construction explicite . . . . .	63
4.4. Orthogonalité, complétude, caractères . . . . .	64
4.5. Fonctions spéciales. Harmoniques sphériques . . . . .	65
5. Produit direct de représentations de $SU(2)$ . . . . .	68
5.1. Produit direct de représentations et l'“addition de moments angulaires” . . . . .	68
5.2. Coefficients de Clebsch-Gordan, symboles $3-j$ et $6-j$ . . . . .	70
6. Applications physiques . . . . .	73
6.1. Moments multipolaires . . . . .	73
6.2. Etats propres de moment angulaire en Mécanique Quantique . . . . .	74
6.3. L'isospin . . . . .	74
Appendice B. Métrique, mesure d'intégration et laplacien sur une variété . . . . .	86

CHAPITRE 4 : REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SYMÉTRIQUE. . . . .	88
1. Tableaux d'Young. Algèbre du groupe et idempotents . . . . .	88
1.1. Tableaux d'Young . . . . .	88
1.2. Algèbre du groupe, idéaux et idempotents . . . . .	89
1.3. Idempotent associé à un tableau d'Young . . . . .	90
2. Miscellanées . . . . .	94
3. Application au groupe linéaire . . . . .	97
4. Particules indiscernables en Mécanique Quantique . . . . .	99
4.1. Postulat de symétrie/antisymétrie . . . . .	99
4.2. Parastatistiques, groupe des tresses, . . . . .	101
Appendice C. Formule de Frobenius . . . . .	104

## GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES

## 1. Structure de groupe

## 1.1. Définitions et exemples

Un *groupe* est un ensemble muni d'une opération associative, d'un élément neutre  $e$  et tel que tout élément  $x$  possède un inverse  $x^{-1}$ . L'opération sera notée selon les cas  $+$ , (loi additive), ou  $\times$ ,  $\cdot$ , (loi multiplicative), ou encore  $*$ ,  $\circ$ , etc... On a donc

$$\forall a, b \in G, \quad a.b \in G \quad (1.1a)$$

$$\forall a, b, c \in G, \quad a.(b.c) = (a.b).c \quad (1.1b)$$

$$\exists e \in G, \forall a, \quad a.e = e.a = a \quad (1.1c)$$

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \quad a.a^{-1} = a^{-1}.a = e \quad (1.1d)$$

L'opération peut être ou non commutative. Un groupe commutatif est aussi dit *abélien*.

Un groupe peut avoir un nombre d'éléments, ou *ordre*, fini ou infini. Dans le second cas, le groupe peut être discret ou continu.

**Exemples** Un exemple de groupe fini commutatif est fourni par le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_p$  d'ordre  $p$ , groupe multiplicatif des racines  $p$ -ièmes de l'unité. Le groupe  $S_n$  des permutations de  $n$  objets, ou *groupe symétrique*, est non abélien pour  $n \geq 3$ . Son ordre est  $n!$ . Le groupe additif  $\mathbb{Z}$  est un groupe discret, le groupe multiplicatif  $U(1)$  des phases  $\exp i\theta$  est continu abélien, le groupe  $SO(3)$  des rotations de l'espace euclidien de dimension 3, ou le groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  des transformations linéaires inversibles de l'espace de dimension  $n$  sont non-abéliens. Rappelons aussi la définition des groupes de matrices classiques :

- :  $O(n)$ , matrices orthogonales  $O$  de dimension  $n$ ,  $O.O^T = \mathbb{I}$  qui sont donc les matrices de transformation laissant invariante la forme bilinéaire  $\vec{x}.\vec{y} = \sum_i x_i y_i$ , et son sous-groupe  $SO(n)$  de matrices qui satisfont en outre  $\det O = 1$ ;
- :  $U(n)$  groupe de matrices unitaires complexes,  $U.U^\dagger = \mathbb{I}$ , donc laissant invariante la forme sesquilinéaire  $(x, y) = \sum x_i^* y_i$ , et son sous-groupe  $SU(n)$  de matrices de déterminant un :  $\det U = 1$ ;
- :  $Sp(2n)$ , groupe symplectique de matrices  $S$  réelles  $2n \times 2n$  laissant invariante la forme antisymétrique  $x^T g y = \sum x_i g_{ij} y_j$  où  $g$  a la forme  $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbb{I}_n$  étant la matrice identité  $n \times n$ ; les matrices  $S$  satisfont donc  $S^T g S = g$ .

## 1.2. Classes d'un groupe

On définit sur un groupe  $G$  la relation d'équivalence suivante:

$$a \sim b \text{ si } \exists g \in G : a = g.b.g^{-1} \quad (1.2)$$

et on dit aussi que les éléments  $a$  et  $b$  sont *conjugués*.

Les classes d'équivalence qui en découlent réalisent une partition de  $G$ , puisque tout élément appartient à une classe et une seule. Noter que l'élément neutre constitue à lui seul une classe. Pour un groupe fini, les différentes classes ont en général des ordres différents.

Cette notion de classe est familière dans le cas du groupe  $SU(n)$ , où une classe est caractérisée par un  $n$ -tuple non ordonné de valeurs propres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Elle joue un rôle important dans la discussion des représentations des groupes et sera abondamment illustrée par la suite, et dès la fin de ce chapitre sur le cas du groupe symétrique.

Ce type de classe d'équivalence ne doit pas être confondu avec celui impliquant un sous-groupe, que nous examinerons à la section 4.

## 2. Sous-groupes

### 2.1. Définitions et exemples

Un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est un sous-ensemble de  $G$  ayant lui-même la structure de groupe. Pour qu'un sous-ensemble  $H$  de  $G$  soit un sous-groupe, il faut et il suffit que pour toute paire d'éléments  $a$  et  $b$  de  $H$ ,  $a.b^{-1}$  appartienne aussi à  $H$  (le vérifier!). Le sous-groupe est *propre* s'il n'est pas identique à  $G$ .

Si  $H$  est un sous-groupe, pour tout  $a \in G$ , l'ensemble  $a^{-1}.H.a$  des éléments de la forme  $a^{-1}.h.a$ ,  $h \in H$  forme aussi un sous-groupe, dit *sous-groupe conjugué* de  $H$ .

Des exemples de sous-groupes particuliers sont donnés par :

\* le sous-groupe engendré par un élément:

Soit  $a$  un élément de  $G$  différent de l'élément neutre  $e$ . Le sous-ensemble  $\{\dots, a^{-n}, \dots, a^{-1}, e, a, \dots\}$  est un sous-groupe. Supposons qu'il soit d'ordre fini : il existe  $p$  et  $q$  tels que  $a^p = a^q$ . Par l'existence de l'inverse, ceci implique que  $a^{p-q} = e$ . Soit  $n$  le plus petit entier positif tel que  $a^n = e$ . Un tel groupe est dit *cyclique*, d'ordre  $n$  et de générateur  $a$ . Le groupe  $\mathbb{Z}_p$  défini plus haut est cyclique d'ordre  $p$ .

\* le centre  $Z$  :

Soit  $G$  un groupe. On appelle *centre* de  $G$  l'ensemble  $Z$  des éléments qui commutent avec tous les éléments de  $G$  :

$$Z = \{a \mid \forall g \in G, a.g = g.a\} \quad (2.1)$$

$Z$  est un sous-groupe de  $G$ , propre si  $G$  est non-abélien. Exemple : le centre du groupe  $GL(2, \mathbb{R})$  des matrices régulières  $2 \times 2$  est l'ensemble des matrices multiples de  $\mathbb{I}$ .

\* le centralisateur d'un élément  $a$  :

Le *centralisateur* (ou *commutant*) d'un élément  $a$  fixé de  $G$  est l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec  $a$ .

$$Z_a = \{g \in G \mid a.g = g.a\} \quad (2.2)$$

Le commutant  $Z_a$  n'est jamais vide : il contient au moins le sous-groupe engendré par  $a$ . Le centre  $Z$  est l'intersection de tous les commutants. Exemple: dans le groupe  $GL(2, \mathbb{R})$ , le commutant de la matrice de Pauli  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est le groupe abélien des matrices de la forme  $a\mathbb{I} + b\sigma_1$ ,  $a^2 - b^2 \neq 0$ .

\* Plus généralement, étant donnée une partie  $S$  d'un groupe  $G$ , on définit son *centralisateur*  $Z(S)$  et son *normalisateur*  $N(S)$  comme les sous-groupes commutant respectivement individuellement avec tout

élément de  $S$  ou globalement avec  $S$  tout entier

$$\begin{aligned}Z(S) &= \{y : \forall s \in S \quad y.s = s.y\} \\N(S) &= \{x : x^{-1}.S.x = S\} .\end{aligned}$$

## 2.2. Ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini; théorème de Lagrange

Soit  $H = \{e, h_1, h_2, \dots, h_{p-1}\}$  un sous-groupe propre d'un groupe fini  $G$ . Désignons par  $n$  l'ordre de  $G$ , par  $p$  celui de  $H$ . Le théorème de Lagrange assure que  $p$  divise  $n$ . Pour le prouver, considérons un élément  $g$  de  $G$  n'appartenant pas à  $H$ . Les éléments  $g.e, g.h_1, \dots, g.h_{p-1}$  sont tous différents et n'appartiennent pas à  $H$  : ils forment un ensemble noté  $g.H$ . Si on a atteint ainsi tous les éléments de  $G$ , le théorème est prouvé :  $n = 2p$ . Sinon, il existe un élément  $g'$  n'appartenant ni à  $H$  ni à  $g.H$  et on itère le procédé. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on a épuisé tous les éléments et le théorème est prouvé. L'entier  $n/p$  est appelé *indice* du sous-groupe  $H$  dans  $G$ . Un corollaire est qu'un groupe dont l'ordre est un nombre premier est nécessairement cyclique donc abélien.

## 3. Homomorphismes de groupes

### 3.1. Homomorphismes

Un *homomorphisme* d'un groupe  $G$  sur un groupe  $G'$  est une application  $\rho$  de  $G$  sur  $G'$  qui respecte la loi de composition:

$$\forall a, b \in G, \quad \rho(a.b) = \rho(a).\rho(b) \tag{3.1}$$

En particulier, à l'élément neutre de  $G$  correspond par  $\rho$  celui de  $G'$ , à l'inverse de  $a$  correspond l'inverse de  $a' = \rho(a)$ , etc.

Le *noyau* de l'homomorphisme noté  $\ker \rho$  ("kernel" en anglais) est l'ensemble des antécédents de l'élément neutre  $e'$  de  $G'$ . C'est un sous-groupe de  $G$ .

Par exemple, la parité (ou signature) d'une permutation de  $S_n$  définit un homomorphisme de  $S_n$  dans  $\mathbb{Z}_2$ . Son noyau est constitué des permutations paires : c'est le *groupe alterné*  $A_n$  d'ordre  $n!/2$ . Un homomorphisme bijectif entre  $G$  et  $G'$  est appelé un isomorphisme de  $G$  et  $G'$ . Ainsi, le groupe additif des entiers modulo  $p$ , le groupe multiplicatif des racines  $p$ -ièmes de l'unité, le groupe des rotations planes par un angle  $2\pi k/p$  et le groupe des permutations circulaires de  $p$  objets sont isomorphes et seront tous notés  $\mathbb{Z}_p$ .

### 3.2. Automorphismes externes, internes

Un isomorphisme d'un groupe sur lui-même est appelé un *automorphisme*. Par exemple, dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{Z}_p$  considéré comme contenu dans  $\mathbb{C}$ , la conjugaison complexe  $z \rightarrow \bar{z}$  est un automorphisme. Les automorphismes d'un groupe forment un groupe  $\text{Aut } G$ . Soit  $a$  un élément fixe de  $G$ . L'*automorphisme interne* associé à  $a$  est défini par

$$x \rightarrow x' = axa^{-1} = \sigma_a(x). \tag{3.2}$$

Les automorphismes internes forment eux-mêmes un groupe  $\text{Int}G$  homomorphe à  $G$  puisque  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_{a.b}$ .

On nomme *automorphismes externes* les automorphismes non internes (ô la Palice!!). Par exemple, la conjugaison complexe dans  $\mathbb{Z}_p$ .

Quel est le noyau de l'homomorphisme  $\sigma$  de  $G$  dans  $\text{Int}G$  ?

#### 4. Classes par rapport à un sous-groupe, sous-groupe invariant et groupe quotient

##### 4.1. Équivalence par rapport à un sous-groupe

Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ . On définit la relation entre éléments de  $G$  :

$$a \sim b \iff a.b^{-1} \in H. \quad (4.1)$$

C'est une relation d'équivalence (le vérifier), dite équivalence à droite. On peut définir de la même façon une équivalence à gauche par

$$a \sim_g b \iff a^{-1}.b \in H. \quad (4.2)$$

Cette relation (à droite) définit des classes d'équivalence qui donnent une partition de  $G$ ; si  $x_j$  est un représentant de la classe  $j$ , on peut noter cette dernière  $H.x_j$ . (Les anglophones utilisent le terme "right-coset" pour cette classe). Les éléments de  $H$  forment à eux-seuls une classe. Si  $H$  est d'ordre fini  $|H|$ , toutes les classes ont  $|H|$  éléments, et si  $G$  est lui-même d'ordre fini  $|G|$ , il est partitionné en  $|G|/|H|$  classes, et on retrouve le théorème de Lagrange de la section 2.2.

L'équivalence à gauche donne en général une partition différente. Par exemple, le groupe  $S_3$  possède un sous-groupe  $\mathbb{Z}_2$  engendré par la permutation des deux éléments 1 et 2; on vérifie que les classes à gauche et à droite ne coïncident pas.

##### 4.2. Sous-groupe invariant

Un sous-groupe *invariant* (on dit aussi *distingué* ou *normal*) est un sous-groupe tel que les deux relations d'équivalence à gauche et à droite soient confondues. De façon équivalente, un sous-groupe invariant de  $G$  est stable par tous les automorphismes internes de  $G$ , c'est-à-dire il est identique à tous ses sous-groupes conjugués (tous ces énoncés tautologiques visent à rendre familier avec la terminologie introduite précédemment).

Dans ce cas, on a la conséquence importante que l'ensemble quotient  $G/H$  est lui-même doté de la structure de groupe : c'est le *groupe quotient* (ou groupe *facteur*)

$$\begin{aligned} a \sim a' \quad b \sim b' &\Rightarrow \exists h, h', h'' \in H : a = a'.h, \quad b = b'.h' \\ &\Rightarrow a.b = a'.h.b'.h' = a'.b'.h'' \sim a'.b' \end{aligned}$$

puisque les éléments  $b.h'$ ,  $h.b$ ,  $h.b.h'$  appartiennent tous à la classe de  $b$ . Réciproquement l'ensemble quotient  $G/H$  est un groupe seulement si  $H$  est un sous-groupe invariant (le vérifier). Attention!  $G/H$  n'est pas un sous-groupe de  $G$ ; il peut arriver toutefois qu'il soit isomorphe à un sous-groupe de  $H$ .

Exemples de sous-groupes invariants : Le centre d'un groupe, le noyau d'un homomorphisme d'un groupe  $G$  dans un groupe  $G'$  sont des sous-groupes invariants : que sont les groupes quotients?

### 4.3. Groupe simple

Un groupe est dit *simple* s'il n'a pas de sous-groupe invariant non trivial (c'est-à-dire différent de  $\{e\}$  et de lui-même).

Cette notion est importante dans l'étude des représentations et la classification des groupes.

Exemples : le groupe cyclique d'ordre  $n$ , nombre premier, est simple (preuve dans la section 2.2). Le groupe des rotations à deux dimensions n'est pas simple (pourquoi?). Le groupe  $SO(3)$  est simple (la preuve non triviale en sera donnée au chapitre 3). Le groupe  $S_n$  n'est pas simple, pour  $n > 2$  (pourquoi?).

## 5. Produit direct, semi-direct de groupes

Soient  $G$  et  $H$  deux groupes. L'ensemble produit, c'est-à-dire l'ensemble des couples d'éléments de  $G$  et  $H$  est muni d'une structure de groupe

$$(a, b).(a', b') = (a.a', b.b') \quad \forall a, a' \in G, \quad b, b' \in H \quad (5.1)$$

C'est le *produit direct*  $G \times H$  des groupes  $G$  et  $H$ . Un exemple est fourni dans l'espace euclidien à 4 dimensions par les paires de rotations indépendantes de deux plans orthogonaux qui forment le groupe  $SO(2) \times SO(2)$ , sous-groupe de  $SO(4)$ .

Si " $G$  agit dans  $H$ ", c'est-à-dire s'il existe un homomorphisme de  $G$  dans  $\text{Aut } H$ ,  $a \in G \mapsto \sigma(a) \in \text{Aut } H$ , satisfaisant donc

$$\sigma(a).\sigma(a') = \sigma(a.a') \quad (5.2)$$

on note  ${}^a b = \sigma(a)b$  l'action de cet automorphisme sur l'élément  $b$  de  $H$ . On peut définir une structure de groupe plus subtile sur l'ensemble produit : le *produit semi-direct* de  $H$  par  $G$  (dans cet ordre), noté <sup>1</sup>  $G \times_{\sigma} H$  ou  $G \ltimes H$ , est donné par

$$(a, b).(a', b') = (a.a', b.{}^a b') . \quad (5.3)$$

Vérifier que l'inverse de l'élément  $(a, b)$  s'écrit  $(a^{-1}, a^{-1}b^{-1})$ . Des exemples s'imposent : Le groupe euclidien à  $d$  dimensions (groupe des déplacements dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ ) est le produit semi-direct du groupe des translations (de vecteur  $a_i$ ) par le groupe des rotations (matrices orthogonales  $\omega_{ij}$ ) :

$$(\omega, a).(a', a') = (\omega.\omega', a + \omega a') \quad (5.4)$$

comme on s'en convainc en composant deux actions successives sur un vecteur <sup>2</sup>

$$x_i \mapsto x'_i = a_i + \omega_{ij} x_j . \quad (5.5)$$

On voit sur cet exemple que le produit semi-direct de deux groupes abéliens est en général non-abélien. Un autre exemple très voisin est fourni par le groupe de Poincaré de la Relativité, produit semi-direct du groupe des translations de l'espace-temps à quatre dimensions par le groupe de Lorentz engendré par les rotations de l'espace  $\mathbb{R}^3$  et les transformations de Lorentz

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} - \frac{\vec{v}.\vec{x}}{v^2} \vec{v} + \frac{\frac{\vec{v}.\vec{x}}{v^2} - t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \\ t' &= \frac{t - \frac{\vec{x}.\vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \end{aligned} \quad (5.6)$$

<sup>1</sup> notations non standardisées

<sup>2</sup> Ici et dans toute la suite de ces notes, on utilise la convention de sommation implicite sur les indices répétés, sauf indication contraire; ainsi,  $\omega_{ij} x_j$  signifie  $\sum_j \omega_{ij} x_j$ .

qui préservent la norme  $\vec{x}^2 - c^2t^2$ . Dans l'un et l'autre cas on peut représenter les transformations sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Un autre exemple est donné par le groupe symétrique  $S_3$  qui peut être vu comme le produit semi-direct du groupe  $\mathbb{Z}_3$  par le groupe  $\mathbb{Z}_2$  (le vérifier).

Si  $K = G \times_{\sigma} H$ , on vérifie aisément que l'ensemble des éléments de la forme  $(e, b)$  est un sous-groupe invariant de  $K$  isomorphe à  $H$  :

$$\begin{aligned} (a', b').(e, b).(a', b')^{-1} &= (a', b').(a'^{-1}, b.a'^{-1}b'^{-1}) \\ &= (e, b'.a'.b.b'^{-1}) \end{aligned}$$

et que l'ensemble des  $(a, e)$  est un sous-groupe isomorphe à  $G$ . Chaque classe du groupe quotient  $K/H$  admet un représentant de la forme  $(a, e)$  ce qui fait que

$$K/H \sim G. \quad (5.9)$$

Ceci explique l'importance de la notion de groupe simple : un groupe simple est irréductible au sens de l'écriture comme produit semi-direct de deux autres groupes. Réciproquement, si un groupe  $K$  admet un sous-groupe invariant  $H$  et si le quotient est isomorphe à un sous-groupe  $G$  de  $K$ , peut-on alors écrire que  $K$  est le produit semi-direct de  $H$  par  $G$  ? (exercice 6).

## 6. Action d'un groupe sur un ensemble

Soit  $E$  un ensemble, les bijections de  $E$  dans lui-même forment un groupe noté  $\text{Bij}(E)$ . On dit qu'un groupe  $G$  agit dans un ensemble  $E$  s'il existe un homomorphisme de  $G$  dans  $\text{Bij}(E)$ . Autrement dit, à tout élément  $g$  de  $G$  on peut associer une bijection  $\beta(g)$  de  $E$ , avec compatibilité des lois de composition, à l'élément neutre de  $G$  correspond l'application identité, etc ... Par exemple, le groupe des rotations agit dans l'espace euclidien.

Si  $x \in E$ , l'ensemble des transformés  $\beta(G)x$  est l'*orbite*  $\mathcal{O}(x)$  de  $x$ . L'appartenance à une même orbite est une relation d'équivalence, et  $E$  est la réunion de classes d'équivalence. Dans l'exemple précédent, les orbites sont les sphères centrées à l'origine, ainsi que l'orbite singulière formée par l'origine elle-même.

Un ensemble  $E$  est un *espace homogène* (pour l'action d'un groupe  $G$ ) s'il n'a qu'une seule orbite. Pour tout couple d'éléments  $x$  et  $y$  de  $E$ , il existe  $g \in G$  tel que  $\beta(g)x = y$ . On dit encore que  $G$  agit de façon transitive sur  $E$ . Un exemple est fourni par le cas où  $E$  est le groupe  $G$  lui-même, et l'action est  $g \in G, x \in G \mapsto \beta(g)x = y = g.x$  (action à gauche). On a bien sûr la même propriété avec l'action à droite.

On définit encore le *groupe d'isotropie* (alias *petit-groupe* ou *stabilisateur*) de l'élément  $x$  comme le sous-groupe de  $G$  qui laisse  $x$  invariant :

$$S(x) = \{g \in G : \beta(g)x = x.\} \quad (6.1)$$

Si deux points de  $E$  appartiennent à la même orbite, leurs groupes d'isotropie sont conjugués :

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow \exists g \in G : x = \beta(g)y \\ \forall a \in S(x) \quad \beta(a)x = \beta(a.g)y = \beta(g)y &\Rightarrow g^{-1}.a.g \in S(y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

donc

$$S(y) = g^{-1}S(x)g. \quad (6.3)$$

Dans l'exemple du groupe des rotations, le groupe d'isotropie d'un point  $x \neq 0$  n'est autre que le groupe des rotations autour de l'axe joignant  $x$  à l'origine : c'est un groupe abélien et l'ensemble quotient  $SO(3)/S(x)$  est une sphère.

Montrer qu'en général il existe une correspondance biunivoque entre les points de l'orbite  $\mathcal{O}(x)$  et l'ensemble quotient  $G/S(x)$ , qui est donc un espace homogène pour  $G$ . La réciproque de (6.3) n'est pas

vraie : deux points peuvent avoir des groupes d'isotropie conjugués sans être sur la même orbite. On dira alors qu'ils sont sur la même strate : une *strate* est l'union des orbites dont les groupes d'isotropie sont conjugués. Dans l'exemple précédent, l'espace est partitionné en deux strates, correspondant aux points distincts de l'origine d'une part, à l'origine de l'autre.

Un cas particulièrement important, (puisqu'il fait l'objet de ce cours!), est celui où l'ensemble  $E$  est un espace vectoriel pour lequel les transformations naturelles sont les transformations linéaires. On demande donc que  $D$  soit un homomorphisme de  $G$  dans le groupe linéaire  $GL(E)$

$$\forall g \in G \quad D(g) \in GL(E) \quad (6.4)$$

et on dit alors qu'on a une *représentation* de  $G$  (ou qu'on a représenté  $G$ ) dans l'espace  $E$ .

## 7. Le groupe symétrique

Arrêtons nous un moment sur le cas du groupe symétrique  $S_n$  puisqu'il va revenir souvent par la suite. Soit un ensemble fini  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  de  $n$  "lettres" (ou objets), qu'on représentera plus simplement par leurs indices  $\{1, 2, \dots, n\}$ . On appelle substitution ou par abus de langage permutation de cet ensemble une bijection  $j \mapsto \sigma(j) = i_j$  qu'on note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

ou plus simplement  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , avec  $\sigma(j) = i_j$ . On compose ces permutations par  $\tau \cdot \sigma(j) = \tau(\sigma(i)) = \tau(i_j)$ . Par exemple,  $(2, 3, 1)(2, 1, 3) = (3, 2, 1)$  tandis que  $(2, 1, 3)(2, 3, 1) = (1, 3, 2)$ . La loi est bien associative mais pas commutative en général. La permutation identité sera notée  $I = (1, 2, \dots, n)$ , et l'inverse de  $\sigma$  est donné par

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

et le groupe est noté  $S_n$ . Il est d'ordre  $n!$

On peut toujours écrire

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \sigma(1) & \sigma^2(1) & \dots & \sigma^{k-1}(1) & \alpha & \dots & \xi \\ \sigma(1) & \sigma^2(1) & \dots & \dots & 1 & \sigma(\alpha) & \dots & \sigma(\xi) \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

avec peut-être  $k = n$  (auquel cas  $\alpha, \dots$  sont absents). La permutation  $\sigma$  est le produit (commutatif car portant sur des indices différents) de la *permutation cyclique* (ou circulaire, ou *cycle*) de longueur  $k$   $(1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1})$  et de la permutation  $\begin{pmatrix} \alpha & \dots & \xi \\ \sigma(\alpha) & \dots & \sigma(\xi) \end{pmatrix}$ .

En itérant la méthode sur cette dernière, on voit qu'on peut décomposer toute permutation en produit commutatif de cycles. Cette décomposition est unique (le vérifier). Chaque cycle portant sur  $k$  indices donnés, par exemple  $(1, 2, \dots, k)$  engendre un sous-groupe isomorphe au groupe cyclique  $\mathbb{Z}_k$ .

Supposons qu'on ait décomposé une permutation  $\sigma$  en cycles de longueur  $k_1, k_2, \dots, k_p$ ,  $\sum k_i = n$ , alors pour toute permutation  $\tau$ ,  $\tau^{-1} \cdot \sigma \cdot \tau$  admet aussi une décomposition en cycles de longueur  $k_1, \dots, k_p$  (le vérifier). Inversement si deux permutations  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont une décomposition en cycles de longueurs  $k_1, \dots, k_p$ , elles sont équivalentes : il existe  $\tau$  telle que  $\sigma' = \tau^{-1} \cdot \sigma \cdot \tau$ . En d'autres termes, la décomposition en cycles de longueur donnée est une caractérisation des classes d'équivalence du groupe  $S_n$ . On peut donc désigner une classe de  $S_n$  par la longueur des cycles : soient  $\nu_1$  le nombre de cycles de longueur 1 (c'est à dire de lettres invariantes),  $\nu_2$  le nombre de cycles de longueur 2 (transpositions), etc. On a bien sûr  $\sum j\nu_j = n$ . On note  $\underline{\nu} = [1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots]$  cette classe et on démontre que le nombre de permutations distinctes dans cette classe est

$$n_{\underline{\nu}} = \frac{n!}{\prod \nu_j! j^{\nu_j}} . \quad (7.3)$$

Toute permutation  $\sigma$  est d'ordre fini  $p$ , qui est le plus petit entier tel que  $\sigma^p = I$ , c'est-à-dire l'ordre du sous-groupe cyclique engendré par  $\sigma$ . Pour un cycle portant sur  $k$  indices, l'ordre est  $k$ ; pour une permutation se décomposant en cycles de longueurs  $k_1, \dots, k_q$ ,  $p = \text{ppcm}(k_1, \dots, k_q)$  dont on vérifie qu'en accord avec le théorème de Lagrange, il divise bien toujours  $n!$ .

Les transpositions sont des cycles portant sur deux indices. Nous les noterons  $(i, j)$ . On démontre aisément que toute permutation peut se mettre sous la forme d'un produit de transpositions. Ceci résulte par exemple de la même propriété pour tout cycle de longueur  $k$ :

$$(1, 2, \dots, k) = (1, k) \dots (1, 3) \cdot (1, 2) . \quad (7.4)$$

Cette décomposition n'est pas unique!! Ce qui est unique, par contre, est la *parité* du nombre de transpositions dans toute décomposition d'une permutation  $\sigma$  donnée. Pour le démontrer, introduisons le *déterminant de Vandermonde* : étant donnés  $n$  nombres  $x_i \in \mathbb{C}$  tous *distincts*, soit

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) . \quad (7.5)$$

L'action du groupe  $S_n$  peut être représentée sous forme matricielle sur les variables  $x_i \mapsto x_{\sigma^{-1}(i)}$

$$\begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ x_{\sigma^{-1}(2)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix} = (\Sigma_{i,j}(\sigma)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{i,j}(\sigma) = \delta_{i,\sigma(j)} . \quad (7.6)$$

Il s'agit bien d'une représentation au sens précédent : au produit de deux permutations  $\sigma$  et  $\sigma'$  correspond la matrice  $\Sigma(\sigma.\sigma')$ . Sous l'action d'une permutation  $\sigma$ ,  $\Delta$  change par le signe  $\det \Sigma(\sigma)$ , qui est la *signature* ou *parité*  $\epsilon_\sigma$  de  $\sigma$ . Ce nombre  $\epsilon = \pm 1$  donne un homomorphisme du groupe  $S_n$  dans le groupe  $\mathbb{Z}_2$  : autrement dit

$$\epsilon_{\sigma' . \sigma} = \epsilon_{\sigma'} \epsilon_\sigma . \quad (7.7)$$

(Pourquoi ?) Une transposition ne change qu'un seul signe dans le produit (7.5), donc si  $\sigma$  a pu être écrite comme produit de  $p$  transpositions

$$\epsilon_\sigma = (-1)^p \quad (7.8)$$

ce qui établit le fait que la parité de  $p$  est une propriété intrinsèque de  $\sigma$ . Le noyau de l'homomorphisme  $\sigma \mapsto \epsilon_\sigma$  de  $S_n$  dans  $\mathbb{Z}_2$  est le sous-groupe (invariant) alterné  $A_n$  des permutations paires, d'ordre  $n!/2$ .

Étudier la décomposition d'un cycle en transpositions et en déduire que

$$\epsilon_\sigma = (-1)^{n + \text{nombre de cycles de } \sigma} . \quad (7.9)$$

## 8. Indications sur la classification des groupes finis

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $n$ . A tout élément fixé  $a$ , on associe la transformation  $\varphi_a$

$$\forall x \in G \quad x \mapsto \varphi_a(x) = a.x . \quad (8.1)$$

Elle effectue une permutation des  $n$  éléments de  $G$ , et il y a isomorphisme entre  $G$  et l'ensemble des  $\varphi$  :

$$\varphi_{a.b} = \varphi_a . \varphi_b . \quad (8.2)$$

Noter que la permutation  $\varphi$  ne laisse aucun élément invariant, ce qui implique que tous ses cycles ont la même longueur (le vérifier). Il en découle le théorème de Cayley : Tout groupe fini d'ordre  $n$  est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique  $S_n$ .

Ce théorème n'empêche pas le problème de la classification des groupes finis simples d'être un problème très ardu, dont la solution complète n'a été obtenue que récemment. On peut résumer de façon très outrancière la situation en disant que les groupes finis simples viennent en plusieurs familles infinies : groupes cycliques d'ordre premier, groupes alternés  $A_n$  pour  $n \geq 5$ , groupes construits en parallèle avec les groupes de Lie classiques dont il sera question plus bas, et en 26 groupes exceptionnels dits *sporadiques*. Le plus gros et le plus complexe de ces groupes sporadiques a été surnommé le "Monstre", ce que justifie entre autres son ordre :

$$80801742479451287588645990496171075700575436800000000$$

Ces groupes sporadiques sont encore mal connus et leur étude, en particulier celles de leurs représentations, est un sujet très actif en mathématiques, où de façon inattendue la Physique a apporté quelques contributions (théories des cordes et relations avec le Monstre).

Plus modestes, mais d'usage plus courant pour le physicien, sont les sous-groupes finis du groupe des rotations  $SO(3)$ . On démontre que ces groupes viennent en deux familles infinies et trois cas exceptionnels. Les familles infinies sont constituées des groupes cycliques  $\mathbb{Z}_p$  qui décrivent des rotations d'angle  $2\pi\frac{k}{p}$  autour d'un axe et les groupes *diédraux*  $D_{2p}$  qui outre les rotations précédentes contiennent une rotation de  $\pi$  autour d'un axe orthogonal; on peut considérer ces groupes comme les groupes d'invariance de rotation respectifs d'une pyramide ou d'un prisme de base  $p$ -gonale (voir figure). Les trois cas exceptionnels sont les groupes d'invariance (de rotation) des "solides platoniciens", c'est-à-dire le groupe du tétraèdre  $T_{12}$ , le groupe du cube ou de l'octaèdre  $O_{24}$  et celui de l'icosaèdre ou du dodécaèdre  $I_{60}$  (dans tout cet alinéa, l'indice dans le symbole d'un groupe indique son ordre). (Les paires de solides sus-mentionnés sont duales, ce qui veut dire que les sommets de l'un sont en correspondance avec les centres des faces de l'autre, et les groupes s'identifient).

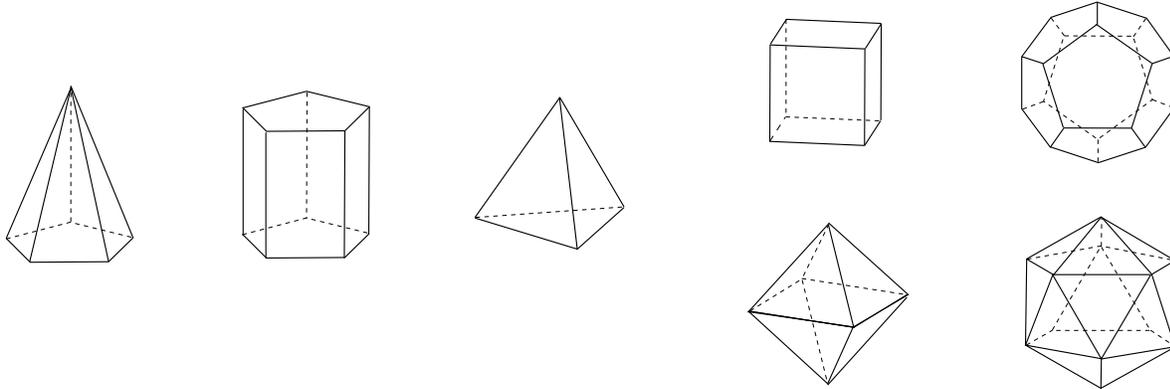


Figure 1.1 Solides laissés invariants par les sous-groupes du groupe des rotations.

Une autre classification chère au cœur des physiciens du solide est celle des groupes cristallographiques. On cherche les *groupes ponctuels*, c'est-à-dire des sous-groupes de  $O(3)$  (rotations *et* réflexions) conservant les noeuds d'un réseau engendré par les combinaisons à coefficients entiers de trois vecteurs non coplanaires. On trouve 32 tels groupes; un résultat intermédiaire important est que les rotations sont de  $2\pi\frac{k}{p}$ , avec  $p$  au plus égal à 6 et différent de 5.

On considère un plan contenant des points du réseau. Ce plan est supposé invariant par une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  qui permute les points du réseau ( $O$  est ou non un point du réseau). L'angle  $\theta$  est de la forme  $2\pi\frac{q}{p}$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux, donc par le théorème de Bezout, on peut trouver un multiple de  $\theta$  égal à  $2\pi/p$  modulo  $2\pi$ . On peut donc aussi bien considérer les rotations de  $2\pi/p$  et multiples.

Soit  $A$  un point du réseau à distance minimale (non nulle) de  $O$ ,  $A'$  et  $A''$  ses images par les rotations d'angle  $\pm\theta$ . Le point  $B$  défini par  $\vec{OB} = \vec{OA'} + \vec{OA''}$  est un point du réseau sur la droite  $OA$  et est plus proche de  $O$  que  $A$  (et  $\neq O$ ) sauf si  $|2\cos\theta| \geq 1$ . Si  $0 < \theta \leq \pi$ , ceci implique soit  $\theta \geq \frac{2\pi}{3}$ , soit  $\theta \leq \frac{2\pi}{6}$ , soit  $\theta = \frac{2\pi}{4}$  et exclut immédiatement  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ . Montrer qu'on peut aussi éliminer les angles multiples de  $2\pi/p$ ,  $p \geq 7$ , le cas de  $p = 8$  nécessitant un traitement séparé.

On arrêtera ici cette discussion, en renvoyant aux nombreux ouvrages de cristallographie pour un traitement systématique de ces questions.

## Références :

Pour les groupes cristallographiques, lire par exemple M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw Hill; ou L. Landau et E. Lifschitz, *Mécanique Quantique*.

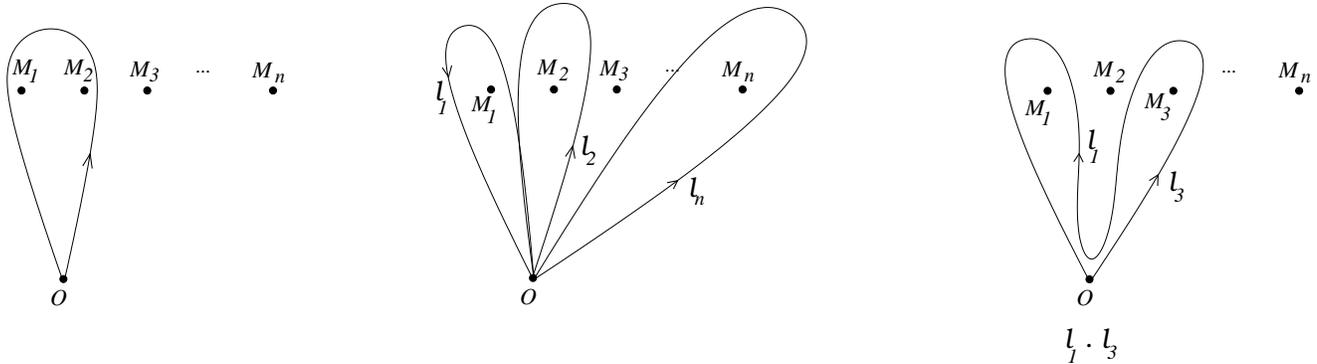
## Exercices

1. Dresser les tables de multiplication des groupes d'ordre 2, 3 ou 4. Montrer qu'il existe deux groupes d'ordre 4. L'un est le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_4$ , quelle est l'interprétation géométrique de l'autre, noté  $D_4$  ? Montrer qu'il s'écrit  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .
2. Considérer le groupe de symétrie du carré, constitué des rotations autour de l'origine et des symétries par rapport aux axes médians et aux diagonales. C'est le groupe diédral noté  $D_8$  (groupe du carré). Quel est son ordre, sa table de multiplication? Étudier ses classes, ses sous-groupes. Est-il simple ?
3. Considérer l'action sur un groupe  $G$  d'un sous-groupe  $H$ , définie comme pour l'action du groupe :  $h \in H, x \in G \mapsto \beta(h)x = h.x$ . Que sont les orbites d'un élément  $x$  donné?
4. Étudier les groupes de rotation du tétraèdre, du cube et de l'icosaèdre. Pour chacun, compter le nombre de rotations autour des axes joignant les paires de sommets opposés, les paires de milieux d'arêtes opposées et les paires de faces opposées (le cas échéant). En déduire les valeurs des ordres données plus haut. Ces groupes ont-ils des sous-groupes invariants? Montrer que ces trois groupes s'identifient respectivement aux groupes  $A_4$  (groupe alterné de 4 objets : facile !),  $S_4$  (plus délicat !) et  $A_5$  (difficile !) (indication : dans chaque cas, on cherchera des éléments géométriques de la figure considérée, au nombre respectivement de 4, 4 et 5, qui sont permutés par l'action du groupe).
5. Preuve de (7.3). On pourra étudier le nombre des permutations de  $S_n$  qui préservent une classe  $[1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots]$  donnée.
- 6.★ Soit  $K$  un groupe ayant un sous-groupe invariant  $H$ , soit  $G$  un autre sous-groupe de  $K$  tel que  $G \cap H = \{e\}$  et que  $K = H.G$ , en ce sens que tout élément de  $K$  peut s'écrire  $k = h.g$ . Montrer en introduisant l'automorphisme  $\sigma : h \rightarrow g^{-1}hg$  de  $H$  avec  $g \in G$  (automorphisme interne pour  $K$ , mais externe pour  $H$ ) que  $K = G \times_{\sigma} H$ , si on identifie  $(g, h) \equiv h.g$
7. Montrer que toute permutation est produit de deux cycles non nécessairement disjoints.

