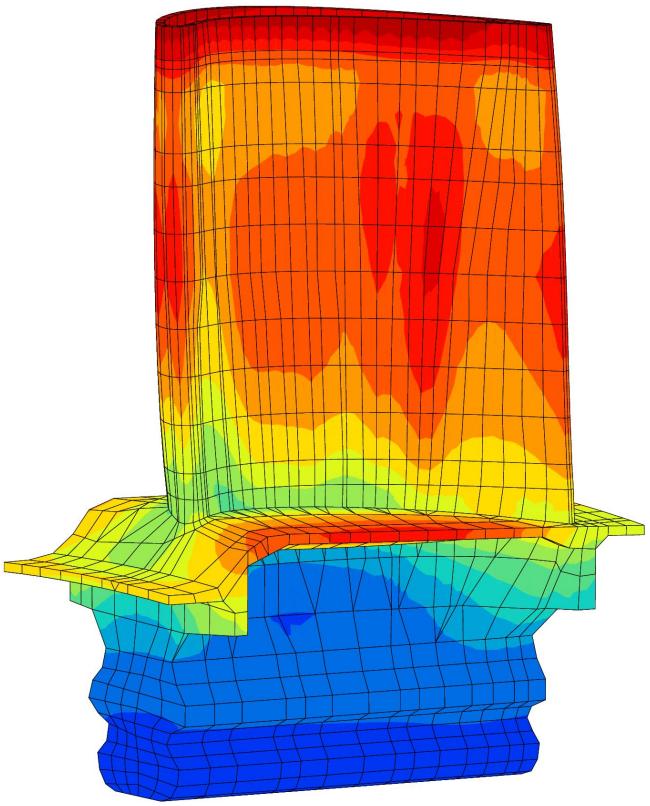
ECOLE DES MINES DE PARIS

MECANIQUE
DES MILIEUX CONTINUS

Samuel Forest, Michel Amestoy

Gilles Damamme, Serge Kruch, Vincent Maurel, Matthieu Mazière



Année 2009–2010

Illustration de couverture : champ de dilatation thermique dans une aube de turbine de moteur d'avion, calculée par la méthode des éléments finis (Cardona, 2000).

Table des matières

Avant–propos **xiii**

I COURS **1**

1 Introduction **3**
1.1 Les différentes échelles de la matière, des matériaux et des structures 3
1.1.1 Structures, microstructures, nanostructures 3
1.1.2 Microstructures cristallines, granulaires, cellulaires 4
1.2 Milieux continus ou presque... 6
1.2.1 Le rêve de Laplace et la phénoménologie 6
1.2.2 Volume élémentaire pour la thermomécanique, représentation ponctuelle 8
1.2.3 Fissures, discontinuités et singularités 9
1.2.4 La vraie nouveauté : le tenseur des contraintes 10
1.3 Le problème de fermeture et la variété des comportements 10
1.3.1 Corps indéformables 10
1.3.2 Lois de comportement 10
1.4 Plan du cours 11
1.4.1 Plan du cours oral 11
1.4.2 Plan du cours écrit 11
1.4.3 Liens avec les autres cours de l'Ecole des Mines de Paris 12

2 Transformations du milieu continu **19**
2.1 Enjeux physiques et faits expérimentaux 19
2.2 Géométrie et cinématique du milieu continu 20
2.2.1 Observateurs et référentiels 20
2.2.2 Placement du corps matériel 23
2.2.3 Descriptions matérielle et spatiale du mouvement 24
2.2.4 Le gradient de la transformation 26
2.2.5 Transports convectifs 29
2.2.6 Décomposition polaire du gradient de la transformation 31
2.2.7 Exemples de transformations homogènes 32
2.3 Métrique et mesures de déformation 35
2.3.1 Interprétation géométrique des tenseurs de Cauchy–Green 36
2.3.2 Mesures de déformation 37
2.3.3 Transformations infinitésimales 42
2.3.4 Etude des déformations homogènes 49
2.3.5 Conditions de compatibilité 51
2.3.6 Changement de référentiel euclidien / de configuration de référence . . . 56

2.4 Vitesses de déformation . . . 58
2.4.1 Dérivées par rapport au temps : champs de vitesses et d'accélération . . . 58
2.4.2 Champ de gradient des vitesses . . . 59
2.4.3 Vitesses d'évolution des longueurs, angles et volumes . . . 61
2.4.4 Conditions de compatibilité pour le champ taux de déformation . . . 67
2.4.5 Changement de référentiel euclidien . . . 68
2.4.6 Exemples de champs de vitesses . . . 69

3 Equations de bilan **71**
3.1 Conservation de la masse . . . 71
3.1.1 Masse d'un corps matériel et sa conservation . . . 71
3.2 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique . . . 72
3.2.1 Quantité de mouvement et moment cinétique d'un corps matériel . . . 72
3.2.2 Application de la loi fondamentale de la dynamique . . . 73
3.2.3 Partition des efforts appliqués à un corps matériel . . . 73
3.2.4 Les lois d'Euler du mouvement . . . 75
3.3 Analyse des contraintes : la méthode de Cauchy . . . 76
3.3.1 Insuffisance de la représentation pression des efforts intérieurs . . . 76
3.3.2 Le postulat et le théorème de Cauchy . . . 77
3.3.3 Les lois de Cauchy du mouvement . . . 81
3.3.4 Le théorème des puissances virtuelles . . . 84
3.4 Conservation de l'énergie . . . 86
3.4.1 Premier principe de la thermodynamique des milieux continus . . . 86
3.4.2 Formulation locale du premier principe . . . 87
3.5 Equations de bilan en présence de discontinuités . . . 88
3.5.1 Un théorème de transport . . . 88
3.5.2 Surface de discontinuité . . . 91
3.5.3 Bilan de masse . . . 91
3.5.4 Bilan de quantité de mouvement . . . 93
3.5.5 Bilan d'énergie . . . 95

4 Le tenseur des contraintes dans tous ses états **97**
4.1 Les tenseurs de contraintes . . . 97
4.1.1 Représentation lagrangienne des équations d'équilibre . . . 97
4.1.2 Contraintes et déformations conjuguées . . . 98
4.1.3 Changement de référentiel . . . 100
4.1.4 Changement de base . . . 101
4.2 Valeurs et directions principales des contraintes . . . 102
4.2.1 Décomposition spectrale et invariants du tenseur des contraintes . . . 102
4.2.2 Contraintes normale et tangentielle, cisaillement . . . 103
4.2.3 Représentation de Mohr . . . 104
4.3 Etats de contraintes remarquables . . . 106
4.3.1 Etat de traction/compression simple : $(\sigma, 0, 0)$ . . . 107
4.3.2 Etat de cisaillement simple : $(\tau, -\tau, 0)$ . . . 108
4.3.3 Etat de contraintes bi-axial / contraintes planes : $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$ . . . 109
4.3.4 Etat de contrainte tri–axial : $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . . . 110
4.4 Critères en contrainte pour les matériaux isotropes . . . 112
4.4.1 Fonctions isotropes du tenseur des contraintes . . . 112
4.4.2 Pression, déviateur des contraintes . . . 113

4.4.3 Critère de contrainte normale maximale . . . 113
4.4.4 Critère de contrainte tangentielle maximale (Tresca) . . . 114
4.4.5 Critère de von Mises . . . 115

5 Formulation des lois de comportement **117**
5.1 Nécessité des lois de comportement . . . 117
5.1.1 Décompte des inconnues et des équations . . . 117
5.1.2 Variété des comportements . . . 118
5.2 Les principes de la théorie du comportement mécanique des matériaux . . . 121
5.2.1 Déterminisme et fonctionnelle mémoire . . . 121
5.2.2 Principe de l'action locale . . . 123
5.2.3 Ecriture de la loi de comportement dans un autre référentiel . . . 123
5.2.4 Le principe d'invariance de forme de la loi de comportement . . . 124
5.2.5 Respect des symétries matérielles . . . 126
5.3 Premières applications des principes fondamentaux . . . 129
5.3.1 Formes réduites des lois de comportement . . . 129
5.3.2 Une définition des fluides et des solides . . . 130
5.3.3 Fluides visqueux . . . 132
5.4 Le crible de la thermodynamique des milieux continus . . . 135
5.4.1 Lois de comportement thermomécanique . . . 136
5.4.2 Enoncé du second principe de la thermodynamique des milieux continus . 138
5.4.3 Loi de conduction thermique . . . 141
5.4.4 Fluides visqueux conducteurs . . . 144
5.5 Exemples de lois de comportement illicites . . . 145

6 Corps élastiques **147**
6.1 Elasticité . . . 147
6.1.1 Formes réduites . . . 147
6.1.2 Symétries matérielles . . . 148
6.1.3 Thermoélasticité isotrope . . . 152
6.2 Hyperélasticité . . . 153
6.2.1 Exploitation du second principe ; lois d'état . . . 153
6.2.2 Propriétés importantes des matériaux hyperélastiques . . . 155
6.2.3 Hyperélasticité isotrope . . . 157
6.2.4 Potentiel dual $\psi_0^\star$ pour les corps hyperélastiques . . . 159
6.3 Liaisons internes dans les corps élastiques . . . 161
6.3.1 Prise en compte de la liaison interne lors de l'exploitation du second principe 162
6.3.2 Incompressibilité . . . 163
6.3.3 Rigidité . . . 164
6.3.4 Inextensibilité dans une direction . . . 164

7 Thermoélasticité linéarisée **165**
7.1 Linéarisation de la loi des corps thermoélastiques . . . 165
7.1.1 Cas des déformations infinitésimales . . . 165
7.1.2 Cas des transformations infinitésimales . . . 167
7.2 Etude du tenseur d'élasticité anisotrope . . . 169
7.2.1 Changement de base pour les tenseurs des propriétés thermoélastiques . . . 169
7.2.2 Rigidités et souplesses ; notation de Voigt pour les modules d'élasticité . . . 170
7.2.3 Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des modules d'élasticité 173

7.2.4 Inversion de la relation d'élasticité isotrope : module de Young et coefficient de Poisson . . . 177
7.2.5 Caractère défini positif du tenseur d'élasticité . . . 179
7.2.6 Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des dilatations thermiques 180
7.2.7 Notation alternative : algèbre des tenseurs d'ordre deux symétriques . . . 181
7.3 Couplages thermoélastiques . . . 182
7.3.1 Contraintes d'origine thermique . . . 182
7.3.2 Equation de la chaleur . . . 185
7.3.3 Quelques conséquences du couplage thermoélastique . . . 188

8 Formulation du problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé 191
8.1 Formulation et résolution du problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé . . . 191
8.1.1 Linéarisation des équations d'équilibre . . . 191
8.1.2 Formulation du problème aux limites . . . 192
8.1.3 Schémas de résolution . . . 194
8.1.4 Superposition . . . 198
8.1.5 Existence et unicité des solutions . . . 199
8.2 Exemples : traction et flexion simples . . . 201
8.2.1 Essai de traction/compression simple . . . 201
8.2.2 Flexion . . . 205
8.2.3 Principe de Saint–Venant . . . 211
8.3 Problèmes bidimensionnels . . . 213
8.3.1 Déformations planes . . . 214
8.3.2 Contraintes planes . . . 214
8.3.3 Fonctions de contraintes . . . 216
8.3.4 Le cas 2D et demi... . . . 217
8.3.5 Cas axisymétrique . . . 218
8.3.6 Cas antiplan . . . 218