# Appendice A. Groupe libre. Groupe engendré par générateurs et relations

1. Un *groupe libre*  $G$  est un groupe engendré par un ensemble  $S$  de générateurs  $g_i, i = 1, 2, \dots$ , tels que si  $g_i \in S$ , alors  $g_i^{-1} \in S$ .  $G$  est donc l'ensemble des mots  $g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_n}$ , où on s'interdit d'écrire à la suite un générateur et son inverse  $\dots g_i g_i^{-1} \dots$ . Un théorème dont l'énoncé a une trompeuse simplicité affirme que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Un groupe cyclique est un exemple évident de tel groupe. Plus intéressant, on s'intéresse en topologie aux chemins fermés orientés ou *lacets* dans le plan privé de  $n$  points  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 - \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ , partant et revenant à l'origine  $O$ . Deux chemins obtenus par déformation continue dans  $\mathcal{E}$  (donc ne croisant pas les points  $M_i$ ) sont dits *homotopes* et identifiés au sein d'une classe d'homotopie. On peut inverser un lacet en le parcourant en sens inverse et composer deux lacets en les parcourant consécutivement, opérations compatibles avec l'homotopie. Ceci munit l'ensemble des classes d'homotopie d'une structure de groupe, c'est le *groupe d'homotopie*  $\pi_1(\mathcal{E})$ , notion qu'on retrouvera plus bas au chapitre 3. Il est assez intuitif et on démontre que  $\pi_1(\mathcal{E})$  est un groupe libre engendré par des lacets élémentaires  $\ell_1, \dots, \ell_n$  n'enserrant respectivement que  $M_1, \dots, M_n$ .



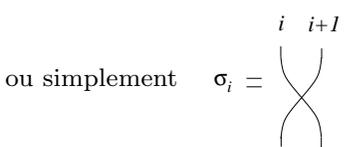
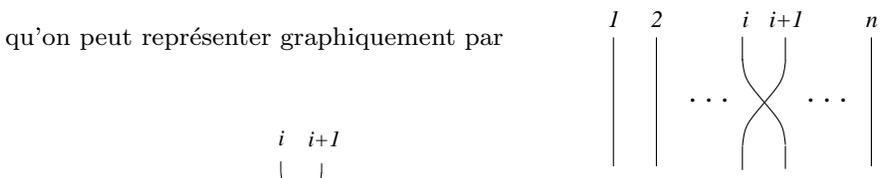
**Fig. 1.2** Lacets dans le plan privé des points  $M_1, M_2, \dots, M_n$ ; les lacets élémentaires  $\ell_1, \dots, \ell_n$ ; composition des lacets  $\ell_1$  et  $\ell_3$ .

2. La plupart des groupes ne peuvent être considérés comme groupes libres, mais peuvent être engendrés par un système de générateurs, *sujets à des relations*. Il s'agit là d'une façon importante de définir un groupe, bien différente de la façon usuelle de se donner la "table de multiplication", c'est-à-dire la loi de composition de toute paire d'éléments.

Un exemple est fourni par le groupe d'homotopie du tore  $T$  qui est engendré par deux générateurs  $a$  et  $b$  sujets à la contrainte  $a.b = b.a$ ; c'est donc le produit direct des deux groupes (isomorphes à  $\mathbb{Z}$ ) engendrés par  $a$  et  $b$ :  $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Un autre exemple est offert par le groupe symétrique  $S_n$  dont on démontre aisément qu'il est engendré par les  $n - 1$  transpositions d'éléments consécutifs :

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i+1 & i & \dots & n \end{pmatrix} \tag{A.1}$$



Les  $\sigma_i$  satisfont les relations

$$\sigma_i^2 = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \hline \end{array} = e \quad (A.2a)$$

$$(\sigma_i \cdot \sigma_j)^2 = \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \hline \hline \end{array} \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \quad (A.2b)$$

$$(\sigma_i \cdot \sigma_{i+1})^3 = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \hline \hline \end{array} = e \quad i = 1, \dots, n - 2 . \quad (A.2c)$$

On peut encore remplacer (A.2b) par  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  pour  $|i - j| \geq 2$  et (A.2c) par

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \hline \end{array} = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \hline \hline \end{array}$$

On retrouvera ces relations et leur élaboration à la fin du chapitre 4.

**Référence** : H.S.M. Coxeter et W.O.J. Moser, *Generators and Relations for discrete Groups*, Springer Verlag.

## GÉNÉRALITÉS SUR LES REPRÉSENTATIONS

## 1. Définitions de base

Rappelons tout d'abord la définition introduite au chapitre précédent. Un groupe  $G$  est représenté dans un espace vectoriel  $E$  (sur un corps qui pour nous sera toujours  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) si on a un homomorphisme  $D$  du groupe  $G$  dans un sous-groupe  $\mathcal{G}$  du groupe des transformations linéaires  $GL(E)$  :

$$\begin{aligned} \forall g \in G \quad g &\mapsto D(g) \in GL(E) \\ \forall g, g' \in G \quad D(g.g') &= D(g).D(g') \\ D(e) &= \mathbb{I} \\ \forall g \in G \quad D(g^{-1}) &= (D(g))^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $\mathbb{I}$  désigne l'opérateur identité dans  $GL(E)$ . La représentation qui à tout  $g \in G$  associe  $\mathbb{I} \in GL(E)$  est appelée triviale ou représentation identité. Si l'espace de représentation est de dimension  $p$ , la représentation est dite elle-même de dimension  $p$ .

La représentation est dite *fidèle* si  $G$  est isomorphe à  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire si  $\ker D = \{e\}$ , ou encore si  $D(g) = D(g') \Leftrightarrow g = g'$ . Sinon, le noyau de l'homomorphisme est un sous-groupe invariant  $H$ , et la représentation est fidèle de  $G/H$  dans  $E$ . Réciproquement, si  $G$  a un sous-groupe invariant, toute représentation de  $G/H$  est une représentation dégénérée de  $G$ . En conséquence, toute représentation non triviale d'un groupe simple est fidèle.

Si  $E$  est de dimension finie  $p$ , on peut choisir une base  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , et associer à tout  $g \in G$  la matrice représentative de  $D(g)$  :

$$D(g)e_j = e_i \mathcal{D}_{ij}(g) \tag{1.2}$$

avec, comme toujours dans ces notes, la convention de sommation sur les indices répétés. La disposition des indices ( $i$ : indice de ligne,  $j$  indice de colonne) peut étonner, elle est dictée par la loi (1.1). En effet, on a bien

$$\begin{aligned} D(g.g')e_k &= e_i \mathcal{D}_{ik}(g.g') \\ &= D(g)(D(g')e_k) = D(g)e_j \mathcal{D}_{jk}(g') \\ &= e_i \mathcal{D}_{ij}(g) \mathcal{D}_{jk}(g') \end{aligned} \tag{1.3}$$

donc  $\mathcal{D}_{ik}(g.g') = \mathcal{D}_{ij}(g) \mathcal{D}_{jk}(g')$ .

Exemple : le groupe des rotations dans le plan admet une représentation de dimension deux, avec des matrices

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

qui décrivent bien les rotations d'angle  $\theta$  autour de l'origine.

Nous allons maintenant chercher à affiner la discussion en nous débarrassant de certaines redondances.

### 1.1. Représentations équivalentes. Caractères

Soient  $D$  et  $D'$  deux représentations de  $G$  dans des espaces  $E$  et  $E'$ , supposons qu'il existe un opérateur linéaire  $V$  de  $E$  dans  $E'$  tel que

$$\forall g \in G \quad VD(g) = D'(g)V . \quad (1.5)$$

Un tel  $V$  est dit *opérateur d'entrelacement* ("intertwiner" en anglais). Si  $V$  est inversible (et donc  $E$  et  $E'$  ont même dimension, si elle est finie), on dit que les représentations  $D$  et  $D'$  sont *équivalentes*. (C'est une relation d'équivalence entre représentations !).

Dans le cas de dimension finie, où on identifie  $E$  et  $E'$ , on voit que les matrices représentatives de  $D$  et  $D'$  sont reliées par une transformation de similitude et peuvent être considérées comme différant par un changement de base. Il n'y a donc pas lieu de distinguer fondamentalement deux représentations équivalentes.

On appelle *caractère* d'une représentation de dimension finie la trace de l'opérateur  $D(g)$  :

$$\chi(g) = \text{tr}D(g) . \quad (1.6)$$

C'est une fonction de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Le caractère est indépendant du choix de base dans  $E$ . Deux représentations équivalentes ont le même caractère. Le caractère prend la même valeur pour les différents éléments d'une même classe de  $G$  : on dit que le caractère est une *fonction de classe* :  $\chi(g) = \chi(xgx^{-1})$ . La réciproque, à savoir sous quelles conditions une fonction de classe peut s'exprimer en termes des caractères, sera l'objet d'une discussion ultérieure. On notera encore que le caractère, évalué pour l'élément identité du groupe, fournit la dimension de la représentation

$$\chi(e) = \dim D . \quad (1.7)$$

### 1.2. Représentations réductibles et irréductibles

Un autre type de redondance est lié à la somme directe des représentations. Supposons qu'on ait construit deux représentations  $D_1$  et  $D_2$  de  $G$  dans deux espaces  $E_1$  et  $E_2$ . On peut alors construire une représentation dans l'espace somme directe  $E = E_1 \oplus E_2$  et la représentation est dite somme directe des représentations  $D_1$  et  $D_2$  et notée  $D_1 \oplus D_2$ . (Rappelons que tout vecteur de  $E_1 \oplus E_2$  peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'un vecteur de  $E_1$  et d'un vecteur de  $E_2$ ). Les sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  de  $E$  sont bien sûr laissés invariants.

Inversement, si une représentation de  $G$  dans un espace  $E$  laisse invariant un sous-espace de  $E$ , elle est dite *réductible*. Dans le cas contraire, elle est *irréductible*. Si  $D$  est réductible et laisse le sous-espace  $E_1$  invariant, et aussi son sous-espace supplémentaire  $E_2$ , on dit que la représentation est *complètement réductible* (on dit aussi *décomposable*); on peut alors considérer  $E$  comme somme directe de  $E_1$  et  $E_2$  et la représentation comme somme directe des représentations dans  $E_1$  et  $E_2$ .

Si  $E$  est de dimension finie, ceci se traduit simplement sur les matrices de la représentation qui prennent la forme suivante (dans une base adaptée à la décomposition !) en termes de blocs de dimensions  $\dim E_1$  et  $\dim E_2$

$$\forall g \in G \quad \mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1(g) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_2(g) \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Si la représentation est réductible sans être complètement réductible, sa matrice prend la forme, dans une base constituée par une base de  $E_1$  et d'une base d'un sous-espace supplémentaire

$$\mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1(g) & \mathcal{D}'(g) \\ 0 & \mathcal{D}_2(g) \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

C'est le cas des représentations du groupe des translations à une dimension. La représentation

$$\mathcal{D}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

est réductible, puisqu'elle laisse invariants les vecteurs  $(X, 0)$  mais n'a pas de sous-espace supplémentaire invariant.

Par contre, si la représentation réductible de  $G$  dans  $E$  laisse invariant le sous-espace  $E_1$ , il existe une représentation dans le sous-espace quotient  $E_2 = E/E_1$ . Dans les notations de l'équ. (1.9), sa matrice représentative est  $\mathcal{D}_2(g)$ .

Il faut encore souligner l'importance du corps de base dans la discussion de l'irréductibilité. C'est ainsi que la représentation (1.4) qui est irréductible sur un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ne l'est pas sur  $\mathbb{C}$ : on peut au prix d'un changement de base la récrire comme

$$\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

#### *Représentations conjuguée et adjointe.*

Etant donnée une représentation  $D$ , soit  $\mathcal{D}$  sa matrice dans une certaine base, les matrices  $\mathcal{D}^*$  complexes conjuguées forment une autre représentation  $D^*$  dite conjuguée, puisqu'elles satisfont bien (1.3)

$$\mathcal{D}_{ik}^*(g.g') = \mathcal{D}_{ij}^*(g)\mathcal{D}_{jk}^*(g').$$

La représentation  $D$  est dite *réelle* s'il existe une base où  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ . Cela implique que  $\chi$  est réel. Réciproquement si  $\chi$  est réel, la représentation  $D$  est équivalente à sa conjuguée  $D^*$ <sup>3</sup>. Si les représentations  $D$  et  $D^*$  sont équivalentes mais qu'il n'existe pas de base

---

<sup>3</sup> Ceci est vrai au moins pour les représentations irréductibles des groupes finis ou continus compacts pour lesquelles on verra plus bas (sect. 4 et chap. 3) que deux représentations irréductibles non équivalentes ne peuvent avoir le même caractère.

où  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^*$ , les représentations sont dites *pseudoréelles*. (C'est par exemple le cas de la représentation de spin  $\frac{1}{2}$  de  $SU(2)$ .)

La représentation *contragradiante* de  $D$  est définie quant à elle par

$$\overline{\mathcal{D}}(g) = {}^t D^{-1}(g)$$

c'est-à-dire  $\overline{\mathcal{D}}_{ij}(g) = \mathcal{D}_{ji}(g^{-1})$ , qui satisfait bien aussi (1.3). Les représentations  $D$ ,  $D^*$  et  $\overline{D}$  sont simultanément réductibles ou irréductibles.

### Représentations unitaires

Supposons que l'espace vectoriel  $E$  possède un produit scalaire (forme  $J(x, y) = \langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$  bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}$ , ou sesquilinéaire sur  $\mathbb{C}$ ), tel que la norme soit définie positive :  $x \neq 0 \Rightarrow \langle x|x \rangle > 0$ . On peut donc trouver une base orthonormale où la matrice de  $J$  se réduit à  $\mathbb{I}$  et y définir des opérateurs unitaires  $U$  tels que  $UU^\dagger = \mathbb{I}$ . Une représentation de  $G$  dans  $E$  est dite *unitaire* si pour tout  $g \in G$ , la matrice  $\mathcal{D}(g)$  est unitaire. On a donc pour tous  $g \in G$  et  $x, y \in E$

$$\begin{aligned} \langle x|y \rangle &= \langle D(g)x|D(g)y \rangle \\ \text{donc } \mathcal{D}(g)^\dagger \mathcal{D}(g) &= \mathbb{I} \end{aligned} \tag{1.11}$$

et

$$\boxed{\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{D}^{-1}(g) = \mathcal{D}^\dagger(g)} \tag{1.12}$$

c'est-à-dire  $\overline{D} = D^*$ .

On a les propriétés importantes suivantes :

(i) Toute représentation unitaire réductible est complètement réductible.

En effet soit  $E_1$  un sous-espace invariant,  $E_2$  son espace supplémentaire est invariant puisque pour tout  $g \in G$ ,  $x \in E_1$  et  $y \in E_2$  on a

$$\langle x|D(g)y \rangle = \langle D(g^{-1})x|y \rangle = 0 \tag{1.13}$$

ce qui prouve que  $D(g)y \in E_2$ .

(ii) Toute représentation d'un groupe fini sur un espace doté d'un produit scalaire est équivalente à une représentation unitaire.

Pour montrer cela formons

$$Q = \sum_{g' \in G} D^\dagger(g')D(g') \tag{1.14}$$

qui satisfait

$$D^\dagger(g)QD(g) = \sum_{g'} D^\dagger(g'.g)D(g'.g) = Q \tag{1.15}$$

où on a remplacé  $\sum_{g'}$  par  $\sum_{g'.g}$  ("lemme de réarrangement"). La matrice hermitique  $Q$  est définie positive, (pourquoi ?), on peut donc l'écrire sous la forme

$$Q = V^\dagger V \tag{1.16}$$

avec  $V$  inversible. L'entrelaceur  $V$  définit une représentation  $D'$  équivalente à  $D$  et unitaire :

$$\begin{aligned} D'(g) &= VD(g)V^{-1} \\ D'^{\dagger}(g)D'(g) &= V^{\dagger-1}D^{\dagger}(g)V^{\dagger}VD(g)V^{-1} \\ &= V^{\dagger-1}D^{\dagger}(g)QD(g)V^{-1} = V^{\dagger-1}QV^{-1} = \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Comme corollaire des deux propriétés précédentes, toute représentation réductible d'un groupe fini est complètement réductible. Il s'agit donc de classifier les représentations unitaires irréductibles.

### 1.3. Lemme de Schur

Soit deux représentations irréductibles  $D$  dans  $E$  et  $D'$  dans  $E'$  et un opérateur d'entrelacement entre elles, comme défini en (1.5). On a alors l'important

**Lemme** ou bien  $V = 0$ , ou bien  $V$  est une bijection et les représentations sont équivalentes.

Preuve : Supposons  $V \neq 0$ . Alors  $VD(g) = D'(g)V$  implique que le noyau de  $V$  est un sous-espace invariant de  $E$ ; par l'hypothèse d'irréductibilité, il se réduit donc à 0 (il ne peut être égal à  $E$  tout entier sans quoi  $V$  serait nul). De même, l'image de  $V$  est un sous-espace invariant de  $E'$ , il ne peut être nul et est donc identique à  $E'$ . Des théorèmes classiques sur les applications linéaires entre espaces vectoriels, il découle que  $V$  est une bijection de  $E$  dans  $E'$  et que les représentations sont donc équivalentes. c.q.f.d.

N.B. Si les deux représentations ne sont pas irréductibles, c'est bien sûr faux en général. Un contre-exemple est fourni par la représentation (1.10) qui commute avec les matrices

$$V = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Corollaire 1.** *Tout opérateur d'entrelacement d'une représentation irréductible sur le corps  $\mathbb{C}$  avec elle-même, c'est-à-dire tout opérateur commutant avec tous les représentants du groupe, est un multiple de l'identité.*

En effet, sur  $\mathbb{C}$ ,  $V$  a au moins une valeur propre  $\lambda$  (qui est non nulle puisque  $V$  est inversible par le lemme de Schur). L'opérateur  $V - \lambda\mathbb{I}$  est lui aussi un opérateur d'entrelacement, mais il est singulier donc nul.

**Corollaire 2.** *Une représentation irréductible sur  $\mathbb{C}$  d'un groupe abélien est nécessairement de dimension 1.*

En effet, soit  $g' \in G$ ,  $D(g')$  commute avec tous les  $D(g)$ . Donc  $D(g') = \lambda(g')\mathbb{I}$ . La représentation se décompose en  $\dim D$  copies de la représentation de dimension 1 :  $g \mapsto \lambda(g)$ .

Insistons sur l'importance du caractère algébriquement clos de  $\mathbb{C}$ , par opposition à  $\mathbb{R}$ , dans ces deux corollaires. La représentation sur  $\mathbb{R}$  du groupe  $SO(2)$  par les matrices  $\mathcal{D}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  vient fournir des contrexemples aux deux propriétés précédentes : toute matrice  $\mathcal{D}(\alpha)$  commute avec  $\mathcal{D}(\theta)$  mais n'a pas de valeur propre réelle et la représentation est irréductible, quoique de dimension deux.

## 2. Produit tensoriel de représentations ; décomposition de Clebsch-Gordan

### 2.1. Produit tensoriel de représentations

Une méthode couramment utilisée pour construire des représentations irréductibles d'un groupe donné consiste à faire le produit tensoriel de représentations connues et à le décomposer en représentations irréductibles. C'est aussi la situation qu'on rencontre en Mécanique Quantique, quand on connaît la transformation des composantes d'un système et qu'on étudie comment le système entier se transforme (système de deux particules de spin  $j_1$  et  $j_2$  par exemple).

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux espaces vectoriels portant des représentations  $D_1$  et  $D_2$  d'un groupe  $G$ . L'espace produit tensoriel  $E = E_1 \otimes E_2$  est l'espace engendré par les combinaisons linéaires de "produits" (tensoriels) d'un élément de  $E_1$  et d'un élément de  $E_2$  :  $z = \sum x^{(i)} \otimes y^{(i)}$ . L'espace  $E$  porte lui même une représentation, notée  $D = D_1 \otimes D_2$ , *produit tensoriel* (ou *produit direct*) des représentations  $D_1$  et  $D_2$ . Sur l'élément  $z$  ci-dessus

$$D(g)z = \sum_i D_1(g)x^{(i)} \otimes D_2(g)y^{(i)}. \quad (2.1)$$

On vérifie immédiatement que le caractère de la représentation  $D$  est le produit des caractères  $\chi_1$  et  $\chi_2$  de  $D_1$  et  $D_2$

$$\chi(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) \quad (2.2)$$

En particulier en évaluant cette relation pour  $g = e$ , on a pour des représentations de dimension finie

$$\dim D = \dim(E_1 \otimes E_2) = \dim E_1 \cdot \dim E_2 = \dim D_1 \cdot \dim D_2 \quad (2.3)$$

comme il est bien connu pour un produit tensoriel.

### 2.2. Décomposition de Clebsch-Gordan

La représentation produit direct de deux représentations  $D$  et  $D'$  n'est en général pas irréductible. Si elle est complètement réductible (comme c'est le cas pour les représentations unitaires qui vont nous intéresser au premier chef), on effectue la *décomposition de Clebsch-Gordan* en représentations irréductibles

$$D \otimes D' = \oplus_j D_j \quad (2.4)$$

où au second membre apparaissent un certain nombre de représentations irréductibles  $D_1, \dots$ . Si les représentations irréductibles inéquivalentes de  $G$  ont été classées et indexées :  $D^{(\rho)}$ , on peut préférer à (2.4) une autre écriture qui indique lesquelles de ces représentations inéquivalentes apparaissent, *et avec quelle multiplicité*

$$D \otimes D' = \oplus_{\rho} m_{\rho} D^{(\rho)}. \quad (2.5)$$

Les entiers  $m_\rho$  sont non négatifs. Les équations (2.4) et (2.5) impliquent des règles simples sur les caractères et les dimensions

$$\begin{aligned}\chi_D \cdot \chi_{D'} &= \sum_j \chi_j = \sum_\rho m_\rho \chi^{(\rho)} \\ \dim D \cdot \dim D' &= \sum_j \dim D_j = \sum_\rho m_\rho \dim D^{(\rho)} .\end{aligned}\tag{2.6}$$

Exemple : le produit tensoriel de deux copies de l'espace euclidien de dimension 3 ne forme pas une représentation irréductible du groupe des rotations. Cet espace est engendré par les produits tensoriels de vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et on sait construire le produit scalaire  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  qui est invariant par le groupe (représentation triviale), un tenseur antisymétrique à deux indices

$$A_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$$

qui se transforme comme une représentation irréductible de dimension 3 (de spin 1, en anticipant un peu sur la discussion du chapitre suivant) <sup>4</sup> et un tenseur symétrique de trace nulle

$$S_{ij} = x_i y_j + x_j y_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \vec{x} \cdot \vec{y}$$

qui se transforme selon une représentation irréductible de dimension 5 (spin 2); le total des dimensions est bien sûr de  $9 = 3 \times 3 = 1 + 3 + 5$  et en repérant dans ce cas simple les représentations par leur dimension, on écrit

$$D^{(3)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus D^{(3)} \oplus D^{(5)} .\tag{2.7}$$

On a de même

$$D^{(3)} \otimes D^{(3)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus 3D^{(3)} \oplus 2D^{(5)} \oplus D^{(7)} .$$

La vérification directe est un peu laborieuse, et on verra au chapitre 3 l'origine de ces décompositions.

La formule (2.4) décrit comment dans une transformation du groupe les matrices de représentation se décomposent en représentations irréductibles. Il est aussi souvent important de savoir comment les vecteurs des représentations concernées se décomposent. Soit  $\psi_\alpha^{(\rho)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, \dim D^{(\rho)}$ , une base de vecteurs donnés de la représentation  $\rho$ . On cherche à développer le produit de deux tels objets soit  $\psi_\alpha^{(\rho)} \psi_\beta^{(\sigma)}$  sur des  $\psi_\gamma^{(\tau)}$ . Comme la représentation  $\tau$  peut intervenir un nombre  $m_\tau$  de fois, il convient d'introduire un indice supplémentaire  $i = 1, \dots, m_\tau$ . On écrira

$$\psi_\alpha^{(\rho)} \psi_\beta^{(\sigma)} = \sum_{\tau, \gamma, i} C_{\rho, \alpha; \sigma, \beta | \tau, \gamma} \psi_\gamma^{(\tau_i)} .\tag{2.8}$$

---

<sup>4</sup> (un tel tenseur est "dual" d'un vecteur :  $A_{ij} = \epsilon_{ijk} z_k$ )

ou encore avec des notations plus familières en Mécanique Quantique

$$|\rho, \alpha; \sigma, \beta\rangle \equiv |\rho\alpha\rangle|\sigma\beta\rangle = \sum_{\tau, \gamma, i} \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle |\tau_i \gamma\rangle . \quad (2.9)$$

Les coefficients  $C_{\rho, \alpha; \sigma, \beta | \tau_i, \gamma} = \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle$  sont les *coefficients de Clebsch-Gordan*. Au contraire des  $m_\rho$  de (2.5), ils n'ont aucune raison d'être entiers, comme on le verra par la suite dans le cas du groupe des rotations, ni même réels en général. Supposons que les représentations considérées sont unitaires et que les bases ont été choisies orthonormées. Les coefficients de C.-G. qui représentent un changement de base orthonormée dans l'espace  $E_1 \otimes E_2$  satisfont donc à des relations d'orthonormalité et de complétude

$$\begin{aligned} \sum_{\tau, \gamma, i} \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha'; \sigma, \beta' \rangle^* &= \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\beta, \beta'} \\ \sum_{\alpha, \beta} \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle \langle \tau'_j \gamma' | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle^* &= \delta_{\tau, \tau'} \delta_{\gamma, \gamma'} \delta_{i, j} . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ceci permet d'inverser la relation (2.9) en

$$|\tau_i \gamma\rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle^* |\rho, \alpha; \sigma, \beta\rangle \quad (2.11)$$

et justifie la notation

$$\langle \rho, \alpha; \sigma, \beta | \tau_i \gamma \rangle = \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle^* \quad (2.12)$$

$$|\tau_i \gamma\rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle \rho, \alpha; \sigma, \beta | \tau_i \gamma \rangle |\rho, \alpha; \sigma, \beta\rangle . \quad (2.13)$$

Finalement en appliquant une opération du groupe aux deux membres de (2.9) et en utilisant ces relations, on décompose le produit des matrices  $\mathcal{D}^{(\rho)}$  et  $\mathcal{D}^{(\sigma)}$  de façon tout à fait explicite

$$\mathcal{D}_{\alpha\alpha'}^{(\rho)} \mathcal{D}_{\beta\beta'}^{(\sigma)} = \sum_{\tau, \gamma, \gamma', i} \langle \tau_i \gamma | \rho \alpha \sigma \beta \rangle^* \langle \tau_i \gamma' | \rho \alpha' \sigma \beta' \rangle \mathcal{D}_{\gamma\gamma'}^{(\tau_i)} . \quad (2.14)$$

### 3. Représentation régulière

#### 3.1. Définition

Une représentation va jouer un rôle important dans plusieurs raisonnements de la suite : c'est la *représentation régulière* par laquelle le groupe  $G$  agit sur les fonctions sur  $G$ . Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions sur  $G$  :

$$f : x \in G \rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \quad (3.1)$$

Sur cet espace  $E$ ,  $G$  agit par

$$g \in G, f \in E \mapsto gf \in E : \forall x \in G : (D^{\text{reg}}(g)f)(x) = (gf)(x) = f(g^{-1}.x) . \quad (3.2)$$

La notation implique qu'on évalue la fonction  $gf$  au point  $x$ . Noter le passage à l'inverse!! Il est nécessaire pour avoir la propriété d'homomorphisme :  $(g_2.g_1)f = g_2(g_1f)$  puisque

$$(g_2(g_1f))(x) = (g_1f)(g_2^{-1}.x) = f(g_1^{-1}.g_2^{-1}.x) = f((g_2.g_1)^{-1}.x) = ((g_2.g_1)f)(x) . \quad (3.3)$$

En langage ordinaire, la signification de (3.2) est que la transformée  $gf$  prend en  $x$  la valeur que la fonction initiale  $f$  prenait au point antécédent de  $x$ .

En fait, dans un groupe continu comme le groupe des rotations (cf. chap. suivant) l'espace  $E$  est de dimension infinie, et on aura besoin de se restreindre à des fonctions bien définies, typiquement de carré intégrable sur le groupe.

### 3.2. Cas d'un groupe fini

L'espace  $E$  des fonctions a pour dimension l'ordre  $n$  du groupe  $G$ . Ceci est apparent si on choisit un système de fonctions indexées par les éléments du groupe

$$f_g(x) = \delta_{g,x} . \quad (3.4)$$

Ces fonctions sont indépendantes (pourquoi ?) et forment une base de  $E$ . Dans cette base, la représentation régulière agit comme une permutation (cf. le théorème de Cayley, au chapitre 1, sec.8)

$$g'f_g(x) = f_g(g'^{-1}.x) = \delta_{g,g'^{-1}x} = \delta_{g'.g,x} = f_{g'.g}(x) . \quad (3.5)$$

donc  $g'f_g = f_{g'.g}$ . Si  $g' \neq e$ , tous les éléments diagonaux de la représentation régulière  $\mathcal{D}^{(\text{reg})}(g')$  sont nuls, donc aussi le caractère  $\chi^{(\text{reg})}$ , tandis que si  $g' = e$ , ce caractère est égal à la dimension  $n$  de la représentation régulière. Donc

$$\chi^{(\text{reg})}(g) = n\delta_{g,e} , \quad (3.6)$$

une formule qui va nous être fort utile dans la suite. Insistons sur le fait que la représentation n'est en général pas irréductible, comme on le verra dans la section suivante.

## 4. Représentations des groupes finis

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux représentations des groupes finis sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$ . La plupart des résultats qu'on va obtenir sont basés sur le fait qu'on peut effectuer la sommation sur les éléments du groupe. Ces résultats pourront se généraliser par la suite à des groupes infinis, pourvu qu'on puisse y donner un sens à cette sommation.

#### 4.1. Orthogonalité et complétude

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $n$ , désignons ses représentations irréductibles inéquivalentes par un indice supérieur :  $D^{(\rho)}$ , leur dimension par  $n_\rho$ ; leurs matrices  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(\rho)}$  peuvent être supposées unitaires d'après le résultat du paragraphe 1.2.

**Théorème** : Les matrices  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(\rho)}$  satisfont les propriétés d'orthogonalité suivantes

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_g \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(\rho)}(g) \mathcal{D}_{\alpha'\beta'}^{(\rho')*}(g) = \frac{1}{n_\rho} \delta_{\rho\rho'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}} \quad (4.1)$$

et leurs caractères satisfont donc

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_g \chi^{(\rho)}(g) \chi^{(\rho')*}(g) = \delta_{\rho\rho'}} \quad (4.2)$$

*Preuve* : Soit  $M$  une matrice quelconque de dimension  $n_\rho \times n_{\rho'}$ . Les représentations étant unitaires,  $\mathcal{D}^\dagger(g) = \mathcal{D}(g^{-1})$ , on peut construire la matrice

$$V = \frac{1}{n} \sum_{g'} \mathcal{D}^{(\rho)}(g') M \mathcal{D}^{(\rho')\dagger}(g') \quad (4.3)$$

dont il est facile de vérifier qu'elle satisfait

$$V \mathcal{D}^{(\rho')}(g) = \mathcal{D}^{(\rho)}(g) V \quad (4.4)$$

pour tout  $g \in G$ . La matrice  $V$  est donc par le lemme de Schur nulle si les représentations  $\rho$  et  $\rho'$  sont différentes, et un multiple de l'identité si  $\rho = \rho'$ . Dans le premier cas, en choisissant une matrice  $M$  dont le seul élément non nul est  $M_{\beta\beta'}$ , et en identifiant l'élément de matrice  $V_{\alpha\alpha'}$ , on obtient la propriété d'orthogonalité (4.1). Si  $\rho = \rho'$  et donc  $V = c\mathbb{I}$ , le coefficient  $c$  est obtenu en prenant la trace :  $cn_\rho = \text{tr}M$ , ce qui conduit à l'orthonormalité (4.1). La propriété (4.2) découle simplement de la précédente en prenant la trace  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha' = \beta'$ .

*Remarques et conséquences*

(i) Le cas le plus simple où cette propriété est déjà familière est celui d'un groupe fini abélien, en fait le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_p$ . Dans ce cas, les représentations irréductibles sont de dimension 1 (corollaire 2 du lemme de Schur), elles sont indexées par un entier  $l = 0, 1, \dots$  et s'écrivent (en notation multiplicative où le groupe est représenté par des racines  $p$ -ièmes de l'unité  $z_k = \exp 2\pi i \frac{k}{p}$ )

$$D^{(l)} : \quad z_k \mapsto z_k^l \quad l = 0, 1, \dots, p-1 \quad (4.5)$$

La propriété d'orthonormalité s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_k z_k^l z_k^{-l'} &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{i \frac{2\pi}{p} k(l-l')} \\ &= \delta_{ll'} . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Le groupe abélien *infini* (!)  $\mathbb{Z}$  se traite de façon analogue si on ne s'occupe pas de la convergence de la somme. Les représentations irréductibles sont de dimension 1, ce sont les exponentielles  $D^{(x)}(k) = \exp ikx$ , unitaires si  $x \in \mathbb{R}$ , et la propriété d'orthogonalité est celle de la transformée de Fourier discrète

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikx} e^{-ikx'} = 2\pi \delta_P(x - x') \tag{4.7}$$

La divergence de la "fonction"  $\delta_P(x - x') = \sum_l \delta(x - x' - 2\pi l)$  pour  $x = x' \pmod{2\pi}$  est le signal du problème de convergence.

(ii) La propriété (4.1) est importante parce qu'elle suffit souvent à construire ou à compléter une table de représentations irréductibles. Considérons par exemple le cas du groupe  $Z_2$ , constitué des éléments 1 et  $-1$ . On connaît la représentation triviale qui associe à tout élément la valeur 1. Une deuxième représentation, elle aussi de dimension 1, doit associer la valeur  $\mathcal{D}(1) = \chi(1) = \dim D = 1$  à l'élément identité et une valeur  $x$  à  $-1$ . Par (4.1)  $x$  est fixé sans ambiguïté à  $-1$ . Comme il y a au plus deux représentations irréductibles non équivalentes (comme on va le démontrer dans un instant), on a la Table

↓ éléments \ repr. →	id	$\epsilon$
1	1	1
$-1$	1	$-1$

Cette discussion peut être répétée dans des cas moins triviaux (exercice 1).

(iii) Corollaire : Les dimensions  $n_\rho$  satisfont l'inégalité :  $\sum_\rho n_\rho^2 \leq n$ .

Les  $n$  éléments de matrice  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(\rho)}(g)$ , quand  $g$  "parcourt" le groupe  $G$ , peuvent être considérés comme les composantes de  $n_\rho \times n_\rho$  vecteurs (indexés par  $\rho, \alpha, \beta$ ) dans un espace de dimension  $n$ . Ces vecteurs étant orthogonaux sont indépendants, donc leur nombre n'excède pas la dimension, c.q.f.d. En fait on a le

**Théorème** : Les dimensions  $n_\rho$  satisfont l'égalité

$$\sum_\rho n_\rho^2 = n . \tag{4.8}$$

Pour le démontrer, revenons à la représentation régulière de la section précédente. Comme elle n'est pas *a priori* irréductible, on décompose son caractère sur les caractères irréductibles selon

$$\chi^{(reg)}(g) = \sum_\rho m_\rho \chi^{(\rho)}(g)$$

avec des multiplicités  $m_\rho$ . Utilisons alors l'expression (3.6) d'une part, la formule d'orthogonalité (4.2) d'autre part, pour calculer de deux façons

$$n_\rho = \frac{1}{n} \sum_g \chi^{(\text{reg})}(g) \chi^{(\rho)*}(g) = m_\rho$$

d'où il découle que  $m_\rho = n_\rho$ , c'est-à-dire toute représentation irréductible apparaît dans la représentation régulière et sa multiplicité est égale à sa dimension

$$\boxed{\chi^{(\text{reg})}(g) = \sum_\rho n_\rho \chi^{(\rho)}(g) .}$$
(4.9)

En prenant  $g = e$  dans cette égalité et en utilisant à nouveau (3.6), on obtient (4.8).

**Corollaire :** dans un groupe abélien, le nombre de représentations irréductibles est égal à l'ordre.

Ceci est une conséquence triviale du fait que ces représentations sont de dimension 1.

De l'égalité (4.8) il s'ensuit que les  $n$  vecteurs orthogonaux de composantes  $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^\rho(g)$  forment une base donc satisfont la propriété de complétude

$$\boxed{\sum_{\rho, \alpha, \beta} \frac{n_\rho}{n} \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(\rho)}(g) \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(\rho)*}(g') = \delta_{g, g'} .}$$
(4.10)

ou encore si on préfère

$$\sum_{\rho, \alpha, \beta} \frac{n_\rho}{n} \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{(\rho)}(g) \mathcal{D}_{\beta\alpha}^{(\rho)\dagger}(g') = \sum_\rho \frac{n_\rho}{n} \chi^{(\rho)}(g \cdot g'^{-1}) = \delta_{g, g'} .$$
(4.10)'

On a aussi des relations d'orthogonalité et de complétude sur les caractères. (On a déjà vu la relation (4.2)). Ces derniers sont des fonctions de classe (cf. sec. 1.1), notons les classes  $C_i$ ,  $n_i$  leur nombre d'éléments et  $\chi_i^{(\rho)}$  la valeur que prend le caractère de la représentation  $\rho$  pour la classe  $C_i$ . Considérons l'opérateur

$$X_i^{(\rho)} = \sum_{g' \in C_i} D^{(\rho)}(g') .$$
(4.11)

En vertu d'un argument déjà utilisé (lemme de réarrangement)  $D^{(\rho)}(g) X_i^{(\rho)} = X_i^{(\rho)} D^{(\rho)}(g)$  pour tout  $g \in G$ , donc par le lemme de Schur,  $X_i^{(\rho)}$  est proportionnel à l'opérateur identité. La constante de proportionnalité est calculée en prenant la trace et on trouve

$$X_i^{(\rho)} = \frac{n_i}{n_\rho} \chi_i^{(\rho)} \mathbb{I}^{(\rho)} .$$
(4.12)

Sommons alors (4.10)' sur  $g \in C_i$  et  $g' \in C_j$ . Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{g \in C_i} \sum_{g' \in C_j} \sum_{\rho} \frac{n_{\rho}}{n} \text{tr} D^{(\rho)}(g) D^{(\rho)\dagger}(g') &= \sum_{\rho} \frac{n_{\rho}}{n} \text{tr} X_i^{(\rho)} X_j^{(\rho)\dagger} \\ &= \sum_{\rho} \frac{n_i n_j}{n} \chi_i^{(\rho)} \chi_j^{(\rho)*} \\ &= n_i \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.13)$$

d'où il découle que les caractères satisfont à la propriété de complétude

$$\boxed{\frac{n_i}{n} \sum_{\rho} \chi_i^{(\rho)} \chi_j^{(\rho)*} = \delta_{ij} .} \quad (4.14)$$

On peut résumer cela en disant que les  $\hat{\chi}_i^{(\rho)} = (n_i/n)^{\frac{1}{2}} \chi_i^{(\rho)}$  satisfont

$$\sum_i \hat{\chi}_i^{(\rho)} \hat{\chi}_i^{(\rho')*} = \delta_{\rho\rho'} \quad (4.15)$$

en vertu de (4.2), et qu'ils forment un système complet en vertu de (4.14)

$$\sum_{\rho} \hat{\chi}_i^{(\rho)} \hat{\chi}_j^{(\rho)*} = \delta_{ij} . \quad (4.16)$$

Au passage, nous avons appris que le nombre  $N$  de représentations irréductibles (le nombre de valeurs de  $\rho$ ) est égal au nombre de classes (le nombre de valeurs de  $i$ ), puisque ce nombre commun est la dimension de l'espace des  $\hat{\chi}$ .

Pour récapituler, les caractères satisfont aux relations

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_i n_i \chi_i^{(\rho)} \chi_i^{(\rho')*} = \delta_{\rho\rho'}} \quad (4.17a)$$

$$\boxed{\frac{n_i}{n} \sum_{\rho} \chi_i^{(\rho)} \chi_j^{(\rho)*} = \delta_{ij} .} \quad (4.17b)$$

#### 4.2. Conséquences

(i) toute représentation étant complètement réductible, son caractère s'écrit

$$\chi = \sum_{\rho} m_{\rho} \chi^{(\rho)} \quad (4.18)$$

et les multiplicités peuvent se calculer par la formule

$$m_\rho = \frac{1}{n} \sum_i n_i \chi_i \chi_i^{(\rho)*} = \frac{1}{n} \sum_g \chi(g) \chi^{(\rho)*}(g) . \quad (4.19)$$

Plus généralement, toute fonction de classe peut se décomposer sur les caractères. En effet une fonction de classe est complètement déterminée par les  $N$  valeurs qu'elle prend pour les  $N$  classes :  $f(g) = \sum_i f_i P_i(g)$ , où  $P_i$  désigne la fonction prenant la valeur 1 si  $g \in C_i$ , 0 sinon (indicatrice de la classe  $C_i$ ) et la formule (4.17b) nous apprend que  $P_i(g) = \frac{n_i}{n} \sum_\rho \chi^{(\rho)}(g) \chi_i^{(\rho)*}$ . Comme on l'a déjà noté plus haut, cette décomposition des fonctions de classe sur les caractères irréductibles est une généralisation de la décomposition de Fourier.

(ii) De même on peut déterminer les multiplicités dans la décomposition de Clebsch-Gordan d'un produit direct de deux représentations en projetant le produit de leurs caractères sur les caractères irréductibles. Illustrons ceci sur le produit de deux représentations irréductibles  $\rho$  et  $\sigma$

$$D^{(\rho)} \otimes D^{(\sigma)} = \bigoplus_\tau m_\tau D^{(\tau)} \quad (4.20a)$$

$$\chi^{(\rho)} \chi^{(\sigma)} = \sum_\tau m_\tau \chi^{(\tau)} \quad (4.20b)$$

$$m_\tau = \frac{1}{n} \sum_i n_i \chi_i^{(\rho)} \chi_i^{(\sigma)} \chi_i^{(\tau)*} , \quad (4.20c)$$

donc la représentation  $\tau$  apparaît dans le produit  $\rho \otimes \sigma$  avec la même multiplicité que  $\sigma^*$  dans  $\rho \otimes \tau^*$ , etc.