II APPLICATIONS 219

9 Quelques transformations finies 221
9.1 Distorsion simple . . . 221
9.2 Le glissement simple . . . 222
9.2.1 Directions propres des déformations de Cauchy–Green . . . 223
9.2.2 Fibres matérielles allongées et raccourcies lors du glissement . . . 224
9.2.3 Un festival de rotations . . . 226
9.2.4 Rotation relative dans le glissement de deux lignes matérielles initialement orthogonales . . . 228
9.3 La flexion circulaire . . . 234
9.3.1 Déformations et rotations par flexion circulaire . . . 234
9.3.2 Cas d'une transformation isochore . . . 235
9.3.3 Cas d'une plaque mince . . . 237
9.4 Gonflement et cavitation . . . 238

10 Quelques tourbillons **239**
10.1 Le vorticimètre . . . 239
10.2 Le tourbillon ponctuel . . . 240
10.2.1 Le vorticimètre et le tourbillon ponctuel . . . 240
10.2.2 Cinématique du tourbillon simple . . . 243
10.2.3 Cas d'un assemblage rigide faisant un angle donné . . . 245
10.2.4 Cas d'un assemblage articulé . . . 247

11 Déformations libres **249**
11.1 Compatibilité des déformations d'origine thermique . . . 249
11.1.1 Déformations infinitésimales d'origine thermique . . . 249
11.1.2 Déformée d'un corps soumis à un gradient de température . . . 251
11.2 Effet bilame . . . 256
11.2.1 Etat de contraintes équi–biaxiales . . . 257
11.2.2 Déformations des couches . . . 258
11.2.3 Equations de compatibilité . . . 258
11.2.4 Déplacements . . . 259
11.2.5 Contraintes dans chaque couche . . . 259
11.2.6 Torseur des efforts résultant . . . 261
11.2.7 Comparaison avec un modèle numérique . . . 263
11.2.8 Résolution du système . . . 263
11.2.9 Bilame de laiton et d'invar . . . 264
11.3 Mécanique des microsystèmes . . . 266
11.3.1 La formule de Stoney . . . 266
11.3.2 Contraintes dans un film mince sur un substrat . . . 268
11.3.3 Contraintes résiduelles dans un dépôt d'aluminium sur un substrat de silicium . . . 269
11.3.4 Contraintes d'épitaxie . . . 270

12 Réservoirs sous pression **273**
12.1 Statique du réservoir sous pression . . . 273
12.1.1 Conditions à la frontière du tube . . . 274
12.1.2 Equilibre des efforts appliqués . . . 275
12.1.3 Considérations de symétrie . . . 275
12.1.4 Etablissement de quelques informations sur les contraintes au sein du tube 276
12.1.5 Cas d'un tube fermé par une calotte de forme quelconque . . . 277
12.1.6 Cas d'un tube mince . . . 280
12.2 Elastostatique du réservoir sous pression . . . 281
12.2.1 Distribution des déplacements, déformations et contraintes . . . 281
12.2.2 Différentes conditions aux extrémités du tube . . . 283
12.2.3 Cas d'un tube mince . . . 284
12.2.4 Respect du contexte infinitésimal . . . 286
12.2.5 Dimensionnement du réservoir sous pression . . . 286
12.3 Frettage . . . 290
12.3.1 Opération de frettage de deux tubes . . . 290
12.3.2 Caractéristiques de l'assemblage fretté . . . 291
12.3.3 Contraintes initiales dans l'assemblage fretté . . . 293
12.3.4 Assemblage fretté chargé . . . 293
12.3.5 Optimisation de l'assemblage fretté . . . 294

13 Torsion **297**
13.1 Introduction . . . 297
13.1.1 Problème de Neumann pour les fonctions harmoniques . . . 297
13.2 Torsion élastostatique d'un barreau cylindrique . . . 298
13.2.1 Méthode des déplacements . . . 300
13.2.2 Force résultante . . . 302
13.2.3 Rigidité de torsion . . . 303
13.2.4 Barre de section circulaire . . . 304
13.3 Au–delà du régime élastique . . . 309
13.3.1 Rupture fragile d'une barre de section circulaire . . . 309
13.3.2 Limite d'élasticité d'une barre à section circulaire en torsion . . . 310

14 Machines tournantes **311**
14.1 Expressions simplifiées de la réponse élastique linéarisée d'un disque mince en rotation . . . 312
14.1.1 Efforts centrifuges . . . 312
14.1.2 Forme du tenseur des contraintes . . . 315
14.1.3 Une condition de compatibilité . . . 315
14.1.4 Détermination des contraintes . . . 315
14.1.5 Déformations et déplacements . . . 316
14.1.6 Contexte infinitésimal . . . 318
14.1.7 Contact avec le carter et prise en compte de l'aubage . . . 320
14.2 Critères de plasticité et de rupture . . . 320
14.2.1 Seuil de plasticité et vitesse critique pour le disque mince alésé . . . 320
14.2.2 Vitesse critique pour un disque en superalliage à base de nickel . . . 322
14.2.3 Rupture brutale . . . 325
14.2.4 Cas où le rayon de l'alésage est très faible . . . 325
14.2.5 Cas d'un disque mince non alésé . . . 326
14.3 Solution, au sens de Saint–Venant, du problème de l'élastostatique d'un disque en rotation . . . 330
14.3.1 Expressions générales des contraintes . . . 330
14.3.2 Equations de compatibilité . . . 330
14.3.3 Détermination complète des contraintes . . . 331
14.3.4 Déformations et déplacements . . . 333
14.3.5 Comparaison avec une solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis . . . 335
14.4 Contraintes planes et réponse axisymétrique d'un cylindre de longueur finie . . . 336
14.4.1 Approche par les équations de Beltrami en coordonnées cylindriques . . . 336
14.4.2 Interprétation des termes de la solution . . . 342
14.4.3 Complément à l'étude des contraintes planes . . . 343
14.5 Arbres en rotation . . . 343
14.5.1 Mise en œuvre de la méthode de déplacements . . . 344
14.5.2 Vitesse critique pour un arbre en rotation . . . 345
14.5.3 Epilogue . . . 346

15 Concentrations de contraintes **347**
15.1 Préliminaire : fonction de contraintes et coordonnées cylindriques . . . 347
15.2 Champ de contraintes dans une plaque trouée en traction simple . . . 348
15.2.1 Champ de contraintes loin du trou . . . 349

15.2.2 Forme générale des contraintes . . . 350
15.2.3 Prise en compte des conditions à la frontière . . . 351
15.3 Concentration de contrainte au bord du trou . . . 352
15.3.1 Facteur de concentration de contrainte . . . 352
15.3.2 Plasticité et rupture . . . 355
15.4 Déformations et déplacements . . . 357
15.4.1 Détermination partielle des déformations et des déplacements . . . 357
15.4.2 Précision du contexte infinitésimal . . . 360
15.4.3 Déformée du trou . . . 361
15.5 Plaque trouée sollicitée en traction plane . . . 362
15.5.1 Etude de la traction plane . . . 362
15.5.2 Plaque trouée en déformations planes . . . 363
15.6 Qualité des estimations proposées vis–à–vis de simulations numériques tridimensionnelles . . . 365
15.7 Trou elliptique dans une plaque . . . 366
15.7.1 Contrainte au bord du trou elliptique . . . 366
15.7.2 Cas d'une sollicitation perpendiculaire au grand axe de l'ellipse . . . 371
15.7.3 Cas d'une sollicitation parallèle au grand axe de l'ellipse . . . 374
15.7.4 Cas d'une ellipse infiniment aplatie sollicitée en traction dans une direction quelconque $0 < \alpha < \pi/2$ . . . 375
15.7.5 Expérience de mécanique de la rupture . . . 379
15.8 Différence entre le comportement d'un trou elliptique infiniment aplati et celui d'une fissure . . . 379
15.8.1 Champ de contraintes en pointe de fissure . . . 380
15.8.2 Quelques paradoxes liés à la rupture . . . 381
15.8.3 Un critère simple de bifurcation de fissure . . . 383
15.8.4 Trou elliptique infiniment aplati chargé en mode II . . . 385
15.8.5 Comportement asymptotique de trous de formes plus générales . . . 387
15.9 Cavités sphériques et ellipsoïdales dans un massif . . . 388
15.10Epilogue . . . 388

16 Dislocations de Volterra **389**
16.1 Dislocation–vis . . . 389
16.1.1 Champ de déplacements . . . 390
16.1.2 Vecteur de Burgers . . . 391
16.1.3 Champs de contraintes et de déformations . . . 392
16.1.4 Equilibre et conditions aux limites en contraintes . . . 392
16.1.5 Energie élastique d'une dislocation–vis . . . 392
16.1.6 Cas où $r_i \to 0$ . . . 393
16.1.7 Influence du choix du plan de coupure . . . 393
16.1.8 Torseur résultant . . . 394
16.1.9 Solution exacte au sens de Saint–Venant . . . 394
16.2 Dislocation–coin . . . 395
16.2.1 Equilibre local et conditions aux limites . . . 396
16.2.2 Contraintes réduites . . . 397
16.2.3 Contexte des déformations planes . . . 397
16.2.4 Moment résultant . . . 397
16.2.5 Déformations et déplacements . . . 398
16.2.6 Energie d'une dislocation–coin . . . 400

16.2.7 Dislocation–coin équivalente . . . 401
16.3 Dislocations mixtes . . . 402
16.4 Compatibilité générale . . . 403
16.4.1 Retour sur la compatibilité . . . 403
16.4.2 Domaines non simplement connexes . . . 405
16.4.3 Dislocations dans les cristaux . . . 406

III ANNEXES 409

A Tenseurs 411
A.1 Algèbre tensorielle . . . 411
A.1.1 Tenseurs sur un espace vectoriel E . . . 412
A.1.2 Tenseurs euclidiens . . . 419
A.1.3 Algèbre extérieure . . . 424
A.1.4 Transformations orthogonales et rotations . . . 425
A.2 Analyse tensorielle . . . 429
A.2.1 Champs de tenseurs . . . 429
A.2.2 Opérateurs différentiels . . . 430
A.2.3 Intégration des champs de tenseurs . . . 434
A.3 Quelques résultats importants d'algèbre et analyse tensorielles en mécanique des milieux continus . . . 435
A.3.1 Théorème de Cayley–Hamilton et invariants d'un tenseur . . . 435
A.3.2 Théorème de Poincaré . . . 436
A.3.3 La différentielle de la fonction inverse sur les tenseurs d'ordre 2 . . . 436
A.3.4 La différentielle du déterminant d'un tenseur du second ordre inversible . . . 436
A.4 Théorèmes de représentation . . . 437
A.4.1 Rappels sur les groupes de symétrie . . . 438
A.4.2 Fonctions isotropes . . . 439

B Formulation des lois de conservation 445
B.1 Forme générale d'une équation de bilan . . . 445
B.2 Théorèmes de transport (forme intégrale) . . . 445
B.2.1 Cas d'une fonction f continue . . . 445
B.2.2 Cas d'un volume matériel . . . 446
B.2.3 Cas d'un volume présentant une surface singulière . . . 447
B.3 Forme locale des équations de bilan : équations de champ et équations aux discontinuités . . . 448

C Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cylindriques et sphériques 451
C.1 Coordonnées cylindriques . . . 451
C.1.1 Définition des coordonnées . . . 451
C.1.2 Champ scalaire . . . 451
C.1.3 Champ de vecteurs . . . 452
C.1.4 Champ de tenseurs d'ordre 2 . . . 452
C.2 Coordonnées sphériques . . . 453
C.2.1 Définition des coordonnées . . . 453
C.2.2 Champ scalaire . . . 453
C.2.3 Champ de vecteurs . . . 454

C.2.4 Champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques 454

Eléments bibliographiques par thèmes **455**

Références bibliographiques **457**

Index **463**

Avant–propos

Le cours a trois objectifs :

- décrire quelques phénomènes physiques observés dans les milieux continus déformables (ordres de grandeur, méthodes de mesure de ces grandeurs)
- mettre à profit les acquis mathématiques des élèves pour proposer une lecture ambitieuse et rigoureuse du problème de la formulation des lois de comportement des solides et des fluides, et fournir un cadre systématique à l'établissement de ces lois.
- formuler et entreprendre la résolution d'un problème aux limites de physique des milieux continus.

Le pari consiste à aborder ces points en un nombre réduit de séances. On a choisi de présenter le cours écrit comme un *handbook* qui pourra être consulté au–delà du tronc commun lors des stages, séjours à l'étranger, voire recherches futures des étudiants, en espérant qu'ils y trouvent des débuts de réponse à des questions qu'ils n'auront pas eu le temps de se poser en première année.

Le cours écrit contient des résultats majeurs obtenus essentiellement dans les 200 dernières années par des mécaniciens, physiciens, thermodynamiciens et mathématiciens, depuis les briques fondamentales posées dans la première moitié du XIXème siècle (on notera en particulier la remarquable contribution française dans ce domaine grâce aux Navier, Cauchy et autres Saint–Venant) jusqu'aux développements de la fin du XXème siècle en particulier dans le domaine des lois de comportement en liaison avec le développement de la science des matériaux. La mécanique des milieux continus a connu une petite révolution au début des années 1960 lorsque des auteurs comme Clifford Truesdell et Walter Noll ont entrepris d'axiomatiser cette discipline. Le caractère systématique de leur construction, même si elle n'a pas livré de résultats pratiques fondamentalement nouveaux, a permis de conférer à la discipline une grande unité et un véritable pouvoir de fascination. Dans la préface de son cours (Truesdell, 1977) (ou sa version française (Truesdell, 1974)), Truesdell écrit[1]

"As Lagrange wrote[2]*, "On ne trouvera point de Figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose, ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme." This claim is as true–or as false–of the present book as of Lagrange's. Of course, many proofs are easier to grasp if a figure is drawn, and both teacher and student should illumine and enrich the regular and uniform course by sketches."* Il va sans dire que les applications et illustrations dans le domaine de la mécanique des structures et des matériaux jouent ici un rôle essentiel et devront augmenter en nombre dans le futur de cet ouvrage.

La démarche de modélisation est illustrée dans le cas du comportement élastique des matériaux. L'approche dite par variables internes des lois de comportement pour les milieux continus, plus pragmatique, développée par des auteurs ayant lu les ouvrages de Truesdell (Jean Mandel et Paul Germain en premier chef) a marqué l'essor de la mécanique non linéaire de

[1] Voir aussi le commentaire de R.W. Cahn sur la contribution de Truesdell dans (Cahn, 2001).
[2] dans son ouvrage *Mécanique analytique, 1788.*

la fin du siècle dernier. Elle sera abordée au second semestre dans le cours de Mécanique des Solides.

Ce cours écrit a été composé en s'appuyant principalement sur les quatre ouvrages suivants, qui offrent des présentations résolument modernes, concises et rigoureuses de la Mécanique des Milieux Continus :

- M. Amestoy, *Introduction à la mécanique des milieux déformables*, Ecole des Mines de Paris, 1995.
- A. Bertram *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*, Springer, 2005.
- R.W. Ogden, *Non–Linear Elastic Deformations*, édition originale 1984, édition Dover, 1997.

J'ai eu la chance d'interagir fortement avec les deux premiers auteurs mentionnés, au cours de longues discussions passionnantes pour moi. Je les en remercie sincèrement et souhaite poursuivre ces échanges. En particulier, j'ai assisté deux fois au cours de M. Amestoy, en 1989 puis en 2003, ce qui m'a profondément marqué. On en retrouvera de très nombreux aspects tout au long du cours écrit.

L'équipe enseignante pour le cours de 2006–2010 est composée aussi de Sabine Cantournet, Gilles Damamme, Serge Kruch, Vincent Maurel, Matthieu Mazière, David Ryckelynck. Je les remercie pour leur aide et pour la relecture scrupuleuse du manuscrit de ce cours. Il subsiste cependant encore de nombreux défauts dans ce texte. Je remercie le lecteur de me les signaler.

Première partie

COURS

Chapitre 1

Introduction

Les objets de la mécanique des milieux continus sont la matière sous ses formes fluides (liquides, gaz, plasmas...) et solides, les matériaux et les structures qui sont des assemblages d'éléments de matériaux ou de sous–structures. On étudie leurs mouvements sous l'action de forces, et les variations de mouvement d'un point matériel à un autre. La variable température influence aussi le mouvement de ces objets et doit donc être prise en compte dans le cadre plus général de la thermomécanique des milieux continus.

La modélisation en mécanique des milieux continus est un dialogue incessant et subtile entre **le discret et le continu** dans le but de trouver l'outil de modélisation le plus efficace pour un objectif donné.

1.1 Les différentes échelles de la matière, des matériaux et des structures

On rencontre ces objets à différentes échelles allant du nanomètre (assemblages atomiques) au kilomètre, voire au–delà (écorce et manteau terrestres, planètes et étoiles). Chaque objet, même s'il a l'air tout à fait homogène, est en fait une **structure multi–échelles**, c'est–à–dire qu'il présente des niveaux d'hétérogénéité à différentes échelles que l'on pourra ou non modéliser par la mécanique des milieux continus selon les objectifs poursuivis. Les mêmes outils, développés dans le cadre conceptuel de la mécanique des milieux continus, pourront être utilisés pour un grand nombre problèmes à des échelles très variées.

1.1.1 Structures, microstructures, nanostructures

L'inventaire des structures dont s'occupent les ingénieurs et les chercheurs en mécaniques est aujourd'hui très large. Il s'étend sur toutes les échelles d'observation. On distingue

- Les **structures** à proprement parler : structures du génie civil qui font appel souvent au béton et à l'acier (figure 1.1(a)), composants et pièces industriels qu'il soient en alliages métalliques (aubes de turbines d'alternateurs ou de moteurs d'avion, figure 1.1(b), polymères (pièces moulées ou injectées de la vie courante), ou céramiques (fours, filtres...). Ces structures sont omniprésentes dans le transport, l'énergie, etc., et posent les problèmes de leur construction, fabrication, élaboration ou mise en forme, mais aussi de leur tenue en service (vibrations, charges limites, fatigue...). En particulier, on s'intéresse à l'équilibre de ces structures pour connaître les charges qu'elles supportent. On peut alors envisager s'il est possible d'optimiser la forme des pièces et le type de matériau utilisé en minimisant

le coût et l'impact sur l'environnement. Pour chacune de ces questions la mécanique des milieux continus est mise à contribution.

- Les **sols**, c'est–à–dire des **géomatériaux** mais aussi leurs revêtements. On peut aussi mentionner les problèmes de tenue à long terme de chaussées, de cavités de stockage ou d'extraction (mines, enfouissement des déchets...).
- Les **MEMS** (*micro-electro-mechanical sustems*) représentent depuis une dizaine d'années un domaine d'investigation affiché de la mécanique des milieux continus. Il s'agit d'assurer une élaboration de précision (contraintes résiduelles...) et de prévoir la tenue en service de composants de l'électronique par exemple, qui sont soumises à des sollicitations de fatigue thermomécanique sévères. Dans une large mesure, estimer la durée de vie d'un microprocesseur relève de la même science mécanique que le dimensionnement d'un joint de culasse automobile ! On rencontre en particulier des circuits d'interconnexion en cuivre (figure 1.1).
- Les **nanostructures** apparaissent comme l'aboutissement de la miniaturisation de nombreux systèmes mécaniques (figure 1.1(e)). Certaines molécules géantes, comme les nano–tubes de carbone de la figure 1.1(f) dont le panel d'applications possibles ne cesse de s'élargir, peuvent être traitées comme des objets de la mécanique des milieux continus (en l'occurrence des coques en grandes transformations élastiques) pour prévoir leur modes de déformation.

La connaissance des propriétés des matériaux et des structures nécessite la réalisation d'essais mécaniques dont la complexité et la richesse de l'exploitation augmente d'année en année. On distingue les essais sur **éprouvettes** dont l'objectif est la caractérisation des propriétés thermomécaniques d'un matériau, des essais sur structures dont on cherche à déterminer les points faibles. On donne en général une forme simple aux éprouvettes pour faciliter l'interprétation des résultats tandis que les essais instrumentés sont aujourd'hui possibles sur des structures très complexes. Le passage des informations de l'éprouvette à la structure est parfois délicat en raison de l'existence d'**effets d'échelles**. La rupture de pièces en béton ou en acier dépend en général du volume de matière sollicité en raison de la présence inévitable de défauts dont la répartition statistique doit être connue. Les questions de **fiabilité des structures** sont aujourd'hui au cœur des démarches de normalisation avec pour objectif des composants plus sûr dans les transports, l'énergie... Des notions probabilistes doivent alors être associées à la mécanique des milieux continus purement déterministe présentée dans ce cours.

1.1.2 Microstructures cristallines, granulaires, cellulaires

La notion de milieu continu envisagée contraste avec la nature intrinsèquement **discrète** des objets techniques ou naturels qui nous entourent. Le passage au continu est souhaité dans la mesure où il évite de considérer une multitude de détails au bénéfice de la connaissance de quelques fonctions présentant autant de régularité que possible. Il résulte d'abord d'un pari fait sur la matière mais aussi de conditions statistiques bien identifiées qui ne seront qu'évoquées dans cette introduction. Le caractère discret de la matière se manifeste sous la forme d'**hétérogénéités** présentes à toutes les échelles :

- **Structure cristalline.** Les atomes constituent l'échelle d'hétérogénéité indiscutable commune à tous les matériaux. Ils sont arrangés de manière ordonnée dans de nombreux matériaux métalliques et céramiques, ou désordonnée dans les verres, la plupart des polymères, les liquides et les gaz. La structure cristalline joue un rôle fondamental sur la déformation de ces solides aussi bien dans le cas de comportements linéaires que non linéaires. La figure 1.2(a) montre des rangées d'atomes observées au microscope électronique à transmission, qui définissent des orientations privilégiées du cristal. Lorsque cet ordre

s'étend à l'ensemble du solide, il s'agit d'un monocristal. On retrouve alors au travers des propriétés physiques macroscopiques (optiques, thermiques, électriques, mécaniques...) des symétries issues de la structure de la matière.

- **Structure granulaire.** En général les matériaux cristallins sont plutôt des assemblages de cristaux appelés grains, chaque grain possédant une orientation cristalline privilégiée. Il s'agit de **polycristaux**. Les grains sont séparés par des joints qui, en l'absence d'endommagement, garantissent la continuité du mouvement de la matière et la transmission d'efforts (figure 1.2(a)). La taille des grains varie en général entre 1μm et quelques mm voire centimètres. On en voit d'ailleurs souvent les reflets sur certaines pièces métalliques revêtues d'un dépôt de zinc par galvanisation (figure 1.2(b)). On cherche aujourd'hui à produire et utiliser des alliages à grains ultra–fins, voir nanométriques, en raison de leur extrême dureté et résistance à l'usure. La structure granulaire se retrouve aussi dans les roches et même, avec une structure plus complexe toutefois, dans les polymères semi–cristallins (figure 1.2(c) et (d)).
- **Structure cellulaire.** Les grains ne représentent pas la seule façon de paver l'espace tridimensionnel. On y parvient aussi à l'aide de l'assemblage de cellules (polyèdres) comme dans les mousses liquides ou solides. Les matériaux obtenus sont très légers mais considérablement plus souples. Cela permet de concevoir des structures légères comme les structures en nid d'abeilles (en aluminium sur la figure 1.2(e)), très utilisées dans l'aéronautique, dont la microstructure est strictement périodique et offre une forte rigidité selon l'axe des cellules. Pour absorber des chocs sous des charges limitées, on préférera les mousses de polyuréthanne très employées pour l'emballage et dont la microstructure est identique à celle présentée sur la figure 1.2(f) (cellules de dimension 0.5mm).