La deuxième de ces relations, (4.20b), peut aussi servir à définir une loi de multiplication sur les caractères :

$$\chi^{(\rho)} \chi^{(\sigma)} = \sum_\tau N_{\rho\sigma}^\tau \chi^{(\tau)} \quad (4.21)$$

où

$$N_{\rho\sigma}^\tau = \frac{1}{n} \sum_i n_i \chi_i^{(\rho)} \chi_i^{(\sigma)} \chi_i^{(\tau)*} \quad (4.22)$$

qui donne à l'ensemble des caractères la structure d'algèbre (*algèbre des caractères*). (On rappelle qu'une algèbre est un espace vectoriel dont les vecteurs sont aussi dotés d'une loi de multiplication associative et linéaire par rapport à l'addition et la multiplication par les scalaires; ici on peut ajouter les caractères ou les multiplier par des nombres réels ou complexes, et les multiplier entre eux selon (4.21)) (voir aussi l'exercice 2).

(iii) Utilisons la relation (4.18) pour calculer la norme d'un caractère quelconque, définie par

$$\|\chi\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \frac{1}{n} \sum_i n_i \chi_i \chi_i^* = \sum_\rho m_\rho^2 . \quad (4.23)$$

C'est donc un entier supérieur ou égal à un, l'égalité étant satisfaite si et seulement si la représentation considérée est irréductible.

Comme application de ce critère, étudions les représentations du groupe diédral  $D_{2p}$ , d'ordre  $2p$ . On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon_j & 0 \\ 0 & \epsilon_j^* \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $\epsilon_j = \exp 2i\pi \frac{j}{p}$ , et on représente les rotations autour de l'axe d'ordre  $p$  par  $\mathbb{I}, A, \dots, A^{p-1}$ , et ces rotations composées avec la rotation autour de l'axe orthogonal par  $B, BA, \dots, BA^{p-1}$ . En calculant la norme du caractère de cette représentation, montrer qu'elle est irréductible pour  $1 \leq j \leq p-1$ , et  $j \neq p/2$  si  $p$  est pair. Que peut-on dire de celle pour  $j = p/2$  ( $p$  pair) ? Montrer qu'en se restreignant à  $1 \leq j < p/2$ , on a des représentations irréductibles inéquivalentes. En déduire que  $D_{2p}$  admet pour  $p$  impair  $(p-1)/2$  représentations irréductibles de dimension 2 et deux de dimension 1, et pour  $p$  pair  $p/2 - 1$  représentations irréductibles de dimension 2 et quatre de dimension 1.

(iv) Dans tous ces calculs, il est extrêmement utile de disposer de la table des valeurs que prennent les différents caractères irréductibles pour les différentes classes. Dans la construction de ces *tables de caractères*, les relations (4.17) sont très importantes. A titre illustratif, étudions le cas du groupe  $S_3$ . On sait qu'il a trois classes (cf. sec. 7 du ch. 1), correspondant aux produits de cycles  $[3]$ ,  $[12]$  et  $[1^3]$ . Il a donc trois représentations irréductibles inéquivalentes, dont nous connaissons déjà deux, de dimension 1, qui existent dans tous les  $S_n$  : la représentation identité d'une part, et la représentation  $\epsilon$  qui associe à toute permutation sa signature (c'est en fait une représentation fidèle du groupe  $\mathbb{Z}_2$ , quotient de  $S_n$  par son sous-groupe invariant  $A_n$ ). Il doit donc exister une troisième représentation, de dimension 2 en vertu de (4.8). Elle prend la valeur 1 pour la classe  $[1^3]$  (classe de l'identité). Les relations (4.17) permettent de déterminer sans difficulté les éléments manquants de la troisième colonne de la Table

↓ classes \ rep. →	identité = $\{3\}$	$\epsilon = \{1^3\}$	$\{2, 1\}$	#
$[1^3]$	1	1	2	1
$[12]$	1	-1	0	3
$[3]$	1	1	-1	2

Les notations  $\{3\}$  etc pour les représentations seront expliquées au chapitre 4. Noter qu'on lit dans la première ligne de cette table la dimension de la représentation, tandis que la dernière colonne notée # indique le nombre d'éléments  $n_i$  de chaque classe.

## 5. Un groupe continu : $U(1)$

Comme prototype de groupe continu particulièrement simple, considérons le groupe  $U(1)$ , groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1

$$\begin{aligned} U(1) &= \{z, |z| = 1\} \\ &= \{e^{i\alpha}, (2k-1)\pi < \alpha \leq (2k+1)\pi\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

où le choix de la détermination de  $\alpha$  ne doit pas importer pour la paramétrisation du cercle. C'est un groupe abélien et ses représentations irréductibles sont donc de dimension 1. Elles sont faciles à trouver

$$D^{(k)}(e^{i\alpha}) = \chi^{(k)}(e^{i\alpha}) = e^{ik\alpha} \quad (5.2)$$

et on requiert que  $k \in \mathbb{Z}$  pour assurer que la représentation est univaluée quand  $\alpha$  change de détermination  $\alpha \rightarrow \alpha + 2\pi n$ . Plus généralement, les fonctions de classe sont les fonctions définies (univaluées) sur le cercle, c'est-à-dire les fonctions périodiques de  $\alpha$ . Elles peuvent se décomposer de Fourier (on suppose le développement convergent)

$$f(z = e^{i\alpha}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\alpha} = \sum_n f_n z^n \quad (5.3)$$

qui n'est autre que le développement de  $f$  sur les caractères et qui montre bien que (5.2) donne tous les caractères irréductibles.

On notera que le groupe  $U(1)$  se distingue du groupe abélien ("non compact")  $\mathbb{R}$  qui décrirait l'addition des phases  $\alpha$  si  $\alpha$  était autorisé à varier sur tout  $\mathbb{R}$ . La représentation de l'élément  $e^{i\alpha}$  y est toujours donnée par l'exponentielle  $e^{ix\alpha}$ , mais  $x$  est maintenant arbitraire (réel si la représentation est unitaire).

Les caractères (5.2) satisfont des relations d'orthogonalité et de complétude parallèles à celles démontrées plus haut pour les groupes finis. Ce qui remplace la sommation finie  $\frac{1}{n} \sum_{g \in G}$  sur les éléments du groupe est l'intégrale sur le cercle

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} .$$

Les caractères satisfont alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \chi^{(k)}(e^{i\alpha}) \chi^{(k')*}(e^{i\alpha}) = \delta_{kk'} \quad (5.4a)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi^{(k)}(e^{i\alpha}) \chi^{(k)*}(e^{i\beta}) = 2\pi \delta_P(\alpha - \beta) . \quad (5.4b)$$

La deuxième relation est une identité familière dans la transformation de Fourier. La "fonction"  $\delta_P$  qui apparaît ici est  $2\pi$ -périodique et identifie  $\alpha$  et  $\beta$  modulo  $2\pi$

$$\delta_P(\alpha - \beta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\alpha - \beta + 2\pi n) . \quad (5.5)$$

On notera que les représentations de  $U(1)$  sont indexées par  $\mathbb{Z}$  et forment elles-mêmes un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}$  : pour la multiplication des caractères définie plus haut,  $\chi^{(k)}\chi^{(l)} = \chi^{(k+l)}$ . En général, les représentations d'un groupe abélien forment un groupe abélien dual  $G^*$ <sup>5</sup>. Quel est ici le dual de  $G^* = \mathbb{Z}$ ?

Le groupe des rotations dans le plan  $SO(2)$  est isomorphe au groupe  $U(1)$ . Noter que si on s'intéresse à des représentations irréductibles réelles, la dimension n'est plus égale à 1 (sauf pour la représentation identité!) mais à 2

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(k)}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} & k \in \mathbb{N}^* \\ \chi^{(k)}(\alpha) &= 2 \cos k\alpha \end{aligned} \quad (5.6)$$

---

<sup>5</sup> Dans ces notes, l'adjectif "dual" est utilisé dans des contextes très variés pour décrire des paires d'objets canoniquement associés.

Que deviennent les relations d'orthogonalité et de complétude?

*Remarque.* Le groupe  $U(1)$  joue un rôle important dans l'analyse de la symétrie de jauge de l'électrodynamique. Cette symétrie qui apparaît comme une redondance plutôt fâcheuse dans la théorie classique (détermination du quadrivecteur potentiel à un gradient près) devient fondamentale dans la quantification du champ électromagnétique. Illustrons à un niveau élémentaire un aspect du problème. Considérons une particule quantique non relativiste de charge  $q$  couplée à un champ électromagnétique. Elle est décrite par une fonction d'onde satisfaisant l'équation de Schrödinger (où on fait  $c = \hbar = 1$ )

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = \left[ \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2}{2m} + qA_0(\mathbf{x}, t) \right] \psi(\mathbf{x}, t)$$

où  $\mathbf{p} = \frac{1}{i}\mathbf{grad}$ . Cette équation est invariante par les changements suivants du quadri-potentiel  $(A_0, \mathbf{A})$  et de la fonction d'onde

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) &\rightarrow e^{iq\zeta(\mathbf{x}, t)}\psi(\mathbf{x}, t) \\ A_0 &\rightarrow A_0 - \frac{\partial\zeta}{\partial t} \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{grad}\zeta \end{aligned} \tag{5.7}$$

On voit donc qu'en chaque point  $\mathbf{x}, t$  d'espace-temps, agit un groupe  $U(1)$  (ou  $\mathbb{R}$ ) indépendant, et que la fonction d'onde se transforme selon une représentation de ce groupe. Si on insiste sur le fait que le groupe est  $U(1)$  et non pas  $\mathbb{R}$ , les transformations  $\zeta$  ont une période  $T$  telle que pour toute particule de charge  $q$ , le changement  $q\zeta \rightarrow q(\zeta + T)$  doit être sans effet, c'est-à-dire  $qT = m2\pi$ , un multiple entier de  $2\pi$ . Les charges de toutes les particules chargées couplées au même champ électromagnétique doivent donc être commensurables, multiples de  $2\pi/T$ . Cela fournit une explication de la quantification observée de toutes les charges électriques en multiples d'une même charge élémentaire. Le fait que le "groupe de jauge" de l'électrodynamique soit  $U(1)$  apparaît naturellement dans les théories modernes qui unifient électromagnétisme et interactions faibles et où  $U(1)$  est un sous-groupe d'un groupe de jauge plus grand...

## 6. Symétries et Représentations en Mécanique Quantique

### 6.1. Transformations d'un système quantique. Théorème de Wigner

En Mécanique Quantique, les états d'un système sont décrits par des vecteurs  $|\psi\rangle$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , (représentés encore par leur fonction d'onde  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ ) et les quantités physiquement observables sont les carrés des modules des valeurs moyennes d'opérateurs auto-adjoints  $A = A^\dagger$ , soit

$$|\langle\phi|A|\psi\rangle|^2 .$$

En fait et plus précisément, un état physique pur est représenté par un “rayon”, c’est-à-dire un vecteur  $|\psi\rangle$  à une phase près :  $|\psi\rangle \approx e^{i\alpha}|\psi\rangle$ .

Dans ce contexte, on est souvent confronté à la situation suivante : il existe une transformation  $\mathcal{T}$  du système (vecteurs d’état et observables) qui laisse inchangées ces quantités

$$|\langle \mathcal{T}\phi | \mathcal{T}A | \mathcal{T}\psi \rangle| = |\langle \phi | A | \psi \rangle|. \quad (6.1)$$

On peut alors démontrer le théorème suivant (Wigner) :

Si une bijection  $\mathcal{T}$  entre les rayons d’un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  préserve les modules des produits scalaires  $|\langle \mathcal{T}\phi | \mathcal{T}\psi \rangle| = |\langle \phi | \psi \rangle|$ , alors cette bijection est un opérateur  $U(\mathcal{T})$  linéaire ou anti-linéaire unitaire sur  $\mathcal{H}$ ,

$$|\mathcal{T}\phi\rangle = U(\mathcal{T})|\phi\rangle, \quad U(\mathcal{T})U^\dagger(\mathcal{T}) = \mathbb{I}, \quad (6.2)$$

unique à une phase près.

On rappelle qu’un opérateur est *antilinéaire* s’il satisfait

$$U(\lambda|\phi\rangle + \lambda'|\phi'\rangle) = \lambda^*U|\phi\rangle + \lambda'^*U|\phi'\rangle$$

$$\langle U\phi | \psi \rangle = \langle \phi | U^\dagger\psi \rangle^* = \langle \psi | U\phi \rangle^*$$

donc si  $U$  est unitaire

$$\langle U\phi | U\psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle.$$

La transformation des observables se déduit aisément de ce qui précède :

$$A \mapsto \mathcal{T}A = U(\mathcal{T})AU(\mathcal{T})^\dagger. \quad (6.3)$$

Le cas anti-linéaire se rencontre dans l’étude du renversement du sens du temps. On laissera ce cas de côté et dans la suite, on supposera toujours que l’on a réalisé la symétrie par un opérateur linéaire unitaire.

## 6.2. Groupe de transformations. Représentations projectives

Les transformations  $\mathcal{T}$  peuvent se composer et forment un groupe  $G$ . Pour alléger les notations, on notera désormais les transformations  $g$  plutôt que  $\mathcal{T}$ , et  $U(g)$  désigne l’opérateur unitaire qui réalise la transformation dans  $\mathcal{H}$ . Comme  $U(g)$  est unique à une phase près, la composition de deux transformations  $g_1$  et  $g_2$  est réalisée aussi bien par  $U(g_1)U(g_2)$  que par  $U(g_1.g_2)$  donc

$$U(g_1.g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1)U(g_2), \quad (6.4)$$

où  $\omega(g_1, g_2) = e^{i\zeta(g_1, g_2)}$  est une phase. On choisit  $U(e) = \mathbb{I}$  donc  $\zeta(e, g) = \zeta(g, e) = 0$ . L’équation (6.4) définit ce qu’on appelle une *représentation projective* (ou à une phase près; en anglais on dit aussi *ray representation*).

Le système de phases  $\zeta(g_1, g_2)$  est sujet à une contrainte exprimant l’associativité du produit  $U(g_1)U(g_2)U(g_3)$  :

$$\zeta(g_1, g_2) + \zeta(g_1.g_2, g_3) = \zeta(g_1, g_2.g_3) + \zeta(g_2, g_3). \quad (6.5)$$

Par ailleurs, si on redéfinit les  $U(g)$  par une phase  $e^{i\alpha(g)}$ , les  $\zeta(g_1, g_2)$  sont changés en :

$$\zeta(g_1, g_2) \rightarrow \zeta'(g_1, g_2) = \zeta(g_1, g_2) + \alpha(g_1) + \alpha(g_2) - \alpha(g_1.g_2) . \quad (6.6)$$

Etant donné un système de phases satisfaisant (6.5), on peut se demander s'il n'est pas équivalent au sens de (6.6) à un système trivial tel que  $\zeta'(g, g') = 0$  pour tous  $g, g'$ . Il s'agit là d'une question liée à la topologie du groupe (existence de 2-cocycles non triviaux) que nous n'étudierons pas plus avant.

Pour résumer, la définition à une phase près des états de la Mécanique Quantique implique qu'un groupe de transformations est réalisé par une représentation projective. Cela ne signifie pas que les développements du début de ce chapitre sont insuffisants. Il se trouve en effet que dans une grande variété de cas, l'étude des représentations projectives d'un groupe  $G$  est équivalente à celle des représentations usuelles d'un groupe plus grand  $\tilde{G}$  ("groupe de recouvrement", dont la définition sera donnée plus bas). Cela nous autorise à poursuivre la discussion des représentations des groupes.

### 6.3. Transformations des observables. Théorème de Wigner-Eckart

Selon (6.3), la transformation d'un opérateur sur  $\mathcal{H}$  obéit à :  $A \rightarrow U(g)AU(g)^\dagger$ . Supposons qu'on ait un ensemble de tels opérateurs,  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , qui se transforment les uns dans les autres dans ces transformations, c'est-à-dire qui forment une représentation :

$$A_\alpha \rightarrow U(g)A_\alpha U(g)^\dagger = \sum_{\alpha'} A_{\alpha'} \mathcal{D}_{\alpha'\alpha}(g) . \quad (6.7)$$

Si la représentation  $D$  est irréductible, les opérateurs  $A_\alpha$  forment ce qu'on appelle un opérateur (ou "tenseur") irréductible. Par exemple, en physique atomique, l'opérateur moment cinétique  $\vec{J}$  et l'opérateur moment dipolaire électrique  $\sum_i q_i \vec{r}_i$  se transforment comme des vecteurs sous l'effet des rotations. Utilisant les notations de la sect. 2, supposons que les  $A_\alpha$  se transforment par la représentation irréductible  $D^{(\rho)}$  et appliquons les sur des états  $|\sigma\beta\rangle$  se transformant selon la représentation irréductible  $D^{(\sigma)}$ . L'état résultant se transforme selon

$$U(g)A_\alpha|\sigma\beta\rangle = U(g)A_\alpha U(g)^\dagger U(g)|\sigma\beta\rangle = \mathcal{D}_{\alpha'\alpha}^{(\rho)} \mathcal{D}_{\beta'\beta}^{(\sigma)} A_{\alpha'}|\sigma\beta'\rangle \quad (6.8)$$

c'est-à-dire selon le produit des représentations  $D^{(\rho)}$  et  $D^{(\sigma)}$ . Comme on l'a fait en (2.14), on peut développer sur des représentations irréductibles

$$\mathcal{D}_{\alpha'\alpha}^{(\rho)} \mathcal{D}_{\beta'\beta}^{(\sigma)} = \sum_{\tau, \gamma, \gamma', i} \langle \tau_i \gamma | \rho \alpha \sigma \beta \rangle \langle \tau_i \gamma' | \rho \alpha' \sigma \beta' \rangle^* \mathcal{D}_{\gamma' \gamma}^{(\tau_i)} . \quad (6.9)$$

Supposons maintenant que le groupe  $G$  soit fini. Les matrices des représentations satisfont les propriétés d'orthogonalité (4.1). (Comme noté plus haut et comme on le montrera par la suite ces propriétés et ce qui va suivre s'étendent aux groupes continus "compacts"). On peut alors écrire

$$\langle \tau \gamma | A_\alpha | \sigma \beta \rangle = \langle \tau \gamma | U(g)^\dagger U(g) A_\alpha | \sigma \beta \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \langle \tau \gamma | U(g)^\dagger U(g) A_\alpha | \sigma \beta \rangle \\
&= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \sum_{\alpha', \beta', \gamma'} \mathcal{D}_{\gamma' \gamma}^{(\tau)*} \langle \tau \gamma' | A_{\alpha'} | \sigma \beta' \rangle \mathcal{D}_{\alpha' \alpha}^{(\rho)} \mathcal{D}_{\beta' \beta}^{(\sigma)} \\
&= \frac{1}{n_\tau} \sum_{\alpha', \beta', \gamma', i} \langle \tau_i \gamma | \rho \alpha \sigma \beta \rangle \langle \tau_i \gamma' | \rho \alpha' \sigma \beta' \rangle^* \langle \tau_i \gamma' | A_{\alpha'} | \sigma \beta' \rangle
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Notons

$$\langle \tau \parallel A \parallel \sigma \rangle_i = \frac{1}{n_\tau} \sum_{\alpha', \beta', \gamma'} \langle \tau_i \gamma' | \rho \alpha' \sigma \beta' \rangle^* \langle \tau_i \gamma' | A_{\alpha'} | \sigma \beta' \rangle . \tag{6.11}$$

Il en découle que (théorème de Wigner-Eckart) :

$$\langle \tau \gamma | A_\alpha | \sigma \beta \rangle = \sum_{i=1}^{m_\tau} \langle \tau \parallel A \parallel \sigma \rangle_i \langle \tau_i \gamma | \rho, \alpha; \sigma, \beta \rangle \tag{6.12}$$

dans laquelle les éléments de matrice “réduits”  $\langle \cdot \parallel A \parallel \cdot \rangle_i$  sont indépendants de  $\alpha, \beta, \gamma$ . L’élément de matrice du membre de gauche dans (6.12) s’annule si le coefficient de Clebsch-Gordan est nul (en particulier si la représentation  $\tau$  n’apparaît pas dans le produit de  $\rho$  et  $\sigma$ ). Ce théorème a de nombreuses conséquences en physique atomique et nucléaire, où il occasionne des “règles de sélection”, comme nous le verrons plus bas.

#### 6.4. Invariance et lois de conservation

Jusqu’à présent nous avons mené la discussion des transformations d’un système quantique sans rien supposer sur son invariance sous ces transformations, c’est-à-dire sur la façon dont ces transformations affectent sa dynamique. En d’autres termes, les transformations pouvaient être considérées comme des changements de point de vue (de repère, de coordonnées, de base...) dans lequel les états et les observables changeaient.

Supposons maintenant que dans un certain groupe de transformations  $G$ , le système est invariant, en ce sens que sa dynamique, contrôlée par son Hamiltonien  $H$  est inchangée. On va donc écrire que

$$H = U(g) H U^\dagger(g) \tag{6.13}$$

ou de façon équivalente

$$[H, U(g)] = 0 . \tag{6.14}$$

On définira donc une invariance (ou symétrie) d’un système quantique par un groupe  $G$  comme l’existence d’une représentation unitaire de ce groupe dans l’espace des états commutant avec l’Hamiltonien.

Les conséquences de cette situation sont considérables. Tout d’abord comme on le sait bien en Mécanique Quantique, la commutation de  $H$  avec les  $U(g)$  implique que  $H$  peut être diagonalisé simultanément avec tout sous-ensemble des  $U(g)$  commutant entre eux. Ceci incite donc à étudier comme préliminaire quel est l’ensemble maximal de  $U(g)$  qui commutent : c’est un thème qui va être poursuivi dans la suite.

En outre, comme nous l'a appris le lemme de Schur, à l'intérieur de chaque représentation irréductible de  $G$  n'apparaissant qu'une fois,  $H$  est un opérateur multiple de l'identité, c'est-à-dire que ses valeurs propres, les niveaux d'énergie, ont une multiplicité (dégénérescence) égale à la dimension de la représentation irréductible en question. (Il peut se faire qu'elle soit plus élevée, soit qu'existe une autre symétrie plus grande impliquant un regroupement des représentations considérées, soit que certaines représentations viennent en paires complexes conjuguées, soit qu'on soit en présence d'une dégénérescence fortuite). (Pour le cas de représentations irréductibles apparaissant avec une multiplicité supérieure à 1, voir plus bas).

Inversement, toute observable fonction des  $U(g)$  commute avec  $H$  donc est une "quantité conservée" :

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{F}(U(g))}{\partial t} = [\mathcal{F}(U), H] = 0 \quad (6.15)$$

et chacune de ses valeurs propres est un "bon nombre quantique".

L'exemple le plus simple est fourni par le groupe des translations. Pour un Hamiltonien écrit sous la forme  $\frac{1}{2} \sum \frac{\vec{p}_k^2}{2m} + V(\vec{x}_1 \cdots, \vec{x}_N)$  l'invariance (6.13) ou (6.14) signifie que le potentiel est invariant par translation  $\vec{x}_k \mapsto \vec{x}_k + \vec{a}, k = 1, \cdots, N$ . Comme il s'agit d'un groupe abélien, tous les  $U(\vec{a}) = \exp i\vec{a} \cdot \vec{P}, \vec{P} = \sum_k \vec{p}_k$ , commutent avec  $H$  et entre eux, et sont tous des quantités conservées. L'impulsion totale du système n'est autre que  $\vec{P}$ , et chaque état du système est dégénéré par rapport à  $\vec{P}$ .

Un cas moins trivial où l'on n'a une invariance manifeste que par un sous-groupe du groupe des translations est celui d'un électron dans un champ uniforme (niveaux de Landau) : cf. exercice 3. De nombreux autres exemples de ces dégénérescences se présentent dans l'étude du groupe des rotations.

Dans l'esprit de ce chapitre consacré pour l'essentiel aux groupes finis, illustrons ces considérations sur un exemple tiré de la physique moléculaire. Dans une molécule polyatomique, les niveaux d'énergie électroniques sont donnés par la solution de l'équation de Schrödinger des électrons dans le potentiel créé par les noyaux (et les autres électrons). Supposons que la configuration d'équilibre de ces noyaux ait une certaine symétrie. C'est par exemple le cas d'une molécule plane quelconque, invariante par réflexion dans ce plan, ou de la molécule de  $\text{NH}_3$  qui forme un prisme de base équilatérale ou encore du nouvellement découvert "fullerène"  $\text{C}_{60}$  qui a la symétrie de l'icosaèdre.

Le traitement du problème utilise plusieurs approximations de nature différente. On néglige le mouvement des noyaux et ne considère que celui des  $N$  électrons, et on néglige les interactions mutuelles et les spins de ces derniers. On suppose encore que seuls les électrons des couches périphériques participent à la liaison moléculaire, et pour simplifier l'écriture, nous nous bornerons au cas d'un seul électron par noyau. Dans la molécule, chacun de ces électrons est supposé décrit par une fonction d'onde indépendante du temps, et on fait l'hypothèse qu'une bonne approximation de cette fonction d'onde est obtenue par combinaison linéaire des fonctions d'onde supposées connues de l'électron au voisinage du  $i$ -ème noyau. Autrement dit, soit  $v(\vec{r} - \vec{r}_i)$  le potentiel créé par le  $i$ -ème noyau placé en  $\vec{r}_i$  sur un électron en  $\vec{r}$ . (Pour simplifier les notations, on suppose les  $N$  noyaux identiques). Soit  $f_i(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{r}_i)$  une fonction d'onde normalisée d'un électron au voisinage du  $i$ -ème noyau,  $i = 1, \cdots, N$ , solution de

$$\left( -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + v(\vec{r} - \vec{r}_i) - e_0 \right) \psi(\vec{r} - \vec{r}_i) = 0. \quad (6.16)$$

On considère alors l'espace  $E$  des combinaisons linéaires des  $f_i$ :

$$f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(\vec{r}) \quad (6.17)$$

et on cherche une bonne approximation de la fonction d'onde dans cet espace (c'est la méthode LCAO, *linear combination of atomic orbitals*). L'hamiltonien auquel est soumis chaque électron s'écrit

$$H = \left( -\hbar^2 \frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + \sum_i v(\vec{r} - \vec{r}_i) \right) . \quad (6.18)$$

Les coefficients  $c_i$  sont alors déterminés en cherchant les minima de  $\frac{\langle f|H|f \rangle}{\langle f|f \rangle}$ . En négligeant les recouvrements des fonctions d'onde  $f_i$  et  $f_j$  si  $i \neq j$ , on a  $\langle f|f \rangle \approx \sum_i |c_i|^2$  et  $\langle f|H|f \rangle = \sum_{i,j} c_i^* c_j h_{ij}$ , où  $h$  est la matrice  $N \times N$  :  $h_{ij} = \langle f_i|H|f_j \rangle$ . Le problème de minimisation revient à résoudre  $\sum_j h_{ij} c_j = \mathcal{E} c_i$ , c'est-à-dire à diagonaliser la matrice  $h$ . C'est ce problème qui peut être simplifié par la théorie des groupes si la configuration  $\{\vec{r}_i\}$  des noyaux admet des propriétés de symétrie.

Soit  $g$  un élément d'un groupe de symétrie  $G$  fini laissant invariante (à une permutation près) la configuration des noyaux  $\vec{r}_i$ . Le groupe  $G$  est donc un groupe de symétrie de l'hamiltonien. On peut faire agir  $G$  sur les fonctions d'onde de l'espace  $E$  selon

$$D(g)f(\vec{r}) = f(g^{-1}\vec{r}) . \quad (6.19)$$

L'espace  $E$  porte donc une représentation  $D$  de  $G$ ,

$$D(g)|f_i\rangle = \sum_j |f_j\rangle \mathcal{D}_{ji}(g) \quad (6.20)$$

qu'on connaît explicitement une fois connues les fonctions  $f_i$  et l'invariance de l'hamiltonien  $H$  sous l'action de  $G$  se traduit dans l'espace  $E$  par la commutation  $[D, h] = 0$ . On décompose alors  $E$  en sous-espaces invariants se transformant par des représentations irréductibles,  $D = \oplus m_\rho D^{(\rho)}$ . Le lemme de Schur nous dit que  $h$  n'a pas d'élément de matrice entre des états relatifs à des représentations irréductibles non équivalentes et que dans chaque représentation irréductible  $D^{(\rho)}$  de multiplicité  $m_\rho = 1$  et de dimension  $n_\rho$ ,  $h$  est un multiple de l'identité : sa valeur propre, c'est-à-dire le niveau d'énergie dans notre approximation LCAO, est connue sans qu'il soit besoin de procéder à une diagonalisation : c'est simplement  $\langle f_\rho|H|f_\rho\rangle/\langle f_\rho|f_\rho\rangle$ , et elle vient avec une multiplicité (une "dégénérescence") égale à  $n_\rho$ . Par contre, si une représentation irréductible apparaît avec une multiplicité supérieure à 1,  $h$  peut avoir des éléments de matrice entre des composantes relatives aux différentes copies de cette représentation. Dans ce cas, il reste à diagonaliser  $h$  dans ces sous-espaces invariants. On peut utiliser pour ce faire le théorème de Wigner-Eckart; si l'indice  $i$  désigne les différentes copies de la représentation  $\rho$ ,  $i = 1, \dots, m_\rho$

$$\langle \rho \alpha i | H | \rho \alpha' i' \rangle = \delta_{\alpha \alpha'} \langle \rho i | H | \rho i' \rangle \quad (6.21)$$

et il suffit de diagonaliser la matrice réduite de taille  $m_\rho \times m_\rho$ . Pour résumer, si on a su construire les combinaisons de  $f_i$  se transformant par les représentations irréductibles du groupe  $G$ , on a ramené la détermination des niveaux à la diagonalisation de matrices de dimension  $m_\rho \times m_\rho$ .

Illustrons cette méthode dans le cas simple de la molécule de benzène  $C_6H_6$  dans laquelle les atomes de carbone forment un hexagone régulier. Le groupe de symétrie est donc le groupe noté traditionnellement  $D_{6h}$  d'ordre 24, produit direct du groupe diédral  $D_{12}$  par le groupe engendré par la réflexion par rapport au plan de la molécule. Il va suffire en fait de discuter les conséquences de l'invariance par  $D_{12}$ . On ne s'intéresse qu'aux 6 électrons mobiles dits  $\pi$ ; leurs fonctions d'onde atomiques  $\psi$  sont telles que par action du groupe

$$f_i(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{r}_i) \rightarrow D(g)f_i(\vec{r}) = f_i(g^{-1}\vec{r}) = \sum_j f_j(\vec{r}) \mathcal{D}_{ji}(g) = f_{i'}(\vec{r}) \quad (6.22)$$

si  $g\vec{r}_i = \vec{r}_{i'}$ . (En général, il pourrait apparaître une phase entre  $Df_i$  et  $f_{i'}$ , ou s'il y a plusieurs électrons sur la même orbitale autour du  $i$ -ème noyau, une combinaison linéaire de leurs fonctions d'onde). Désignons de 1 à 6 les sommets de l'hexagone; le groupe  $D_{12}$  est engendré par la rotation  $R$  d'angle  $\pi/3$  qui permute  $1 \rightarrow 2, \dots, 6 \rightarrow 1$  et la réflexion  $S$  par rapport au plan perpendiculaire au plan de l'hexagone et passant

par exemple par les sommets 1 et 4,  $1 \rightarrow 1, 2 \leftrightarrow 6, 3 \leftrightarrow 5, 4 \rightarrow 4$ . L'équation (6.22) nous apprend comment ces deux transformations sont représentées sur les fonctions d'onde  $f_i, i = 1, \dots, 6$ :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Le groupe  $D_{12}$  admet deux représentations de dimension 2 et quatre de dimensions 1 (cf. la discussion plus haut dans la section 4.2). La représentation portée par l'espace  $E$  des combinaisons linéaires des  $f_i$  se décompose en deux représentations de dimension 1 et deux de dimension 2 : on pourrait utiliser les méthodes générales de calcul de ces décompositions, une fois dressée la table des caractères de  $D_{12}$ ; en fait il est simple de vérifier que les combinaisons suivantes se transforment selon de telles représentations

$$\begin{aligned} D^{(1)} & F_1 = (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6) \\ D^{(2)} & \begin{cases} F_2 = (2f_1 + f_2 - f_3 - 2f_4 - f_5 + f_6) \\ F_3 = (f_1 + 2f_2 + f_3 - f_4 - 2f_5 - f_6) \end{cases} \\ D^{(3)} & \begin{cases} F_4 = (2f_1 - f_2 - f_3 + 2f_4 - f_5 - f_6) \\ F_5 = (f_1 - 2f_2 + f_3 + f_4 - 2f_5 + f_6) \end{cases} \\ D^{(4)} & F_6 = (f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 - f_6) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ces représentations étant inéquivalentes fournissent des états propres d'énergie. Pour les calculer supposons comme précédemment que les recouvrements des fonctions  $f_i$  et  $f_j, i \neq j$ , sont négligeables, et que les seuls éléments de matrice de  $H$  sont entre fonctions  $f_i$  sur le même atome ou sur des atomes voisins :  $\langle f_i | H | f_i \rangle = \mathcal{E}_0$  et  $\langle f_i | H | f_j \rangle = \delta$  si  $i$  et  $j$  sont voisins. On trouve alors

$$\mathcal{E}^{(1)} : \mathcal{E}^{(2)} : \mathcal{E}^{(3)} : \mathcal{E}^{(4)} = (\mathcal{E}_0 + 2\delta) : (\mathcal{E}_0 + \delta) : (\mathcal{E}_0 - \delta) : (\mathcal{E}_0 - 2\delta).$$

Comme  $\delta < 0$ , ceci montre que l'énergie croît selon

$$\mathcal{E}^{(1)} < \mathcal{E}^{(2)} < \mathcal{E}^{(3)} < \mathcal{E}^{(4)}.$$

En utilisant le fait que chaque niveau peut accueillir deux électrons de spins opposés, l'état fondamental de la molécule est donc obtenu en plaçant les 6 électrons  $\pi$  sur les niveaux (1) et (2).

## Exercices

1. En utilisant les relations d'orthogonalité et de complétude, dresser les tables de caractères des groupes  $D_4, D_8$  définis dans les exercices du chapitre 1.

2.★ Algèbre des classes. Soit  $G$  un groupe fini,  $C_i$  ses classes. Montrer que quand  $x_1$  et  $x_2$  parcourent  $C_1$  et  $C_2$ , leur produit parcourt des classes complètes un certain nombre de fois, ce qui justifie de poser  $C_i \cdot C_j = \sum_k N_{ij}^k C_k$ , avec  $N_{ij}^k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $N_{ij}^k = N_{ji}^k$ , que  $N_{1j}^k = \delta_{jk}$  si 1 désigne la classe de l'identité et que  $N_{ij}^1 = n_i \delta_{i,-j}$ , où  $n_i$  est le nombre d'éléments de la classe  $i$  et  $C_{-j}$  est la classe rassemblant les inverses des éléments de  $C_j$ . On introduit les nombres  $\lambda_i^{(\rho)} = \frac{n_i}{n_\rho} \chi_i^{(\rho)}$ . En utilisant l'opérateur  $X_i^{(\rho)}$  des notes

(eq. (4.12)), montrer qu'ils satisfont  $\lambda_i^{(\rho)} \lambda_j^{(\rho)} = N_{ij}^k \lambda_k^{(\rho)}$  puis en utilisant l'orthogonalité des caractères que

$$N_{ij}^k = \frac{n_i n_j}{n} \sum_{\rho} \frac{1}{n_{\rho}} \chi_i^{(\rho)} \chi_j^{(\rho)} \chi_k^{(\rho)*}$$

En termes de la matrice unitaire  $\hat{\chi}$  définie en (4.15), montrer que

$$N_{ij}^k = \sqrt{\frac{n_i n_j}{n_k}} \sum_{\rho} \frac{\hat{\chi}_i^{(\rho)} \hat{\chi}_j^{(\rho)} \hat{\chi}_k^{(\rho)*}}{\hat{\chi}_1^{(\rho)}}$$

tandis que les multiplicités définies en (4.22) sont données par

$$N^{\rho\sigma}_{\tau} = \sum_i \frac{\hat{\chi}_i^{(\rho)} \hat{\chi}_i^{(\sigma)} \hat{\chi}_i^{(\tau)*}}{\hat{\chi}_i^{(1)}} .$$

Les classes forment donc une algèbre "duale" de celle des caractères.

3. Niveaux de Landau. On considère une particule quantique de masse  $m$  et de charge  $e$  se déplaçant dans le plan  $(Ox, Oy)$  et soumise à un champ magnétique constant  $B$ , porté par l'axe  $Oz$ . On peut toujours faire "un choix de jauge" tel que la seule composante du potentiel vecteur soit  $A_y = B.x$ . Montrer que l'Hamiltonien s'écrit alors

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p}^2 + e^2 B^2 x^2 - 2eBxp_y)$$

et qu'il est donc invariant par les translations parallèles à  $Oy$ . En déduire que les fonctions propres de  $H$  sont de la forme  $\psi = e^{iky} f(x)$  où  $f(x)$  est une fonction propre de l'oscillateur harmonique

$$\frac{1}{2m} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + (eBx - k)^2 \right) f = E f$$

et que le spectre est donc donné par

$$\frac{2mE}{|e|B} = (2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots$$

avec une dégénérescence continue en  $k$ . (On a posé  $\hbar = c = 1$ ). Qu'est-il arrivé à l'invariance par translation selon  $Ox$  du problème initial? Montrer que l'opérateur qui réalise une translation de  $a$  le long de  $Ox$  incorpore une transformation de jauge et qu'on peut écrire  $\psi'(x, y) = e^{ieBay} \psi(x - a, y)$ . (cf. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique Quantique*, page 770.)

4. Montrer que les relations d'orthogonalité de la section 4 impliquent les formules suivantes pour un groupe fini :

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{(\rho)}(g.g_1.g^{-1}.g_2) = \frac{1}{n_{\rho}} \chi^{(\rho)}(g_1) \chi^{(\rho)}(g_2) ,$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G} \chi^{(\rho)}(g.g_1) \chi^{(\sigma)}(g^{-1}.g_2) = \frac{\delta_{\rho,\sigma}}{n_{\rho}} \chi^{(\rho)}(g_1.g_2) .$$

## 5. Théories de jauge sur réseau.

En Mécanique Statistique, on définit un modèle sur un réseau carré, dans lequel les degrés de liberté sont attachés aux liens entre sites voisins et prennent leur valeur dans un groupe fini  $G$ . A chaque lien orienté  $\ell = \vec{ij}$  on associe l'élément  $g_\ell$ , à  $-\ell = \vec{ji}$ , on associe  $g_\ell^{-1}$ . A chaque carré (ou "plaquette")  $p = ijkl$ , on associe le produit des éléments des liens :

$$g_p = g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{kl} \cdot g_{li}$$

et l'"énergie" d'une configuration de ces variables est donnée par

$$E = - \sum_{\text{plaquettes } p} \Re e \chi(g_p)$$

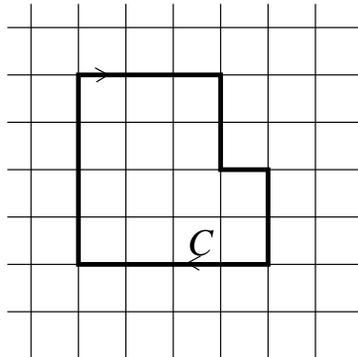
où  $\chi$  est le caractère d'une certaine représentation unitaire du groupe. Le poids de Boltzmann est donc

$$e^{-\beta E} = \prod_p e^{\beta \Re e \chi(g_p)} \quad , \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

et la fonction de partition s'écrit

$$Z = \prod_{\text{liens } \ell} \left( \frac{1}{n} \sum_{\{g_\ell \in G\}} \right) \prod_{\text{plaquettes}} e^{\beta \Re e \chi(g_p)} .$$

Montrer que l'énergie  $E$  est invariante par redéfinition des  $g_{ij}$  selon  $g_{ij} \mapsto g_i \cdot g_{ij} \cdot g_j^{-1}$ , où  $g_i \in G$  (c'est une invariance *locale*, l'analogue dans ce formalisme de l'invariance de jauge de (5.7)), et que  $E$  ne dépend pas de l'orientation des plaquettes.



On désire calculer  $Z$  pour un réseau fini de  $\mathcal{N}$  plaquettes ainsi que la valeur moyenne de  $\chi^{(\sigma)}(g_C)$  où  $g_C$  désigne le produit ordonné des  $g_\ell$  le long d'une courbe fermée orientée  $C$  et  $\chi^{(\sigma)}$  est un certain caractère irréductible de  $G$

$$\langle \chi^{(\sigma)}(g_C) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{g_\ell\}} \chi^{(\sigma)} \left( \prod_{\ell \in C} g_\ell \right) \prod_p e^{\beta \Re e \chi(g_p)} .$$

Montrer qu'on peut développer chaque  $\exp \beta \Re e \chi(g_p)$  sur les caractères irréductibles de  $G$  selon

$$e^{\beta \Re e \chi(g_p)} = \sum_\rho n_\rho \beta_\rho \chi^{(\rho)}(g_p)$$

puis en utilisant de façon répétée les formules de l'exercice 4, que l'on peut sommer sur toutes les variables  $g_\ell$  et trouver

$$Z = \beta_1^N \quad \langle \chi^{(\sigma)}(g_C) \rangle = n_\sigma \left( \frac{\beta_\sigma}{\beta_1} \right)^A$$

où  $A$  désigne l'aire de la courbe  $C$ , c'est-à-dire le nombre de plaquettes qu'elle enferme et l'indice 1 se rapporte à la représentation identité.

Physiquement, ce type de considérations fournit un modèle discrétisé (sur réseau) et très simplifié ici (deux dimensions, groupe fini) de la chromodynamique quantique, la théorie de jauge des interactions fortes (interactions des quarks et de leurs composés, proton, neutron, pion, etc). On peut répéter ce calcul en dimension plus élevée, où les résultats ci-dessus apparaissent comme le terme dominant dans un développement à  $\beta$  petit ("haute température"). Le fait que la valeur moyenne ci-dessus décroisse comme  $x^A$  ( $x = \beta_\sigma/\beta_1 < 1$  pour  $\beta$  assez petit) pour de grandes aires est un signal du "confinement des quarks" dans cette théorie, c'est-à-dire de l'impossibilité de séparer une paire quark-antiquark à grande distance . . .

6. Soit un groupe fini  $G$  d'ordre  $n$ , sa table de caractères  $\chi_i^{(\rho)}$ . On se propose de calculer le déterminant  $\Delta = \det[\chi_i^{(\rho)}]$ . Montrer que si  $\rho$  désigne une représentation irréductible, sa conjuguée est aussi une représentation irréductible, équivalente ou non de  $\rho$ . En déduire que  $\Delta^*$  diffère au plus de  $\Delta$  par un signe. En introduisant la matrice  $\hat{\chi}_i^{(\rho)}$  de l'éq. (4.15), montrer alors que

$$\Delta = \epsilon \left( \frac{n^N}{n_1 \cdots n_N} \right)^{\frac{1}{2}}$$

en termes des cardinaux  $n_i$  des  $N$  classes de  $G$  et d'un nombre  $\epsilon$ , racine quatrième de l'unité.

7. Soit un groupe fini  $G$  et deux caractères  $\chi$  et  $\psi$  de  $G$ . Montrer que le produit  $\chi\psi$  défini par

$$(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g)$$

est aussi le caractère d'une représentation  $D$  de  $G$ . On dénote les caractères irréductibles de  $G$  par  $\chi^{(\rho)}$ . Comment décompose-t-on  $D$  sur les représentations irréductibles de  $G$ ? Exprimer les multiplicités en termes de  $\chi$ ,  $\psi$  et des  $\chi^{(\rho)}$ .

8. On considère le groupe constitué des éléments  $\pm e, \pm i, \pm j$  et  $\pm k$  satisfaisant les relations  $i^2 = j^2 = k^2 = -e, i.j = k$ , etc par permutation cyclique. C'est le *groupe des quaternions*  $Q$ . Montrer qu'on peut trouver une représentation de dimension 2 de  $Q$  en termes des matrices de Pauli  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . En déduire que  $Q$  a cinq représentations irréductibles et cinq classes. Que sont ces classes? Quelles sont les valeurs possibles des caractères pour les classes de  $i, j$  ou  $k$ ? Dresser la table de caractères de  $Q$ .

On considère ensuite le groupe  $T$  engendré par les matrices  $2 \times 2$  :  $u = i\sigma_2$  et  $v = \sigma_1$ . Quel est son ordre, que sont ses classes? Montrer que  $T$  et  $Q$  ne sont pas isomorphes. Dresser la table de caractères de  $T$ . Qu'en conclut-on?

9. ★ On se propose d'établir la propriété suivante : la dimension de toute représentation irréductible d'un groupe fini  $G$  divise l'ordre de ce groupe. La démonstration fait appel à des notions de théorie des nombres, en particulier à celle d'*entier algébrique*. On nomme ainsi toute racine d'un polynôme "monique" à coefficients entiers (monique = le coefficient du terme de degré maximal de ce polynôme est 1). Ainsi, toute valeur propre d'une matrice à coefficients entiers est un entier algébrique. On démontre que (i) l'ensemble des entiers algébriques forme un anneau : la somme et le produit de deux entiers algébriques est aussi un entier algébrique; (ii) un entier algébrique qui est aussi un rationnel est un entier de  $\mathbb{Z}$ .

Armé(e) de ces notions, établir les propriétés suivantes :

- a : pour tout  $g \in G$ , il existe un entier  $n$  tel que  $g^n = e$ , et donc les valeurs propres de l'opérateur (unitaire)  $D(g)$  pour toute représentation de  $G$  sont des racines de l'unité. En déduire que les caractères de  $G$  sont des entiers algébriques.
- b : Soit  $D$  une irréductible de dimension  $d$ ,  $C_i$  une classe de  $G$ ; montrer que  $\sum_{g \in C_i} D(g) = \lambda_i \mathbb{I}$  où  $\lambda_i$  est un entier algébrique, donc que  $\frac{1}{d} \sum_{g \in C_i} \chi(g)$  est un entier algébrique. (On pourra utiliser le fait que  $\lambda_i$  apparaît comme la valeur propre de la matrice  $(N_i)_j^k = N_{ij}^k$  de l'exercice 2.)
- c : En calculant alors  $\frac{n}{d}$  fois la norme carrée du caractère, montrer que ce nombre est un entier algébrique, donc un entier, c.q.f.d.

## Problème : Groupe alterné et représentations induites

A. On se propose d'étudier le groupe alterné  $A_n$  des permutations paires de  $n$  objets, à partir de ce qu'on sait sur le groupe  $S_n$ .

1. Dans un premier temps, on s'intéresse à la structure en classes de  $A_n$ . Soit une classe  $\nu = [1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots n^{\nu_n}]$  de  $S_n$ , montrer qu'ou bien elle est complètement contenue dans  $A_n$ , ou bien elle n'a avec  $A_n$  aucun élément commun. Donner un critère simple ne dépendant que des  $\nu_i$  pour qu'on soit dans le premier cas.

On suppose la classe  $\nu$  contenue dans  $A_n$ . La question est de savoir si elle demeure une classe unique dans  $A_n$  ou se scinde en plusieurs classes. Etant donnée une permutation  $s$  de la classe  $\nu$ , on suppose qu'il existe une permutation *impaire*  $q_s$  de  $S_n$  telle que  $sq_s = q_s s$ ; montrer que toute autre permutation  $t$  de  $\nu$  jouit de la même propriété :  $\exists q_t : tq_t = q_t t$ . En conclure que les permutations  $s$  et  $t$  sont conjuguées dans  $A_n$  et donc que la classe  $\nu$  ne se scinde pas.

Montrer que toute permutation de  $S_n$  commute avec toute permutation cyclique sur  $k \leq n$  objets qui entre dans sa décomposition en cycles. En déduire que toute classe  $\nu$  contenue dans  $A_n$  possédant au moins un cycle de longueur paire ne se scinde pas et donne lieu à une seule classe de  $A_n$ . Autrement dit les seules classes qui peuvent se scinder sont celles pour lesquelles  $\nu_2 = \nu_4 = \dots = 0$ . En fait on montre et on admettra que les seules classes qui se scindent sont celles ne contenant que des cycles de longueurs impaires inégales, et que ces classes-là se scindent en deux classes de même nombre d'éléments.

2. Considérons le groupe  $A_4$ . En utilisant les résultats précédents et ceux connus sur  $S_4$ , quel est le nombre de ses classes et le nombre de leurs éléments ? Quel est le nombre de ses représentations irréductibles ?

3. On considère le groupe du tétraèdre, sous-groupe fini de  $SO(3)$  laissant invariant un tétraèdre régulier. Montrer qu'il est constitué de l'identité et de rotations de  $\pi$  et de  $2\pi/3$  qu'on décrira et qu'on dénombrera. Montrer en étudiant son action sur les sommets du tétraèdre qu'il s'identifie avec  $A_4$ . A quoi correspondent les classes trouvées au 2 ?

4. En utilisant la table des caractères de  $S_4$  donnée ci-dessous (avec des notations pour les représentations qui seront expliquées plus tard dans le cours) et les théorèmes généraux, déterminer les dimensions des représentations de  $A_4$  puis dresser la table de leurs caractères. (*Indication* : on pourra étudier la restriction à  $A_4$  des représentations de  $S_4$ . *Attention !* : les caractères ne sont pas nécessairement réels ! Le problème admet deux solutions, dont l'une seulement est en accord avec les résultats de 3.)

↓ classes \ rep. →	{4}	{3, 1}	{2 <sup>2</sup> }	{2, 1 <sup>2</sup> }	{1 <sup>4</sup> }	
[1 <sup>4</sup> ] <sup>+</sup>	1	3	2	3	1	1
[1 <sup>2</sup> , 2] <sup>-</sup>	1	1	0	-1	-1	6
[1, 3] <sup>+</sup>	1	0	-1	0	1	8
[4] <sup>-</sup>	1	-1	0	1	-1	6
[2 <sup>2</sup> ] <sup>+</sup>	1	-1	2	-1	1	3

**B.** On sait que les représentations d'un groupe fournissent des représentations de ses sous-groupes. Dans cette partie, on va étudier dans quelle mesure on peut procéder dans le sens inverse. C'est la théorie des représentations induites.

1. Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $n_G$ ,  $H$  un sous-groupe de  $G$  d'ordre  $n_H = \frac{n_G}{d}$ . Montrer qu'on peut partitionner  $G$  en  $d$  classes à gauche par rapport à  $H$  sous la forme

$$G = x_1H \cup x_2H \cup \dots \cup x_dH$$

où  $x_1 = e, x_2, \dots, x_d$  sont les représentants des  $d$  classes et  $x_iH$  désigne l'ensemble des  $x_ih, h \in H$ . Montrer que pour tout  $g \in G$ , il existe un  $i$  unique dans  $\{1, \dots, d\}$  tel que  $x_i^{-1}g \in H$ . Montrer que pour tout  $g \in G$  et  $i \in \{1, \dots, d\}$  il existe un  $j$  unique et un  $k$  unique tels que  $x_i^{-1}gx_j \in H$  et  $x_k^{-1}gx_i \in H$ .

2. Soit  $D$  une représentation de  $H$  de dimension  $n_D$ . Pour tout  $g \in G$ , on définit la matrice  $D^G$  de dimensions  $n_D \cdot d \times n_D \cdot d$  ayant une structure en blocs

$$D^G(g) = \begin{pmatrix} \check{D}(x_1^{-1}gx_1) & \dots & \check{D}(x_1^{-1}gx_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \check{D}(x_d^{-1}gx_1) & \dots & \check{D}(x_d^{-1}gx_d) \end{pmatrix} \quad (1)$$

où chaque bloc  $\check{D}$  est une matrice  $n_D \times n_D$  définie par

$$\check{D}(g') = \begin{cases} D(g') & \text{si } g' \in H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer en utilisant les résultats de B.1 que dans chaque ligne et chaque colonne de (1),  $D^G$  n'a qu'un seul bloc  $n_D \times n_D$  non nul. Montrer que  $D^G$  constitue une représentation de  $G$ , dite représentation induite par la représentation  $D$  de  $H$ .

3. Soient  $\chi$  le caractère de  $D$  dans  $H$ ,  $\chi^G$  celui de la représentation  $D^G$  de  $G$ . Donner une expression de  $\chi^G$  en termes de  $\check{\chi}$  défini à nouveau par

$$\check{\chi}(g') = \begin{cases} \check{\chi}(g') & \text{si } g' \in H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'on peut écrire

$$\chi^G(g) = \frac{1}{n_H} \sum_{g' \in G} \check{\chi}(g'^{-1}gg').$$

4. On suppose maintenant la représentation  $D$  de  $H$  irréductible. Montrer qu'on peut décomposer  $\chi^G$  sur les caractères irréductibles  $\chi^{(\rho)}$  de  $G$  sous la forme  $\chi^G(g) = \sum_{\rho} m_{\rho} \chi^{(\rho)}$ . Donner une expression des multiplicités  $m_{\rho}$  en termes de  $\check{\chi}$  et  $\chi^{(\rho)}$ . Calculer par ailleurs la multiplicité  $m'_{\rho}$  avec laquelle la représentation  $D$  apparaît dans la décomposition en représentations irréductibles de  $H$  de la restriction à  $H$  de  $D^{(\rho)}$ . Démontrer que  $m_{\rho} = m'_{\rho}$ , ce qui constitue le théorème de réciprocity de Frobenius : la multiplicité avec laquelle la représentation irréductible  $D^{(\rho)}$  apparaît dans la représentation induite  $D^G$  est égale à celle avec laquelle la représentation  $D$  apparaît dans la restriction de  $D^{(\rho)}$  à  $H$ .

5. Soit  $g$  un élément de  $G$ ,  $n_g$  le nombre d'éléments qui lui sont conjugués dans  $G$ . Montrer que quand  $g'$  parcourt  $G$ ,  $g'^{-1}gg'$  parcourt  $n_G/n_g$  fois la classe de conjugaison de  $g$ . En déduire que l'expression du caractère induit dans  $G$  par le caractère identité de  $H$  est

$$\chi_{\text{id}}^G(g) = \frac{n_G}{n_H} \frac{n_g^H}{n_g}$$

où  $n_g^H$  est le nombre d'éléments de la classe de conjugaison de  $g$  contenus dans  $H$ .

C. On s'intéresse à présent au groupe alterné  $A_5$ . Le groupe  $S_5$  a 7 classes,

$$[1^5], [1^3, 2], [1^2, 3], [1, 2^2], [1, 4], [2, 3], [5]$$

de nombres d'éléments respectifs 1, 10, 20, 15, 30, 20 et 24. Compte tenu des résultats énoncés en A.2, quel est le nombre de classes et de représentations irréductibles de  $A_5$ , et le nombre d'éléments de ces classes ? Utiliser les résultats de B.5 pour calculer le caractère de la représentation induite par la représentation identité de  $A_4$ . Montrer que cette représentation est réductible et qu'elle se décompose en deux représentations irréductibles. Ecrire deux colonnes de la table de caractères que ces considérations fournissent. Peut-on finir de remplir la table ?

## Références

Sur le théorème de Wigner, voir E. Wigner, *Group theory and its applications*; A. Messiah, *Mécanique Quantique* (ch.XV, sect. 2).

Sur les représentations projectives, consulter M. Hamermesh, *Group Theory and its applications to physical problems*, Addison-Wesley, ou l'article (difficile) de V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, Ann. Math. **59** (1954) 1-46.

CHAPITRE 3  
ROTATIONS DANS L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

**1. Un bref retour sur le groupe  $SO(2)$**

Avant d'étudier le groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions, revenons brièvement sur le cas des rotations dans le plan discutées au chapitre 2. On a construit là les représentations irréductibles (complexes)  $D(\alpha) = \exp ik\alpha$  par la connaissance qu'on avait de la représentation de Fourier. Mais on aurait pu procéder autrement et utiliser le fait que l'angle  $\alpha$  peut varier continûment pour écrire pour toute représentation unitaire

$$\begin{aligned} D(\alpha + d\alpha) &= D(d\alpha)D(\alpha) \\ &= (\mathbb{I} - i d\alpha J)D(\alpha) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où on a développé au premier ordre l'opérateur unitaire  $D(d\alpha)$  en  $\mathbb{I} - i d\alpha J$ ,  $J$  un opérateur hermitique, dit le générateur infinitésimal. Dans une représentation arbitraire de dimension  $d$ ,  $J$  est une matrice  $d \times d$ . Dans une représentation irréductible donc de dimension 1,  $J$  est simplement un nombre réel. Cette relation conduit alors à une équation différentielle pour  $D(\alpha)$

$$\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha} = -iJ D(\alpha) \tag{1.2}$$

qui, compte tenu de  $D(0) = \mathbb{I}$ , s'intègre immédiatement en

$$D(\alpha) = e^{-iJ\alpha} . \tag{1.3}$$

Si finalement on insiste pour n'avoir que des représentations univaluées, alors dans chaque représentation irréductible  $J$  doit ne prendre que des valeurs entières  $J = -k \in \mathbb{Z}$  et on retrouve bien le résultat antérieur.

La morale de cet exercice est que, dans un groupe continu comme  $U(1)$ , une étude *locale*, au voisinage de l'identité, suffit à déterminer une grande partie de la structure du groupe et de ses représentations. La propriété que  $D(\alpha + 2\pi) = D(\alpha)$ , elle, échappe à cette analyse locale; elle est en fait sensible aux propriétés globales, topologiques de  $U(1)$ .

Revenons en effet sur la condition pour les représentations d'être univaluées. Si on choisit  $k$  de la forme  $\frac{1}{2}(2k' + 1)$ , la représentation  $D^{(k)}(\alpha) = \exp ik\alpha$  a la propriété que  $D^{(k)}(\alpha + 2\pi) = -D^{(k)}(\alpha)$ . A la rotation d'angle  $\alpha \sim \alpha + 2\pi$ ,  $D^{(k)}$  fait donc correspondre *deux* représentants opposés par le signe. On dit que la représentation est bivaluée. Plus généralement, en choisissant  $k$  rationnel de dénominateur  $p$  (et de numérateur premier avec  $p$ ), on construit des représentations  $p$ -valuées, dont les différentes déterminations diffèrent par une racine  $p$ -ième de l'unité. L'existence de ces représentations multivaluées trouve son origine dans des propriétés topologiques du groupe  $U(1)$ , considéré comme espace topologique, que nous allons discuter.

Étant donné un espace topologique  $X$ , on considère des courbes fermées, paramétrées par une application continue  $x$  de  $[0, 1]$  dans  $X$  :  $x(t)$  décrit une courbe fermée dans  $X$  quand  $t$  décrit  $[0, 1]$ , pourvu que  $x(0) = x(1)$ , qui est l'origine et l'extrémité de la courbe. On dit alors que deux courbes fermées  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  de même origine  $x_0$  sont *homotopes*, si on peut trouver une déformation continue de l'une dans l'autre par une famille de courbes continues de même origine, c'est-à-dire s'il existe une fonction continue  $f(t, \xi)$  de deux variables  $t, \xi \in [0, 1]$  telle que

$$\begin{aligned} \forall \xi \in [0, 1] \quad & f(0, \xi) = f(1, \xi) = x_0 && \text{courbes fermées} \\ \forall t \in [0, 1] \quad & f(t, 0) = x_1(t) \quad f(t, 1) = x_2(t) && \text{interpolation .} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Autrement dit, les courbes qui interpolent entre  $x_1(\cdot)$  et  $x_2(\cdot)$  sont données par les  $f(\cdot, \xi)$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ . Cette relation d'homotopie est une relation d'équivalence, pour laquelle les courbes fermées d'origine  $x_0$  se scindent en classes. On note  $\pi_1(X; x_0)$  l'ensemble de ces classes (cf. la figure 1.2 de l'Appendice A au chapitre 1).

Les chemins d'origine  $x_0$  peuvent se composer :  $C_1 \circ C_2$  correspond au chemin obtenu en parcourant successivement  $C_2$  (de  $x_0$  à  $x_0$ ) puis  $C_1$  (également de  $x_0$  à  $x_0$ ). Le chemin fixe  $x(t) = x_0$  pour tout  $t$  agit comme élément neutre, le chemin parcouru en sens inverse  $x'(t) = x(1 - t)$  est l'inverse de  $x(\cdot)$ . Les courbes fermées d'origine  $x_0$  forment donc un groupe, et comme la composition est compatible avec la relation d'homotopie :  $C_1 \sim C'_1$ ,  $C_2 \sim C'_2$  implique  $C_1 \circ C_2 \sim C'_1 \circ C'_2$ , l'ensemble quotient  $\pi_1(X, x_0)$  est aussi doté de la structure de groupe. Finalement, on s'affranchit de la référence à  $x_0$  en notant que (dans un espace connexe) deux groupes  $\pi_1(X, x_0)$  et  $\pi_1(X, x'_0)$  sont isomorphes. On parle donc du *groupe d'homotopie* (ou "groupe fondamental")  $\pi_1(X)$ .

Dire que  $\pi_1(X)$  est non trivial revient donc à dire qu'il existe dans  $X$  des chemins fermés non homotopes, en particulier des chemins fermés qui ne peuvent se réduire continûment à un point (chemins "non contractibles"). On dit alors que  $X$  est *multiplement connexe*. Exemples : le plan privé de points  $x_1, \dots, x_n$ , le tore, sont des surfaces multiplement connexes. Inversement,  $X$  est dit *simplement connexe* si tout chemin fermé est homotope à un point. Exemples : le disque, ou plus généralement, l'intérieur de la "boule" à  $n$  dimensions, et la sphère  $S_n$  à  $n$  dimensions pour  $n > 1$ , ( $S_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$ ), sont simplement connexes. On démontre que si  $X$  n'est pas simplement connexe, il existe un autre espace topologique  $\tilde{X}$ , simplement connexe, tel que, *localement*,  $\tilde{X}$  et  $X$  soient homéomorphes : il existe une application continue surjective  $p$  de  $\tilde{X}$  dans  $X$  tel que tout point  $x$  de  $\tilde{X}$  ait un voisinage  $V_x$  et que  $V_x \mapsto p(V_x)$  soit un homéomorphisme, c'est-à-dire une application bijective et bicontinue.  $\tilde{X}$  est le *recouvrement universel* (ou revêtement universel) de  $X$ , il est unique à un homéomorphisme près.

On peut construire le recouvrement universel  $\tilde{X}$  en considérant les chemins qui joignent un point donné  $x_0$  à un point  $x$  et leurs classes d'équivalence par déformation continue à extrémités fixes.  $\tilde{X}$  est l'ensemble de ces classes d'équivalence. Cet espace peut être muni d'une topologie naturelle héritée de celle de  $X$  et on montre qu'il est simplement connexe (cf. Pontryagin). Si  $X = G$  est un groupe, on peut multiplier au sens de la loi de groupe  $G$  deux chemins  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  joignant  $e$  à  $g_1$  et à  $g_2$  respectivement. Le chemin  $g_1(t).g_2(t)$  joint  $e$  à  $g_1.g_2$ . Cette loi de composition est compatible avec l'équivalence et munit  $\tilde{X} = \tilde{G}$  d'une structure de groupe. C'est le *groupe de recouvrement universel*. La

projection  $p$  de  $\tilde{G}$  dans  $G$  associe à toute classe de chemins leur extrémité commune. C'est bien un homéomorphisme local et un homomorphisme de groupes, et son noyau qui est un sous-groupe invariant n'est autre que le groupe d'homotopie  $\pi_1(G)$  (pourquoi?). Le groupe quotient est isomorphe à  $G$

$$\tilde{G}/\pi_1(G) \simeq G, \quad (1.5)$$

(selon une propriété générale du groupe quotient par le noyau d'un homomorphisme, cf. chap. 1).

Quelles sont les relations entre les représentations de  $G$  et celles de  $\tilde{G}$ ? Observons tout d'abord que toute représentation  $D$  de  $G$  se relève en une représentation  $\tilde{D}$  de  $\tilde{G}$  :

$$\forall \tilde{g} \in \tilde{G}, \quad \tilde{D}(\tilde{g}) = D(p(\tilde{g})) \quad (1.6)$$

qui est bien une représentation en vertu de la propriété de  $p$  d'être un homomorphisme. Inversement une représentation de  $\tilde{G}$  peut donner lieu à une représentation *multivaluée* de  $G$  : quand  $g$  parcourt une courbe fermée dans  $G$ ,  $p^{-1}(g)$  peut, lui, décrire une courbe ouverte dans  $\tilde{G}$  entre deux déterminations de  $p^{-1}(g)$  et  $D(g)$  défini comme  $\tilde{D}(p^{-1}(g))$  change alors de détermination. Par définition les seules représentations multivaluées d'un groupe  $G$  que nous considérerons sont celles provenant de représentations univaluées de son groupe de recouvrement universel  $\tilde{G}$ .

Le problème des représentations projectives mentionné au chapitre 2 (sect. 6.2) s'analyse aussi en termes du groupe de recouvrement. Montrons d'abord qu'un groupe simplement connexe ne peut avoir de représentation projective de dimension finie non triviale. Si en effet on a une telle représentation de dimension finie  $d$  :  $D(g_1.g_2) = \omega(g_1, g_2)D(g_1)D(g_2)$ , on a aussi

$$\det D(g_1.g_2) = \omega^d(g_1, g_2) \det D(g_1) \det D(g_2) \quad (1.7)$$

donc en définissant

$$D'(g) = \frac{D(g)}{\det^{\frac{1}{d}} D(g)} \quad (1.8)$$

on se débarrasse du système de phases et  $D'(g_1.g_2) = D'(g_1)D'(g_2)$ . Le changement  $D \rightarrow D'$  nécessite cependant un choix de détermination de la racine  $d$ -ième  $\delta(g) = \det^{\frac{1}{d}} D(g)$ . On choisit  $\delta(e) = 1$  pour respecter  $D(e) = D'(e) = \mathbb{I}$ , puis on définit la détermination de  $\delta(g)$  par continuité. Cette procédure fournit un résultat unique et non ambigu si  $\tilde{G}$  est simplement connexe, ce qui établit l'assertion de trivialité des représentations projectives dans ce cas. Si par contre,  $G$  n'est pas simplement connexe, la représentation  $D'(g)$  peut être multivaluée. Par l'analyse précédente, elle s'obtient à partir d'une représentation ordinaire (univaluée et sans phase) du groupe de recouvrement universel  $\tilde{G}$ .

Notons encore qu'une représentation multivaluée peut aussi être regardée comme une représentation projective. Pour chaque élément  $g$  de  $G$ , on fait un choix *a priori* d'une détermination de  $D(g)$ . Par multiplication de  $D(g_1)$  et  $D(g_2)$ , on ne retombe pas en général sur la "bonne" détermination de  $D(g_1.g_2)$  d'où la nécessité d'introduire le système de phases. En conclusion, représentations multivaluées et représentations projectives sont, *pour les représentations de dimension finie des groupes continus*, deux facettes du même phénomène.

Dans le cas de  $U(1)$  isomorphe au cercle, il est clair qu'il existe des chemins fermés non contractibles et les différentes classes d'homotopie se distinguent par le nombre de tours

(positif ou négatif) autour du centre. On a donc dans ce cas  $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$  et le groupe de recouvrement n'est autre que  $\mathbb{R}$ . Localement,  $U(1)$  est bien homéomorphe à  $\mathbb{R}$ , qui est simplement connexe, et le quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = U(1)$ . Les représentations multivaluées de  $U(1)$  obtenues pour  $k \notin \mathbb{Z}$  sont des représentations ordinaires du groupe  $\mathbb{R}$ .

Pour résumer, l'étude du groupe  $U(1)$  nous a appris qu'une étude locale des rotations infinitésimales suffisaient à trouver la forme générale des représentations mais qu'une étude de la topologie du groupe permettait seule de trouver le spectre exact des représentations. Nous avons aussi découvert le rôle que joue le groupe  $\tilde{G}$  de recouvrement universel. Nous allons maintenant appliquer ces idées à un cas plus compliqué.

## 2. Rotations de $\mathbb{R}^3$ , les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

### 2.1. Le groupe $SO(3)$ , groupe à trois paramètres

On considère l'espace euclidien à trois dimensions et le groupe des rotations. Ces rotations laissent invariante la norme carrée du rayon vecteur  $\overline{OM}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x^2 + y^2 + z^2$ <sup>6</sup> et sont représentées dans une base orthonormée par des matrices  $3 \times 3$  orthogonales réelles, de déterminant 1 : elles forment le groupe  $SO(3)$ .

Toute rotation de  $SO(3)$  est une rotation d'un angle  $\psi$  autour d'un axe de vecteur directeur unitaire  $\hat{n}$ , et les rotations associées à  $(\hat{n}, \psi)$  et à  $(-\hat{n}, -\psi)$  sont identiques. On notera  $R_n(\psi)$  cette rotation. De façon très explicite

$$\vec{x}' = R_n(\psi)\vec{x} = \cos \psi \vec{x} + (1 - \cos \psi)(\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \sin \psi (\vec{n} \wedge \vec{x}). \quad (2.1)$$

Comme un vecteur unitaire  $\hat{n}$  dans  $\mathbb{R}^3$  dépend de deux paramètres, par exemple l'angle  $\theta$  qu'il fait avec l'axe  $Oz$  et l'angle  $\phi$  que fait sa projection dans le plan  $Ox, Oy$  avec l'axe  $Ox$  (voir figure 1) un élément de  $SO(3)$  est paramétrisé par 3 variables continues. On prendra ainsi

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi. \quad (2.2)$$

On dit que  $SO(3)$  est une variété de dimension 3. Pour la rotation d'axe  $\hat{n}$  colinéaire à l'axe  $Oz$ , on a la matrice

$$\mathcal{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

tandis qu'autour des axes  $Ox$  et  $Oy$

$$\mathcal{R}_x(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (2.3)'$$

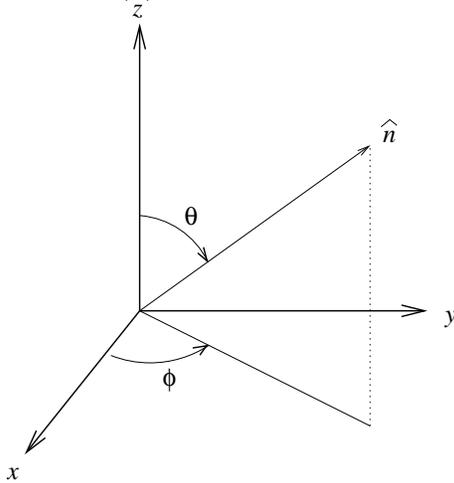
---

<sup>6</sup> Dans tout ce chapitre, nous utilisons alternativement les notations  $(x, y, z)$  ou  $(x_1, x_2, x_3)$  pour désigner les coordonnées dans un repère orthonormé.

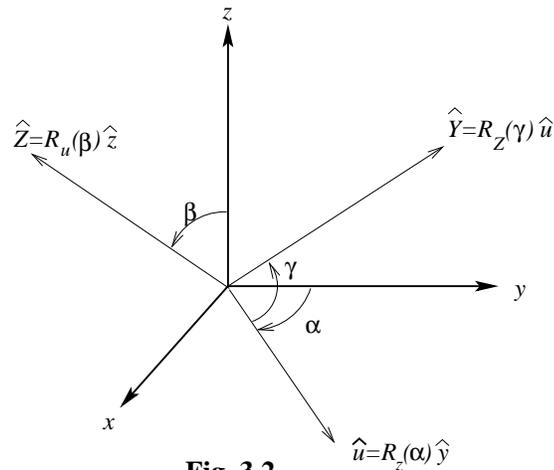
On note que

$$RR_n(\psi)R^{-1} = R_{n'}(\psi) \quad (2.4)$$

où  $\hat{n}'$  est le transformé de  $\hat{n}$  par la rotation  $R$ , ce qui exprime que les classes de conjugaison du groupe  $SO(3)$  sont caractérisées par l'angle  $\psi$ .



**Fig. 3.1**



**Fig. 3.2**

Une autre description fait appel aux *angles d'Euler* : étant donné un repère orthonormé  $(Ox, Oy, Oz)$ , toute rotation peut être considérée comme résultant de la composition d'une rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $Oz$  qui amène  $Oy$  en  $Ou$ , suivie d'une rotation d'angle  $\beta$  autour de  $Ou$  amenant  $Oz$  en  $OZ$ , et enfin d'une rotation d'angle  $\gamma$  autour de  $OZ$  (voir figure 2). On prend donc  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ ,  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$  et on écrit

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_Z(\gamma)R_u(\beta)R_z(\alpha) \quad (2.5)$$

mais selon (2.4)

$$R_Z(\gamma) = R_u(\beta)R_z(\gamma)R_u^{-1}(\beta) \quad R_u(\beta) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)$$

d'où en reportant dans (2.5)

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) . \quad (2.6)$$

où on a utilisé le fait que  $R_z(\alpha)R_z(\gamma)R_z^{-1}(\alpha) = R_z(\gamma)$  car les rotations autour d'un même axe commutent (elles forment un sous-groupe abélien, isomorphe à  $SO(2)$ ). Cette méthode permet de comparer les deux paramétrisations précédentes et d'en tirer les relations entre  $(\theta, \phi, \psi)$  et  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (voir exercice 1).

## 2.2. Topologie du groupe $SO(3)$ , le groupe $SU(2)$

Le groupe  $SO(3)$  est clairement une variété connexe et compacte<sup>7</sup>, comme le montre par exemple la paramétrisation (2.2). Par contre, il n'est pas simplement connexe. Ceci apparaît dans une redondance de la paramétrisation (2.2), quand  $\psi = \pi$ ,

$$R_n(\pi) = R_{-n}(\pi) . \quad (2.7)$$

<sup>7</sup> c'est-à-dire toute suite infinie contient une sous-suite convergente dans le groupe

Visualisons la rotation  $R_n(\psi)$  par le point  $\operatorname{tg} \frac{\psi}{4} \hat{n}$  d'un espace  $\mathbb{R}^3$  auxiliaire; ces points sont tous dans la boule de rayon 1, avec la rotation identité au centre et les rotations d'angle  $\pi$  sur la surface de la sphère, mais en raison de (2.7), il faut identifier les points de la sphère diamétralement opposés. Une courbe joignant deux points diamétralement opposés doit être considérée comme fermée mais n'est pas contractible. Il existe deux classes de chemins fermés non homotopes et le groupe  $SO(3)$  est doublement connexe. Son groupe d'homotopie est  $\pi_1(SU(2)) = \mathbb{Z}_2$ .

Cette même visualisation des rotations par l'intérieur de la boule unité permet de comprendre l'assertion faite au chapitre 1 que le groupe  $SO(3)$  est simple. S'il n'en était pas ainsi, soit  $R = R_n(\psi)$  un élément d'un sous-groupe invariant de  $SO(3)$ , qui contient aussi tous les conjugués de  $R$  (par définition d'un sous-groupe invariant). Ces conjugués sont visualisés par les points de la sphère de rayon  $\operatorname{tg} \psi/4$ . Le sous-groupe invariant contenant  $R_n(\psi)$  et des points arbitrairement proches de son inverse  $R_{-n}(\psi)$  contient des points arbitrairement proches de l'identité, qui par conjugaison, remplissent une petite boule au voisinage de l'identité. Il reste à montrer que le produit de tels éléments permet de remplir toute la boule, c'est-à-dire que le sous-groupe invariant ne peut être que le groupe  $SO(3)$  tout entier; ceci est en fait vrai pour tout groupe de Lie connexe, comme on le verra plus bas.

Pour bien comprendre cette propriété capitale de  $SO(3)$  de ne pas être simplement connexe et étudier son groupe de recouvrement, considérons une autre paramétrisation des rotations. Nous associons à la rotation  $R_n(\psi)$  le vecteur unitaire à quatre dimensions  $u : (u_0 = \cos \frac{\psi}{2}, \vec{u} = \hat{n} \sin \frac{\psi}{2})$ ; on a  $u^2 = u_0^2 + \vec{u}^2 = 1$ , et  $u$  appartient à la sphère unité  $S^3$  dans l'espace  $\mathbb{R}^4$ . Le changement de détermination de  $\psi$  par un multiple impair de  $2\pi$  change  $u$  en  $-u$ . Il y a donc bijection entre  $R_n(\psi)$  et la paire  $(u, -u)$ , c'est-à-dire entre  $SO(3)$  et  $S^3/\mathbb{Z}_2$ , la sphère dans laquelle on identifie les paires de points opposés. (Quelle est la relation avec la paramétrisation précédente dans la boule de  $\mathbb{R}^3$ ?) La sphère  $S^3$  est donc un recouvrement de  $SO(3)$ . En quel sens cette sphère est-elle un "groupe de recouvrement"? Pour répondre à cette question, introduisons les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Avec la matrice identité  $\mathbb{I}$ , elles constituent une base de l'espace des matrices  $2 \times 2$  hermitiques. Pour  $u$  un vecteur unitaire réel à quatre dimensions (c'est-à-dire un point de  $S^3$ ), formons la matrice

$$U = u_0 \mathbb{I} - i \vec{u} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.9)$$

qui est unitaire et de déterminant 1 (le vérifier et montrer aussi la réciproque : toute matrice unitaire  $2 \times 2$  est de la forme (2.9)). Ces matrices forment le groupe  $SU(2)$  (spécial unitaire) qui est donc isomorphe à  $S^3$ . Il est suggéré que la multiplication des matrices

$$U_n(\psi) = \cos \frac{\psi}{2} - i \sin \frac{\psi}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad \hat{n} \in S^2 \quad (2.10)$$

fournit la loi de groupe cherchée dans  $S^3$ . Montrons qu'en effet à une matrice de  $SU(2)$  on peut associer une rotation de  $SO(3)$  et qu'au produit de deux matrices de  $SU(2)$  correspond le produit des rotations de  $SO(3)$ . Au point  $x$  de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$ , associons la

matrice hermitique

$$X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

et agissons sur cette matrice selon

$$X \mapsto X' = UXU^\dagger, \quad (2.12)$$

ce qui définit une transformation linéaire  $x \mapsto x' = \mathcal{T}x$ . On calcule aisément que

$$\det X = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (2.13)$$

et comme  $\det X = \det X'$ , la transformation linéaire  $x \mapsto x' = \mathcal{T}x$  est une isométrie, donc  $\det \mathcal{T} = 1$  ou  $-1$ . Pour se convaincre qu'il s'agit bien d'une rotation, c'est-à-dire que la transformation a un déterminant 1, il suffit de calculer ce déterminant pour  $U = \mathbb{I}$  où  $\mathcal{T} =$  l'identité donc  $\det \mathcal{T} = 1$ , puis d'utiliser la connexité de la variété  $SU(2) (\cong S^3)$  pour conclure que la fonction continue  $\det \mathcal{T}(U)$  ne peut sauter à la valeur  $-1$ . En fait, en utilisant l'identité sur les matrices de Pauli

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (2.14)$$

( $\epsilon_{ijk}$  le tenseur complètement antisymétrique,  $\epsilon_{123} = +1$ ,  $\epsilon_{ijk} =$  signe de la permutation  $(ijk)$ ) le calcul explicite de  $X'$  conduit après un peu d'algèbre à

$$\begin{aligned} X' &= \left( \cos \frac{\psi}{2} - i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\psi}{2} \right) X \left( \cos \frac{\psi}{2} + i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\psi}{2} \right) \\ &= \left( \cos \psi \vec{x} + (1 - \cos \psi) (\vec{x} \cdot \hat{n}) \vec{n} + \sin \psi (\vec{n} \wedge \vec{x}) \right) \cdot \vec{\sigma} \end{aligned} \quad (2.15)$$

sur lequel on reconnaît la formule (2.1). On en conclut que la transformation  $x \rightarrow x'$  effectuée par les matrices de  $SU(2)$  dans (2.12) est bien la rotation d'angle  $\psi$  autour de  $\vec{n}$  et qu'elle réalise donc un homomorphisme du groupe  $SU(2)$  dans  $SO(3)$ . Cet homomorphisme envoie les deux matrices  $U$  et  $-U$  sur la même rotation.

Résumons les acquis de cette section. Nous avons montré que le groupe  $SO(3)$  est doublement connexe, que son groupe de recouvrement (d'ordre 2) est le groupe  $SU(2)$  et que l'homomorphisme de  $SU(2)$  dans  $SO(3)$  est réalisé par les matrices  $U$  de (2.10)-(2.12). Nous allons maintenant nous intéresser aux représentations de  $SU(2)$ .

### 2.3. Mesure invariante sur $SU(2)$

Le groupe  $SU(2)$  isomorphe à une sphère est compact et on peut donc intégrer une fonction sur ce groupe avec une grande variété de mesures d'intégration  $d\mu(g)$ . Nous avons à plusieurs reprises au chapitre 2 souligné l'intérêt qu'il y a à disposer d'une mesure d'intégration invariante, c'est-à-dire telle que  $d\mu(g.g_1) = d\mu(g_1.g) = d\mu(g)$ .

Une manière possible de trouver la bonne mesure est de considérer la transformation  $U \rightarrow U' = U.V$  où  $U, V$  et donc  $U'$  sont unitaires de la forme (2.9); si on relâche momentanément la condition que  $u_0^2 + \vec{u}^2 = 1$  (mais qu'on garde  $v_0^2 + \vec{v}^2 = 1$ ), ceci définit une

transformation linéaire  $u \rightarrow u'$  qui conserve la norme  $\det U = u_0^2 + \vec{u}^2 = u_0'^2 + \vec{u}'^2 = \det U'$ . C'est donc une rotation de l'espace  $\mathbb{R}^4$  qui préserve la mesure naturelle  $d^4u \delta(u^2 - 1)$  sur la sphère unité  $S^3$  d'équation  $\det U = 1$ . En d'autres termes, cette mesure sur la sphère  $S^3$  fournit une mesure invariante à droite :  $d\mu(U) = d\mu(U.V)$ . On démontrerait de la même façon que cette mesure est aussi invariante à gauche :  $d\mu(U) = d\mu(V.U)$ . Cette mesure est aussi invariante par  $U \rightarrow U^{-1}$ , car l'inversion dans  $SU(2)$  est la restriction à  $S^3$  de la transformation orthogonale  $u_0 \rightarrow u_0, \vec{u} \rightarrow -\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^4$ , qui préserve bien sûr la mesure naturelle sur  $S^3$  :

$$d\mu(U) = d\mu(UV) = d\mu(VU) = d\mu(U^{-1}) .$$

On montre qu'une telle mesure invariante, si elle existe, est unique à un facteur près.