Les niveaux d'hétérogénéités imbriqués atomique et granulaire jouent chacun à sa façon un rôle décisif sur le comportement mécanique résultant. Par exemple, les cristaux individuels ont des propriétés **anisotropes**, c'est–à–dire dépendantes de la direction selon laquelle on les sollicite. Le polycristal, quant à lui, s'il contient de très nombreux grains avec des orientations très variées, pourra avoir des propriétés **isotropes**, i.e. indépendantes de la direction de sollicitation. Il est important alors de savoir statuer sur le degré de connaissance de la microstructure requis pour l'application mécanique visée.

On verra dans ce cours que la connaissance des propriétés de symétrie que présente le milieu étudié permet de préciser et de simplifier l'écriture des lois de comportement des matériaux. Les symétries des propriétés physiques et mécaniques sont étroitement liées aux symétries géométriques que peut présenter la microstructure du matériau. On montre par exemple que la symétrie hexagonale qui caractérise le nid d'abeilles de la figure 1.2(e) implique que le comportement élastique dans le plan de la figure est isotrope.

Ecoulements multiphasiques et fluides chargés

Les niveaux d'hétérogénéités sont différents mais existent bel et bien dans les fluides. Au–delà du niveau atomique, on est souvent confronté à l'écoulement de fluides possédant plusieurs constituants : mélanges liquides–gaz (sous forme de bulles), suspensions (particules transportées par un liquide, notamment dans les problèmes de filtration), émulsions (mélange de deux liquides, mayonnaise...), gels, états pâteux lors de la solidification... De tels mélanges peuvent être abordés par la mécanique des milieux continus avec un raffinement et une complexité de la théorie dépendant du type d'informations attendues.

Les écoulement de fluides chargés de particules ou de fibres sont mis à contribution pour fabriquer de nombreuses pièces en composites par injection de polymère fondu chargé par exemple de fibres de verre. Les propriétés de telles écoulements sont très complexes mais doivent

être connues avec suffisamment de précision pour éviter les défauts majeurs dans les pièces. Des modèles continus existent aujourd'hui capables de prévoir l'apparition d'orientations privilégiées des fibres lors de l'écoulement dans certaines parties du moule. On verra qu'un tel polymère chargé est un milieu qui tient à la fois du solide et du fluide...

Structures naturelles, matériaux du vivant, biomécanique

Les matériaux issus du monde du vivant (bois, cellulose...) ont des propriétés mécaniques séduisantes souvent associées à des microstructures complexes multi–échelles. La nature donne des idées aux élaborateurs de matériaux nouveaux. On mentionne le cas de composites polymères renforcés par des fibres de cellulose.

Les substituts des matériaux du vivant, appelés **biomatériaux**, ont été conçus pour remplacer des organes ou os défectueux. Il s'agit de matériaux du vivant (collagène, cellulose...) ou synthétiques biocompatibles (polymères, alliages de titane ou céramiques pour les prothèses de hanche...).

La bio–mécanique est une discipline bien établie qui s'appuie, d'une part sur la mécanique des solides rigides (modélisation des articulations et des mouvement du squelette par exemple) et, d'autre part, sur la mécanique des milieux continus déformables lorsqu'il s'agit par exemple de prévoir les déformations du corps humain lors d'un choc automobile. La figure 1.5 illustre une étude de l'élasticité de l'os trabéculaire à partir de la microstructure réelle tridimensionnelle de l'os.

L'écoulement du sang est quant à lui un problème redoutable puisqu'il s'agit d'un fluide chargés de globules dont la taille devient parfois non négligeable devant le diamètre de certains vaisseaux. Il existe dès lors toute une hiérarchie de modèles de fluide visqueux permettant de modéliser l'écoulement du sang avec un degré de précision variable et dans des conditions saines ou accidentelles.

1.2 Milieux continus ou presque...

La notion de point ou particule matérielle joue un rôle essentiel dans la modélisation du milieu continu. Il faut donc la définir aussi précisément que possible par rapport à la connaissance que l'on a acquise sur la microstructure des matériaux.

1.2.1 Le rêve de Laplace et la phénoménologie

L'idée de Pierre–Simon Laplace (1749–1827), énoncée à la fin du XVIIIème siècle, selon laquelle il doit être possible de décrire les phénomènes de la nature à partir de la connaissance des efforts à distance de molécule à molécule, a fortement marqué le développement exceptionnel de la mécanique des milieux continus en France dans la première moitié du XIXème siècle. Claude Navier (1785–1836) et Augustin–Louis Cauchy (1789–1857) ont adopté cette démarche pour établir les équations d'équilibre dans les milieux élastiques. Sans une vision claire de la structure et des interactions entre atomes dans les solides cristallins (on parlait alors de "l'hypothèse moléculaire")[1], ces deux géants de la mécanique ont pensé qu'il fallait déduire les équations de la mécanique macroscopique à partir de l'analyse des interactions entre particules élémentaires. A l'opposé, l'anglais Georges Green (1793–1841) propose une théorie purement **phénoménologique** du mouvement des solides élastiques qui consiste à relier directement

[1] Concernant l'histoire de la mécanique des milieux continus, on renvoie aux références (Timoshenko, 1983; Dugas, 1996).

les grandeurs de force et de mouvement définies à l'échelle du solide étudié, sans se soucier de la microstructure sous–jacente. On renvoie à l'ouvrage (Timoshenko, 1983) pour le récit de cette controverse des élasticiens du XIXième siècle. L'approche phénoménologique grâce à son pragmatisme est finalement celle adoptée en général dans les cours et la pratique de la mécanique des milieux continus depuis lors. Ses succès sont évidents dans la pratique.

Il est toutefois tentant aujourd'hui de remettre à l'ordre du jour la proposition de Laplace. La connaissance de la structure atomique ou moléculaire de la matière a atteint des raffinements inédits. Les ordinateurs offrent aujourd'hui des capacités de calcul vertigineuses, en particulier grâce au calcul parallèle. Les tentatives de construction mécanique du macroscopique à partir des informations issues des échelles micro et nanoscopiques se multiplient aujourd'hui sur les plans théoriques et numériques. Elles apportent indéniablement des informations fondamentalement nouvelles. Elles ne sauraient détrôner cependant la démarche phénomoménologique pour les deux raisons explicitées ci–dessous. Les approches "mécanistes" et phénoménologiques doivent donc se développer de concert avec leurs lots d'élucidations et de nouveaux concepts.

Ordres de grandeur des possibles

Les moyens de calculs actuels permettent de traiter 10^9 atomes en dynamique moléculaire en utilisant des machines massivement parallèles (Fivel and Forest, 2004a). Les volumes correspondants restent néanmoins petits puisque, si l'on considère un volume atomique typique des métaux (cubiques à faces centrées) de 0.01nm^3, un milliard d'atomes sont contenus dans une boîte de 215nm de côté. On est encore loin de pouvoir calculer ne serait–ce qu'un grain d'un polycristal métallique dont le volume dépasse en général $1\mu\text{m}^3$...

Les potentiels atomiques décrivant les interactions entre l'atome et son environnement sont en fait peu connus, en tout cas pour un nombre limité d'éléments et pour des régimes de températures limités. Il n'est pas encore possible de simuler de manière prédictive les propriétés mécaniques (modules d'élasticité, dilatation thermique) d'un acier inoxydable d'emploi pourtant quotidien... Les potentiels atomiques peuvent être calibrés sur des simulations de mécanique quantique (on parle de simulation *ab initio*) mais on reste alors au niveau de quelques dizaines d'atomes ou de molécules géantes comme l'ADN de la figure 1.3(a).

Il est donc hors de question de calculer la réponse d'une aube de turbine en service à l'aide de la dynamique moléculaire ! Il faudra donc avoir recours à des champs continus faisant abstraction des oscillations locales liées à la présence des atomes, mais aussi des grains de l'alliage polycristallin qui le constituent...

Systèmes dynamiques et instabilités

Les systèmes dynamiques sont des systèmes non linéaires d'équations différentielles. Les équations newtoniennes du mouvement de particules soumises à des forces extérieures telles qu'on les rencontre en dynamique moléculaire constituent des exemples de systèmes dynamique. Depuis Poincaré au moins, on sait qu'à partir de trois corps en présence même soumis à des efforts relativement simples, il n'est pas possible de prévoir la position à long terme des particules à partir de conditions initiales forcément entachées d'incertitude. De même, deux particules initialement infiniment proches pourront ne plus rester dans le voisinage l'une de l'autre au bout d'un temps fini. Les notions de bifurcation et de chaos ont défrayé la chronique scientifique dans les vingt dernières années Elles jouent un rôle fondamental pour suivre l'évolution de systèmes discrets de particules tels que les molécules en dynamique moléculaire et les milieux granulaires tels que les grains de sable de la figure 1.3. Ces bifurcations successives

conduisent à une auto–organisation du mouvement en structures dissipatives telles que les hiérarchies de tourbillons dans les fluides turbulents. De telles structures de déformations périodiques apparaissent aussi en plasticité dans les métaux. Il est alors vain de vouloir suivre le détail des mouvements de chaque particule et il est plus commode de chercher à remplacer le système discret par un système d'équations aux dérivées partielles portant sur un nombre fini limité de fonctions mais définies partout avec une régularité suffisante (continuité pour le moins, différentiabilité par morceaux).

La modélisation continue n'exclut nullement les bifurcations et les instabilités. Bien au contraire, la stabilité de l'équilibre d'une structure est un enjeu essentiel pour statuer sur sa tenue mécanique. Elle nécessite en général des analyses non linéaires.

1.2.2 Volume élémentaire pour la thermomécanique, représentation ponctuelle

On renonce donc à suivre individuellement les hétérogénéités et on introduit un volume élémentaire "glissant" dV centré autour de la position géométrique $\underline{\boldsymbol{X}}$ dans une espace affine euclidien, à un instant donné t_0. On distinguera alors deux situations :

- **cas des milieux à microstructure (sous–jacente)**, i.e. plutôt des solides. Alors on peut considérer que toutes les particules présentes à l'instant t_0 dans le volume élémentaire dV restent dans un même volume dv au cours du mouvement dont le centre de gravité $\underline{\boldsymbol{x}}(t)$ caractérisera la position de la **particule abstraite**, appelée aussi **point matériel** aux instants ultérieurs t. Il est possible en principe de définir géométriquement la microstructure autour du point $\underline{\boldsymbol{X}}$. Pour un milieu granulaire par exemple, ce volume dV doit contenir suffisamment de grains pour être représentatif de la microstructure. Le milieu sera dit **homogène**, ou plus précisément **statistiquement homogène** si les voisinages dV de tous les points $\underline{\boldsymbol{X}}$ sont semblables ou statistiquement indiscernables (autrement dit, même "nombre" de grains, même forme moyenne des grains, et autres fonctions morphologiques identiques). Le volume dV est donc un **volume élémentaire représentatif** du matériau. L'élément de volume dV doit cependant rester suffisamment petit devant les dimensions de l'objet macroscopique étudié afin de pouvoir appliquer les règles du calcul différentiel. Les inégalités suivantes doivent donc être vérifiées pour garantir la pertinence de l'approche continue proposée :
$$d \ll L_{VER} \ll L \tag{1.1}$$
où d, L_{VER}, L désigne respectivement la taille des hétérogénéités du milieux étudié, la taille du volume élémentaire représentatif, et une dimension caractéristique de la structure étudiée[2]. C'est l'approche dite lagrangienne du mouvement.
- **cas des milieux sans microstructure**, i.e. plutôt des fluides. Les particules sont non identifiées et interchangeables. On ne cherchera pas alors à suivre la transformation d'un volume initial dV. On considérera plutôt à chaque instant la moyenne des vitesses des particules se situant à chaque instant dans un voisinage dv de tout point géométrique $\underline{\boldsymbol{x}}$. Dans ce cas, des particules matérielles entrent et sortent constamment du volume élémentaire dv. On reconnaît l'approche eulérienne utilisée en mécanique des fluides.

Dans le cas des écoulements laminaires, on verra que l'approche eulérienne et l'approche proposée pour les milieux à microstructures sont équivalentes de sorte que ces deux démarches

[2] Il serait plus correct en fait de remplacer la longueur L par la longueur d'onde minimale L_ω des sollicitations macroscopiques imposées. Cela exclut par exemple la validité de l'approche continue si l'on fait se propager dans un polycristal des ondes élastiques dont la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la taille de grain. On y reviendra lors de l'étude de la propagation des ondes dans les milieux élastiques.

ne peuvent pas servir à définir les fluides et les solides en mécanique des milieux continus. On précisera cette distinction dans ce cours plutôt au niveau du comportement du milieu étudié. Dans le cas turbulent, le cadre de ce cours restera insuffisant.

Lorsque le milieu matériel possède une microstructure bien identifiée, on peut se demander s'il sera suffisant de ne considérer que la transformation qui fait passer de $\underline{\boldsymbol{X}}$ à $\underline{\boldsymbol{x}}$ pour décrire les propriétés mécaniques du milieu. Dans de nombreuses situations, cette approche simplifiée s'avère effectivement satisfaisante. Toutefois, on peut être amené à enrichir la description du milieu continu en ajoutant ce que l'on appellera des **variables internes** sensées caractériser certaines propriétés de la microstructure sous–jacente (tenseur d'orientation pour un composite à fibre par exemple, représentant les orientations privilégiées des fibres), ou bien de véritables degrés de liberté supplémentaires comme dans le cas des cristaux liquides pour lesquels il faut suivre non seulement le mouvement mais aussi l'évolution des orientations privilégiées. On ne présentera pas ces raffinements dans ce cours. Le cas des variables internes sera abordé dans le cours de mécanique des solides (Cailletaud, 2003).

1.2.3 Fissures, discontinuités et singularités

En mécanique des milieux continus, on va donc suivre la transformation du milieu $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$ en exigeant certaines régularités pour la fonction Φ, à savoir continuité et différentiabilité (par rapport aux variables d'espace et de temps). On supposera aussi que la transformation est bijective de sorte que $\underline{\boldsymbol{X}} = \Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$, ce qui permet d'identifier les deux approches introduites au paragraphe précédent. Ces hypothèses sont précisées et commentées dans le chapitre suivant. Les grandeurs mécaniques seront alors définies comme des **champs**, c'est–à–dire des fonctions scalaires (densité de masse), vectorielles (directions et forces) ou tensorielles d'ordre plus élevé prenant des valeurs en tout point matériel $\underline{\boldsymbol{X}}$ ou $\underline{\boldsymbol{x}}$.

Ce modèle continu n'exclut cependant pas l'existence de discontinuités ou de singularités. Mais celles–ci ne seront possibles qu'en des points, lignes ou surfaces isolées, i.e. des ensembles de mesure nulle. La présence d'un trou dans un milieu homogène ne remet pas en cause la continuité de la transformation du milieu qui suivra. Des conditions aux limites spécifiques devront simplement être vérifiées au bord du trou. Le problème de l'apparition spontanée d'un trou (cavitation) est plus délicat mais s'intègre tout à fait dans le modèle continu proposé, on le verra.

Une fissure représente une surface de discontinuité de la transformation mais son traitement reste dans le champ d'application de la mécanique des milieux continus. La pointe de la fissure peut constituer une singularité des champs (certaines variables deviennent infinies), mais une telle singularité le long d'une ligne peut être décrite en restant dans le cadre de ce cours. C'est l'objet de la mécanique de la rupture.

Les discontinuités existent aussi dans les fluides. On peut mentionner le cas du **sillage** d'un corps dans fluide en mouvement, constitué d'une portion de fluide au repos (ou tourbillonnaire) à l'arrière de l'obstacle, sur laquelle vient glisser le fluide en mouvement contournant l'obstacle. En particulier, les particules ne traversent pas la surface de discontinuité. Au contraire, au travers d'une **onde de choc**, les particules acquièrent une violente accélération.

Dans la réalité physique, les discontinuités au travers d'une surface sont en fait associées à des variations brutales des grandeurs mécaniques mais continues. Ils s'agit de **couches limites** correspondant à de forts gradients des grandeurs mécaniques. Dans certains cas, une étude détaillée de la couche limite pourra être nécessaire. L'idéalisation de la présence de gradients intenses par une discontinuité représente en général une simplification efficace dans la pratique.

Plus généralement, certains champs mécaniques pourront subir des discontinuités au travers d'interfaces entre différents matériaux ou phases en présence. Les équations de bilan permettront

d'ailleurs d'établir des relations que doivent satisfaire les discontinuités possibles.

1.2.4 La vraie nouveauté : le tenseur des contraintes

La démarche atomistique a effectivement guidé Cauchy pour construire une représentation continue des efforts de cohésion dans un milieu continu. Les interactions entre molécules étaient modélisées alors par de simples ressorts. La représentation vectorielle classique des efforts n'est pas suffisante, on le verra, et c'est d'un tenseur d'ordre deux (identifiable à une application linéaire ou à une forme bilinéaire, voir l'annexe A) dont on aura besoin. La notion de tenseur des contraintes (on a dit *tenseur des tensions* encore jusqu'au milieu des années 1950) est radicalement nouvelle et représente la difficulté majeure de ce cours. Cela explique qu'elle n'ait émergé qu'au début du XIXième siècle c'est–à–dire bien après les révolutions galiléenne et newtonienne de la mécanique, et après les premiers développements de l'hydrodynamique.

1.3 Le problème de fermeture et la variété des comportements

1.3.1 Corps indéformables

Le mouvement de corps rigide, composition d'une rotation et d'une translation, est un exemple de transformation simple du milieu continu. Il conserve bien entendu les longueurs et les angles de tous les segments matériels considérés sur le solide. On étudiera en détail cette cinématique au paragraphe 2.2.7. Le mouvement de corps rigide dans son ensemble est entièrement décrit par 6 degrés de liberté : 3 composantes de translation et 3 angles de rotation. Ces grandeurs interviennent alors explicitement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, i.e. 6 équations scalaires. Lorsque le torseur des efforts appliqués est connu, on est donc en mesure de déterminer sans ambiguïté le mouvement du corps rigide. Ces mouvements sont les seuls possibles pour les solides indéformables et la théorie mécanique correspondante est donc "fermée".

Il n'en va pas de même en général lorsque les corps sont déformables. En effet, l'expérience courante nous apprend qu'un même torseur des efforts appliqués à deux composants de géométrie identique mais constitués de matériaux différents (caoutchouc et acier pour fixer les idées) ne conduit pas aux mêmes changements de forme. On en déduit que les équations de bilan (quantité de mouvement et moment cinétique, mais aussi, plus généralement, bilans de masse et d'énergie) ne suffisent pas pour déterminer la déformation du milieu continu. C'est le problème dit de fermeture de la mécanique des milieux continus. Les équations manquantes sont appelées **lois de comportement**.

On pourrait se dire qu'il suffit d'appliquer les lois de Newton à un petit domaine autour de chaque point matériel d'un corps déformable. L'approche est correcte. Encore faut–il pouvoir décrire alors les efforts d'interaction avec le voisinage du domaine. On a déjà évoqué le fait que la description de ces efforts intérieurs est la difficulté majeure de l'approche et qu'elle a été surmonté pour la première fois par Cauchy. L'introduction du tenseur des contraintes confirme en fait, on le verra, la nécessité de lois de comportement.

1.3.2 Lois de comportement

Le comportement thermomécanique des matériaux présente de multiples facettes : élasticité de l'acier d'un ressort, viscosité d'un fluide visqueux tel que l'huile, plasticité d'un alliage

d'aluminium pour boîte boisson... Une démarche axiomatique et systématique qui guide l'écriture des lois de comportement est esquissée dans le cours. Il s'agit d'une approche récente datant du début des années 1960 pour l'introduction de la notion de fonctionnelle d'histoire du matériau, et des années 1980 pour l'introduction du concept de variable interne qui a déjà été évoqué. Les développements dans le domaine du développement des lois de comportement pour les matériaux les plus variés foisonnent aujourd'hui et témoignent de la vitalité de cette branche de la mécanique aujourd'hui.

Il n'existe pas de loi de comportement unique et intrinsèque mais bien plutôt toutes une panoplie de lois qui pourront être alternativement pertinentes pour le matériau étudié selon les conditions de sollicitations et les échelles de temps et d'espace considérées. Une même roche par exemple pourra être traitée comme un solide élastique pour un problème de génie civil et comme un fluide visqueux en tectonique... Le verre à froid sera traité comme un solide élastique fragile pour le dimensionnement à l'impact d'un pare–brise de voiture, tandis qu'il sera traité comme un fluide visqueux non linéaire lors du calcul de la mise en forme du même pare–brise à plus haute température...

On proposera une définition purement phénoménologique des notions de fluide et de solide, définition qui n'épuise pas l'ensemble des comportements observés dans les matériaux de l'ingénieur et de la nature. Il existera en particulier des comportements complexes de matériaux pourtant très répandus qui tiennent à la fois du fluide et du solide.

Les lois de comportement sont intégrées au calcul de structures et composants industriels grâce à la méthode des éléments finis, dont quelques exemples sont illustrés sur la figure 1.4.

1.4 Plan du cours

1.4.1 Plan du cours oral

La présentation orale introduit en premier lieu la notion de contrainte car c'est le concept le plus nouveau du cours. La description de la cinématique du milieu continu et donc de sa déformation est plus descriptive. On montre ensuite la nécessité d'introduire des lois de comportement et les règles à respecter lorsqu'on les écrit. Les exemples de lois de comportement concernent uniquement l'élasticité dans ce cours, d'abord dans le cas général, puis dans le cas des transformations infinitésimales.

C'est seulement arrivé à ce point du cours que l'on peut commencer à résoudre de vrais problèmes d'équilibre linéarisé des corps thermoélastiques. Il faudra donc s'armer de patience et en apprécier le suspense... Les problèmes incontournables de traction, flexion, torsion et de réservoirs sous pression constituent les applications fondamentales du cours et sont traités en Petites Classes. Des ouvertures sur des problèmes plus ambitieux encore seront évoqués et certains sont proposés dans le recueil de problèmes rédigés par M. Amestoy.

1.4.2 Plan du cours écrit

Le cours écrit suit une démarche désormais classique en mécanique des milieux continus. Les deux premiers chapitres sont en fait indépendants l'un de l'autre. L'un analyse les déformations des milieux continus, l'autre le tenseur des contraintes. Un chapitre complet est ensuite consacré à la manipulation du tenseur des contraintes. Le chapitre 5 est sans doute le plus difficile d'accès mais a une portée très générale : il détaille les grands principes qui président à l'écriture des lois de comportement en transformations finies.

Pour illustrer le cours de mécanique des milieux continus, on se concentre sur l'analyse du comportement élastique des matériaux et des structures, d'abord dans le cas général (chapitre

6) puis dans le cas linéarisé (chapitre 7). L'accent est mis sur l'analyse du problème de l'équilibre des corps thermoélastiques linéaires. L'enjeu est de taille puisqu'il s'agit de la question de la tenue en service des composants et structures industriels.