La forme explicite de la mesure dépend de la paramétrisation utilisée. Si on adopte la direction  $\hat{n}$  (ou ses deux angles polaires  $\theta$  et  $\phi$ ) et l'angle de rotation  $\psi$ , on prendra

$$d\mu(U) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\psi}{2} \sin \theta d\psi d\theta d\phi \quad (2.16)$$

normalisée pour  $SU(2)$  à

$$\int_{SU(2)} d\mu(U) = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\psi \sin^2 \frac{\psi}{2} = 2\pi^2 \quad (2.17)$$

qui est l'"aire" de la sphère unité  $S^3$ . Pour  $SO(3)$  où l'angle  $\psi$  est restreint à  $(0, \pi)$ , on a plutôt  $\int_{SO(3)} d\mu(g) = \pi^2$ .

On obtient l'expression dans tout autre système de coordonnées, par exemple les angles d'Euler, en calculant le jacobien adéquat (exercice 2),

$$d\mu(U) = \frac{1}{8} \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma . \quad (2.18)$$

(Noter que  $0 \leq \gamma \leq 4\pi$  pour  $SU(2)$ , tandis que  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  et  $0 \leq \beta \leq \pi$ ).

Une autre méthode pour obtenir ces résultats passe par l'introduction d'une métrique invariante sur le groupe; on définit une distance carrée entre deux éléments  $U$  et  $U + dU$  par  $ds^2 = \frac{1}{2} \text{tr} dU dU^\dagger$  et on en déduit une mesure d'intégration invariante (cf. Appendice B). Avec la paramétrisation  $\hat{n}, \psi$ ,  $ds^2 = \frac{1}{4} d\psi^2 + \sin^2 \frac{\psi}{2} d\hat{n}^2$  qui conduit bien à (2.16).

L'existence de cette mesure d'intégration garantit que les raisonnements conduits au chapitre 2 sur les groupes finis et faisant appel au lemme de réarrangement s'étendent à  $SU(2)$ . C'est ainsi qu'on peut affirmer que

*Toute représentation de  $SU(2)$  dans un espace de Hilbert est équivalente à une représentation unitaire, et donc est complètement réductible en une somme de représentations irréductibles dont on va montrer qu'elles sont de dimension finie.*

### 3. Générateurs infinitésimaux. L'algèbre de Lie $su(2)$

L'étude du groupe  $U(1)$  nous a appris l'intérêt de considérer le voisinage de l'identité dans le groupe et les générateurs infinitésimaux, ainsi que le fait que ces générateurs infinitésimaux, insensibles à la topologie globale du groupe, ne le distinguent pas de son recouvrement universel. Nous allons retrouver ces aspects dans l'étude de  $SO(3)$  et  $SU(2)$ .

### 3.1. Générateurs infinitésimaux de $SO(3)$

Les rotations autour d'un axe  $\hat{n}$  donné forment un *sous-groupe à un paramètre* isomorphe à  $SO(2)$ . Par l'étude de la sect. 1, on peut écrire

$$R_n(\psi) = e^{-i\psi J_{\hat{n}}} \quad (3.1)$$

où  $J_{\hat{n}}$  est le générateur de ces rotations, une matrice hermitique  $3 \times 3$ . L'équation (2.4) implique que

$$R e^{-i\psi J_{\hat{n}}} R^{-1} = e^{-i\psi R J_{\hat{n}} R^{-1}} = e^{-i\psi J_{\hat{n}'}} \quad (3.2)$$

avec  $\hat{n}' = R\hat{n}$  donc

$$R J_{\hat{n}} R^{-1} = J_{\hat{n}'} \quad (3.3)$$

c'est-à-dire  $J_{\hat{n}}$  se transforme comme le vecteur  $\hat{n}$ . Pour être plus explicites, introduisons les trois matrices de base  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  décrivant les rotations infinitésimales autour des axes correspondants<sup>8</sup>. De la version infinitésimale de (2.3) on tire

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ce qu'on peut exprimer par une formule unique

$$(J_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk} \quad (3.5)$$

à l'aide du tenseur complètement antisymétrique  $\epsilon_{ijk}$ . Ce tenseur  $\epsilon_{ijk}$  est en fait invariant par l'action des rotations

$$\epsilon_{lmn} \mathcal{R}_{il} \mathcal{R}_{jm} \mathcal{R}_{kn} = \epsilon_{ijk} \det \mathcal{R} = \epsilon_{ijk} \quad (3.6)$$

puisque la matrice  $\mathcal{R}$  est de déterminant 1. Cette matrice étant aussi orthogonale, on peut faire passer un  $\mathcal{R}$  au membre de droite

$$\epsilon_{lmn} \mathcal{R}_{jm} \mathcal{R}_{kn} = \epsilon_{ijk} \mathcal{R}_{il} \quad (3.7)$$

ce qui au vu de (3.5) exprime que

$$\mathcal{R}_{jm} (J_l)_{mn} \mathcal{R}_{nk}^{-1} = (J_i)_{jk} \mathcal{R}_{il} \quad (3.8)$$

c'est-à-dire

$$R J_l R^{-1} = J_i \mathcal{R}_{il} . \quad (3.9)$$

---

<sup>8</sup> Ne pas confondre  $J_{\hat{n}}$  indexé par le vecteur  $\hat{n}$ , avec  $J_k$ ,  $k^{\text{ième}}$  composante de  $\vec{J}$ . La relation entre les deux va être donnée plus bas.

Soit  $R$  la rotation qui amène le vecteur unitaire  $\hat{z}$  porté par  $Oz$  sur le vecteur  $\hat{n}$ , on a donc  $n_k = \mathcal{R}_{k3}$  et

$$J_{\hat{n}} = RJ_3R^{-1} = J_k \mathcal{R}_{k3} = J_k n_k . \quad (3.10)$$

Noter que les équations (3.9) et (3.10) sont bien compatibles avec (3.3)

$$J_{\hat{n}'} = RJ_{\hat{n}}R^{-1} = RJ_k n_k R^{-1} = J_l \mathcal{R}_{lk} n_k = J_l n'_l .$$

L'équation (3.10) prouve que les trois matrices (3.4) forment une base des générateurs des sous-groupes à un paramètre et qu'on peut donc toujours écrire

$$R_n(\psi) = e^{-i\psi \sum_k n_k J_k} . \quad (3.11)$$

Finalement on voit que par la formule (2.6), on peut écrire toute rotation de  $SO(3)$  à l'aide des  $J$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3} . \quad (3.12)$$

La forme (3.1) nous permet aussi de prouver l'assertion faite plus haut que le groupe  $SO(3)$  est engendré par un voisinage de l'identité. En effet on peut écrire tout  $R$  comme  $R = \left(\exp -i \frac{\psi}{N} J_{\hat{n}}\right)^N$ , c'est-à-dire comme produit d'éléments arbitrairement proches de l'identité pour  $N$  assez grand.

Les trois matrices  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  satisfont les relations de commutation suivantes

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k . \quad (3.13)$$

Ceci peut être considéré comme une simple identité algébrique qui découle de l'expression explicite (3.4) et de l'identité de Jacobi que satisfait le tenseur  $\epsilon_{ijk}$

$$\epsilon_{iab}\epsilon_{bjc} + \epsilon_{icb}\epsilon_{baj} + \epsilon_{ijb}\epsilon_{bca} = 0 , \quad (3.14)$$

mais il est beaucoup plus fructueux de remarquer que (3.13) s'interprète aussi comme la version infinitésimale de (3.9) : considérons par exemple une rotation d'angle infinitésimal  $d\psi$  autour de  $Oy$  agissant sur  $J_1$

$$R_2(d\psi)J_1R_2^{-1}(d\psi) = J_k[\mathcal{R}_2(d\psi)]_{k1} \quad (3.15)$$

mais au premier ordre,  $R_2(d\psi) = \mathbb{I} - id\psi J_2$  et  $\mathcal{R}_2(d\psi)_{k1} = \delta_{k1} - id\psi(J_2)_{k1} = \delta_{k1} - d\psi\delta_{k3}$  d'après (3.5), d'où  $[J_1, J_2] = iJ_3$ , qui est l'une des relations (3.13). Les autres s'obtiennent par permutation circulaire. Retenons que la relation de commutation des générateurs code une version infinitésimale de la loi de groupe.

### 3.2. Générateurs infinitésimaux dans $SU(2)$

Examinons maintenant les choses du point de vue de  $SU(2)$ . Toute matrice unitaire  $U$  (ici  $2 \times 2$ ) peut se diagonaliser dans une base orthonormée  $U = V \exp\{i \text{diag}(\lambda_k)\} V^\dagger$  et donc s'écrire

$$U = \exp iH = \sum_0^{\infty} \frac{(iH)^n}{n!} \quad (3.16)$$

avec  $H$  hermitique. La somme converge (pour la norme  $\|M\|^2 = \text{tr}MM^\dagger$ ). La condition d'unimodularité  $1 = \det U = \exp i \text{tr} H$  est garantie si  $\text{tr} H = 0$ . L'ensemble de ces matrices hermitiques de trace nulle forme un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$ , avec la propriété supplémentaire que si  $H_1$  et  $H_2$  sont dans  $\mathcal{V}$ ,  $H_3$  définie par leur commutateur

$$iH_3 = [iH_1, iH_2]$$

est aussi dans  $\mathcal{V}$ . Ceci reflète la propriété de groupe de  $SU(2)$ . Considérons en effet les groupes à un paramètre engendrés par  $H_1$  et  $H_2$ , c'est-à-dire  $e^{iH_1 t_1}$  et  $e^{iH_2 t_2}$  et formons

$$e^{iH_1 t_1} e^{iH_2 t_2} e^{-iH_1 t_1} e^{-iH_2 t_2}$$

appelé le *commutateur* des éléments  $e^{iH_1 t_1}$  et  $e^{iH_2 t_2}$  du groupe. C'est une matrice unitaire unimodulaire, donc il existe une matrice  $H$  telle que

$$e^{iH} = e^{iH_1 t_1} e^{iH_2 t_2} e^{-iH_1 t_1} e^{-iH_2 t_2} \quad (3.17)$$

$H$  dépend continûment de  $t_1$  et  $t_2$  et si  $t_1$  et  $t_2$  sont infinitésimaux du même ordre, à l'ordre  $t^2$  on trouve

$$\begin{aligned} & (\mathbb{I} + iH_1 t_1 - \frac{1}{2} H_1^2 t_1^2) (\mathbb{I} + iH_2 t_2 - \frac{1}{2} H_2^2 t_2^2) (\mathbb{I} - iH_1 t_1 - \frac{1}{2} H_1^2 t_1^2) (\mathbb{I} - iH_2 t_2 - \frac{1}{2} H_2^2 t_2^2) \\ &= \mathbb{I} + (H_1 t_1 + H_2 t_2)^2 - 2H_1 H_2 t_1 t_2 - H_1^2 t_1^2 - H_2^2 t_2^2 + O(t^3) \\ &= \mathbb{I} - (H_1 H_2 - H_2 H_1) t_1 t_2 + O(t^3) \end{aligned}$$

donc à cet ordre

$$\begin{aligned} H &= H_3 t_1 t_2 + O(t^3) \\ \text{avec } iH_3 &= [iH_1, iH_2] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le fait que la propriété d'antihermiticité et de trace nulle soit conservée par le commutateur reflète donc au niveau infinitésimal la propriété de composition du groupe. Elle dote les générateurs infinitésimaux  $iH$  de la structure d'algèbre de Lie.

Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel (sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  pour nous) doté d'une opération bilinéaire antisymétrique, le *crochet de Lie*  $[X, Y]$  satisfaisant donc

$$\begin{aligned} [\lambda X + \lambda' X', Y] &= \lambda [X, Y] + \lambda' [X', Y] && \text{linéarité en } X \\ [X, Y] &= -[Y, X] && \text{antisymétrie} \end{aligned} \quad (3.19)$$

mais aussi  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  identité de Jacobi .

On a rappelé plus haut (chap. 2) la définition d'une algèbre associative; ici la propriété d'associativité est remplacée par l'identité de Jacobi.

*Exemples* Il existe de nombreux exemples d'algèbres de Lie fournis par des ensembles de matrices, avec comme crochet de Lie le commutateur : matrices antihermitiques, matrices antisymétriques, matrices de trace nulle, matrices antihermitiques (ou antisymétriques) et

de trace nulle, etc. L'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  est aussi une algèbre de Lie pour le produit vectoriel des vecteurs (vérifier que l'identité de Jacobi n'est autre que (3.14) !).

Dans le cas qui nous occupe, les matrices hermitiques  $2 \times 2$  de trace nulle sont des combinaisons linéaires à coefficients réels des 3 matrices de Pauli (2.8)

$$H = \sum_{i=1}^3 \eta_k \frac{\sigma_k}{2} \quad (3.20)$$

et les matrices  $\frac{1}{2}\sigma_i$  vérifient les relations de commutation

$$\left[ \frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} . \quad (3.21)$$

Ces relations de commutation font apparaître les mêmes *constantes de structure*  $\epsilon_{ijk}$  que dans (3.13). Autrement dit, nous venons de confirmer que les générateurs infinitésimaux  $J_i$  (éq. (3.4)) de  $SO(3)$  et  $\frac{1}{2}\sigma_i$  de  $SU(2)$  satisfont aux mêmes relations de commutation, ou encore qu'ils forment deux représentations de la même algèbre de Lie. On appelle représentation de l'algèbre de Lie  $g$  un homomorphisme de cette algèbre dans l'algèbre de Lie des opérateurs linéaires sur un espace vectoriel  $V$ , c'est-à-dire une application  $x \in g \mapsto X \in \text{End } V$  qui respecte linéarité et crochet de Lie :  $x, y \in g$ ,  $[x, y] \mapsto [X, Y] = XY - YX \in \text{End } V$ . Un corollaire de cette définition est que dans toute représentation de l'algèbre, les (représentants des) générateurs satisfont les mêmes relations de commutation, c'est-à-dire que *les constantes de structure sont les mêmes dans toute représentation*.

Soit  $e_i$  une base de  $g$ ,  $E_i$  une base de  $\text{End } V$ . Considérons deux éléments arbitraires de  $g$ ,  $x = x_i e_i$  et  $y = y_j e_j$ , leurs images  $D(x) = X = x_i E_i$  et  $Y = y_j E_j$  dans  $\text{End } V$  et celle de leur commutateur

$$\begin{aligned} z = [x, y] &= x_i y_j [e_i, e_j] = i x_i y_j \epsilon_{ijk} e_k = z_k e_k \\ [D(x), D(y)] &= [X, Y] = x_i y_j [E_i, E_j] \quad \text{qui par la propriété d'homomorphisme vaut} \\ &= D(z) = z_k E_k = i \epsilon_{ijk} x_i y_j E_k , \end{aligned}$$

et donc

$$[E_i, E_j] = i \epsilon_{ijk} E_k .$$

Ainsi des calculs menés dans une représentation particulière mais faisant appel *uniquement aux règles de commutation de l'algèbre de Lie* demeurent valables dans toute représentation. Par exemple, des relations (3.9), il découle sans aucun calcul supplémentaire que pour les matrices de Pauli, on a

$$e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_2} \sigma_k e^{i\frac{\beta}{2}\sigma_2} = D_2(\beta) \sigma_k D_2^{-1}(\beta) = \sigma_l \mathcal{R}_y(\beta)_{lk} \quad (3.22)$$

où on lit les éléments de matrice  $\mathcal{R}_y$  en (2.3)'.

### 3.3. Algèbre de Lie $su(2)$

Récapitulons : nous venons de mettre en évidence l'algèbre de Lie du groupe  $SU(2)$  (ou  $SO(3)$ ), notée  $su(2)$ . Elle est définie par les relations (3.13), que nous récrivons

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k . \quad (3.13)$$

Comme on vient de le dire, ces relations restent inchangées dans toute représentation. Dans la suite,  $J_i$  désignera les représentants des générateurs dans une représentation arbitraire. Il est souvent commode d'utiliser une base différente

$$J_z \equiv J_3, \quad J_+ = J_1 + iJ_2, \quad J_- = J_1 - iJ_2 . \quad (3.23)$$

Il est immédiat de calculer

$$[J_3, J_+] = J_+ \quad (3.24a)$$

$$[J_3, J_-] = -J_- \quad (3.24b)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_3 . \quad (3.24c)$$

On vérifie aussi que l'opérateur

$$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_3^2 + J_3 + J_- J_+ \quad (3.25)$$

commute avec tous les  $J$

$$[\vec{J}^2, J_i] = 0 . \quad (3.26)$$

$\vec{J}^2$  est l'opérateur de Casimir. Dans une représentation unitaire, les générateurs  $J_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont hermitiques<sup>9</sup>, donc

$$J_i^\dagger = J_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad J_\pm^\dagger = J_\mp . \quad (3.27)$$

Montrons en outre que les représentations unitaires de  $SO(3)$  sont *a priori* unimodulaires (= de déterminant 1), et que ces générateurs sont donc de trace nulle. Cela découle de la simplicité du groupe  $SO(3)$ . Soit  $D$  une représentation unitaire,  $\det D$  est donc une représentation de dimension 1 du groupe, homomorphisme du groupe dans le groupe  $U(1)$  puisque  $|\det D| = 1$ . Son noyau est un sous-groupe invariant, donc trivial ; ce ne peut être la seule identité, car tout "commutateur"  $R_1 R_2 R_1^{-1} R_2^{-1}$  y appartient. C'est donc le groupe tout entier, ce qui établit l'unimodularité. Pour le groupe  $SU(2)$ , qui n'est pas simple, le même argument ne peut être appliqué, mais la conclusion demeure, comme on le verra : toutes les représentations de  $SU(2)$  sont unimodulaires. [Peut-on trouver un argument simple, *a priori*, à cet effet ?]

Pour terminer, mentionnons l'interprétation des  $J_i$  comme opérateurs différentiels agissant sur les fonctions des coordonnées de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , l'effet d'une rotation infinitésimale sur le vecteur  $\vec{x}$  est de le changer en

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\psi \hat{n} \wedge \vec{x}$$

---

<sup>9</sup> Strictement parlant, les générateurs infinitésimaux de l'algèbre de Lie sont représentés par les opérateurs *antihermitiques*  $X_k = iJ_k$ . Par abus de langage et selon le contexte, "générateur infinitésimal" s'appliquera à  $J$  ou à  $X = iJ$ .

donc une fonction *scalaire*<sup>10</sup> de  $\vec{x}$ ,  $f(\vec{x})$ , est changée en  $f'(\vec{x}') = f(\vec{x})$  soit

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}) &= f(R^{-1}\vec{x}) = f(\vec{x} - \delta\psi\hat{n} \wedge \vec{x}) \\ &= \left(1 - \delta\psi\hat{n}.\vec{x} \wedge \vec{\nabla}\right) f(\vec{x}) \\ &= (1 - i\delta\psi\hat{n}.\vec{J})f(\vec{x}) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

On identifie donc

$$\vec{J} = -i\vec{x} \wedge \vec{\nabla}, \quad J_i = -i\epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.29)$$

ce qui permet de le calculer dans des coordonnées quelconques, par exemple sphériques (Appendice B). (Comparer aussi (3.29) avec l'expression du moment angulaire en Mécanique Quantique  $L_i = \frac{\hbar}{i}\epsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$ ). Parmi les combinaisons de  $J$  qu'on peut construire, l'une doit jouer un rôle particulier, le laplacien sur la sphère  $S^2$ , opérateur différentiel du second ordre invariant par changement de coordonnées (Appendice B). Il doit en particulier être invariant par rotation, être de degré 2 dans les  $J$ , ce ne peut être que l'opérateur de Casimir  $\vec{J}^2$  (à un facteur près). De fait le laplacien dans  $\mathbb{R}^3$  s'écrit en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\vec{J}^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\Delta_{\text{sphère } S^2}}{r^2} . \end{aligned} \quad (3.30)$$

## 4. Représentations de $SU(2)$

### 4.1. Représentations de l'algèbre de Lie et représentations du groupe

Toute représentation (différentiable et unitaire)  $D$  du groupe  $SU(2)$  dans un espace  $V$  fournit une représentation de son algèbre de Lie  $su(2)$ . En effet, pour tout sous-groupe à

---

<sup>10</sup> Nous discutons pour simplicité le cas de fonctions scalaires, mais on pourrait aussi s'intéresser plus généralement à la transformation d'une collection de fonctions des coordonnées de  $\mathbb{R}^3$  formant une représentation irréductible de  $SO(3)$  ou  $SU(2)$

$$A'(\vec{x}') = D(R)A(\vec{x})$$

soit encore

$$A'(\vec{x}) = D(R)A(R^{-1}\vec{x}) ,$$

par exemple un champ vectoriel se transformant par

$$\vec{A}'(\vec{x}) = R\vec{A}(R^{-1}\vec{x}) .$$

Le produit scalaire de deux tels champs vectoriels est une fonction scalaire. Que devient la discussion qui suit sur les générateurs infinitésimaux pour de tels objets ?

un paramètre  $U(t) = \exp tx$ , engendré par  $x \in su(2)$ ,  $D(U(t))$  est aussi un sous-groupe à un paramètre de matrices unitaires, engendrées par une matrice antihermitique  $X$ . En répétant le calcul de (3.17), il est immédiat de vérifier qu'au crochet  $[x, y]$  correspond le commutateur  $[X, Y]$ , (et on vient de voir que les matrices  $X$  sont de trace nulle puisque  $\forall t \det e^{tX} = 1$ ), on a donc bien une représentation de l'algèbre. On peut écrire

$$D(U) = e^{\sum \xi^i X_i} . \quad (4.1)$$

Inversement toute représentation de l'algèbre engendre une représentation du groupe simplement connexe  $SU(2)$ . Autrement dit on veut montrer que si  $x \mapsto X$  est une représentation de l'algèbre,  $e^x \mapsto e^X$  en est une du groupe. Soient deux éléments de  $su(2)$   $x$  et  $y$ , alors il existe un  $z$  dans  $su(2)$  tel que

$$e^x e^y = e^z$$

puisque le produit est un élément de  $SU(2)$  et peut donc se représenter sous forme exponentielle. On veut montrer que les représentants de  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans la représentation de l'algèbre, notés  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , satisfont eux-mêmes

$$e^X e^Y = e^Z$$

Ceci découle d'une formule qui fournit  $z$  de façon "universelle", en ne faisant appel qu'aux opérations de l'algèbre de Lie, donc aussi valables dans la représentation considérée. Cette formule est la *formule de Baker-Campbell-Hausdorff*, que nous admettrons

$$\begin{aligned} e^x e^y &= e^z \\ z &= x + \int_0^1 dt \psi(\exp \text{Ad } x \exp t \text{Ad } y) y \end{aligned} \quad (4.2)$$

où  $\psi(\cdot)$  est la fonction

$$\psi(u) = \frac{u \ln u}{u - 1} = 1 + \frac{1}{2}(u - 1) - \frac{1}{6}(u - 1)^2 + \dots \quad (4.3)$$

régulière en  $u = 1$  et  $\text{Ad } a$  désigne l'opérateur linéaire dans l'algèbre de Lie

$$\text{Ad } a b = [a, b] \quad (4.4)$$

donc  $\text{Ad }^n a b = [a, [a, \dots, [a, b]]]$ , avec  $n$  crochets. Explicitement, les premiers termes du développement en puissances de  $x$  et  $y$  s'écrivent

$$z = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12} \left( [x, [x, y]] + [y, [y, x]] \right) + \dots \quad (4.5)$$

La formule admet des cas particuliers intéressants à connaître. Ainsi si  $x$  et  $y$  commutent avec  $[x, y]$ , on a simplement

$$e^x e^y = e^{x+y+\frac{1}{2}[x,y]} = e^{x+y} e^{\frac{1}{2}[x,y]} , \quad (4.6)$$

formule qu'on démontre en utilisant l'identité vraie en général

$$e^x y e^{-y} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \text{Ad}^n x y \quad (4.7)$$

(qui n'est que le développement de Taylor à  $t = 0$  de  $e^{tx} y e^{-tx}$  évalué en  $t = 1$ ) et en écrivant et en résolvant l'équation différentielle satisfaite par  $f(t) = e^{tx} e^{ty}$ ,  $f(0) = 1$

$$\begin{aligned} f'(t) &= (x + e^{tx} y e^{-tx}) f(t) \\ &= (x + y + t[x, y]) f(t) . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Par ailleurs, au premier ordre en  $y$ , on peut remplacer l'argument de  $\psi$  dans (4.2) par  $\exp \text{Ad} x$  et on voit qu'on a

$$z = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (-1)^n (\text{Ad} x)^n y + O(y^2) \quad (4.9)$$

où les  $B_n$  sont les nombres de Bernoulli :  $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_0^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ ,  $B_0 = 1$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$  et en dehors de  $B_1 = -\frac{1}{2}$  tous les  $B$  d'indice impair sont nuls. Toujours au premier ordre en  $y$ , on a encore

$$e^{x+y} = e^x + \int_0^1 dt e^{tx} y e^{(1-t)x} + O(y^2)$$

qu'on obtient en écrivant et en intégrant l'équation différentielle satisfaite par  $F(t) = \exp t(x+y) \cdot \exp -tx$ .

La convergence des expressions peut se démontrer pour  $x$  et  $y$  assez petits. Il en découle que l'homomorphisme des algèbres de Lie s'intègre en un homomorphisme des groupes au voisinage de l'identité. On démontre enfin qu'un tel homomorphisme infiniment différentiable et local (au voisinage de l'identité) d'un groupe *simplement connexe*  $G$  (ici,  $SU(2)$ ) dans un groupe  $G'$  (ici, le groupe linéaire  $GL(V)$ ) s'étend de façon unique en un homomorphisme infiniment différentiable de tout  $G$  dans  $G'$ . Dans notre cas, il nous suffit donc pour trouver les représentations unitaires du groupe  $SU(2)$  de trouver les représentations par des matrices hermitiques de trace nulle de son algèbre de Lie.

#### 4.2. Représentations de l'algèbre $su(2)$

Procédons à la construction classique des représentations de l'algèbre  $su(2)$ . Comme précédemment,  $J_{\pm}$  et  $J_z$  désignent les représentants des générateurs infinitésimaux dans une certaine représentation. Ils satisfont aux relations de commutation (3.24) et d'hermiticité (3.27). La commutation des opérateurs  $J_z$  et  $\vec{J}^2$  garantit qu'on peut en chercher des vecteurs propres communs. Les valeurs propres de ces opérateurs hermitiques étant réelles et  $\vec{J}^2$  étant semi-défini positif, on peut toujours écrire ses valeurs propres sous la forme  $j(j+1)$ ,  $j$  réel positif ou nul et on considère donc un vecteur propre commun  $|j m\rangle$

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 |j m\rangle &= j(j+1) |j m\rangle \\ J_z |j m\rangle &= m |j m\rangle . \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec  $m$  un réel a priori arbitraire. Par abus de langage, on dira que  $|j m\rangle$  est un "vecteur propre de valeurs propres  $j, m$ ".

(i) Agissons avec  $J_+$  et  $J_- = J_+^\dagger$  sur  $|j m\rangle$ . Utilisant la relation  $J_\pm J_\mp = \vec{J}^2 - J_z^2 \pm J_z$  (conséquence de (3.24)) on calcule la norme carrée de  $J_\pm |j m\rangle$  :

$$\begin{aligned}\langle j m | J_- J_+ |j m\rangle &= (j(j+1) - m(m+1)) \langle j m |j m\rangle \\ &= (j-m)(j+m+1) \langle j m |j m\rangle \\ \langle j m | J_+ J_- |j m\rangle &= (j(j+1) - m(m-1)) \langle j m |j m\rangle \\ &= (j+m)(j-m+1) \langle j m |j m\rangle .\end{aligned}\tag{4.11}$$

Ces normes carrées ne peuvent être négatives donc

$$\begin{aligned}(j-m)(j+m+1) &\geq 0 & : & \quad -j-1 \leq m \leq j \\ (j+m)(j-m+1) &\geq 0 & : & \quad -j \leq m \leq j+1\end{aligned}\tag{4.12}$$

qui impliquent

$$-j \leq m \leq j .\tag{4.13}$$

En outre  $J_+ |j m\rangle = 0$  si et seulement si  $m = j$  et  $J_- |j m\rangle = 0$  si et seulement si  $m = -j$

$$J_+ |j j\rangle = 0 \quad J_- |j -j\rangle = 0 .\tag{4.14}$$

ii) Si  $m \neq j$ ,  $J_+ |j m\rangle$  est un vecteur non nul, vecteur propre de valeurs propres  $(j, m+1)$ . En effet

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 J_+ |j m\rangle &= J_+ \vec{J}^2 |j m\rangle = j(j+1) J_+ |j m\rangle \\ J_z J_+ |j m\rangle &= J_+ (J_z + 1) |j m\rangle = (m+1) J_+ |j m\rangle .\end{aligned}\tag{4.15}$$

De même si  $m \neq -j$ ,  $J_- |j m\rangle$  est un vecteur propre (non nul) de valeurs propres  $(j, m-1)$ .

(iii) Considérons la suite des vecteurs

$$|j m\rangle, J_- |j m\rangle, J_-^2 |j m\rangle, \dots, J_-^p |j m\rangle \dots$$

S'ils sont non nuls ils constituent des vecteurs propres de  $J_z$  de valeurs propres  $m, m-1, m-2, \dots, m-p \dots$  Les valeurs propres autorisées de  $J_z$  étant bornées par (4.13), cette suite doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes. Soit  $p$  l'entier tel que  $J_-^p |j m\rangle \neq 0$ ,  $J_-^{p+1} |j m\rangle = 0$ . En vertu de (4.14),  $J_-^p |j m\rangle$  est un vecteur propre de valeurs propres  $(j, -j)$  donc  $m-p = -j$  c'est-à-dire

$$(j+m) \text{ est entier}\tag{4.16}$$

Opérant de même avec  $J_+, J_+^2, \dots$  sur  $|j m\rangle$ , on est mené à la conclusion que

$$(j-m) \text{ est entier}\tag{4.17}$$

et par conséquent  $j$  et  $m$  sont simultanément entiers ou demi-entiers. Pour chaque valeur de  $j$

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$m$  peut prendre les  $2j + 1$  valeurs <sup>11</sup>

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j . \quad (4.18)$$

Partant du vecteur  $|j m = j\rangle$ , (“vecteur de plus haut poids”), choisi de norme 1, on construit la base orthonormée  $|j m\rangle$  par application répétée de  $J_-$  et on a

$$J_+ |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j m + 1\rangle \quad (4.19a)$$

$$J_- |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j m - 1\rangle \quad (4.19b)$$

$$J_z |j m\rangle = m |j m\rangle . \quad (4.19c)$$

Ces  $2j + 1$  états forment la base de la “représentation de spin  $j$ ” de l’algèbre  $su(2)$ .

Montrons que cette représentation est irréductible. La représentation étant unitaire est soit irréductible soit complètement réductible (chap. 2); dans ce dernier cas, il existerait nécessairement des opérateurs diagonaux par blocs, différents de l’identité et commutant avec les matrices de la représentation, en particulier avec les générateurs  $J_i$ . Or dans la base (4.19) toute matrice  $M$  commutant avec  $J_z$  est diagonale,  $M_{mm'} = \mu_m \delta_{mm'}$ , et la commutation avec  $J_+$  force tous les  $\mu_m$  à être égaux : la matrice  $M$  est multiple de l’identité et la représentation est bien irréductible.

La discussion précédente a fait jouer un rôle central à l’unitarité de la représentation et donc à l’hermiticité des générateurs infinitésimaux, donc à la positivité :  $\|J_\pm |j m\rangle\|^2 \geq 0 \Leftrightarrow -j \leq m \leq j$ , etc, et a permis de conclure que la représentation est nécessairement de dimension finie. Inversement on peut insister sur cette dernière condition, et montrer qu’elle suffit à assurer les conditions précédentes. Partant d’un vecteur propre  $|\psi\rangle$  de  $J_z$ , la suite  $J_+^p |\psi\rangle$  produit des vecteurs propres de  $J_z$  de valeur propre croissante, donc linéairement indépendants s’ils sont non nuls. Si par hypothèse la représentation est de dimension finie, cette suite est finie, et il existe un vecteur noté  $|j\rangle$  tel que  $J_+ |j\rangle = 0$ ,  $J_z |j\rangle = j |j\rangle$ . Par la relation  $\vec{J}^2 = J_- J_+ + J_z (J_z + 1)$ , c’est aussi un vecteur propre de valeur propre  $j(j+1)$  de  $\vec{J}^2$ . Il s’identifie donc avec le vecteur de plus haut poids noté précédemment  $|j j\rangle$ , notation que nous adoptons donc dans la suite de cette discussion. A partir de ce vecteur, les  $J_-^p |j j\rangle$  forment une suite qui doit elle aussi être finie

$$\exists q \quad J_-^{q-1} |j j\rangle \neq 0 \quad J_-^q |j j\rangle = 0 . \quad (4.20)$$

On démontre aisément par récurrence que

$$J_+ J_-^q |j j\rangle = [J_+, J_-^q] |j j\rangle = q(2j + 1 - q) J_-^{q-1} |j j\rangle = 0 \quad (4.21)$$

donc  $q = 2j + 1$ . Le nombre  $j$  est donc entier ou demi-entier, les vecteurs de la représentation ainsi construite sont vecteurs propres de  $\vec{J}^2$  de valeur propre  $j(j+1)$  et de  $J_z$  de valeur propre  $m$  satisfaisant (4.18). On a bien retrouvé tous les résultats précédents. Sous cette forme, la construction de ces “représentations de plus haut poids” se généralise à d’autres algèbres de Lie.

Par définition, les matrices de la représentation de spin  $j$  sont telles que sous l’action de la rotation  $U \in SU(2)$

$$|j m\rangle \mapsto D^j(U) |j m\rangle = |j m'\rangle \mathcal{D}_{m'm}^j(U) . \quad (4.22)$$

---

<sup>11</sup> En fait, on vient de trouver une condition nécessaire sur les  $j, m$ . Le fait que tous ces  $j$  donnent effectivement des représentations va être vérifié au paragraphe suivant.

Selon la paramétrisation  $(\hat{n}, \psi, \text{angles d'Euler}, \dots)$ , on écrira aussi  $\mathcal{D}_{m'm}^j(\hat{n}, \psi)$ ,  $\mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ , etc. Par (2.6), on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle j m' | D(\alpha, \beta, \gamma) | j m \rangle \\ &= \langle j m' | e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} | j m \rangle \\ &= e^{-i\alpha m'} d_{m'm}^j(\beta) e^{-i\gamma m} \end{aligned} \quad (4.23)$$

où la matrice  $d^j$  est définie par

$$d_{m'm}^j(\beta) = \langle j m' | e^{-i\beta J_y} | j m \rangle . \quad (4.24)$$

Une formule explicite pour  $d^j$  sera donnée plus bas. On a encore

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^j(\hat{z}, \psi) &= e^{-i\psi m} \delta_{mm'} \\ \mathcal{D}_{m'm}^j(\hat{y}, \psi) &= d_{m'm}^j(\psi) \end{aligned} . \quad (4.25)$$

On vérifie aussi l'unimodularité annoncée des matrices  $\mathcal{D}^j$  (ou de façon équivalente, le fait que les représentants des générateurs infinitésimaux sont de trace nulle). Si  $\hat{n} = R\hat{z}$ ,  $\mathcal{D}(\hat{n}, \psi) = \mathcal{D}(R)\mathcal{D}(\hat{z}, \psi)\mathcal{D}^{-1}(R)$ , donc

$$\det \mathcal{D}(\hat{n}, \psi) = \det \mathcal{D}(\hat{z}, \psi) = \det e^{-i\psi J_z} = \prod_{m=-j}^j e^{-im\psi} = 1 . \quad (4.26)$$

Il peut être utile d'écrire explicitement ces matrices dans les cas  $j = \frac{1}{2}$  et  $j = 1$ . Le cas de  $j = \frac{1}{2}$  est très simple, puisque

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(U) &= U = e^{-i\frac{1}{2}\psi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\psi}{2} - i \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} & -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{i\phi} & \cos \frac{\psi}{2} + i \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_3} e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_2} e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} & -\sin \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \\ \sin \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} & \cos \frac{\beta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

résultat attendu puisque les matrices  $U$  du groupe en forment bien évidemment une représentation. Pour  $j = 1$ , dans la base  $|1, 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$  et  $|1, -1\rangle$ , où  $J_z$  est diagonale

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

d'où

$$d^1(\beta) = e^{-i\beta J_y} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \beta}{2} & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos \beta}{2} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos \beta & -\frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos \beta}{2} & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos \beta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

comme le lecteur le vérifiera.

### 4.3. Construction explicite

Soient  $x$  et  $y$  deux variables sur lesquelles les matrices  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $SU(2)$  agissent selon  $x' = ax + cy$ ,  $y' = bx + dy$ . En d'autres termes,  $x$  et  $y$  sont les vecteurs de base de la représentation de dimension 2 (spin  $\frac{1}{2}$ ) de  $SU(2)$ . Une construction explicite des représentations précédentes est obtenue en considérant les polynômes homogènes de degré  $2j$  dans les deux variables  $x$  et  $y$ , dont une base est donnée par les  $2j + 1$  polynômes

$$P_{jm} = \frac{x^{j+m}y^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad m = -j, \dots, j \quad (4.30)$$

En fait, les considérations qui suivent demeurent valables si  $U$  est une matrice quelconque du groupe  $GL(2, \mathbb{C})$  et en fournissent une représentation. Sous l'action de  $U$  sur  $x$  et  $y$ , les  $P_{jm}(x, y)$  se transforment en  $P_{jm}(x', y')$ , eux aussi homogènes de degré  $2j$  en  $x$  et  $y$ , qui se développent donc sur les  $P_{jm}(x, y)$ . Ces derniers portent donc une représentation de dimension  $2j + 1$  de  $SU(2)$  (ou  $GL(2)$ ), qui n'est autre que la représentation de spin  $j$  précédente. Ceci permet d'écrire des formules très explicites pour les  $\mathcal{D}^j$ .

$$P_{jm}(x', y') = \sum_{m'} P_{jm'}(x, y) \mathcal{D}_{m'm}^j(U). \quad (4.31)$$

On obtient

$$\mathcal{D}_{m'm}^j(U) = ((j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 0 \\ n_1+n_2=j+m'; \quad n_3+n_4=j-m' \\ n_1+n_3=j+m; \quad n_2+n_4=j-m}} \frac{a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} d^{n_4}}{n_1! n_2! n_3! n_4!}. \quad (4.32)$$

Pour  $U = -\mathbb{I}$ , on voit que  $\mathcal{D}^j(-\mathbb{I}) = (-1)^{2j} \mathbb{I}$ . Ceci montre que les représentations de spin demi-entier de  $SU(2)$  sont des représentations projectives (à un signe près) de  $SO(3)$ .

Dans le cas particulier de  $U = e^{-i\psi \frac{\sigma_2}{2}} = \cos \frac{\psi}{2} \mathbb{I} - \sin \frac{\psi}{2} (i \frac{\sigma_2}{2})$ , on a donc

$$d_{m'm}^j(\psi) = ((j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!)^{\frac{1}{2}} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+j-m} \cos \frac{\psi}{2}^{2k+m+m'} \sin \frac{\psi}{2}^{2j-2k-m-m'}}{(m+m'+k)!(j-m-k)!(j-m'-k)!k!}. \quad (4.33)$$

L'expression des générateurs infinitésimaux sur les polynômes  $P_{jm}$  s'obtient en considérant des  $U$  proches de l'identité. On trouve

$$J_+ = x \frac{\partial}{\partial y} \quad J_- = y \frac{\partial}{\partial x} \quad J_z = \frac{1}{2} \left( x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4.34)$$

dont il est immédiat de vérifier les relations de commutation ainsi que l'action sur les  $P_{jm}$  en accord avec (4.19). Ceci achève l'identification de (4.30) avec la représentation de spin  $j$  et la preuve de son irréductibilité.

#### 4.4. Orthogonalité, complétude, caractères

Nous faisons maintenant appel à la mesure invariante introduite à la section 2.3 pour énoncer les propriétés d'orthogonalité et de complétude des matrices  $\mathcal{D}^j$ . Nous avons construit ci-dessus des représentations unitaires de  $SU(2)$ . Selon les mêmes arguments que ceux utilisés au chap. 2 pour les groupes finis, les éléments des matrices  $\mathcal{D}^j$  satisfont des propriétés d'orthogonalité et nous admettrons que les propriétés de complétude se démontrent aussi

$$(2j+1) \int \frac{d\mu(U)}{2\pi^2} \mathcal{D}_{mn}^j(U) \mathcal{D}_{m'n'}^{j'*}(U) = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (4.35a)$$

$$\sum_{jmn} (2j+1) \mathcal{D}_{mn}^j(U) \mathcal{D}_{mn}^{j'*}(U') = 2\pi^2 \delta(U, U') \quad (4.35b)$$

La fonction  $\delta(U, U')$  qui apparaît dans le second membre de (4.35b) est celle adaptée à la mesure  $d\mu(U)$ , telle que  $\int d\mu(U') \delta(U, U') f(U') = f(U)$ ; dans les angles d'Euler  $\alpha, \beta, \gamma$  par exemple,

$$\delta(U, U') = 8\delta(\alpha - \alpha') \delta(\cos \beta - \cos \beta') \delta(\gamma - \gamma') . \quad (4.36)$$

La signification de l'équation (4.35b) est que les fonctions  $\mathcal{D}_{mn}^j(U)$  forment une base complète sur l'espace des fonctions (de carré intégrable) sur le groupe  $SU(2)$ . C'est le *théorème de Peter-Weyl*, qui généralise donc le théorème de Fourier.