Le cours écrit se veut un *handbook*, c'est–à–dire qu'il présente une certaine exhaustivité que ne pourra avoir le cours oral dans le nombre de séances limité imparti. Téléchargeable depuis le site web mms2.ensmp.fr, il peut être consulté à chaque instant par un étudiant en stage rencontrant un problème de mécanique des milieux continus. Notre espoir est qu'il y trouve un élément de réponse ou une référence bibliographique qui puissent débloquer une situation et amorcer la démarche de résolution.

Il est par conséquent de lecture difficile à certains endroits. Une première lecture se limitera aux éléments vus explicitement dans le cours oral.

1.4.3 Liens avec les autres cours de l'Ecole des Mines de Paris

Le cours de mécanique des milieux continus nourrit des liens avec de nombreux cours proposés aux élèves–ingénieurs de l'Ecole de Mines de Paris. C'est le cours introductif à

- la mécanique des matériaux solides 3122 ;
- la thermomécanique des fluides 3243 ;

Il fait appel à des notions qui seront développées dans le détail en

- Mathématiques 1201 - 1121 - 1132 (calcul différentiel, équations aux dérivées partielles, distributions...) ;
- Thermodynamique 2411 ;
- Matériaux pour l'ingénieur 6134 ;
- Cristallographie S2333.

Des prolongements importants pour la pratique se trouvent dans les enseignements spécialisés

- Mécanique des milieux continus 2 S3324 ;
- Dynamique des constructions S3933 ;
- Mise en œuvre des polymères ;
- Géomécanique et géologie de l'ingénieur S4633 ;
- Hydrogéologie S4923 ;
- Calcul scientifique S1923 ;
- Eléments finis S3733 - S3735 ;
- Physique des solides S2634 ;
- Géométrie différentielle S1524 ;

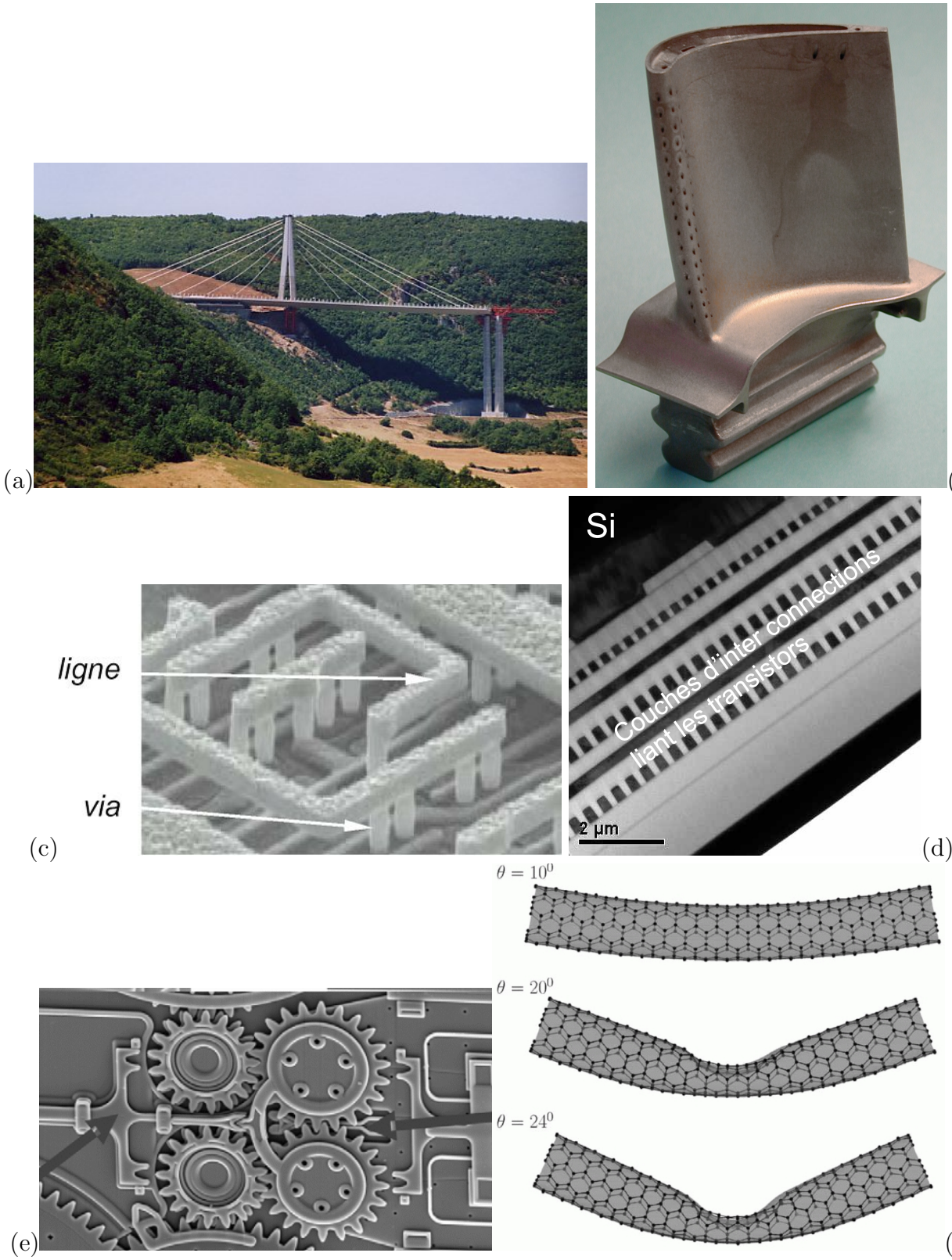


FIG. 1.1 – **Structures** : (a) une pile du viaduc de Millau (pont à haubans), (b) aube de turbine haute pression de moteur d'avion. **Micro–structures** : composant électronique, (c) réseau de connections en cuivre, (d) structure multicouches d'un microprocesseur (source : M.-H. Berger, Centre des Matériaux). **Nano–structures** : (e) nanoengrenages en polysilicium (diamètre des engrenages : 7μm, d'après (Romig et al., 2003)), (f) déformation en flexion de nanotubes de carbone (les points désignent les atomes de carbone et les traits les liaisons covalentes, d'après (Arroyo and Belytschko, 2002)).

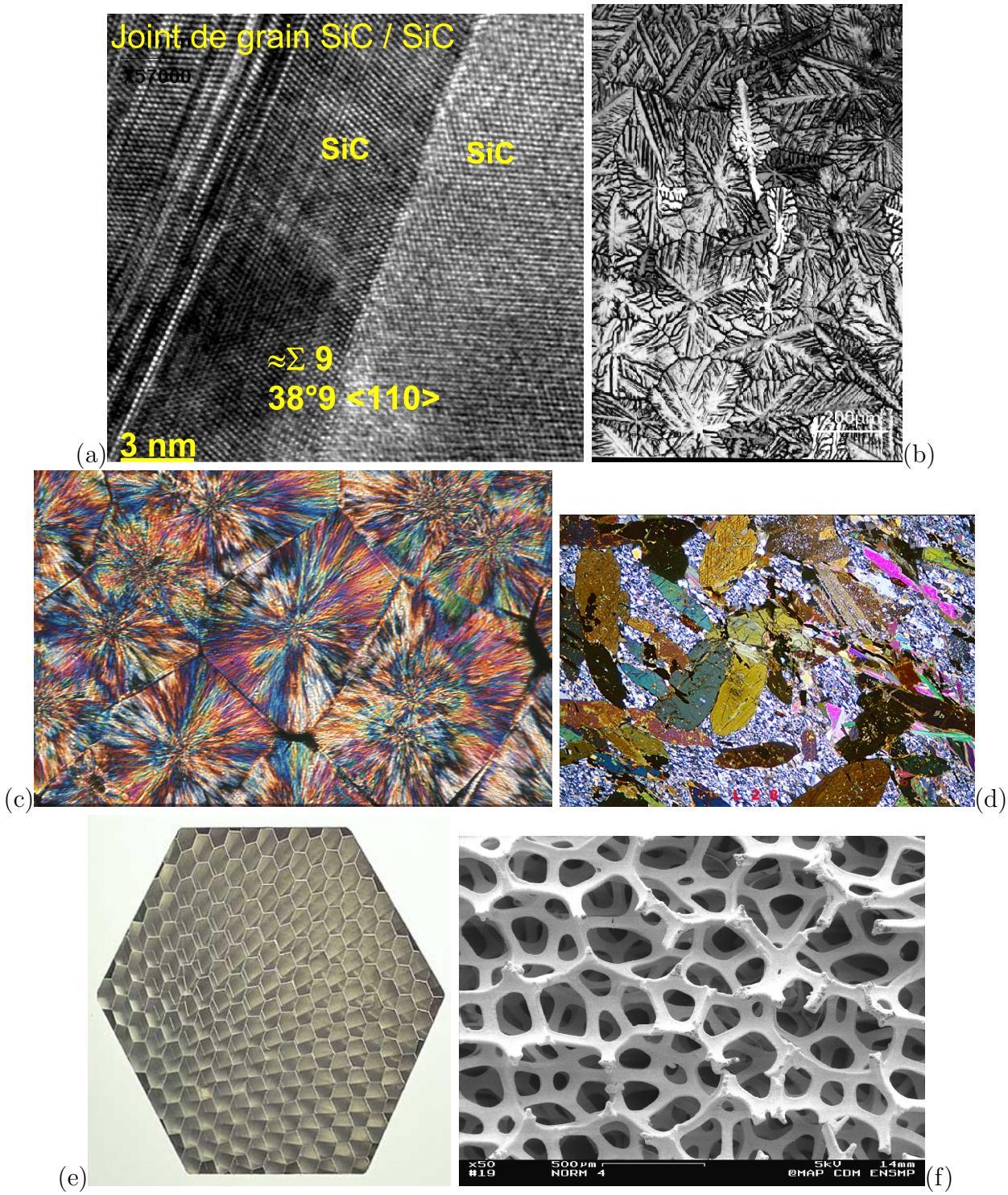


FIG. 1.2 – Microstructures de quelques matériaux solides granulaires : (a) joint de grains dans un carbure de silicium, les rangées atomiques sont clairement visibles de part et d'autre du joint de grain (source : M.-H. Berger, Centre des Matériaux), (b) grains de zinc d'un revêtement d'une tôle d'acier galvanisée pour l'automobile (on voit aussi les dendrites de solidification), (c) sphérolites dans un polymère semi–cristallin (microscopie optique en lumière polarisée, source N. Billon, Cemef), (d) coupe minéralogique d'une roche (microscopie optique en lumière polarisée, source http ://users.skynet.be/jm-derochette/), (e) nid d'abeilles en aluminium, (f) mousse de nickel à porosité ouverte utilisée dans le batteries de téléphone portable.