Les caractères des représentations de  $SU(2)$  se déduisent des expressions précédentes

$$\begin{aligned} \chi_j(U) = \chi_j(\psi) &= \text{tr} \mathcal{D}^j(\hat{n}, \psi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\psi} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{2j+1}{2}\psi\right)}{\sin\frac{\psi}{2}} . \end{aligned} \quad (4.37)$$

En particulier

$$\chi_0(\psi) = 1 \quad \chi_{\frac{1}{2}}(\psi) = 2 \cos \frac{\psi}{2} \quad \chi_1(\psi) = 1 + 2 \cos \psi \quad \text{etc} . \quad (4.38)$$

On est alors en mesure de vérifier toutes les propriétés attendues

unitarité et réalité	$\chi_j(U^{-1}) = \chi_j^*(U) = \chi_j(U)$
	$\chi_j(-U) = \chi_j(2\pi + \psi) = (-1)^{2j} \chi_j(U)$
orthogonalité	$\int_0^{2\pi} d\psi \sin^2 \frac{\psi}{2} \chi_j(\psi) \chi_{j'}(\psi) = \pi \delta_{jj'}$
complétude	$\sum_{j=0, \frac{1}{2}, \dots} \chi_j(\psi) \chi_j(\psi') = \frac{\pi}{\sin^2 \frac{\psi}{2}} \delta(\psi - \psi') = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\psi}{2}} \delta\left(\cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\psi'}{2}\right)$

(4.39)

La dernière exprime que les caractères forment une base complète des fonctions de classe, c'est-à-dire des fonctions paires périodiques de  $\frac{1}{2}\psi$ . On retrouve là le développement de Fourier.

#### 4.5. Fonctions spéciales. Harmoniques sphériques

Dans la section 1, on a vu que le générateur  $J$  de  $SO(2)$  agissait dans chaque représentation comme un opérateur différentiel (cf. (1.2)). Cette propriété se généralise à tout groupe continu, en particulier au cas de  $SU(2)$ – $SO(3)$  qui nous occupe : les générateurs  $J_i$  apparaissent comme des opérateurs différentiels par rapport aux paramètres de la rotation. Ceci va donner lieu à des équations différentielles satisfaites par les  $\mathcal{D}_{m'm}^j$  et faire apparaître leur relation avec des “fonctions spéciales” de la Physique Mathématique.

Revenons à l'équation (4.31). On a déjà noté que la discussion de la section 4.3 s'applique non seulement aux matrices de  $SU(2)$  mais aussi à des matrices quelconques du groupe linéaire  $GL(2)$ . La combinaison  $(ax + cy)^{j+m}(bx + dy)^{j-m}$  satisfait évidemment

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial a \partial d} - \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \right) (ax + cy)^{j+m}(bx + dy)^{j-m} = 0$$

donc en raison de l'indépendance des  $P_{jm}$ , les  $\mathcal{D}_{m'm}^j(U)$  satisfont la même équation. Si  $d = a^*$ ,  $c = -b^*$ , mais  $\rho^2 = |a|^2 + |b|^2$  est arbitraire, on a donc

$$\Delta_4 \mathcal{D}_{m'm}^j(A) = 4 \left( \frac{\partial^2}{\partial a \partial a^*} + \frac{\partial^2}{\partial b \partial b^*} \right) \mathcal{D}_{m'm}^j(A) = 0 \quad (4.40)$$

où  $\Delta_4$  est le laplacien dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  des variables  $u_0, \vec{u}$ , avec  $a = u_0 + iu_3$ ,  $b = u_1 + iu_2$ . En coordonnées polaires,

$$\Delta_4 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \Delta_{\text{sphère } S^3} \quad (4.41)$$

où le dernier terme, laplacien sur la sphère  $S^3$ , n'agit que sur les variables angulaires  $U \in SU(2)$ . Les fonctions  $\mathcal{D}^j$  étant homogènes de degré  $2j$  en  $a, b, c, d$  donc en  $\rho$ , on a finalement

$$-\frac{1}{4} \Delta_{\text{sphère } S^3} \mathcal{D}_{m'm}^j(U) = j(j+1) \mathcal{D}_{m'm}^j. \quad (4.42)$$

Par exemple, en utilisant la paramétrisation des angles d'Euler (Appendice B), on trouve que

$$\left\{ \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right] + j(j+1) \right\} \mathcal{D}^j(\alpha, \beta, \gamma)_{m'm} = 0. \quad (4.43)$$

Pour  $m = 0$  (donc  $j$  nécessairement entier), la dépendance en  $\gamma$  disparaît (cf. (4.23)). Choisissons par exemple  $\gamma = 0$  et effectuons le changement de notations  $(j, m') \rightarrow (l, m)$  et  $(\beta, \alpha) \rightarrow (\theta, \phi)$ , afin de retrouver des notations traditionnelles. L'équation se réduit à

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + l(l+1) \right] \mathcal{D}^l(\phi, \theta, 0)_{m0} = 0. \quad (4.44)$$

L'opérateur différentiel constitué des deux premiers termes est le laplacien  $\Delta_{S^2}$  sur la sphère unité  $S^2$  (cf. Appendice B). L'équation (4.44) définit donc les *harmoniques sphériques*  $Y_l^m(\theta, \phi)$  comme vecteurs propres du laplacien  $\Delta_{S^2}$ . La normalisation correcte est que

$$\left[ \frac{2l+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}^l(\phi, \theta, 0)_{m0} = Y_l^{m*}(\theta, \phi). \quad (4.45)$$

Introduisons encore les *polynômes et fonctions de Legendre*  $P_l(u)$  et  $P_l^m(u)$  définies par

$$\begin{aligned} P_l(u) &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l \\ P_l^m(u) &= (1 - u^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{du^m} P_l(u). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Les premiers  $P_l$  sont

$$P_0 = 1 \quad P_1 = u \quad P_2 = \frac{1}{2}(3u^2 - 1) \quad P_3 = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u) \dots \quad (4.47)$$

tandis que  $P_l^0 = P_l$ ,  $P_l^1 = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}} P_l$ , etc. Les harmoniques sphériques sont reliées aux fonctions de Legendre  $P_l^m(\cos \theta)$  par

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left[ \frac{(2l+1)(l-m)}{4\pi(l+m)} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.48)$$

donc

$$d^l(\theta)_{m0} = (-1)^m \left[ \frac{(l-m)}{(l+m)} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \theta) \quad (4.49)$$

En particulier,  $d^l(\theta)_{00} = P_l(\cos \theta)$ .

En général,  $d^l(\theta)_{m'm}$  est relié au polynôme de Jacobi

$$P_l^{(\alpha, \beta)}(u) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} (1-u)^{-\alpha} (1+u)^{-\beta} \frac{d^l}{du^l} [(1-u)^{\alpha+l} (1+u)^{\beta+l}] \quad (4.50)$$

par

$$d_{m'm}^j(\beta) = \left[ \frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\beta}{2} \right)^{m+m'} \left( \sin \frac{\beta}{2} \right)^{m-m'} P_{j-m'}^{(m'-m, m'+m)}(\cos \beta). \quad (4.51)$$

Polynômes de Jacobi et de Legendre relèvent de la théorie générale des polynômes orthogonaux dont on montre qu'ils satisfont des relations de récurrence linéaires à trois termes. Ils satisfont en outre des équations différentielles. C'est ainsi que les polynômes de Jacobi sont orthogonaux pour la mesure

$$\int_{-1}^1 du (1-u)^\alpha (1+u)^\beta P_j^{(\alpha, \beta)}(u) P_{j'}^{(\alpha, \beta)}(u) = \delta_{jj'} \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(l+\alpha+1) \Gamma(l+\beta+1)}{(2l+\alpha+\beta+1) l! \Gamma(l+\alpha+\beta+1)} \quad (4.52)$$

et satisfont la relation de récurrence

$$\begin{aligned}
& 2(l+1)(l+\alpha+\beta+1)(2l+\alpha+\beta)P_{l+1}^{(\alpha,\beta)}(u) \\
&= (2l+\alpha+\beta+1)[(2l+\alpha+\beta)(2l+\alpha+\beta+2)u+\alpha^2-\beta^2]P_l^{(\alpha,\beta)}(u) \\
&- 2(l+\alpha)(l+\beta)(2l+\alpha+\beta+2)P_{l-1}^{(\alpha,\beta)}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Le polynôme de Jacobi  $P_l^{(\alpha,\beta)}(u)$  est solution de l'équation différentielle

$$\left\{ (1-u^2)\frac{d^2}{du^2} + [\beta-\alpha-(2+\alpha+\beta)u]\frac{d}{du} + l(l+\alpha+\beta+1) \right\} P_l^{(\alpha,\beta)}(u) = 0. \tag{4.54}$$

Les polynômes de Legendre correspondent au cas  $\alpha = \beta = 0$ . Ces relations apparaissent ici comme reliées à celles des  $\mathcal{D}^j$ . Ceci est un phénomène général : de nombreuses fonctions spéciales (Bessel, etc) sont reliées à des matrices de représentations de groupes. La théorie des groupes permet donc de mettre dans une perspective géométrique des résultats de l'analyse classique.

Revenons aux harmoniques sphériques et à leurs propriétés.

(i) Elles satisfont les équations différentielles

$$\begin{aligned}
& (\Delta_{S^2} + l(l+1))Y_l^m = 0 \\
& J_z Y_l^m = -i\frac{\partial}{\partial\phi} Y_l^m = mY_l^m
\end{aligned} \tag{4.55}$$

et peuvent s'écrire

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}} e^{im\phi} \sin^{-m}\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m} \sin^{2l}\theta. \tag{4.56}$$

(ii) Elles sont normalisées à 1 sur la sphère unité et plus généralement y satisfont des propriétés d'orthogonalité et de complétude

$$\begin{aligned}
& \int d\Omega Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\
& \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta', \phi') = \delta(\Omega - \Omega') = \frac{\delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi')}{\sin\theta} \\
& = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi')
\end{aligned} \tag{4.57}$$

(iii) On peut considérer  $Y_l^m(\theta, \phi)$  comme fonction du vecteur unitaire  $\hat{n}$  d'angles directeurs  $\theta, \phi$ . Si le vecteur  $\hat{n}$  est transformé en  $\hat{n}'$  par la rotation  $R$ , on a

$$Y_l^m(\hat{n}') = Y_l^{m'}(\hat{n}) \mathcal{D}^l(R)_{m'm} \tag{4.58}$$

ce qui exprime que les  $Y_l^m$  se transforment comme des vecteurs de la représentation de spin  $l$ .

(iv) On vérifie sur l'expression ci-dessus les relations de symétrie en  $m$

$$Y_l^{m*}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \phi) \tag{4.59}$$

et de parité

$$Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi) . \quad (4.60)$$

(v) Les harmoniques sphériques satisfont aussi des relations de récurrence de deux types : celles issues de l'action de  $J_{\pm}$ , opérateurs différentiels qui agissent selon (4.19)

$$e^{\pm i\phi} \left[ \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_l^{m \pm 1} \quad (4.61)$$

et celles provenant de la multiplication des représentations, (cf. plus bas, section 5)

$$\sqrt{2l+1} \cos \theta Y_l^m = \left( \frac{(l+m)(l-m)}{2l-1} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l-1}^m + \left( \frac{(l+m+1)(l-m+1)}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{l+1}^m . \quad (4.62)$$

On a plus généralement la formule de produit

$$Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) = \sum_L \langle lm; l'm' | L, m+m' \rangle \left[ \frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2L+1)} \right]^{\frac{1}{2}} Y_L^{m+m'}(\theta, \phi) . \quad (4.63)$$

La dernière formule fait appel aux coefficients de Clebsch-Gordan pour la décomposition du produit des représentations de spin  $l$  et  $l'$  qui sera étudiée dans la section à venir.

(vi) Finalement citons la très utile “formule d’addition”

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta) = \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{n}) Y_l^{m*}(\hat{n}') \quad (4.64)$$

où  $\theta$  désigne l’angle entre les directions  $\hat{n}$  et  $\hat{n}'$ . Cette formule peut se vérifier en démontrant que le membre de droite satisfait bien les équations différentielles satisfaites par  $P_l$  (exercice 4).

Les expressions des premiers  $Y_l^m$  peuvent être utiles

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta & Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi} \\ Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^3 \theta - 1) & Y_2^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\phi} & Y_2^{\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} . \end{aligned}$$

## 5. Produit direct de représentations de $SU(2)$

### 5.1. Produit direct de représentations et l’“addition de moments angulaires”

Intéressons nous à la décomposition du produit de deux représentations de spin  $j_1$  et  $j_2$  en représentations irréductibles. On part donc de la représentation produit engendrée par les vecteurs

$$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \quad \text{abrégé en} \quad |m_1 m_2\rangle \quad (5.1)$$

sur lesquels agissent les générateurs infinitésimaux sous la forme

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} \otimes \mathbb{I}^{(2)} + \mathbb{I}^{(1)} \otimes \vec{J}^{(2)} . \quad (5.2)$$

L'indice supérieur indique sur quel espace agissent les opérateurs. Par abus de notation, on écrit souvent au lieu de (5.2)

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)} \quad (5.2)'$$

et (en Mécanique Quantique), on parle de l'“addition des moments angulaires”  $J^{(1)}$  et  $J^{(2)}$ . Il s'agit donc de décomposer les vecteurs (5.1) sur une base de vecteurs propres de  $\vec{J}$  et  $J_z$ . Comme  $\vec{J}^{(1)2}$  et  $\vec{J}^{(2)2}$  commutent entre eux et avec  $\vec{J}^2$  et  $J_z$ , on peut chercher des vecteurs propres communs qu'on notera

$$|(j_1 j_2) J M\rangle \quad \text{ou plus simplement} \quad |J M\rangle \quad (5.3)$$

étant entendu qu'on s'est fixé la valeur de  $j_1$  et  $j_2$ . La question est donc double : quelles valeurs  $J$  et  $M$  peuvent-ils prendre et quelle est la matrice du changement de base  $|m_1 m_2\rangle \rightarrow |J M\rangle$  ? En d'autres termes quelle est la décomposition (de Clebsch-Gordan) et quels sont les coefficients de Clebsch-Gordan ?

Les valeurs possibles de  $M$ , valeur propre de  $J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)}$  sont aisées à trouver

$$\begin{aligned} \langle m_1 m_2 | J_z | J M \rangle &= (m_1 + m_2) \langle m_1 m_2 | J M \rangle \\ &= M \langle m_1 m_2 | J M \rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

et la seule valeur de  $M$  telle que  $\langle m_1 m_2 | J M \rangle \neq 0$  est donc

$$M = m_1 + m_2 . \quad (5.5)$$

A  $j_1, j_2$  et  $M$  fixés, il y a autant de vecteurs indépendants ayant cette valeur de  $M$  qu'il y a de couples  $(m_1, m_2)$  satisfaisant (5.5), soit

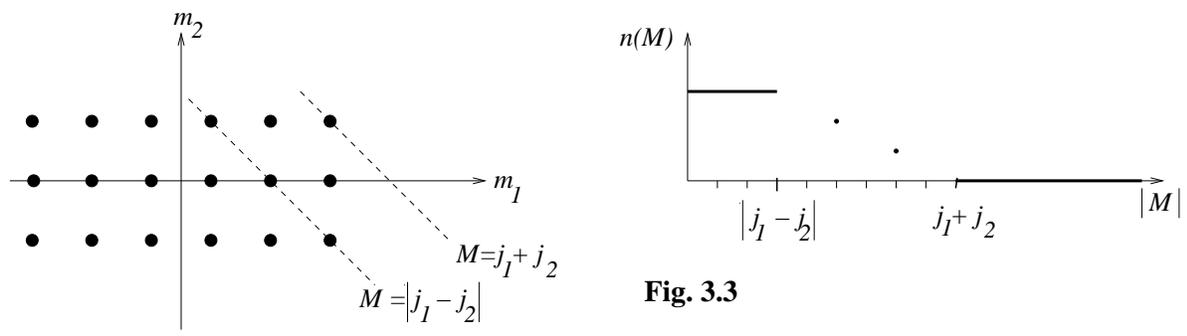
$$n(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } |M| > j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 + 1 - |M| & \text{si } |j_1 - j_2| \leq |M| \leq j_1 + j_2 \\ 2 \inf(j_1, j_2) + 1 & \text{si } 0 \leq |M| \leq |j_1 - j_2| \end{cases} \quad (5.6)$$

(voir Fig. 3.3 pour laquelle  $j_1 = 5/2$  and  $j_2 = 1$ ). Soit  $N_J$  le nombre de fois où la représentation de spin  $J$  apparaît dans la décomposition du produit des représentations de spin  $j_1$  et  $j_2$ . Les  $n(M)$  vecteurs de valeur propre  $M$  pour  $J_z$  peuvent aussi s'interpréter comme provenant des  $N_J$  vecteurs  $|J M\rangle$  pour les différentes valeurs de  $J$  compatibles avec cette valeur de  $M$

$$n(M) = \sum_{J \geq |M|} N_J \quad (5.7)$$

soit en retranchant membre à membre deux telles relations

$$\begin{aligned} N_J &= n(J) - n(J + 1) \\ &= 1 \quad \text{si et seulement si} \quad |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (5.8)$$



**Fig. 3.3**

En conclusion, nous venons de démontrer que les  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  vecteurs (5.1) (à  $j_1$  et  $j_2$  fixés) peuvent se réexprimer en fonction des vecteurs  $|JM\rangle$  où

$$\begin{aligned} J &= |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2 \\ M &= -J, -J + 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Noter qu'en définitive les multiplicités  $N_J$  valent 0 ou 1; c'est une particularité de  $SU(2)$  que des multiplicités supérieures à 1 n'apparaissent pas dans la décomposition du produit de deux représentations irréductibles.

### 5.2. Coefficients de Clebsch-Gordan, symboles 3-j et 6-j ...

Le changement de base  $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \rightarrow |(j_1 j_2) JM\rangle$  s'effectue à l'aide des coefficients de Clebsch-Gordan (C.G.)  $\langle(j_1 j_2); JM|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle$

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle(j_1 j_2) JM|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle |(j_1 j_2) JM\rangle \quad (5.10a)$$

$$|(j_1 j_2); JM\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^J \langle(j_1 j_2) JM|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle^* |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle. \quad (5.10b)$$

Leur valeur dépend en fait d'un choix de phase relative entre les vecteurs (5.1) et (5.3); la convention habituelle est que pour chaque valeur de  $J$ , on choisit

$$\langle j_1 m_1 = j_1; j_2 m_2 = J - j_1 | JM = J \rangle \quad \text{réel.} \quad (5.11)$$

Les autres vecteurs sont alors définis sans ambiguïté par (4.19) et on va montrer que tous les C.G. sont réels. Les C.G. satisfont des relations de récurrence conséquences de (4.19). Appliquant en effet  $J_{\pm}$  aux deux membres de (5.10a), on obtient

$$\begin{aligned} &\sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) JM \rangle \\ &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)} \langle j_1 m_1 \pm 1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) JM \pm 1 \rangle \\ &+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 \pm 1 | (j_1 j_2) JM \pm 1 \rangle \end{aligned} \quad (5.12)$$

qui permet à l'aide de la normalisation  $\sum_{m_1, m_2} |\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle|^2 = 1$  et de la convention (5.11) de déterminer tous les C.G. Comme annoncé, ils sont clairement tous réels.

Comme on l'a discuté au chapitre 2, les C.G. du groupe  $SU(2)$  satisfont des propriétés d'orthogonalité et de complétude

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J' M' \rangle &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \\ &\text{si } |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \\ \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle \langle j_1 m'_1; j_2 m'_2 | (j_1 j_2) J M \rangle &= \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \\ &\text{si } |m_1| \leq j_1, |m_2| \leq j_2 . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Plutôt que les coefficients de Clebsch-Gordan, on peut considérer un ensemble de coefficients équivalents, dits *symboles 3-j*. Ils sont définis par

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2+M}}{\sqrt{2J+1}} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | (j_1 j_2) J M \rangle \quad (5.14)$$

et ont l'intérêt de jouir de propriétés de symétrie simples :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

est invariant par permutation circulaire des trois colonnes et change par le signe  $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$  quand deux colonnes sont permutées ou quand on change les signes de  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$ . Le lecteur trouvera dans la littérature de nombreuses tables et formules explicites.

Contentons nous de donner les valeurs pour les spins les plus bas

$$\begin{aligned} &|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, 1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \\ \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} : &|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \\ &|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \right) \\ &|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, -1\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{aligned} \quad (5.15)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \otimes 1 : \quad & |(\frac{1}{2}, 1) \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1\rangle \\
& |(\frac{1}{2}, 1) \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle \right) \\
& |(\frac{1}{2}, 1) \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -1\rangle + \sqrt{2} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 0\rangle \right) \\
& |(\frac{1}{2}, 1) \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, -1\rangle \\
& |(\frac{1}{2}, 1) \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\rangle + \sqrt{2} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1\rangle \right) \\
& |(\frac{1}{2}, 1) \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\sqrt{2} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, -1\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 0\rangle \right)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

On note sur le cas  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$  la propriété que les vecteurs de spin total  $j = 1$  sont symétriques dans l'échange des deux spins, celui de spin 0 antisymétrique. La propriété est générale : dans la composition de deux représentations de spin  $j_1 = j_2$ , les vecteurs résultants de spin  $j = 2j_1, 2j_1 - 2, \dots$  sont symétriques, ceux de spin  $2j_1 - 1, 2j_1 - 3, \dots$  sont antisymétriques. Ceci est apparent sur l'expression (5.14) ci-dessus, compte tenu des propriétés annoncées des symboles 3- $j$ . Dans le même ordre d'idées, soit le produit complètement antisymétrique de  $2j + 1$  copies d'une représentation de spin  $j$ . On peut montrer que cette représentation est de spin 0 (exercice 5). (Ceci a une conséquence en physique atomique, dans le remplissage des couches électroniques : une couche complète a un moment orbital total et un spin total nuls donc aussi un moment angulaire total nul.)

On introduit aussi les *symboles 6- $j$*  qui décrivent les deux recombinaisons possibles de 3 représentations de spins  $j_1, j_2$  et  $j_3$

$$\begin{aligned}
|j_1 m_1; j_2 m_2; j_3 m_3\rangle &= \sum \langle (j_1 j_2) J_1 M_1 | j_1 m_1; j_2 m_2 \rangle \langle (J_1 j_3) J M | J_1 M_1; j_3 m_3 \rangle | (j_1 j_2) j_3; J M \rangle \\
&= \sum \langle (j_2 j_3) J_2 M_2 | j_2 m_2; j_3 m_3 \rangle \langle (j_1 J_2) J' M' | j_1 m_1; J_2 M_2 \rangle | j_1 (j_2 j_3); J' M' \rangle
\end{aligned}$$

selon que l'on compose d'abord  $j_1$  et  $j_2$  en  $J_1$  puis  $J_1$  et  $j_3$  en  $J$  ou d'abord  $j_2$  et  $j_3$  en  $J_2$  puis  $j_1$  et  $J_2$  en  $J'$ . La matrice de changement de base est notée

$$\langle j_1 (j_2 j_3); J M | (j_1 j_2) j_3; J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \sqrt{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} (-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + J} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_1 \\ j_3 & J & J_2 \end{matrix} \right\}. \tag{5.18}$$

et les  $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & J_1 \\ j_3 & J & J_2 \end{matrix} \right\}$  sont les symboles 6- $j$ . On visualise l'opération d'addition des trois spins par un tétraèdre (cf. Fig. 4) dont les arêtes portent  $j_1, j_2, j_3, J_1, J_2$  et  $J$  et le symbole est tel que deux spins portés par une paire d'arêtes opposées se trouvent dans la même colonne. Ces symboles sont tabulés dans la littérature.

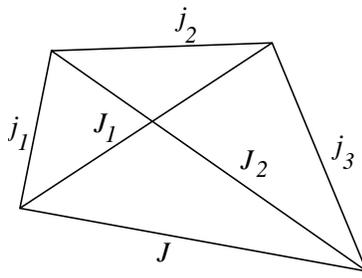


Fig. 3.4

## 6. Applications physiques

### 6.1. Moments multipolaires

On considère un potentiel créé par une distribution de charge statique  $\rho(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3r' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

et on le développe sur les harmoniques sphériques en utilisant les identités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_l^{m*}(\hat{n}) Y_l^m(\hat{n}') . \end{aligned} \quad (6.1)$$

La première fait l'objet de l'exercice 3, (on suppose  $r' < r$ ), et la deuxième résulte de la formule d'addition (4.64). Il vient

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \frac{Y_l^{m*}(\hat{n})}{r^{l+1}} Q_{lm} \quad (6.2)$$

où les  $Q_{lm}$ , définis par

$$Q_{lm} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^l Y_l^m(\hat{n}') \quad (6.3)$$

sont les *moments multipolaires* de la distribution de charge  $\rho$ . Par exemple, si  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$  est invariant par rotation, seul  $Q_{00}$  est non nul, égal à la charge totale (à  $1/\sqrt{4\pi}$  près)

$$Q_{00} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}} = \sqrt{4\pi} \int r^2 dr \rho(r) \quad \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} .$$

Les trois composantes de  $Q_{1m}$  reconstruisent le moment dipolaire  $\int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}'$ . Plus généralement, sous l'effet des rotations, les  $Q_{lm}$  forment les composantes d'un opérateur tensoriel se transformant selon la représentation de spin  $l$  (et cf. (4.60), de parité  $(-1)^l$ ).

En Mécanique Quantique, les  $Q_{lm}$  deviennent des opérateurs. On peut leur appliquer le théorème de Wigner-Eckart et en conclure que

$$\langle j_1, m_1 | Q_l^m | j_2, m_2 \rangle = \langle j_1 || Q_l || j_2 \rangle \langle j_1, m_1 | l, m; j_2, m_2 \rangle$$

avec un élément de matrice réduit indépendant des  $m$ . En particulier, si  $j_1 = j_2 = j$ , la valeur moyenne de  $Q_l$  n'est non nulle que pour  $l \leq 2j$ . Voir aussi l'exercice 7.

## 6.2. États propres de moment angulaire en Mécanique Quantique

Les harmoniques sphériques peuvent s'interpréter comme les fonctions d'onde dans les coordonnées  $\theta, \phi$  des états propres du moment angulaire  $\vec{L} = \hbar\vec{J} = \hbar\vec{r} \wedge \vec{\nabla}$

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$$

en analogie avec

$$e^{-i\vec{x}\cdot\vec{p}} = \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle .$$

En particulier, dans un processus de collision décrit par un Hamiltonien invariant par rotation, un état d'impulsion initiale  $\vec{p}_i$  selon l'axe des  $z$ , (c'est-à-dire  $\theta = \phi = 0$ ), interagit avec un certain centre diffuseur et ressort dans un état d'impulsion  $\vec{p}_f$ , avec  $|p_i| = |p_f| = p$ , selon la direction  $\hat{n} = (\theta, \phi)$ . On écrit l'amplitude

$$\begin{aligned} \langle p, \theta, \phi | \mathcal{T} | p, 0, 0 \rangle &= \sum_{l' m m'} Y_l^m(\theta, \phi) \langle p, l, m | \mathcal{T} | p, l', m' \rangle Y_{l'}^{m'*}(0, 0) \\ &= \sum_{l' m} Y_l^m(\theta, \phi) \langle p, l, m | \mathcal{T} | p, l', 0 \rangle Y_{l'}^{0*}(0, 0) \\ &= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \mathcal{I}_l(p) P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

selon à nouveau la formule d'addition et  $\langle plm | \mathcal{T} | p'l'm' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \mathcal{I}_l(p)$  exprimant l'invariance par rotation. C'est le très utile développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion.

Se reporter aux ouvrages de Mécanique Quantique pour de nombreuses applications détaillées de ces principes.

## 6.3. L'isospin

Le groupe  $SU(2)$  n'intervient pas en Physique qu'en tant que (lié au) groupe de rotation de l'espace euclidien. Illustrons une autre de ses apparitions par la symétrie d'isospin. Il existe dans la nature un certain nombre de particules élémentaires présentant des propriétés voisines, mais différant par leur charge électrique. C'est le cas du proton et du neutron, de masses 938,28 MeV et 939,57 MeV respectivement, mais aussi du triplet de mésons pi  $\pi^0$  (masse 134,96 MeV) et  $\pi^\pm$  (139,57 MeV), des mésons  $K$  etc. Il a été proposé que ceci est la manifestation d'une symétrie brisée par les effets électromagnétiques. En l'absence d'interactions électromagnétiques, le proton et le neutron d'une part, les trois mésons  $\pi$  de l'autre seraient des particules de même nature, de même masse, différant seulement par un nombre quantique "interne", à la façon de deux électrons dotés de spins différents. En fait le groupe régissant cette symétrie est aussi  $SU(2)$ , mais un  $SU(2)$  agissant dans un espace abstrait autre que l'espace usuel. On a donné le nom d'*isospin* ou *spin isotopique* au nombre quantique correspondant. Pour résumer, la proposition est donc qu'il existe un groupe  $SU(2)$  de symétrie de l'Hamiltonien des interactions fortes, et que les différentes particules sujettes à ces interactions forment des représentations de  $SU(2)$  : représentation

d'isospin  $I = \frac{1}{2}$  pour le nucléon (proton  $I_z = +\frac{1}{2}$ , neutron  $I_z = -\frac{1}{2}$ ), isospin  $I = 1$  pour les pions ( $\pi^\pm : I_z = \pm 1$ ,  $\pi^0 : I_z = 0$ ) etc. L'isospin est donc un bon nombre quantique conservé dans ces interactions. Ainsi la réaction  $N \rightarrow N + \pi$ , ( $N$  pour nucléon) importante en physique nucléaire, est compatible avec les règles d'addition des isospins ( $\frac{1}{2} \otimes 1$  "contient"  $\frac{1}{2}$ ). Les différentes réactions  $N + \pi \rightarrow N + \pi$  autorisées par la conservation de la charge électrique

$$\begin{aligned}
p + \pi^+ &\rightarrow p + \pi^+ & I_z &= \frac{3}{2} \\
p + \pi^0 &\rightarrow p + \pi^0 & I_z &= \frac{1}{2} \\
&\rightarrow n + \pi^- & &'' \\
p + \pi^- &\rightarrow p + \pi^- & I_z &= -\frac{1}{2} \\
&\rightarrow n + \pi^0 & &'' \\
n + \pi^- &\rightarrow n + \pi^- & I_z &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

conservent aussi l'isospin total  $I$  et sa composante  $I_z$  mais l'hypothèse d'invariance par  $SU(2)$  d'isospin nous apprend d'avantage. Les éléments de matrice de transition des deux réactions dans le canal  $I_z = \frac{1}{2}$ , par exemple, doivent être reliés par les règles d'addition de l'isospin (cf eq. (5.16)).

$$\begin{aligned}
|p, \pi^-\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|I = \frac{3}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|I = \frac{1}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle \\
|n, \pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|I = \frac{3}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|I = \frac{1}{2}, I_z = -\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

tandis que pour  $I_z = 3/2$

$$|p, \pi^+\rangle = |I = \frac{3}{2}, I_z = \frac{3}{2}\rangle .$$

L'invariance d'isospin implique que  $\langle I I_z | \mathcal{T} | I' I'_z \rangle = \mathcal{T}_I \delta_{II'} \delta_{I_z I'_z}$ . En calculant alors les éléments de matrice de l'opérateur de transition  $\mathcal{T}$  entre ces différents états,

$$\begin{aligned}
\langle p\pi^+ | \mathcal{T} | p\pi^+ \rangle &= \mathcal{T}_{3/2} \\
\langle p\pi^- | \mathcal{T} | p\pi^- \rangle &= \frac{1}{3} (\mathcal{T}_{3/2} + 2\mathcal{T}_{1/2}) \\
\langle n\pi^0 | \mathcal{T} | p\pi^- \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} (\mathcal{T}_{3/2} - \mathcal{T}_{1/2})
\end{aligned}$$

on trouve que les amplitudes satisfont une relation

$$\sqrt{2}\langle n, \pi^0 | \mathcal{T} | p, \pi^- \rangle + \langle p, \pi^- | \mathcal{T} | p, \pi^- \rangle = \langle p, \pi^+ | \mathcal{T} | p, \pi^+ \rangle = \mathcal{T}_{3/2}$$

conséquence non triviale de l'invariance d'isospin, qui implique des inégalités triangulaires entre les modules carrés de ces amplitudes donc entre les sections efficaces de ces réactions

$$\begin{aligned}
[\sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)} - \sqrt{2\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)}]^2 &\leq \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \leq \\
&\leq [\sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)} + \sqrt{2\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)}]^2
\end{aligned}$$

qui sont bien vérifiées expérimentalement.

Mieux, on constate qu'à une énergie d'environ 180 MeV, les sections efficaces (proportionnelles aux carrés des amplitudes) sont dans les rapports

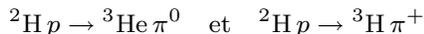
$$\sigma(\pi^+p \rightarrow \pi^+p) : \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) : \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^-p) = 9 : 2 : 1$$

ce qui indique qu'à cette énergie, la diffusion dans le canal d'isospin 3/2 est prédominante et signale en fait l'existence d'un état intermédiaire, particule très instable ou "résonance", notée  $\Delta$ , d'isospin 3/2 donc avec quatre états de charge

$$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^- .$$

Cette particule a un spin 3/2 et une masse  $M(\Delta) \approx 1230 \text{ MeV}/c^2$ .

Dans certains cas on peut parvenir à des prédictions plus précises. C'est le cas par exemple dans l'étude des réactions



impliquant des noyaux de deutérium ( ${}^2\text{H}$ ), de tritium ( ${}^3\text{H}$ ) et d'hélium  ${}^3\text{He}$ . A ces noyaux aussi on peut attribuer un isospin, 0 au deutéron qui est formé d'un proton et d'un neutron dans un état antisymétrique de leurs isospins (pour que la fonction d'onde, symétrique d'espace et de spin, soit antisymétrique),  $I_z = -\frac{1}{2}$  à  ${}^3\text{H}$  et  $I_z = \frac{1}{2}$  à  ${}^3\text{He}$  qui forment une représentation d'isospin  $\frac{1}{2}$ . Montrer que le rapport des sections efficaces  $\sigma({}^2\text{H}p \rightarrow {}^3\text{He}\pi^0)/\sigma({}^2\text{H}p \rightarrow {}^3\text{H}\pi^+)$  est  $\frac{1}{2}$ .

### Exercices

1. En utilisant (2.4), écrire la matrice  $R$  qui amène le vecteur unitaire  $\hat{n}$  à sa position puis l'expression de  $R_n(\psi)$  en termes de  $R_y$  et  $R_z$ , et en déduire les relations entre  $\theta, \phi, \psi$  et les angles d'Euler.
2. Vérifier que l'expression de la mesure invariante sur  $SU(2)$  dans la paramétrisation des angles d'Euler est bien donnée par (2.18), soit en calculant le jacobien via l'exercice 1, soit en suivant la méthode de l'Appendice B.
3. Montrer qu'une fonction génératrice des polynômes de Legendre est

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(u)$$

On pourra vérifier que l'équation différentielle des  $P_l$  (cas particulier de (4.54) pour  $\alpha = \beta = 0$ ) est bien satisfaite et que les coefficients  $P_l$  apparaissant dans cette formule sont bien des polynômes en  $u$ . En déduire l'identité (6.1).

4. Démontrer que le polynôme de Legendre  $P_l$  vérifie

$$(\Delta_{S^2} + l(l+1)) P_l(\hat{n} \cdot \hat{n}') = 0$$

comme fonction de  $\hat{n}$  ou de  $\hat{n}'$ , ainsi que  $(\vec{J} + \vec{J}') P_l = 0$  où  $\vec{J}$  et  $\vec{J}'$  sont les générateurs des rotations de  $\hat{n}$  et  $\hat{n}'$  respectivement. En déduire qu'il a un développement sur les

harmoniques sphériques donné par le théorème d'addition de (4.64) (On rappelle que  $P_l(1) = 1$ ).

5. On considère le produit complètement antisymétrique de  $N = 2j + 1$  représentations de spin  $j$ . Montrer que cette représentation est engendrée par le vecteur  $\epsilon_{m_1 m_2 \dots m_N} |j m_1, j m_2, \dots, j m_N\rangle$ , qu'il est invariant par l'action de  $SU(2)$  et donc que la représentation construite est celle de spin  $J = 0$ .

6. Montrer que l'intégrale

$$\int d\Omega Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \phi) Y_{l_3}^{m_3}(\theta, \phi)$$

est proportionnelle au coefficient de Clebsch-Gordan  $(-1)^{m_3} \langle l_1, m_1; l_2, m_2 | l_3, -m_3 \rangle$ , avec un coefficient indépendant des  $m$  qu'on déterminera.

7. Soit  $K_1^m$  les composantes d'un opérateur irréductible vectoriel (par exemple, l'opérateur moment dipolaire de la sect. 6.1). Montrer en utilisant le théorème de Wigner-Eckart que

$$\langle j, m_1 | K_1^m | j, m_2 \rangle = \langle j, m_1 | J^m | j, m_2 \rangle \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{K} \rangle}{j(j+1)}$$

où  $\langle \vec{J} \cdot \vec{K} \rangle$  désigne la valeur moyenne de  $\vec{J} \cdot \vec{K}$  dans l'état  $j$ . En d'autres termes, on peut remplacer  $\vec{K}$  par sa projection  $\vec{J} \frac{\langle \vec{J} \cdot \vec{K} \rangle}{j(j+1)}$ .

8. En utilisant les données de la fin de la sect. 6.3, calculer le rapport des sections efficaces  $\sigma(p n \rightarrow {}^2H \pi^0) / \sigma(p p \rightarrow {}^2H \pi^+)$ .

9. (suite au problème de la fin du chapitre 2) Le groupe du tétraèdre étant un sous-groupe de  $SO(3)$ , les représentations de celui-ci peuvent être restreintes à celui-là. Les représentations de spin 1 et 2 de  $SO(3)$  donnent-elles des représentations irréductibles de  $A_4$ ? Montrer qu'on reconstitue ainsi le début de la discussion de la question 2 du problème.

10. On considère deux représentations de spin  $\frac{1}{2}$  du groupe  $SU(2)$  et leur produit direct (ou tensoriel). On note  $\vec{J}^{(1)}$  et  $\vec{J}^{(2)}$  les générateurs infinitésimaux agissant dans chaque représentation, et  $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$  ceux agissant dans leur produit direct.

a) Que peut-on dire des opérateurs  $\vec{J}^{(1)2}$ ,  $\vec{J}^{(2)2}$  et  $\vec{J}^2$  et de leurs valeurs propres?

b) Montrer qu'on peut exprimer  $\vec{J}^{(1)} \cdot \vec{J}^{(2)}$  en termes de ces opérateurs et en déduire que les opérateurs

$$\frac{1}{4}(\mathbf{3I} + 4\vec{J}^{(1)} \cdot \vec{J}^{(2)})$$

et

$$\frac{1}{4}(\mathbf{I} - 4\vec{J}^{(1)} \cdot \vec{J}^{(2)})$$

sont des projecteurs sur des espaces qu'on précisera.

c) En prenant en compte les symétries d'échange des états, que pouvez-vous dire de l'opérateur

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + 2\vec{J}^{(1)} \cdot \vec{J}^{(2)}\right) ?$$

11. Soit l'expression

$$U_l = \frac{\sin(l+1)\theta}{\sin\theta},$$

où  $l$  est un entier  $\geq 0$ .

- a) Par un calcul trigonométrique élémentaire, exprimer  $U_{l-1} + U_{l+1}$  en fonction de  $U_l$ .
- b) En déduire que  $U_l$  est un polynôme en  $z = \cos\theta$  de degré  $l$ , qu'on notera  $U_l(z)$ .
- c) Quelle est l'interprétation groupiste du résultat obtenu en a)?
- d) Avec le minimum de calculs supplémentaires, que peut-on dire de

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^{\frac{1}{2}} U_l(z) U_{l'}(z)$$

et de

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^{\frac{1}{2}} U_l(z) U_{l'}(z) U_{l''}(z) ?$$

### Problème 1 : symétries du potentiel coulombien

1. Dans le problème de Kepler *classique*, défini par l'Hamiltonien

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (2)$$

on sait bien que le moment cinétique  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$  est conservé. Montrer que  $\vec{M} = \frac{\vec{p}}{m} \wedge \vec{L} - k \frac{\vec{r}}{r}$  est aussi conservé. Cette conservation exprime une propriété remarquable du potentiel en  $\frac{1}{r}$  parmi tous les potentiels centraux : les axes de l'ellipse trajectoire ne précèdent pas.