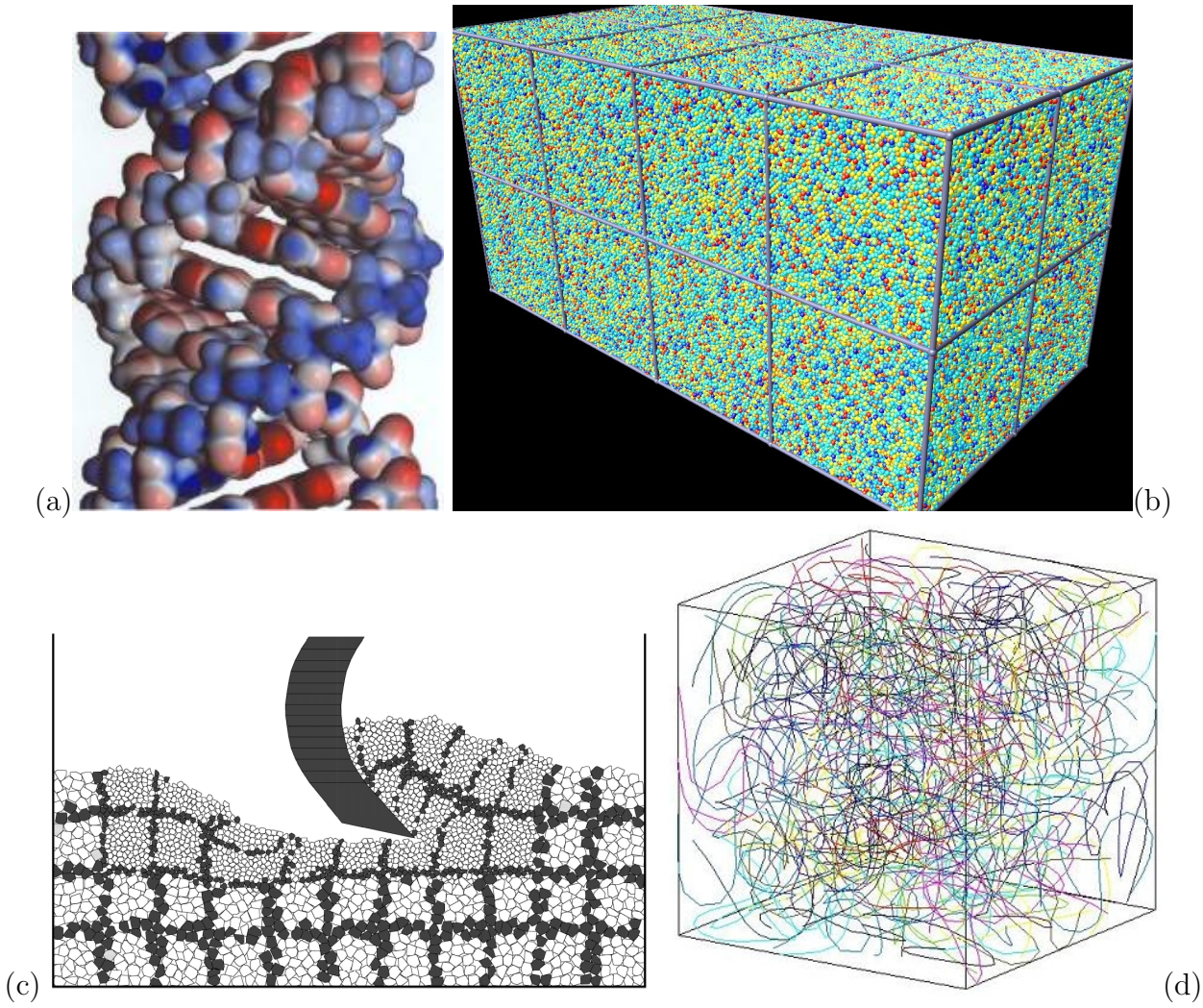


FIG. 1.3 – Modélisations mécaniques discrètes de la matière : (a) mécanique quantique (calcul *ab initio* d'une portion d'ADN, les couleurs indiquent l'intensité de la fonctionnelle densité électronique), (b) dynamique moléculaire (interaction entre des millions d'atomes d'un milieu amorphe, la couleur indiquant le niveau d'énergie cinétique), (c) milieux granulaires (simulation de l'action d'une pelle sur un milieu granulaire formé de grains polygonaux anguleux, certains grains sont marqués pour pouvoir suivre leur mouvement (source C. Nouguier, LTDS, Ecole Centrale de Lyon), (d) simulation de l'enchevêtrement de fibres élastiques (feutres) soumises à une compression simple (source R. Dendievel, GPM2–INPG, Grenoble).

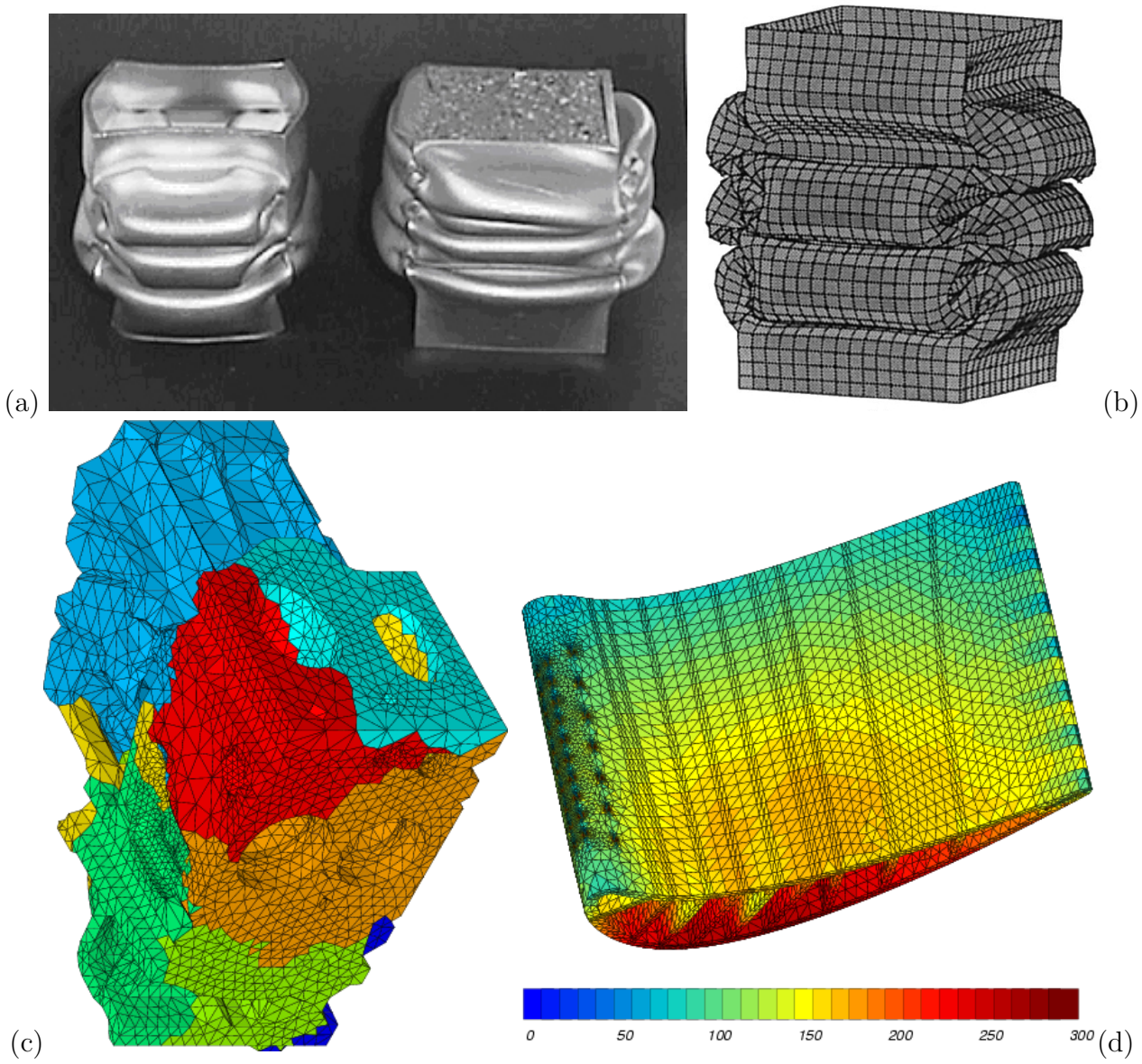


FIG. 1.4 – Simulations numériques et modèles mécaniques continus des matériaux et des structures : (a) champ de contraintes dans un composite à fibres longues et parallèles, (b) ruine par flambage d'un profilé métallique, (c) calcul d'une culasse automobile (les couleurs indiquent la décomposition du maillage pour le calcul parallèle, source S. Quilici, Centre des Matériaux), (d) calcul thermomécanique d'une pale d'aube de turbine avec son circuit de refroidissement (champ de contrainte équivalente de von Mises, valeurs en MPa). Les structures sont divisées en éléments au sommet desquels les grandeurs mécaniques sont calculées. Pour connaître leurs valeurs en tout point, on utilise des fonctions d'interpolation (polynômes de Lagrange par exemple). On renvoie à l'enseignement spécialisé (Cailletaud et al., 2004) pour la description détaillée de ces méthodes numériques en mécanique des milieux continus (méthode des éléments finis).

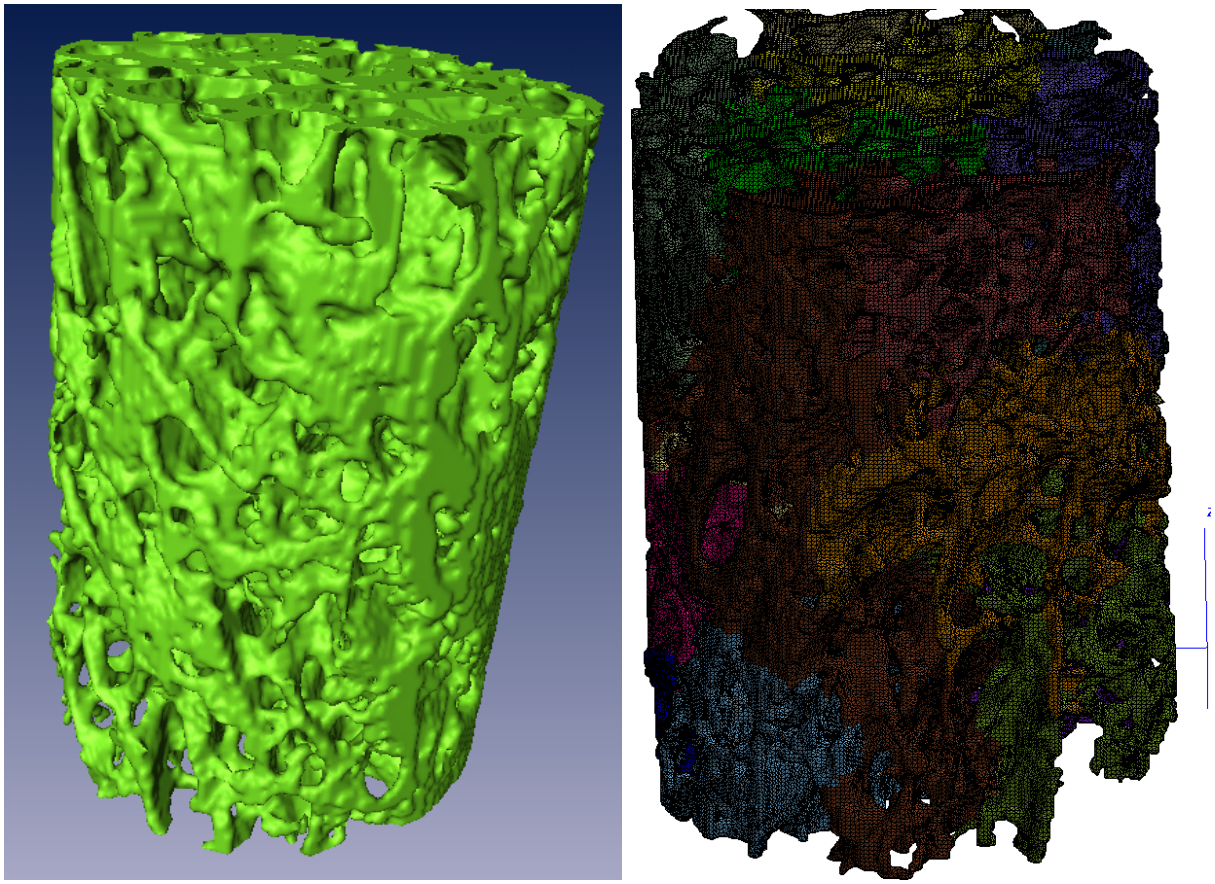


FIG. 1.5 – Biomécanique et mécanique du vivant : vue tomographique 3D d'une portion d'os trabéculaire (à gauche) et sa modélisation par éléments finis en vue de la détermination des propriétés élastiques de l'os à différents stades de l'ostéoporose (à droite, source, Kamel Madi, Centre des Matériaux, et Alain Gasser, Polytech'Orléans). Les couleurs sur le maillage correspondent aux sous–domaines pour le calcul parallèle (6 millions d'inconnues). Le diamètre de l'échantillon est de 2.2 mm.