2. On s'intéresse maintenant au cas quantique, avec le même Hamiltonien (2),  $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ . En quel sens  $\vec{L}$  est-il conservé ? Soit alors

$$\vec{M} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{L} \wedge \vec{p} \right) - k \frac{\vec{r}}{r} .$$

Montrer que  $\vec{M}$  est un opérateur hermitique. Calculer successivement les relations de commutation  $[p_i, M_j]$ ,  $[\vec{p}^2, M_j]$  et  $[\frac{1}{r}, M_j]$  et en déduire que  $\vec{M}$  commute avec  $H$ . On peut vérifier au prix de calculs un peu fastidieux que l'on a aussi

$$[L_j, M_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} M_l \quad (3.a)$$

$$[M_j, M_k] = \frac{\hbar}{i} \epsilon_{jkl} L_l \frac{2}{m} H \quad (3.b)$$

Que signifie la propriété (3.a) ? Quel en est l'analogie classique ? On a aussi les relations supplémentaires, qu'on vérifiera

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{M} \cdot \vec{L} = 0 \quad (4.a)$$

$$\vec{M}^2 - k^2 = \frac{2}{m} H (\vec{L}^2 + \hbar^2) . \quad (4.b)$$

3. Dans le sous-espace propre où  $H = E < 0$ , on introduit les opérateurs

$$\vec{K}_{\pm} = \vec{L} \pm \left( \frac{m}{-2E} \right)^{\frac{1}{2}} \vec{M} .$$

Calculer les relations de commutation des  $\frac{1}{2} \vec{K}_{\pm i}$  entre eux. Quelle conclusion en tire-t-on ? Quelles sont les valeurs propres possibles de  $(\frac{1}{2} \vec{K}_+)^2$  et de  $(\frac{1}{2} \vec{K}_-)^2$ , compte tenu de ces relations et de (4.a) ? Utiliser alors (4.b) pour exprimer les valeurs de  $E$  en termes de ces valeurs propres; pour  $k = Ze^2$ , montrer qu'on retrouve un résultat bien connu sur l'atome d'hydrogène. Quelle est la multiplicité ("dégénérescence") de chaque niveau ?

4. On considère l'espace euclidien de dimension  $d$  et son groupe de rotations  $SO(d)$  et on note  $x^k$ ,  $k = 1, \dots, d$  les coordonnées dans une base orthonormée  $\{e_k\}$ . Montrer que la rotation infinitésimale d'angle  $\delta\alpha$  dans le plan engendré par  $e_k, e_l$ ,  $1 \leq k < l \leq d$ , peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta^{(kl)} x^i &= \delta\alpha \omega_{ij}^{(kl)} x^j \\ \omega_{ij}^{(kl)} &= -(\delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} \delta_{li}) . \end{aligned}$$

Déterminer l'expression des opérateurs différentiels  $J^{kl}$ ,  $k < l$ , qui engendrent les transformations correspondantes sur les fonctions scalaires des coordonnées  $x$ . Quel est le nombre de ces générateurs infinitésimaux ? Dans la suite, il sera commode de considérer aussi  $J^{lk} = -J^{kl}$ . En utilisant au mieux les symétries des expressions pour réduire au minimum les calculs, montrer que les relations de commutation des  $J$  peuvent s'écrire

$$[J^{kl}, J^{mn}] = i (\delta_{km} J^{ln} - \delta_{kn} J^{lm} - \delta_{lm} J^{kn} + \delta_{ln} J^{km}) .$$

Dans le cas  $d = 3$ , comment retrouve-t-on les relations familières ? Dans le cas  $d = 4$ , on introduit les combinaisons

$$A^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J^{\beta\gamma}$$

$$B^\alpha = J^{\alpha 4}$$

dans lesquelles les indices  $\alpha, \beta, \gamma$  prennent les valeurs 1 à 3. Réexprimer les relations de commutation des  $J$  en termes de  $A$  et  $B$ ; les comparer aux relations (3) dans le cas où on s'est placé dans un sous-espace propre  $H = E$ . Qu'en conclut-on sur les symétries du problème de la question 3 ?

## Problème 2 : molécule de fullerène

On se propose d'étudier la molécule  $C_{60}$ , récemment découverte, ses propriétés de symétrie et ses états électroniques.

A.

La structure de la molécule de  $C_{60}$  peut être obtenue en partant d'un icosaèdre régulier (cf. figure 5) et en tronquant chacune des pyramides à base pentagonale telle  $NA_1A_2A_3A_4A_5$  par un plan perpendiculaire à son axe qui coupe les arêtes au tiers de la distance au sommet. La figure résultante est constituée de 20 hexagones réguliers et de 12 pentagones réguliers, et de 60 sommets qui portent les atomes de carbone.

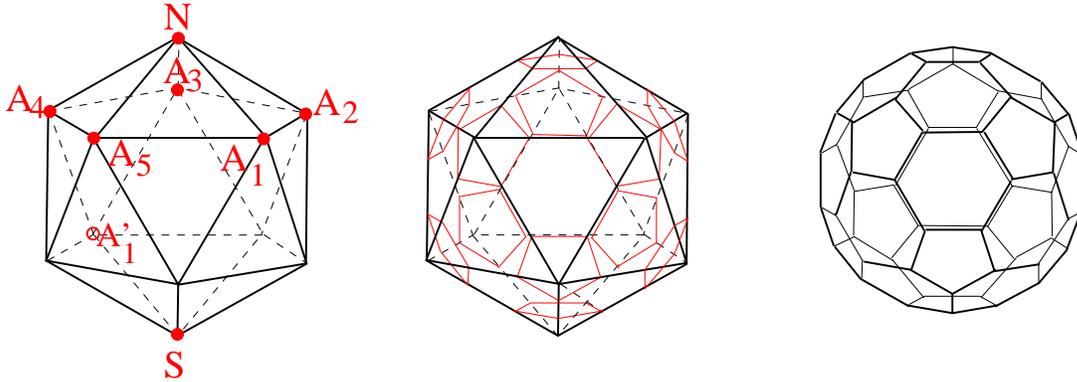


Fig. 3.5

1. On s'intéresse tout d'abord au groupe  $I$  de symétrie de rotation de l'icosaèdre. Montrer qu'il est constitué de cinq classes de conjugaison qu'on caractérisera. Combien de représentations irréductibles possède-t-il ?

Montrer que par restriction à  $I$ , les représentations de spin entier de  $SO(3)$  fournissent des représentations de  $I$ . Pour dresser la table de caractères, on considère les représentations de spin 0, 1 et 2 de  $SO(3)$ . Calculer leurs caractères pour les classes de  $I$ . On rappelle que  $-2 \cos \frac{\pi}{5}$  et  $2 \cos \frac{2\pi}{5}$  sont les racines de l'équation  $z^2 + z - 1 = 0$ . Montrer que ces représentations de  $I$  sont irréductibles; on les notera **1**, **3** et **5**. La même méthode appliquée à la représentation de spin 3 de  $SO(3)$  donne une représentation réductible qui se scinde en deux représentations de dimensions 3 et 4, qu'on notera  $\tilde{\mathbf{3}}$  et **4** et dont on trouvera les caractères dans la table ci-après. Compléter cette table.

2. Le groupe d'invariance de la molécule  $C_{60}$  est le groupe noté  $\hat{I}$  engendré par les rotations de  $I$  et la symétrie  $\tau$  par rapport au centre de l'icosaèdre. Montrer que ce groupe a la structure d'un produit direct  $I \otimes \mathbb{Z}_2$  et que chaque représentation  $D_\rho$  de  $I$  donne lieu à deux représentations  $D_{\rho\pm}$  de  $\hat{I}$ . Que sont leurs caractères  $\chi_{\rho\pm}$  ?

↓ classes \ rep. →	<b>1</b>	<b>3</b>	$\tilde{\mathbf{3}}$	<b>4</b>	<b>5</b>
1			3	4	
$C_2$			-1	0	
$C_3$			0	1	
$C_5^{(1)}$			$-2 \cos \frac{2\pi}{5}$	-1	
$C_5^{(2)}$			$2 \cos \frac{\pi}{5}$	-1	

**B. 1.** Les six électrons de chaque carbone se répartissent en deux électrons sur une couche  $1s$  interne, trois électrons de valence qui sont responsables des liaisons entre atomes voisins et un dernier qui va nous intéresser. C'est donc pour 60 électrons qu'il s'agit de trouver des niveaux d'énergie, au prix de certaines approximations qui vont en particulier nous faire négliger les interactions entre électrons.

Soit  $v(\vec{r} - \vec{r}_i)$  le potentiel créé par l'ion  $C^+$  placé en  $\vec{r}_i$  sur un de ces électrons en  $\vec{r}$ . Soit  $f_i(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{r}_i)$  une fonction d'onde normalisée de cet électron au voisinage du  $i$ -ème atome ( $i = 1, \dots, 60$ ), solution de

$$\left( -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} + v(\vec{r} - \vec{r}_i) - e_0 \right) \psi(\vec{r} - \vec{r}_i) = 0 .$$

Dans toute la suite du problème, la fonction  $\psi$  sera supposée donnée et pour simplifier, on la supposera à symétrie sphérique autour de  $\vec{r}_i$  :

$$f_i(\vec{r}) = \psi(|\vec{r} - \vec{r}_i|) .$$

On considère l'espace  $E$  des fonctions d'onde à un électron obtenues par combinaisons linéaires des  $f_i$ ,

$$f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{60} c_i f_i(\vec{r}) .$$

L'hamiltonien auquel est soumis chaque électron s'écrit

$$H = \left( -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} + \sum_i v(\vec{r} - \vec{r}_i) \right) .$$

On va chercher une approximation de ses états propres dans l'espace  $E$  en minimisant par rapport aux coefficients  $c_i$  le rapport  $\frac{\langle f|H|f \rangle}{\langle f|f \rangle}$  ; on admettra que cela revient à diagonaliser la matrice  $60 \times 60$

$$h_{ij} = \langle f_i | H | f_j \rangle \tag{6.4}$$

c'est-à-dire à résoudre  $\sum_j h_{ij} c_j = \mathcal{E} c_i$ . C'est ce dernier problème qui doit être simplifié par la théorie des groupes.

Montrer que  $E$  constitue l'espace d'une représentation  $D$  de  $I$ . Écrire la forme de la matrice de la représentation et évaluer son caractère pour les différentes classes. Montrer qu'elle est isomorphe à la représentation régulière. Quelle est sa décomposition en représentations irréductibles

$$D = \oplus n_\rho D_\rho ?$$

2. On examine maintenant la symétrie  $\sigma$  par rapport au plan  $NA_1SA'_1$  (fig. 1) : en termes de quels éléments de  $I$  et de  $\mathbb{Z}_2$  s'exprime-t-elle ? Combien d'atomes de la molécule laisse-t-elle invariants ?

3. Montrer que l'espace  $E$  défini en 1) est aussi l'espace d'une représentation  $\hat{D}$  de  $\hat{I}$  dont on donnera la valeur du caractère  $\hat{\chi}(g)$  en fonction du nombre d'éléments laissés

invariants par la transformation  $g$ . Quelle est par exemple la valeur de ce caractère pour l'élément  $\sigma$  ?

On se propose de déterminer la décomposition de cette représentation de  $\hat{I}$  en représentations irréductibles. Montrer que ce qui précède permet d'écrire

$$\hat{\chi}(g) = \sum_{\rho} n_{\rho} \chi_{\rho}(g) + n_{\rho^-} \chi_{\rho^-}(g) \quad (6.5)$$

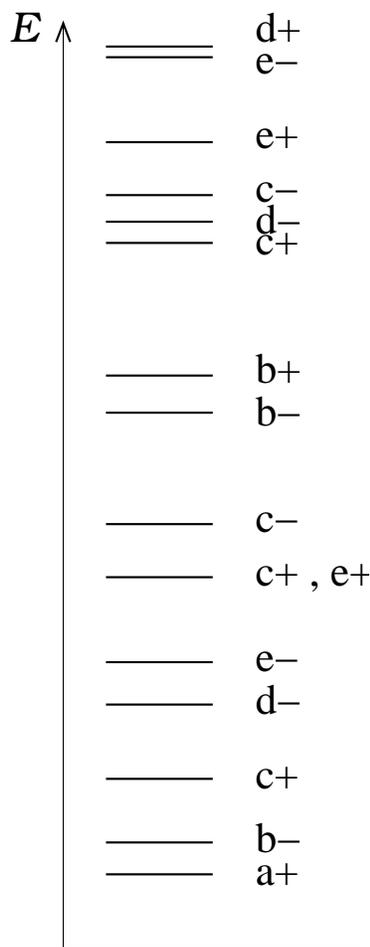
pour tout élément  $g$  de  $\hat{I}$ . Que vaut  $n_{\rho^+} + n_{\rho^-}$  ? Montrer qu'on peut aisément trouver une combinaison de  $f_i$  invariante par  $\hat{I}$ . Qu'en déduit-on sur les valeurs de  $n_{1\pm}$  ? En évaluant la somme (6.5) pour  $g$  égal successivement à  $\sigma$  (cf. B 2), à  $\tau$  (cf. A 2) et au produit de  $\tau$  par une rotation de  $2\pi/5$  autour d'un axe joignant une paire de sommets opposés de l'icosaèdre, montrer qu'on peut trouver un nombre suffisant de contraintes pour déterminer complètement les  $n_{\rho\pm}$ . Vérifier que

$$n_{3-} = n_{\bar{3}-} = n_{4-} = n_{5-} = 2$$

est la solution.

4. Montrer que l'hamiltonien  $H$  est invariant sous l'action de  $\hat{I}$  et que cela implique la commutation de  $h$  (équation (6.4)) avec la matrice de la représentation  $\hat{D}$ . On suppose qu'on a su calculer les éléments de matrice de  $h$  dans une base de  $E$  correspondant à la décomposition de  $\hat{D}$  en représentations irréductibles. Que peut-on dire de ces éléments de matrice de  $h$  ?

Montrer que la théorie des groupes réduit alors la détermination des niveaux de  $h$  à un problème de diagonalisation de petites matrices dont on précisera la taille. Le résultat du calcul est indiqué sur la fig. 6, où les niveaux sont désignés par leur représentation  $\rho\pm$ , les différentes représentations de  $I$  étant notées a, b, c, d, e. Noter que deux niveaux désignés par  $c+$  et  $e+$  sont dégénérés. Au vu des résultats précédents, établir la correspondance entre ces a, b, ... e et les représentations étudiées plus haut et en déduire la multiplicité des niveaux.



**Fig. 3.6**

**C.**

1. On place maintenant les 60 électrons qui nous occupent sur les niveaux d'énergie les plus bas du spectre obtenu au B 4), chaque niveau ayant deux états de spin. Écrire la forme générale de la fonction d'onde de ces électrons. Sous quelle représentation de  $\hat{I}$  se transforme-t-elle ?

2. Le moment électrique dipolaire de la molécule se transforme comme l'opérateur position  $\vec{r}$ . En utilisant le théorème de Wigner-Eckart, montrer qu'il s'annule dans l'état fondamental étudié en D 1).

3. On considère maintenant l'ion  $C_{60}^-$  obtenu en ajoutant un électron sur le premier ou sur le deuxième niveau électronique non occupé du spectre. Que peut-on dire du moment dipolaire ?

### Problème 3 : champ cristallin

Ce problème est consacré au déplacement et à la levée partielle de la dégénérescence des niveaux d'un atome (ou d'un ion) placé dans un cristal et soumis aux anisotropies du champ électrique créé par les ions de ce cristal.

1) Soit  $G$  un groupe,  $H$  un de ses sous-groupes. Montrer que toute représentation  $D$  de  $G$  fournit une représentation de  $H$ . Si  $D$  est irréductible comme représentation de  $G$ , peut-on affirmer qu'elle l'est aussi comme représentation de  $H$ ? Dans la situation qui nous occupe,  $G$  désigne le groupe de symétrie de l'Hamiltonien de l'atome isolé, que vous préciserez,  $H$  celui de l'atome dans le cristal, qu'on va étudier dans la suite. Montrer que les niveaux de l'atome considéré se scindent selon les représentations irréductibles de  $H$ .

2) On suppose six charges identiques  $q$  situées aux points de coordonnées  $(x = \pm a, y = z = 0)$ ,  $(x = 0, y = \pm a, z = 0)$  et  $(x = y = 0, z = \pm a)$  et on considère le potentiel qu'elles créent au point  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Montrer, sans calcul mais par de simples considérations de symétrie, que pour  $r = |\vec{r}| \ll a$ ,

$$V(x, y, z) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left( 6 + \alpha \frac{r^2}{a^2} + \frac{\beta}{a^4} (x^4 + y^4 + z^4 - \gamma r^4) + \dots \right)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes numériques qu'on ne cherchera pas à déterminer. (En fait, l'équation de Laplace satisfaite par  $V$  fixe  $\alpha = 0$  et  $\gamma = \frac{3}{5}$ .)

Pouvez-vous caractériser géométriquement le groupe de symétrie de ce potentiel?

Plus généralement, on considère le potentiel créé par des charges identiques situées aux sommets d'un réseau cubique régulier. (On ne se souciera pas des questions de convergence dans la définition de ce potentiel.) Discuter sans calcul le groupe de symétrie  $H$  de ce potentiel.

3) On considère d'abord les états à un électron de l'atome isolé. On néglige le spin des électrons. Montrer que ces états sont classifiés par leur moment orbital  $\ell$ . Quelle est la dégénérescence des niveaux d'énergie ? Dans la suite du problème on imagine que l'atome est placé sur un nœud du réseau considéré au 2), et soumis au potentiel créé par les autres charges. Montrer que ses niveaux sont maintenant classifiés par des représentations du groupe  $H$ . Pour notre propos, on peut oublier l'inversion d'espace (parité) et ne considérer que le sous-groupe de rotations  $H'$  de  $H$ .

4) Montrer que  $H'$  est d'ordre 24. Il a 5 classes qu'on note  $E$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C'_2$ , d'ordres respectifs 1, 6, 8, 6 et 3; dans cette notation traditionnelle en cristallographie, l'indice  $k$  de la classe  $C_k$  indique qu'il s'agit de rotations de  $\pm \frac{2\pi}{k}$ . Pouvez-vous préciser les axes des rotations de ces différentes classes ? (ce dernier point n'interviendra pas dans la suite).

Combien de représentations irréductibles inéquivalentes ce groupe possède-t-il ? On fournit la table de caractères incomplète suivante, dont vous remplirez les cases vides :  $A_1, A_2, E, T_1$  et  $T_2$  sont des notations conventionnelles en physique moléculaire pour ces représentations; en particulier,  $A_1$  désigne la représentation identité.

$\downarrow$ classes \ rep. $\rightarrow$	$A_1$	$A_2$	$E$	$T_1$	$T_2$
$E$			2	3	3
$C_2$			0	-1	1
$C_3$			-1	0	0
$C_4$			0	1	-1
$C'_2$					

5) Calculer la valeur des caractères des représentations de  $SO(3)$  de moment orbital  $\ell$  pour les différentes classes de  $H'$ . Montrer que la décomposition des représentations de  $SO(3)$  selon les représentations irréductibles de  $H'$  peut être déterminée grâce à ces caractères. Calculer effectivement comment se scindent les représentations de moment  $0 \leq \ell \leq 3$ , c'est-à-dire comment les niveaux de départ se scindent en sous-niveaux. En admettant que pour chaque  $\ell$ , les énergies des sous-niveaux s'ordonnent, le cas échéant, selon  $\mathcal{E}_{A_2} < \mathcal{E}_{T_1} < \mathcal{E}_{T_2} < \mathcal{E}_E$ , dessiner schématiquement la façon dont les niveaux  $0 \leq \ell \leq 3$  se scindent en sous-niveaux, en indiquant à chaque fois la dégénérescence.

**Références** Pour les questions de topologie, consulter Pontryagin, *Topological Groups*, Princeton University Press.

Pour une discussion détaillée du groupe des rotations, ainsi que de nombreuses formules et tables, se reporter à : J.-M. Normand, *A Lie group : Rotations in Quantum Mechanics*, North-Holland.

## Appendice B. Métrique, mesure d'intégration et laplacien sur une variété

Si sur une variété on a défini une métrique  $g$ , c'est-à-dire dans un certain choix de coordonnées  $(x^i)$  un tenseur  $g_{ij}$ , l'élément de longueur carrée est

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j . \quad (\text{B.1})$$

Par changement de coordonnées,  $g_{ij}$  se transforme comme un tenseur covariant

$$x^i \mapsto \tilde{x}^i \Rightarrow g_{ij} \mapsto \tilde{g}_{ij} = \left( \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \right) \left( \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \right) g_{kl} \quad (\text{B.2})$$

de façon à préserver  $ds^2$ . On définit alors

$$g = \det(g_{ij}) \quad (\text{B.3})$$

qui n'est pas invariant par changement de coordonnées et

$$g^{ij} = (g^{-1})_{ij} \quad (\text{B.4})$$

qui se transforme comme un tenseur contravariant, c'est-à-dire avec la puissance inverse du jacobien, soit

$$g^{ij} \mapsto \tilde{g}^{ij} = \left( \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \right) \left( \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \right) g^{kl} . \quad (\text{B.5})$$

On peut alors définir une mesure d'intégration invariante par changement de coordonnées

$$d\mu(x) = \sqrt{g} \prod_i dx^i \quad (\text{B.6})$$

$d\mu(x) = d\mu(\tilde{x})$  et un laplacien  $\Delta$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (\text{B.7})$$

tel que

$$\int d\mu(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} g^{ij} \frac{\partial g(x)}{\partial x^j} \equiv \int d\mu(x) f(x) (-\Delta) g(x) \quad (\text{B.8})$$

soit invariant par changement de coordonnées, pour tout couple de fonctions (de carré intégrable) sur la variété.

*Exemple.* Considérons la sphère  $S^2$  de rayon  $r$  fixé avec les coordonnées sphériques  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  (Figure 1)<sup>12</sup>. On a

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ \sqrt{g} &= r^2 \sin \theta \\ d\mu(x) &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\Delta_{\text{sphère } S^2} = \frac{1}{r^2} \Delta_{\text{sphère unité } S^2} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) .$$

---

<sup>12</sup> Rappelons que dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , le laplacien peut s'écrire

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\text{sphère } S^{n-1}}$$

Bien sûr dans ce cas, les formules sont bien connues et peuvent s'obtenir plus simplement mais la méthode précédente est très générale et puissante. Notons à ce propos que les générateurs  $J_i$  s'écrivent

$$\begin{aligned} J_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} \\ J_1 &= -i \left[ -\cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ J_2 &= -i \left[ -\sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

et on vérifie que  $-r^2 \Delta_{\text{sphère } S^2} = \vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ .

Pour la sphère  $S^3$  on calcule les formules analogues. Dans la paramétrisation (2.10), on prendra par exemple

$$ds^2 = \frac{1}{2} \text{tr} dU dU^\dagger = \left( d\frac{\psi}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\psi}{2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{B.11})$$

invariante par  $U \rightarrow UV$ ,  $U \rightarrow VU$  ou  $U \rightarrow U^{-1}$  d'où la mesure invariante par ces mêmes transformations

$$d\mu(U) = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{\psi}{2} \right)^2 \sin \theta d\psi d\theta d\phi. \quad (\text{B.12})$$

Dans la paramétrisation des angles d'Euler,

$$U = e^{-i\alpha \frac{\sigma_3}{2}} e^{-i\beta \frac{\sigma_2}{2}} e^{-i\gamma \frac{\sigma_3}{2}} \quad (\text{B.13})$$

d'où

$$ds^2 = \frac{1}{2} \text{tr} dU dU^\dagger = \frac{1}{4} (d\alpha^2 + 2d\alpha d\gamma \cos \beta + d\gamma^2 + d\beta^2) \quad (\text{B.14})$$

et avec  $\sqrt{g} = \sin \beta$  on calcule

$$d\mu(U) = \frac{1}{8} \sin \beta d\alpha d\beta d\gamma \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta_{\text{sphère } S^3} = \frac{4}{\sin^2 \beta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right] + \frac{4}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \sin \beta \frac{\partial}{\partial \sin \beta}. \quad (\text{B.16})$$

# CHAPITRE 4

## REPRÉSENTATIONS DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Ce chapitre est consacré à l'étude des représentations du groupe  $S_n$  des permutations de  $n$  objets. La justification de cette étude est d'une part qu'elle constitue un résultat central de la théorie des groupes, par l'importance du rôle joué par le groupe  $S_n$  lui-même et par celle de ses représentations, y compris dans la construction de représentations de groupes continus. Par ailleurs, l'approche suivie illustre bien les méthodes utilisées dans l'étude de groupes finis. Enfin, les problèmes de Mécanique Quantique impliquant des particules identiques amènent à s'intéresser au groupe symétrique.

On a déjà rencontré quelques représentations du groupe  $S_n$ , en particulier les deux représentations de dimension 1 que sont la représentation identité et la parité. Il nous appartient de construire maintenant les autres représentations irréductibles.

### 1. Tableaux d'Young. Algèbre du groupe et idempotents

#### 1.1. Tableaux d'Young

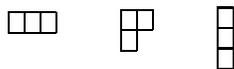
Un tableau d'Young est un tableau formé de  $n$  cases disposées en lignes de longueur non croissante :  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r$ ,  $\sum f_i = n$ . Voici par exemple un tableau pour  $n = 8$ , ayant  $f_1 = 4, f_2 = 2, f_3 = 2$



Il est clair qu'il y a autant de tableaux distincts à  $n$  cases qu'il y a de partitions de  $n$ . Soit  $p(n)$  ce nombre, une fonction génératrice des  $p(n)$  est donnée par le produit d'Euler  $1/\prod_{p=1}^{\infty}(1-x^p) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$ . On a déjà vu au chap. 1 que ce même nombre  $p(n)$  fournit le nombre de classes du groupe  $S_n$ . Comme on sait que le nombre de représentations irréductibles est égal au nombre des classes (fin de la sect. 4.1 du chap. 2), le théorème suivant qui est le résultat central de ce chapitre n'est pas invraisemblable :

**Théorème :** *Les représentations irréductibles de  $S_n$  sont en correspondance avec les  $p(n)$  tableaux d'Young à  $n$  boîtes.*

Par exemple, dans le cas  $n = 3$ , les trois représentations que nous avons déjà rencontrées correspondent aux tableaux suivants :



Pour démontrer ce théorème, nous devons introduire quelques concepts algébriques nouveaux.

## 1.2. Algèbre du groupe, idéaux et idempotents

Pour un groupe  $G$  fini, on peut définir l'algèbre du groupe  $\tilde{G}$  comme l'ensemble des combinaisons linéaires formelles à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On peut additionner, multiplier par un scalaire ou multiplier entre elles (par la loi de groupe et la linéarité) ces combinaisons, ce qui fait de cet ensemble une algèbre (au sens rappelé plus haut chap. 2, sect. 4.2). Une réalisation plus explicite de cette algèbre est fournie par la représentation régulière qui décrit l'action du groupe sur les fonctions sur le groupe. Dans cette représentation l'action d'un élément  $g'$  du groupe sur la fonction  $f_g$  (cf. chap. 2 (3.5)) n'est autre que :  $g'f_g = f_{g'.g} = (g'.g)f_e$ . On peut donc identifier  $g$  et  $f_g$  ce qui définit une loi de multiplication sur les  $f_g$

$$f_{g'}.f_g \equiv g'f_g = f_{g'.g} \quad (1.1)$$

et par bilinéarité, sur leurs combinaisons linéaires. Ces combinaisons qui formaient un espace vectoriel, sont donc maintenant dotées de la structure supplémentaire d'algèbre, et la représentation régulière s'interprète comme la multiplication dans cette algèbre  $\tilde{G}$ . La puissance des raisonnements basés sur cette algèbre du groupe tient à cette double interprétation de ses éléments comme vecteurs ou comme opérateurs sur l'algèbre.

L'espace de la représentation régulière se décompose en sous-espaces invariants correspondant aux représentations irréductibles :  $\tilde{G} = \oplus \mathcal{J}_\rho$ . Chacun de ces sous-espaces  $\mathcal{J}_\rho$  est stable par multiplication (à gauche) au sens précédent, c'est donc un *idéal à gauche*. En outre la propriété d'irréductibilité se traduit par le fait que l'idéal est minimal, c'est-à-dire qu'il ne contient pas d'idéal plus petit.

Supposons qu'on ait écrit  $\tilde{G} = \oplus \mathcal{J}_\rho$ , où les  $\mathcal{J}_\rho$  sont des idéaux minimaux. Tout élément  $x$  de  $\tilde{G}$  a une décomposition unique

$$x = \sum x_\rho \quad \text{avec } x_\rho \in \mathcal{J}_\rho, \quad (1.2)$$

et en particulier l'identité  $e \in \tilde{G}$  s'écrit

$$e = \sum j_\rho. \quad (1.3)$$

On a alors pour tout  $x \in \tilde{G}$

$$x = xe = \sum xj_\rho \quad (1.4)$$

avec  $xj_\rho \in \mathcal{J}_\rho$  puisque  $j \in \mathcal{J}_\rho$ , idéal à gauche. Par l'unicité de la décomposition (1.2)

$$x_\rho = xj_\rho. \quad (1.5)$$

En particulier pour  $j_\rho$  lui-même

$$j_\rho = ej_\rho = j_\rho e = j_\rho \sum j_\sigma = j_\rho^2 + \sum_{\sigma \neq \rho} j_\rho j_\sigma \quad (1.6)$$

d'où par l'unicité à nouveau

$$j_\rho j_\sigma = \delta_{\rho\sigma} j_\rho. \quad (1.7)$$

On appelle *idempotent* un élément  $j$  de l'algèbre satisfaisant à

$$j^2 = j \quad (1.8)$$

c'est-à-dire (en tant qu'opérateur) à une relation de projecteur. Pour tout idempotent  $j$ , il existe un idéal à gauche  $\mathcal{J}$  et la multiplication à droite par  $j$  projette sur  $\mathcal{J}$ . En effet, l'idéal  $\mathcal{J}$  est défini comme l'ensemble des  $x.j$ ,  $x \in \tilde{G}$  et on vérifie aisément la propriété énoncée :  $x.j = x \Rightarrow x \in \mathcal{J}$  et  $x \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists y : x = y.j; x.j = y.j^2 = x$ . On vient de montrer qu'inversement, la décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles c'est-à-dire en idéaux minimaux permet de définir un ensemble d'idempotents  $j_\rho$  orthogonaux au sens de (1.7). Dans notre recherche des représentations irréductibles, nous allons donc être conduits à rechercher les idempotents minimaux (ou "primitifs"), c'est-à-dire qui engendrent un idéal minimal. Dans la suite nous allons faire un usage répété d'un lemme : **(i)** un idempotent  $j$  est minimal si et seulement si pour tout  $x \in \tilde{G}$ , on a  $jxj = \lambda_x j$  où  $\lambda_x$  est un scalaire, et **(ii)** deux idempotents minimaux  $j_1$  et  $j_2$  engendrent des représentations équivalentes si et seulement s'il existe  $x \in \tilde{G}$  tel que  $j_1 x j_2 \neq 0$ .

*Preuve* : (i) Supposons que pour tout  $x$  on ait  $j.x.j = \lambda_x j$  et que  $j$  soit non minimal : son idéal  $\mathcal{J}$  est une représentation réductible, donc complètement réductible,  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \oplus \mathcal{J}_2$ , donc  $j$  peut s'écrire  $j = j_1 + j_2$  avec  $j_a.j_b = \delta_{ab}j_a$ . On aurait alors

$$\lambda j = j.j_1.j = j_1 \quad (1.9)$$

ce qui implique soit  $j_1 = 0$  soit  $j_2 = 0$ . Réciproquement, si l'idéal engendré par  $j$  est minimal,  $\mathcal{J}$  est une représentation irréductible de  $\tilde{G}$  et pour tout  $x \in \tilde{G}$ , l'opérateur  $X$  défini par  $X(g) = g.j.x.j \in \mathcal{J}$  commute avec la représentation (puisque cette dernière multiplie à gauche tandis que  $X$  multiplie à droite) donc par le lemme de Schur,  $X$  est un multiple de l'opérateur identité dans  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire  $X = \lambda j$ . La démonstration du point (ii) suit la même ligne. S'il existe un  $x$  tel que  $y = j_1.x.j_2 \neq 0$ , la multiplication à droite par  $y$  réalise une application linéaire de  $\mathcal{J}_1$  dans  $\mathcal{J}_2$  et commute avec la représentation pour la même raison que précédemment. Agissant dans  $\mathcal{J}_1$ ,  $y$  est donc un entrelaceur entre les représentations  $D_1$  et  $D_2$  dans  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$  donc par le lemme de Schur, ces représentations sont équivalentes. Réciproquement, si les représentations sont équivalentes, il existe un  $Y$  de  $\mathcal{J}_1$  dans  $\mathcal{J}_2$  tel que  $YD_1 = D_2Y$  c'est-à-dire commutant sur  $\mathcal{J}_1$  avec tout  $x \in \tilde{G}$ . Soit alors  $y \equiv Yj_1 \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ . Il satisfait  $y = Yj_1 = (Yj_1)j_1 = (j_1Y)j_1$  (par la propriété de commutation)  $= j_1.y$ . Par ailleurs,  $y \in \mathcal{J}_2$  donc  $y.j_2 = y$  donc  $y = j_1.y = j_1.y.j_2$  c.q.f.d.

### 1.3. Idempotent associé à un tableau d'Young

Les considérations de l'alinéa précédent étaient tout à fait générales. Revenons au cas du groupe  $S_n$  et montrons qu'on peut associer un idempotent minimal à chaque tableau d'Young. Si on sait montrer que les représentations correspondantes sont inéquivalentes et puisqu'on sait qu'elles sont en nombre adéquat, on aura bien construit toutes les représentations cherchées.

Dans l'algèbre du groupe  $S_n$ , on considère d'abord les deux combinaisons linéaires, appelées respectivement symétriseur et antisymétriseur

$$s = \sum_{\sigma} \sigma \quad (1.10a)$$

$$a = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \sigma \quad (1.10b)$$

On vérifie aisément que pour tout  $\tau \in S_n$ ,  $s.\tau = \tau.s = s$  et  $a.\tau = \tau.a = \epsilon_\tau a$ . Par conséquent  $s.s = n!s$ ,  $a.a = n!a$ , et  $s.\tau.s = n!s$ ,  $a.\tau.a = \epsilon_\tau n!a$ ,  $s.\tau.a = 0$ . D'après la proposition de l'alinéa précédent, les idempotents  $s/n!$  et  $a/n!$  engendrent des représentations irréductibles inéquivalentes : ce sont bien sûr les deux représentations unidimensionnelles que nous avons déjà identifiées.

Considérons maintenant un tableau d'Young  $Y$  de lignes de longueur  $f_1, f_2, \dots, f_r$ , et disposons dans les lignes successives les nombres  $1, \dots, f_1$ , puis  $f_1 + 1, \dots, f_1 + f_2$ , etc... (tableau dit "normal")

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{\dots} & \boxed{f_1} \\
 \boxed{f_1+1} & \boxed{\dots} & \boxed{f_1+f_2} & \\
 \vdots & & \vdots & \\
 \boxed{\phantom{1}} & \boxed{n} & & 
 \end{array} \tag{1.11}$$

Nous considérons alors le sous-groupe  $H$  de  $S_n$  des permutations qui mélangent entre eux les chiffres de la première ligne, entre eux ceux de la deuxième ligne, etc; de même  $V$  désigne le sous-groupe des transformations qui mélangent les chiffres à l'intérieur des colonnes. Définissons alors le symétriseur et l'antisymétriseur attachés au tableau d'Young  $Y$  par

$$\begin{aligned}
 s_Y &= \sum_{h \in H} h \\
 a_Y &= \sum_{v \in V} \epsilon_v v .
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ces éléments de  $\tilde{G}$  sont des idempotents, à une normalisation près, comme on le vérifie:  $s_Y.s_Y = \mathcal{N}_Y s_Y$ ,  $a_Y.a_Y = \tilde{\mathcal{N}}_Y a_Y$ , où  $\mathcal{N}_Y = f_1!f_2! \dots$  (que vaut  $\tilde{\mathcal{N}}_Y$ ?). Ce ne sont cependant en général pas des idempotents minimaux. En revanche on va montrer que le produit

$$j_Y = a_Y.s_Y = \sum_{\substack{h \in H \\ v \in V}} \epsilon_v v.h \tag{1.13}$$

est un idempotent minimal (à une normalisation près). Avant de donner la preuve générale, illustrons la propriété sur un cas explicite.

*Exemple*

Considérons le groupe  $n = 3$  et le tableau

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} . \tag{1.14}$$

Les groupes  $H$  et  $V$  qu'on vient de définir se composent respectivement de  $\{e = (123), (213)\}$  et de  $\{e, (321)\}$ . On a donc  $s_Y = e + (213)$  et  $a_Y = e - (321)$ ,  $j_Y =$

$e + (213) - (321) - (312)$  et on calcule

$$\begin{aligned} e.j_Y &= (213).j_Y = j_Y , \\ (132).j_Y &= (312).j_Y = (132) + (312) - (231) - (213) \equiv g , \\ (321).j_Y &= (231).j_Y = -(123) - (132) + (231) + (321) = -j_Y - g . \end{aligned} \quad (1.15)$$

On en déduit que  $j_Y.j_Y = 3j_Y$ . Au facteur 3 près,  $j_Y$  est idempotent et l'idéal est engendré par  $j_Y$  et  $g$  : c'est bien la représentation de dimension 2 attendue. On construit facilement les matrices de la représentation dans la base  $j_Y, g$  (qui n'est pas unitaire!) : voir exercice 1.

Cette représentation agit sur des fonctions de trois variables  $f(x_1, x_2, x_3)$  à la manière de la représentation régulière

$$(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$$

Donc

$$\begin{aligned} (j_Y f)(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_1, x_3) - f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_3, x_1) \\ (gf)(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_3, x_2) + f(x_2, x_3, x_1) - f(x_3, x_1, x_2) - f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

forment deux combinaisons linéaires mélangées par les opérations de  $S_3$  selon (1.15).

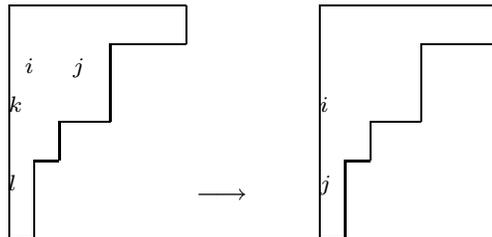
Si on distribue de façon arbitraire les nombres  $1, \dots, n$  dans les boîtes d'un tableau, il est clair que l'action des groupes  $H$  puis  $V$  permet toujours de se ramener à la situation dite "standard" où les nombres sont croissants dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas. Voici par exemple une configuration standard pour le tableau  $\{2, 1\}$

$$Y' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} . \quad (1.16)$$

On peut à nouveau définir les groupes  $H$  et  $V$  pour un tel tableau  $Y'$ , les idempotents  $s$ ,  $a$  et  $j_{Y'}$ . On vérifie dans l'exemple précédent que la représentation irréductible associée à  $j_{Y'}$  est équivalente à celle attachée au tableau "normal". Dans le même ordre d'idées, si on avait défini  $\tilde{j}_Y = s_Y.a_Y$ , on aurait construit une représentation équivalente à celle basée sur  $j_Y$ . Il n'y a donc rien de canonique à symétriser d'abord, puis à antisymétriser.

Venons-en à la démonstration de la proposition précédente. Elle se fait en plusieurs étapes.

(i) On va utiliser la propriété suivante : si une permutation  $r$  de  $S_n$  n'est pas de la forme  $v.h$ ,  $v \in V$ ,  $h \in H$ , deux chiffres  $i$  et  $j$  d'une même ligne de  $Y$  se retrouvent après action de  $r$  dans la même colonne, aux positions  $k$  et  $l$ .



(voir exercice 2). On a donc  $\sigma_{kl}.r.\sigma_{ij} = r$  où  $\sigma_{ij}$  et  $\sigma_{kl}$  sont les transpositions des chiffres indiqués en indices, ou encore

$$r = v.r.h, \quad h \in H, \quad v \in V, \quad \epsilon_v = -1. \quad (1.17)$$

(ii) Si un élément  $y$  de l'algèbre est tel que pour tout  $h \in H$  et pour tout  $v \in V$  on a

$$\begin{aligned} y.h &= y \\ v.y &= \epsilon_v y \end{aligned} \quad (1.18)$$

alors  $y$  est un multiple de  $j$  :  $y = \mu j$ .

*Preuve* : Tout élément  $y$  de l'algèbre se décompose sur la base des éléments  $r$  de  $S_n$  :

$$y = \sum_{r \in S_n} y_r r, \quad y_r \in \mathbb{C} \quad (1.19)$$

et (1.18) implique que pour tout  $h \in H$ , tout  $v \in V$ , et tout  $r \in S_n$

$$y_r h = y_r, \quad y_{vr} = \epsilon_v y_r \quad (1.20)$$

et donc

$$y_h = y_e, \quad y_v = y_{vh} = \epsilon_v y_e. \quad (1.21)$$

Ceci détermine  $y_r$  pour tout  $r$  de la forme  $v.h$ . Pour les autres, on utilise la propriété énoncée en (1.17)

$$y_r = \epsilon_v y_r = -y_r = 0. \quad (1.22)$$

Le lemme est donc établi avec  $\mu = y_e$ .

(iii) Il est aisé de voir que quel que soit  $x$ ,  $y = j.x.j$  satisfait (1.18). On a donc  $j.x.j = \mu_x j$ , et en particulier

$$j^2 = \mu_e j \quad (1.23)$$

En outre on peut montrer et nous admettrons que  $\mu_e \neq 0$ ,  $j/\mu_e$  est donc idempotent, et minimal par le lemme de la section 1.2.

(iv) Si  $Y$  et  $Y'$  sont deux tableaux standards correspondant au même tableau normal, il leur correspond deux représentations équivalentes.

*Preuve* : On considère deux tableaux obtenus l'un à partir de l'autre par une permutation  $p$ . On a donc  $j' = p.j.p^{-1}$  donc  $j'.p.j = p.j.p^{-1}.p.j = p.j^2 = \mu p.j \neq 0$ . Par le point (ii) du lemme de la section 1.2, on en conclut que les deux représentations sont équivalentes.

(v) A deux tableaux (normaux) différents correspondent deux représentations irréductibles inéquivalentes.

*Preuve* : soient deux tableaux différents  $Y$  et  $Y'$ ,  $j$  et  $j'$  leurs idempotents respectifs. Pour tout  $x \in G$ , on note  $Y'^{(x)}$  le transformé du tableau  $Y'$  par l'action de  $x$ ; on a alors

$$j.x.j' = j.(x.j'.x^{-1}).x = j.j'^{(x)}.x = a_Y.s_Y.a_{Y'^{(x)}}.s_{Y'^{(x)}}.x. \quad (1.24)$$

Comme au point (i), on montre qu'il existe au moins une paire de chiffres  $i, j$  qui se trouvent dans une même ligne de  $Y$  et une même colonne de  $Y^{(x)}$ . Si  $\sigma_{ij}$  est la transposition de  $i$  et  $j$ ,  $s_Y \cdot \sigma_{ij} = s_Y$  et  $\sigma_{ij} \cdot a_{Y^{(x)}} = -a_{Y^{(x)}}$  donc

$$s_Y \cdot a_{Y^{(x)}} = s_Y \cdot \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij} \cdot a_{Y^{(x)}} = -s_Y \cdot a_{Y^{(x)}} = 0 .$$

Par le lemme de la section 1.2, les deux représentations sont inéquivalentes.

Comme on l'a noté plus haut, le décompte des tableaux d'Young suffit alors à établir qu'on a le nombre voulu de représentations de  $S_n$  et donc le Théorème énoncé au début de cette section.

On montre aussi, et nous admettrons, que la décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles s'effectue à l'aide des tableaux standards : ramenée à des représentations irréductibles inéquivalentes, elle fait apparaître des multiplicités, égales (cf. chap. 2, sect. 4) à la dimension de la représentation considérée. Dans notre exemple de  $n = 3$

$$D^{(\text{reg})} = D_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} \oplus D_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} \oplus D_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} \oplus D_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} . \quad (1.25)$$

## 2. Miscellanées

Il peut être utile de connaître la dimension de la représentation irréductible associée à un tableau d'Young  $Y$  à  $k$  lignes. En principe la méthode de décomposition de la représentation régulière de la section précédente permet de ramener le problème au décompte des tableaux standards obtenus à partir d'un tableau normal. Une formule assez simple donne le résultat. On définit les nombres  $\ell_i = f_i + k - i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Ils forment une suite strictement décroissante :  $\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_k$ . Alors

$$n_Y = \frac{n!}{\prod_i \ell_i!} \prod_{i < j} (\ell_i - \ell_j) \quad (2.1)$$

où le produit du numérateur vaut 1 s'il n'y a qu'une seule ligne. Une autre manière commode d'utiliser cette formule est de la reformuler par la règle suivante : à chaque case du tableau d'Young, on calcule le nombre de boîtes placées au-dessous ou à droite, y compris la boîte elle-même. Par exemple, pour le tableau  $Y = \{3, 1^2\}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

où on a indiqué le nombre en question à l'intérieur de chaque boîte. La règle est que la dimension est donnée par  $n!$  divisé par le produit de ces nombres pour toutes les boîtes. Ainsi dans l'exemple,

$$n_Y = \frac{5!}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 6 .$$

Cette règle met plus en évidence que la formule (2.1) le fait que des tableaux symétriques par rapport à la diagonale donnent des représentations "duales" de dimensions égales.

Il n'existe pas d'expression générale et compacte des caractères de  $S_n$ .

Il existe toutefois une formule remarquable de Frobenius donnant une manière systématique de les engendrer. Soient  $N$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . On construit l'ensemble des polynômes symétriques de ces variables. Ils sont engendrés par les produits de

$$t_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^N x_i^k \quad (2.2)$$

En particulier, les polynômes symétriques homogènes de degré  $n$  sont des combinaisons linéaires des

$$t_{\underline{\nu}} = \frac{t_1^{\nu_1}}{\nu_1!} \dots \frac{t_n^{\nu_n}}{\nu_n!} \quad (2.3)$$

où  $\underline{\nu}$  code une partition  $\{1^{\nu_1}, 2^{\nu_2} \dots n^{\nu_n}\}$  de  $n$ . Par ailleurs, on construit le rapport de déterminants attaché au tableau  $Y$

$$X_Y = \frac{\det \left( x_i^{f_j + N - j} \right)}{\det \left( x_i^{N - j} \right)} \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

On note que le dénominateur n'est autre que le déterminant de Vandermonde défini au chap. 1 sect. 7. Comme numérateur et dénominateur sont des polynômes complètement antisymétriques des  $x_i$ , leur rapport est complètement symétrique, et comme les pôles en  $x_i = x_j$  disparaissent dans le rapport, c'est un polynôme homogène de degré  $n$  (= nombre de boîtes du tableau) qui peut donc se développer sur les  $t_{\underline{\nu}}$  de (2.3). Le théorème de Frobenius nous dit que ce développement engendre les caractères de  $S_n$  :

$$X_Y(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\underline{\nu} \text{ partitions de } n} \chi_Y(\underline{\nu}) t_{\underline{\nu}}. \quad (2.5)$$

Pour notre exemple favori du tableau (1.14), on a ainsi

$$\begin{aligned} X_Y &= \frac{\det \left( x^{N+1}, x^{N-1}, x^{N-3}, x^{N-4}, \dots \right)}{\det \left( x^{N-1}, x^{N-2}, \dots \right)} \\ &= \frac{1}{3} \left( \left( \sum x_i \right)^3 - \sum x_i^3 \right), \\ &= 2.t_{\{1^3\}} + 0.t_{\{1^2\}} - 1.t_{\{3\}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

où seule une ligne typique du déterminant a été indiquée.

On introduit alors un autre système de fonctions symétriques

$$p_r = \sum_{\underline{\rho} \text{ partitions de } r} t_{\underline{\rho}}. \quad (2.7)$$

Soit  $Y$  un tableau d'Young à  $k$  lignes. On montre que les fonctions  $X_Y$  s'expriment simplement comme un déterminant des  $p_r$  (cf. Appendice)

$$X_Y = \det \begin{pmatrix} p_{f_1} & p_{f_1+1} & \dots & p_{f_1+k-1} \\ \swarrow & \ddots & \nearrow & \\ p_{f_k-k+1} & p_{f_k-k+2} & \dots & p_{f_k} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

où les flèches signifient que le long de chaque ligne, l'indice du  $p$  croît à partir de la diagonale d'une unité vers la droite et qu'il décroît dans l'autre direction. On convient que  $p_0 = 1$  et  $p_r = 0$  si  $r < 0$ . Par exemple pour le tableau  $Y$  de (1.14),

$$X_Y = \det \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \\ 1 & p_1 \end{pmatrix}.$$

Il est alors simple d'identifier les coefficients des  $t_{\underline{\nu}}$  dans les deux membres de (2.5) et d'en tirer une formule (assez compliquée!) pour les caractères de  $S_n$

$$\chi_Y(\underline{\nu}) = \sum_{\substack{P \\ \text{permutations de } S_k}} \epsilon_P \sum_{\substack{\rho_i \text{ partition de} \\ f_i + P_i - i = \rho_{i,1} \cdot 1 + \rho_{i,2} \cdot 2 + \dots}} \prod_j \left( \frac{(\sum_i \rho_{i,j})!}{\prod_i \rho_{i,j}!} \delta_{\nu_j, \sum \rho_{i,j}} \right) \quad (2.9)$$

La méthode est très puissante et permet d'obtenir des résultats généraux sur les caractères (voir par exemple exercice 3). Un corollaire trivial est que tous les caractères de  $S_n$  prennent des valeurs entières. En fait, cette formule exprime une relation très profonde avec les caractères de  $GL(N)$ . Voir plus bas sect. 3

• Les caractères ont été tabulés pour des valeurs successives de  $n \leq 8$ . On se reportera à la littérature, en particulier à Murnaghan ou Hamermesh, pour ces tables. Je donne ci-dessous la table de  $S_4$ .

↓ classes \ rep. →	{4}	{3, 1}	{2 <sup>2</sup> }	{2, 1 <sup>2</sup> }	{1 <sup>4</sup> }	
[1 <sup>4</sup> ] <sup>+</sup>	1	3	2	3	1	1
[1 <sup>2</sup> , 2] <sup>-</sup>	1	1	0	-1	-1	6
[1, 3] <sup>+</sup>	1	0	-1	0	1	8
[4] <sup>-</sup>	1	-1	0	1	-1	6
[2 <sup>2</sup> ] <sup>+</sup>	1	-1	2	-1	1	3

Les tableaux d'Young relatifs à  $n = 4$  ont été indexés par la partition correspondante, selon une notation déjà utilisée. Dans la dernière colonne, extérieure à la table proprement dite, on a porté les nombres d'éléments de chaque classe. La parité de la classe est aussi indiquée par un indice  $\pm$  (cette parité est égale à  $(-1)^{\text{puissance le nombre de cycles} + n}$ ).

On observe sur la table relative à  $S_4$  et on démontre en général que les caractères des représentations duales (tableaux symétriques par rapport à la diagonale, par exemple {3, 1} et {2, 1<sup>2</sup>}) prennent la même valeur pour les classes paires, des valeurs opposées pour les classes impaires.

• De façon générale, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , toute représentation irréductible de  $G$  fournit une représentation de  $H$ , qui *a priori* peut être réductible. Dans le cas de  $S_n$ , la décomposition d'une représentation de  $S_n$  en représentations irréductibles de  $S_{n-1}$  s'effectue simplement. La représentation de  $S_n$  associée au tableau  $Y$  se décompose en la somme directe (avec multiplicité 1) des représentations de  $S_{n-1}$  associées à tous les tableaux qu'on obtient en ôtant une boîte à  $Y$ . Noter que la définition d'un tableau d'Young interdit de nombreuses possibilités. Ainsi, dans le tableau

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

seules les deux boîtes en haut et en bas à droite peuvent être ôtées si bien que la décomposition en représentations de  $S_6$  s'écrit

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

• Il existe aussi des règles précises pour la décomposition en représentations irréductibles du produit direct de deux représentations de  $S_n$ . Les coefficients de Clebsch-Gordan des représentations de  $S_n$  se calculent aussi de façon très explicite. Le lecteur peut se reporter à Hamermesh. Nous nous bornerons ici à mentionner des propriétés simples. Soit  $Y$  un tableau d'Young,  $D_Y$  la représentation irréductible associée. Quelles sont les tableaux  $Y'$  tels que  $D_Y \otimes D_{Y'}$  contienne la représentation identité? Des relations d'orthogonalité entre caractères, il découle que le seul  $Y'$  est  $Y$  lui-même. De même le seul  $Y'$  tel que  $D_Y \otimes D_{Y'}$  contienne la représentation complètement antisymétrique est  $Y' = \tilde{Y}$ , le tableau dual, symétrique de  $Y$  par rapport à la diagonale.

### 3. Application au groupe linéaire

Le formalisme précédent permet de construire des représentations irréductibles du groupe linéaire  $GL(N)$  des matrices  $N \times N$  inversibles. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $N$ . Le groupe  $GL(N)$  est naturellement représenté dans  $V$

$$g \in GL(N), \quad x \in V \mapsto x' = g.x . \quad (3.1)$$

Formons la puissance tensorielle  $n$ -ième de  $V$  :  $W = V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$ . Dans  $W$ , le groupe  $GL(N)$  agit par une représentation, la puissance tensorielle  $n$ -ième de (3.1)

$$g \in GL(N), \quad D(g)x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n)} = g.x^{(1)} \otimes \cdots \otimes g.x^{(n)} \quad (3.2)$$

qui est en général réductible. Mais dans  $W$ , agit aussi le groupe symétrique  $S_n$  selon

$$\sigma \in S_n, \quad D(\sigma)x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n)} = x^{(\sigma^{-1}1)} \otimes \cdots \otimes x^{(\sigma^{-1}n)} . \quad (3.3)$$

Nous allons montrer que les techniques précédentes basées sur les tableaux d'Young permettent de réduire en représentations irréductibles les représentations de  $GL(N)$ .

Faisons le choix d'une base  $e_i$  dans  $V$ , et notons  $g_{ij}$  les éléments de matrice de  $g \in GL(N)$  dans cette base. La représentation de  $GL(N)$  dans  $W$  a pour matrice

$$\mathcal{D}(g)_{\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_n\}} = \prod_{k=1}^n g_{i_k, j_k} \quad (3.4)$$

et celle de  $S_n$

$$\mathcal{D}(\sigma)_{\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_n\}} = \prod_{k=1}^n \delta_{i_{\sigma k}, j_k} . \quad (3.5)$$

(Pour la simplicité, nous désignons par la même notation les deux familles de matrices, relatives aux représentations de  $GL(N)$  et de  $S_n$ .) Un tenseur  $t$ , élément de  $W$ , a dans cette base des composantes  $t_i$  et se transforme sous l'action de  $g \in GL(N)$  ou de  $\sigma \in S_n$  en un tenseur  $t'$  de composantes  $t'_i = \mathcal{D}_{i..j} t_j$ . Ces deux ensembles de matrices commutent

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(g)_{\{i.\}, \{j.\}} \mathcal{D}(\sigma)_{\{j.\}, \{k.\}} &= \prod_l g_{i_l j_l} \delta_{j_l, k_{\sigma^{-1}l}} = \prod_l g_{i_{\sigma l} k_l} \\ &= \mathcal{D}(\sigma)_{\{i.\}, \{j.\}} \mathcal{D}(g)_{\{j.\}, \{k.\}} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nous savons qu'à chaque tableau d'Young  $Y$  on peut associer une représentation irréductible de  $S_n$ . On appelle tenseur de type de symétrie  $Y$  un tenseur se transformant selon cette représentation. Etant donné un tenseur  $t$  quelconque,  $D(j_Y)t$  est un tenseur de type  $Y$  si  $j_Y$  est l'idempotent associé à  $Y$  et défini en (1.13). La commutation des matrices  $\mathcal{D}(g)$  et  $\mathcal{D}(\sigma)$  garantit alors que les tenseurs de type  $Y$  forment un sous-espace invariant pour l'action de  $GL(N)$ .

Exemple. Considérons les cas de  $n = 2$  et  $n = 3$ . Dans le premier cas, les tenseurs de rang 2 peuvent se décomposer en leurs parties symétrique et antisymétrique qui se transforment indépendamment sous l'action de  $GL(N)$

$$t_{i_1, i_2} = \frac{1}{2} (t_{i_1, i_2} + t_{i_2, i_1}) + \frac{1}{2} (t_{i_1, i_2} - t_{i_2, i_1}) .$$

Cette décomposition correspond bien sûr aux deux tableaux d'Young à 2 boîtes. Pour le rang 3, on écrit de même les tenseurs associés aux 4 tableaux d'Young standards

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & A = t_{i_1, i_2, i_3} + t_{i_2, i_3, i_1} + t_{i_3, i_1, i_2} + t_{i_2, i_1, i_3} + t_{i_3, i_2, i_1} + t_{i_1, i_3, i_2} \\ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & B = t_{i_1, i_2, i_3} + t_{i_2, i_3, i_1} + t_{i_3, i_1, i_2} - t_{i_2, i_1, i_3} - t_{i_3, i_2, i_1} - t_{i_1, i_3, i_2} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & C_1 = t_{i_1, i_2, i_3} - t_{i_2, i_3, i_1} + t_{i_2, i_1, i_3} - t_{i_3, i_2, i_1} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} & D_1 = t_{i_1, i_2, i_3} - t_{i_2, i_1, i_3} + t_{i_3, i_2, i_1} - t_{i_3, i_1, i_2} \end{aligned}$$

où pour alléger les notations, on n'a pas fait figurer les indices  $i_1, i_2, i_3$  sur  $A, \dots, D_1$ . Tout tenseur se décompose sur cette base :

$$6t_{i_1, i_2, i_3} = A + B + 2(C_1 + D_1) .$$

Les indices 1 sur  $C$  et  $D$  rappellent que sous l'action du groupe  $S_3$ , ces objets se mélangent avec une autre combinaison  $C_2$  (resp.  $D_2$ ) des  $t_{i, j, k}$  en des représentations de dimension 2. Au contraire, l'action du groupe  $GL(N)$  mélange entre elles les différentes composantes du tenseur  $A$ , celles du tenseur  $B$ , etc. Les tenseurs  $C_1$  et  $D_1$  se transforment selon des représentations équivalentes.

Tous les tableaux d'Young, cependant, ne contribuent pas pour  $N$  donné. Il est clair qu'un tableau à  $q > N$  lignes implique une antisymétrisation de  $q$  indices prenant leurs valeurs dans  $\{1, \dots, N\}$  et donne donc un résultat nul. Par contre il est aisé de voir que tout tableau à  $q \leq N$  lignes donne lieu à une représentation. On démontre, et nous admettrons, que cette représentation de  $GL(N)$  est irréductible. Il est important de connaître la dimension de ces représentations de  $GL(N)$ . On démontre la formule suivante

$$\dim_Y^{(N)} = \frac{\Delta(f_1 + N - 1, f_2 + N - 2, \dots, f_N)}{\Delta(N - 1, N - 2, \dots, 0)} \quad (3.7)$$

où  $\Delta(a_1, a_2, \dots, a_N) = \prod_{i < j} (a_i - a_j)$  est le déterminant de Vandermonde et les  $f_i$  désignent les longueurs des lignes du tableau  $Y$ . C'est un polynôme de degré  $n = \sum f_i$  en  $N$ .

Dans le cas d'un tableau à une ligne, la formule résulte d'un argument combinatoire simple. La dimension est égale au nombre de composantes du tenseur complètement symétrique  $t_{i_1, \dots, i_n}$  où on peut supposer  $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \leq N$ . Il s'agit de disposer de toutes les façons possibles  $N - 1$  signes  $<$  parmi les  $n$  indices  $i_1, \dots, i_n$  pour marquer les blocs successifs de  $1, 2, \dots, N$ . La dimension cherchée est donc le coefficient binomial  $C_{N+n-1}^n$ , en accord dans ce cas particulier avec (3.7).

Dans l'exemple précédent avec  $n = 3$ , les deux derniers tenseurs  $C_1$  et  $D_1$  se transforment selon des représentations équivalentes. On dit donc que  $V^{\otimes 3}$  se décompose en

$$\square\square\square + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

où la troisième apparaît avec la multiplicité deux. En général, la multiplicité dans  $V^{\otimes n}$  d'une représentation de  $GL(N)$  indexée par un tableau d'Young est égale à la dimension de la représentation correspondante de  $S_n$ . On vérifie que la somme des dimensions (3.7) multipliées par ces multiplicités (2.1) égale  $N^n$ , dimension de  $V^{\otimes n}$  (exercice 5).

Cette remarquable relation entre les représentations de  $S_n$  et de  $GL(N)$  est due à H. Weyl et appelée dualité de Weyl. En fait les formules présentées plus haut (2.5)-(2.8) ne sont autres que les caractères du groupe  $GL(N)$  pour une matrice  $g$  diagonale de valeurs propres  $x_1, \dots, x_N$  et pour la représentation indexée par le tableau  $Y$ . On peut étendre ces considérations à d'autres groupes de transformations linéaires,  $SL(N), O(N), U(N), \dots$ . En raison des conditions additionnelles sur les matrices  $g$  dans ces groupes, une réduction supplémentaire des représentations peut être possible. Par exemple, on a vu à la sect. 2.2 du chap. 2 que la puissance  $V^{\otimes 2}$  de l'espace euclidien à 3 dimensions se réduisait sous l'action de  $SO(3)$  en trois sous-espaces, correspondant à des tenseurs de symétrie définie *et de trace nulle* et à un scalaire invariant. Ces questions devraient être traitées dans un cours plus approfondi de théorie des groupes ...

## 4. Particules indiscernables en Mécanique Quantique

### 4.1. Postulat de symétrie/antisymétrie

En Mécanique Quantique, deux particules de nature identique sont indiscernables. Dans une expérience de collision entre par exemple deux électrons 1 et 2 animés de vitesses initiales différentes, il est impossible de décider si un électron observé après la collision est l'électron 1 ou l'électron 2. Cette indiscernabilité se traduit par des propriétés de la fonction d'onde sous l'action de l'échange des particules 1 et 2.

Soit  $\psi(\xi_1, \xi_2)$  la fonction d'onde du système :  $\xi_1$  résume l'ensemble des degrés de liberté (coordonnées d'espace, spin, etc) de la particule 1. Soit  $\mathcal{P}_{12}$  l'opérateur qui échange les deux particules

$$\mathcal{P}_{12}\psi(\xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_2, \xi_1) . \quad (4.1)$$

Comme  $\mathcal{P}_{12}^2 = I$ , les seules valeurs propres possibles de  $\mathcal{P}_{12}$  sont  $\pm 1$  et les fonctions propres correspondantes sont symétriques ou antisymétriques dans l'échange de 1 et 2. Dire que les particules sont indiscernables revient à dire que la permutation  $1 \leftrightarrow 2$  est une symétrie du système, c'est-à-dire que  $\mathcal{P}_{12}$  commute avec  $H$ . L'évolution dans le temps conserve le type de symétrie de la fonction d'onde.

Il semblerait que ceci laisse la possibilité pour la fonction d'onde d'être une combinaison linéaire d'une composante symétrique et d'une composante antisymétrique, ou même seulement d'être selon les états du système, symétrique ou antisymétrique. Il n'en est rien et on admettra le

**Postulat :** *Les fonctions d'onde d'un système de deux particules identiques sont soit toutes symétriques, soit toutes antisymétriques dans l'échange des deux particules.*

Plus généralement, si on s'intéresse à un système constitué de  $n$  particules identiques, décrit par une fonction d'onde  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , on fait agir sur  $\psi$  les  $n!$  opérateurs de permutation. Comme  $S_n$  est engendré par les produits de transpositions, de l'action des  $\mathcal{P}_{ij}$  sur  $\psi$  découle celle de toute permutation. Le postulat implique donc que toute fonction d'onde est soit complètement symétrique, soit complètement antisymétrique. En d'autres termes, la fonction d'onde constitue une des deux représentations unidimensionnelles de  $S_n$ . (Un autre grand principe de la Physique, qui ne relève pas de la théorie des groupes, affirme que le type de symétrie est lié au spin des particules considérées : symétrie = statistique de Bose-Einstein ("bosons") = spin entier; antisymétrie = statistique de Fermi-Dirac ("fermions") = spin demi-entier.)

Une application simple des considérations des sections précédentes est qu'un système composé de  $n$  particules identiques sans interaction occupant des états décrits par  $\psi_1, \dots, \psi_n$  est représenté par respectivement

$$\begin{aligned} \Psi_S &= \mathcal{S}(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n)(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \text{ou} \quad \Psi_A &= \mathcal{A}(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n)(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &= \det(\psi_i(\xi_j)) \quad (\text{"déterminant de Slater"}) \end{aligned}$$

pour des bosons ou des fermions, où  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  désignent les opérateurs représentant le symétriseur et l'antisymétriseur de (1.10). La fonction antisymétrique  $\Psi_A$  s'annule si deux  $\psi$  sont identiques. Il en découle que deux fermions ne peuvent occuper le même état (principe de Pauli).

On notera que le postulat ne fixe que la symétrie de la fonction d'onde totale, incorporant tous les degrés de liberté. Si on peut l'écrire sous forme factorisée, par exemple,

$$\Psi = \Psi_{\text{espace}}(x_1, \dots, x_n) \Psi_{\text{spin}}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

découplant coordonnées spatiales et composantes du spin, les fonctions  $\Psi_{\text{espace}}$  et  $\Psi_{\text{spin}}$  peuvent avoir des types de symétrie autres. Ainsi si  $\Psi_{\text{espace}}$  est complètement symétrique,  $\Psi_{\text{spin}}$  pour un système de fermions devra être complètement antisymétrique, et vice versa. Plus généralement si les  $\Psi_{\text{espace}}$  se transforment selon la représentation  $D_Y$ , les  $\Psi_{\text{spin}}$  doivent être choisis dans la représentation  $D_{\tilde{Y}}$ , suivant une remarque de la fin de la sect. 2. Les tableaux  $\tilde{Y}$  sont restreints à n'avoir que deux lignes au plus dans le cas où le spin des particules est  $\frac{1}{2}$ , sans quoi l'antisymétrisation des indices d'une même colonne produirait toujours 0. Il faut enfin construire des combinaisons linéaires de ces fonctions mixtes qui se transforment selon la représentation complètement antisymétrique ... Là encore nous renvoyons à la littérature pour plus de détails.

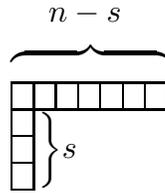
On peut s'interroger sur la possibilité de faire intervenir d'autres représentations du groupe  $S_n$  dans des systèmes de particules identiques. Ces autres représentations ayant toutes des dimensions supérieures à 1, il faut alors accepter la possibilité de décrire un système par un ensemble de fonctions formant une représentation de  $S_n$ . Il apparaît qu'une telle possibilité est difficile à concilier avec d'autres principes de la physique quand la dimension de l'espace est supérieure ou égale à trois.

On peut aussi reconsidérer l'idée que l'échange de deux particules revient à leur permutation.

Dans l'approche moderne, on préfère décrire l'échange des deux particules le long de trajectoires dans l'espace,  $x_i(\tau)$ ,  $\tau \in [0, 1]$ , le long de laquelle la fonction d'onde est partout bien définie, ce qui empêche les particules de coïncider et interdit les trajectoires qui se coupent :  $\forall \tau \in [0, 1], x_i(\tau) \neq x_j(\tau)$ . Ces trajectoires peuvent se composer, s'inverser, etc. Elles forment un groupe et on les étudie modulo les déformations continues sans intersections : c'est un problème de topologie. En dimension d'espace supérieure ou égale à 3, on montre que le groupe n'est autre que  $S_n$ . En dimension 2, par contre, le groupe est moins trivial et est appelé le groupe des tresses  $\mathcal{B}_n$ . On est donc amené à étudier les représentations de ce groupe. On trouve en dehors des représentations complètement symétriques ou antisymétriques d'autres représentations de dimension 1, où  $\psi$  change par une phase arbitraire  $e^{i\theta}$  ("anyons"), ou des représentations de dimension plus élevée. Il s'agit là d'un domaine très actif des mathématiques contemporaines (théorie des nœuds) qui intéresse aussi beaucoup les physiciens en relation possible avec l'effet Hall quantique, la supraconductivité, etc.

### Exercices

1. Ecrire explicitement les matrices de la représentation de  $S_3$  attachée au tableau  $\{2, 1\}$  dans la base  $(j, g)$  de (1.15). Vérifier que leurs traces reproduisent les valeurs attendues des caractères. Etudier de même la représentation attachée au tableau standard et montrer qu'elle est équivalente à la précédente. Trouver une base où les matrices sont unitaires (en fait orthogonales réelles).
2. Soit  $Y$  un tableau d'Young. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une permutation  $p$  soit de la forme  $p = v.h$ ,  $h \in H$ ,  $v \in V$ , est qu'il n'existe aucune paire de chiffres de la même ligne de  $Y$  qui soit envoyée par  $p$  dans la même colonne. Pour la condition suffisante, on pourra procéder par l'absurde, et montrer que le tableau transformé de  $Y$  par  $p$  peut être réordonné par des transformations de  $H$  puis de  $V$  en le tableau initial.
- 3.★ Utiliser la formule de Frobenius (2.9) pour établir la propriété suivante : les seules représentations de  $S_n$  pour lesquelles le caractère de la classe constituée d'un seul cycle de longueur  $n$  est non nul correspondent aux tableaux en équerre, c'est-à-dire de la forme



Si  $s+1$  désigne le nombre de boîtes dans la première colonne, montrer que  $\chi(\{n\}) = (-1)^s$ .  
 4. Montrer que le produit défini par (1.1) dans la représentation régulière correspond à un produit de convolution des fonctions sur  $G$

$$(f' \cdot f)(x) = \sum_{g \in G} f'(x \cdot g^{-1})f(g) .$$

5.★ Montrer que dans la limite où tous les  $x_i \rightarrow 1$ , l'expression (2.4) tend vers  $\dim_Y^{(N)}$  donnée en (3.7). Inverser (2.5) en

$$t_{\underline{\nu}}(x_1, \dots, x_N) = \frac{n_{\underline{\nu}}}{n!} \sum_Y X_Y(x_1, \dots, x_N) \chi_Y^*(\underline{\nu}) .$$

En prenant tous les  $x = 1$ , en déduire que  $\sum_Y n_Y \dim_Y^{(N)} = N^n$ .

6.★ En utilisant la formule (2.9), démontrer l'expression suivante pour la dimension  $n_Y$

$$n_Y = \chi_Y([1^n]) = n! \det \frac{1}{(f_i - i + j)!} .$$

En déduire la formule (2.1). De même, si  $n = 2p$  est pair, montrer qu'on a pour la classe  $[2^p]$

$$\chi_Y([2^p]) = p! \det' \frac{1}{\left(\frac{f_i - i + j}{2}\right)!}$$

où la notation  $\det'$  signifie que dans le développement du déterminant, seuls les termes où  $f_i - i + P_i$  est pair sont conservés. Montrer que les seuls tableaux susceptibles d'avoir  $\chi_Y([2^p]) \neq 0$  sont tels que le nombre de valeurs de  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2p$ , pour lesquelles  $f_i - i + 2p$  est pair est égal au nombre de celles pour lesquelles il est impair.

7. a) On considère un système  $S$  constitué de  $n$  fermions identiques. Montrer que  $S$  se comporte lui-même comme un boson ou un fermion selon la valeur de  $n$ .

b) On considère un système  $S$  constitué de  $n$  particules de spin demi-entier. Montrer que  $S$  a lui-même un spin entier ou demi-entier selon la valeur de  $n$ .

c) Que reflète le parallèle entre a) et b) ?

8. On étudie la diffusion élastique de deux particules identiques de spin  $\frac{1}{2}$ , deux électrons par exemple. Soit  $f(\theta)$  l'amplitude de probabilité que l'un des électrons incidents soit diffusé d'un angle  $\theta$  dans le système du centre de masse. On note  $g(\theta) = f(\pi - \theta)$ . Montrer que si les deux électrons sont dans un état de spin total  $S = 0$ , l'amplitude de diffusion est  $(f + g)(\theta)$ , et qu'elle est  $(f - g)(\theta)$  s'ils sont dans un état  $S = 1$ . En déduire que quand on n'observe pas les spins des électrons, la section efficace des électrons est proportionnelle à

$$\frac{1}{4} (|f + g|^2 + 3|f - g|^2) .$$

Généraliser cette discussion au cas de particules identiques de spin  $s$  quelconque.

### Problème :

1) Soit  $\{f_m\}$  une base de l'espace  $V$  de la représentation de spin  $j$  de  $SU(2)$ . On forme le produit tensoriel complètement antisymétrique  $A$  de  $N = 2j + 1$  copies de  $V$ . Quelle est la dimension de  $A$  ? Donner une base de l'espace  $A$  en termes des  $f$  et de  $\epsilon_{i_1 \dots i_N}$ , le tenseur complètement antisymétrique en  $i_1, \dots, i_N$ . Étudier l'action de  $SU(2)$  sur cette base, et montrer que  $A$  est l'espace d'une représentation de spin 0.

2) Dans un atome, on considère un système de  $N$  électrons d'une couche complète de moment orbital  $l$ . On négligera les interactions entre électrons. Que vaut  $N$  ? Soit  $\psi_m$ ,  $m = -l, \dots, l$  une base de fonctions d'onde à un électron se transformant sous l'action de  $SU(2)$  selon la représentation de spin  $l$ , et soit  $\varphi_{\pm}$  une base de la représentation de spin  $\frac{1}{2}$  : le  $i$ -ème électron dans un état de moment orbital  $m$  et de spin  $\frac{1}{2}\sigma$ ,  $\sigma = \pm 1$  est décrit par la fonction d'onde notée  $\psi_m \varphi_{\sigma}(i)$ . Montrer qu'on peut écrire l'état du système des  $N$  électrons comme le déterminant

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_{-l} \varphi_{-}(1) & \psi_{-l} \varphi_{+}(1) & \psi_{-l+1} \varphi_{-}(1) & \cdots & \psi_l \varphi_{+}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_{-l} \varphi_{-}(N) & \psi_{-l} \varphi_{+}(N) & \psi_{-l+1} \varphi_{-}(N) & \cdots & \psi_l \varphi_{+}(N) \end{vmatrix}.$$

3) On se propose de déterminer par quelle représentation du groupe des rotations se transforme cet état. Montrer qu'on peut écrire

$$\Psi = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} [\psi_{-l}(i_1) \psi_{-l+1}(i_3) \cdots \psi_l(i_{N-1})] \varphi_{-}(i_1) \cdots \varphi_{-}(i_{N-1}) \\ \times [\psi_{-l}(i_2) \psi_{-l+1}(i_4) \cdots \psi_l(i_N)] \varphi_{+}(i_2) \cdots \varphi_{+}(i_N).$$

En appliquant le résultat du 1), montrer que la contribution de chaque crochet  $[\dots]$  au moment orbital total  $\vec{L}$  est nulle et qu'il en est donc de même pour  $\Psi$ . Raisonner de même pour le spin total  $\vec{S}$ . Qu'en déduit-on sur le moment angulaire total  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  des électrons d'une couche complète ?

### Références

Sur le groupe symétrique et le groupe linéaire :

H. Weyl, *The classical Groups*, Princeton Univ. Press

F.D. Murnaghan, *The theory of group representations*, The Johns Hopkins Press, 1938

M. Hamermesh, *Group Theory*, Addison-Wesley.

Sur l'antisymétrisation des fonctions d'onde :

L. Landau et E. Lifschitz, *Mécanique Quantique*, paragraphe 63.

H. Weyl, *The theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover.

## Appendice C. Formule de Frobenius

Établissons d'abord la très utile identité dite du *déterminant de Cauchy*. Soient  $x_i, y_i$   $2N$  variables réelles ou complexes, on suppose tous les  $x$  différents de tous les  $y$  et on forme la matrice de terme générique  $(x_i - y_j)^{-1}$ . Son déterminant s'écrit

$$\det \frac{1}{x_i - y_j} = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{1 \leq i, j \leq N} (x_i - y_j)}, \quad (\text{C.1})$$

où  $\Delta$  désigne à nouveau le déterminant de Vandermonde  $\Delta(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)$ . La preuve en est très simple : dans le produit  $\prod (x_i - y_j) \det((x_i - y_j)^{-1})$ , tous les pôles du déterminant sont compensés par les zéros du produit; c'est donc un polynôme qui a le degré  $N^2 - N$ , qui est séparément complètement antisymétrique dans les  $x$  et dans les  $y$ , et qui factorise donc  $\Delta(x)\Delta(y)$ . Comme cette dernière expression est elle-même de degré  $N(N - 1)$ , on a bien l'identité (C.1), à un facteur près qu'on trouve aisément égal à 1.

On peut aussi récrire cette identité sous une forme équivalente en factorisant le produit des  $x$  dans les différents facteurs et en changeant ensuite  $x_i^{-1}$  en  $x_i$

$$\det \frac{1}{1 - x_i y_j} = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{1 \leq i, j \leq N} (1 - x_i y_j)}. \quad (\text{C.2})$$

Revenons alors à la formule (2.3) et formons

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\underline{\nu}} \text{partitions de } n \frac{n!}{n_{\underline{\nu}}} t_{\underline{\nu}}(x) t_{\underline{\nu}}(y) &= \exp [t_1(x)t_1(y) + 2t_2(x)t_2(y) + \dots] \\ &= \exp \sum_r \frac{\sum x_i^r \sum y_j^r}{r} = \exp - \sum_{i,j} \ln(1 - x_i y_j) \\ &= \prod \frac{1}{1 - x_i y_j} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où

$$\frac{n!}{n_{\underline{\nu}}} = (\nu_1! 1^{\nu_1} \nu_2! 2^{\nu_2} \dots) \quad (\text{C.4})$$

est le rapport de  $n!$  au nombre d'éléments dans la classe  $\underline{\nu}$ . Compte tenu de l'identité (C.2), on a

$$\begin{aligned} \Delta(x)\Delta(y) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\underline{\nu}} \text{partitions de } n \frac{n!}{n_{\underline{\nu}}} t_{\underline{\nu}}(x) t_{\underline{\nu}}(y) &= \det \frac{1}{1 - x_i y_j} \\ &= \sum_P \text{permutations de } S_N \epsilon_P \sum_{\nu_1, \dots, \nu_N=0}^{\infty} x_{P_1}^{\nu_1} y_1^{\nu_1} \dots x_{P_N}^{\nu_N} y_N^{\nu_N} \end{aligned} \quad (\text{C.5a})$$

$$= N! \sum_P \epsilon_P \sum_{f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N} x_{P_1}^{f_1+N-1} y_1^{f_1+N-1} \dots x_{P_N}^{f_N} y_N^{f_N} \quad (\text{C.5b})$$

$$= \sum_{f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N} \det \left( x_i^{f_j+N-j} \right) \det \left( y_i^{f_j+N-j} \right), \quad (\text{C.5c})$$

où on est passé de (C.5a) à (C.5b) en utilisant le fait que tous les  $\nu_i$  doivent être différents, et à un facteur  $N!$  près, on peut toujours supposer  $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_N$  et poser  $\nu_i = f_i + N - i$ , avec  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N \geq 0$ . On a donc reconstruit les fonctions  $X_Y$  de (2.4) et on a en identifiant les termes d'homogénéité  $n$

$$\sum_{\underline{\nu}} \text{partitions de } n \frac{n!}{n_{\underline{\nu}}} t_{\underline{\nu}}(x) t_{\underline{\nu}}(y) = \sum_Y X_Y(x) X_Y(y), \quad (\text{C.6})$$

avec une somme sur tous les tableaux d'Young  $Y$  à  $n$  boîtes. Si on écrit un développement de  $X_Y(x)$  sur les fonctions symétriques  $t_{\underline{\nu}}(x)$  comme en (2.5), avec des coefficients  $\chi_Y(\underline{\nu})$  encore indéterminés, on voit que ces coefficients satisfont comme conséquence de (C.6) les relations

$$\sum_Y \chi_Y(\underline{\nu}) \chi_Y(\underline{\nu}') = \frac{n!}{n_{\underline{\nu}}} \delta_{\underline{\nu}, \underline{\nu}'} \quad (\text{C.7})$$

c'est-à-dire les relations d'orthogonalité (4.13a) standard des caractères de  $S_n$ . Ceci suffit à identifier ces coefficients avec les caractères cherchés (à un signe possible qu'on parvient à fixer) et à établir la formule (2.5).

La seconde étape consiste à démontrer (2.8). Introduisons une matrice  $X$  de valeurs propres  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\mathbb{I} - uX)} &= \exp -\text{tr} \ln(\mathbb{I} - uX) \\ &= \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} \text{tr} X^n = \prod_{n=1}^{\infty} \exp u^n t_n \\ &= \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots \geq 0} u^{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots} \prod_i \frac{t_i^{\nu_i}}{\nu_i!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} u^r \sum_{\underline{\nu} \text{ partitions de } r} \prod_i \frac{t_i^{\nu_i}}{\nu_i!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} u^r p_r, \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

avec les  $p_r$  définis en (2.7). Par ailleurs la formule du déterminant de Cauchy (C.2), développée selon les colonnes donne

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(y)}{\prod(1 - x_i y_j)} &= \frac{1}{\Delta(x)} \det \left| \frac{1}{1 - x_i y_j} \right| \\ &= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{l_1, \dots, l_N \geq 0} y_1^{l_1} \dots y_N^{l_N} \sum_P \text{permutations de } S_N \epsilon_P x_{P_1}^{l_1} \dots x_{P_N}^{l_N} \\ &= \frac{1}{\Delta(x)} \sum_{l_1, \dots, l_N \geq 0} y_1^{l_1} \dots y_N^{l_N} \det \left( x_i^{l_j} \right) \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_N \geq 0} y_1^{l_1} \dots y_N^{l_N} X_Y(x) \end{aligned}$$

Donc  $X_Y(x)$  est le coefficient de  $y_1^{l_1} \dots y_N^{l_N}$  dans

$$\frac{\Delta(y)}{\prod(1 - x_i y_j)} = \det \begin{vmatrix} \frac{y_1^{N-1}}{\det(\mathbb{I} - y_1 X)} & \dots & \frac{y_1^0}{\det(\mathbb{I} - y_1 X)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_N^{N-1}}{\det(\mathbb{I} - y_N X)} & \dots & \frac{y_N^0}{\det(\mathbb{I} - y_N X)} \end{vmatrix}$$

Finalement, en développant chaque déterminant  $[\det(\mathbb{I} - yX)]^{-1}$  selon la formule (C.8), on obtient

$$X_Y(x) = \begin{vmatrix} p_{f_1} & p_{f_1+1} & \dots & p_{f_1+N-1} \\ p_{f_2-1} & p_{f_2} & \dots & p_{f_2+N-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{f_N-N+1} & & & p_{f_N} \end{vmatrix} \quad (\text{C.10})$$

qui est la formule (2.8).

Le lecteur notera que dans tous ces raisonnements, on a traité les développements en  $x$  et/ou  $y$  comme des séries formelles, sans se poser de question sur la convergence des expressions.