Chapitre 2

Transformations du milieu continu

2.1 Enjeux physiques et faits expérimentaux

Les changements de forme des matériaux ou des structures jouent un rôle essentiel dans les procédés de fabrication de composants industriels mais aussi dans leur tenue en service. La figure 2.1a montre un réseau régulier de cercles tracés sur une tôle d'acier galvanisée destinée à l'emboutissage de pièces dans l'industrie automobile (portières, ailes...). Un exemple d'embouti obtenu à partir de cette tôle par poinçonnement est donné sur la figure 2.1. On constate sur cette pièce que les cercles ont gardé leur forme initiale dans certaines zones et sont devenues des ellipses dans d'autres. La "déformation" de la pièce n'a donc pas été homogène. L'objectif de ce chapitre est de mettre des concepts et des chiffres derrière le mot déformation. L'enjeu est alors de déterminer quelles sont les déformations critiques que peut supporter une telle tôle avant de rompre localement.

Pour mieux étudier les changements de formes de l'acier qui constitue la pièce précédente, on fait appel à des essais mécaniques plus simples que le précédent, et notamment l'essai de traction de la figure 2.2 qui consiste à allonger une bande de métal d'une certaine quantité à l'aide d'une machine de traction. La figure 2.2a montre la machine et l'électronique de contrôle nécessaires. La machine possède un vérin horizontal qui sous pression hydraulique, peut se déplacer vers le bas et allonger une éprouvette fixée à deux mors d'amarrage. Le montage de l'éprouvette est sur la figure 2.2b. Il s'agit d'une bande de tôle avec des têtes élargies permettant de l'amarrer par simple serrage à l'aide de vis. Deux méthodes de mesures de déplacement de la matière sont illustrées sur la figure. Une mesure ponctuelle d'abord, à l'aide d'un extensomètre constitué d'un boîtier solidaire de l'échantillon par l'intermédiaire de deux tiges en contact avec l'éprouvette. On voit d'ailleurs des élastiques assurant ce contact sans déformer ni endommager l'éprouvette. Dans le boîtier se trouve un filament parcouru par un courant, en général à tension imposée et qui va s'allonger en même temps que l'éprouvette par l'intermédiaire des tiges rigides. Cette variation de forme du filament s'accompagne d'une variation de courant qui est proportionnelle à l'allongement et qui permet donc, après calibration, de le mesurer. L'objectif de cette mesure ponctuelle est de connaître le déplacement relatif entre les deux points de contact au cours de l'essai de traction. La figure 2.2c montre l'état initial de la bande de métal et la figure 2.2d illustre un état déformé. On voit que l'éprouvette s'est allongée : la longueur entre les élastiques a varié d'environ 10% et on note une légère réduction de section.

La deuxième méthode de mesure de déplacements est une mesure de champ à partir d'images de l'éprouvette obtenues à l'aide de la caméra visible sur la figure 2.2a. L'objet est d'obtenir non pas le déplacement relatif de deux points seulement mais de tout un champ situé sur l'image. Pour cela on sélectionne un réseau de points sur l'image initiale. Ces points sont marqués d'une croix sur la figure 2.3a. Pour pouvoir suivre ces points pendant la déformation,

l'éprouvette est recouverte d'une peinture contenant des pigments noirs et blancs. Le résultat est une distribution aléatoire de niveaux de gris sur l'éprouvette (voir figure 2.2c par exemple). Un programme numérique de traitement d'images permet d'associer à chaque croix le motif de niveaux de gris autour de chaque point et de le retrouver sur les image déformées. Il est alors possible de reconstruire la grille après une déformation de 10% par exemple et de la superposer sur la grille initiale (figure 2.3b). Ces deux états correspondent exactement aux états des figures 2.2c et d. Par interpolation, on peut reconstruire le champ de déplacement sur l'ensemble de la zone observée. Les figures 2.3c et d donnent les champs de déplacement vertical u_2 et horizontal u_1. On constate que les lignes de niveaux du déplacement vertical sont quasiment des droites parallèles et horizontales, i.e. presqu'indépendantes de la position x_1. De même, on constate que les lignes de niveaux du déplacement horizontal sont quasiment des droites parallèles et verticales, i.e. presqu'indépendantes de la position x_2. Pour conforter cette impression, on trace u_2 (resp. u_1) en fonction de la position x_2 (resp. x_1) sur la figure 2.4a (resp. 2.4b). Les profils obtenus sont quasiment linéaires :

$$u_2(x_1, x_2) = Ax_2 + Cste, \quad u_1(x_1, x_2) = Bx_1 + Cste \tag{2.1}$$

Dans l'exemple, la constante A est positive et vaut 0.08, la constante B est négative et vaut -0.045. L'intérêt d'introduire ces grandeurs $A = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$ et $B = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$ est que le déplacement varie d'un point à l'autre tandis que les composantes A, B du gradient du déplacement par rapport aux coordonnées sont quasiment uniformes et caractérisent donc tout la zone étudiée. Plutôt que de parler du déplacement de points particuliers, il suffira pour décrire l'essai réalisé d'indiquer les valeurs de A et B. Cette opération de gradient appliqué au champ de déplacement dû à un changement de forme d'un corps matériel est effectivement la notion essentielle qui va être utilisée dans la suite pour définir et étudier la déformation de la matière.

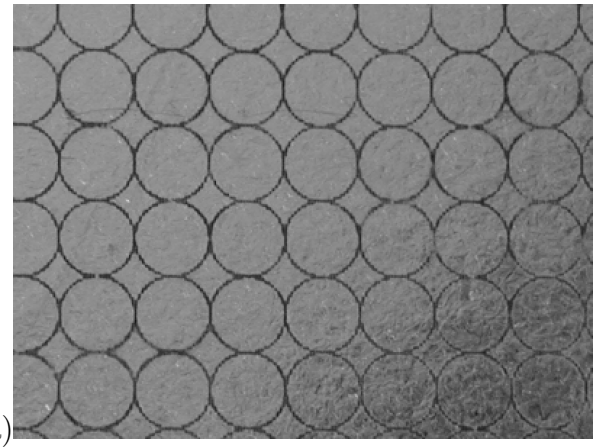
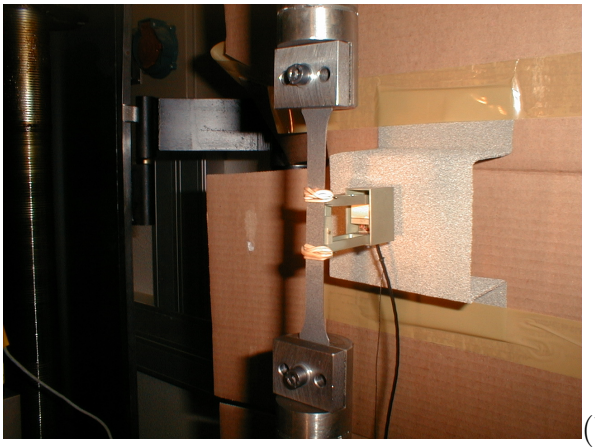
(a)  (b)

FIG. 2.1 – Mesures de déformations à l'aide d'un réseau de cercles gravés électrolytiquement sur une tôle en acier galvanisé : (a) réseau initial au centre la tôle, (b) échantillon déformé par emboutissage.

2.2 Géométrie et cinématique du milieu continu

2.2.1 Observateurs et référentiels

La description détaillée des phénomènes physiques est soumise à la possibilité d'effectuer des mesures. Celles–ci sont rendues possibles par l'introduction de **référentiels** d'espace et de

(a)  (b)

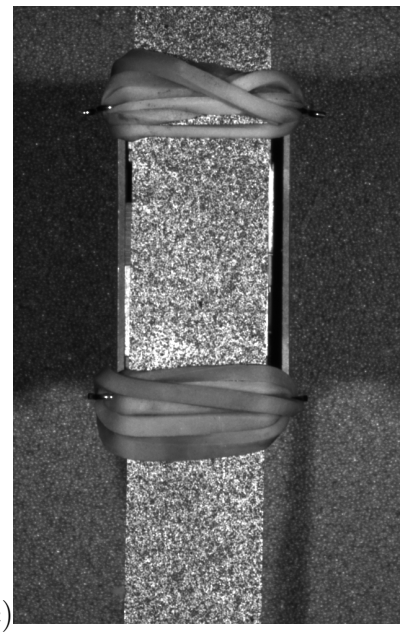
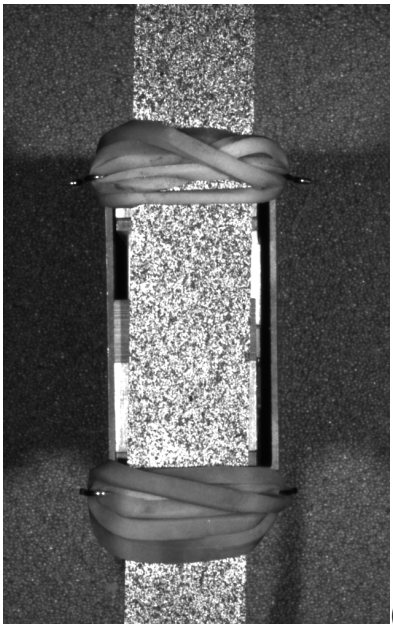
(c)   (d)

FIG. 2.2 – Mesure de déplacement relatif lors d'un essai de traction : (a) vue d'ensemble de la machine de traction (électronique, bâtis, appareil photo avec zoom, fond en carton+métal pour améliorer la qualité des photos), (b) vue du montage : éprouvette, mors d'amarrage et extensomètre deux points (les élastiques assurent le bon contact entre les bras de l'extensomètre et l'éprouvette plate sans déformer ni endommager l'éprouvette), (c) état initial de la zone utile de l'éprouvette, (d) état final. La largeur de l'éprouvette est de 12mm.

temps. Dans le cadre de la mécanique classique (non relativiste), temps et espace physiques sont considérés comme indépendants : le temps est paramétré sur l'axe des réels et l'espace physique est assimilé à un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, d'espace vectoriel associé E de dimension 3. Un référentiel ou **observateur** $\mathcal{R}$ est alors le choix d'une "vision rigidifiée" de l'espace et d'une chronologie. Choisir un référentiel c'est en effet choisir un trièdre rigide servant de poste d'observation. On distinguera le choix d'un référentiel du choix du système de coordonnées dans lequel on souhaite exprimer les composantes des grandeurs mathématiques introduites. Des référentiels privilégiés sont **les référentiels galiléens** dits aussi **référentiels d'inertie**, dont l'existence est postulée par la première loi de Newton. On se réserve la possibilité de changer d'observateur à volonté quand cela peut faciliter la modélisation. On distingue deux classes de changements de référentiels privilégiés :

- les **transformations galiléennes** : on passe d'un référentiel $\mathcal{R}$ à un autre $\mathcal{R}'$ par une

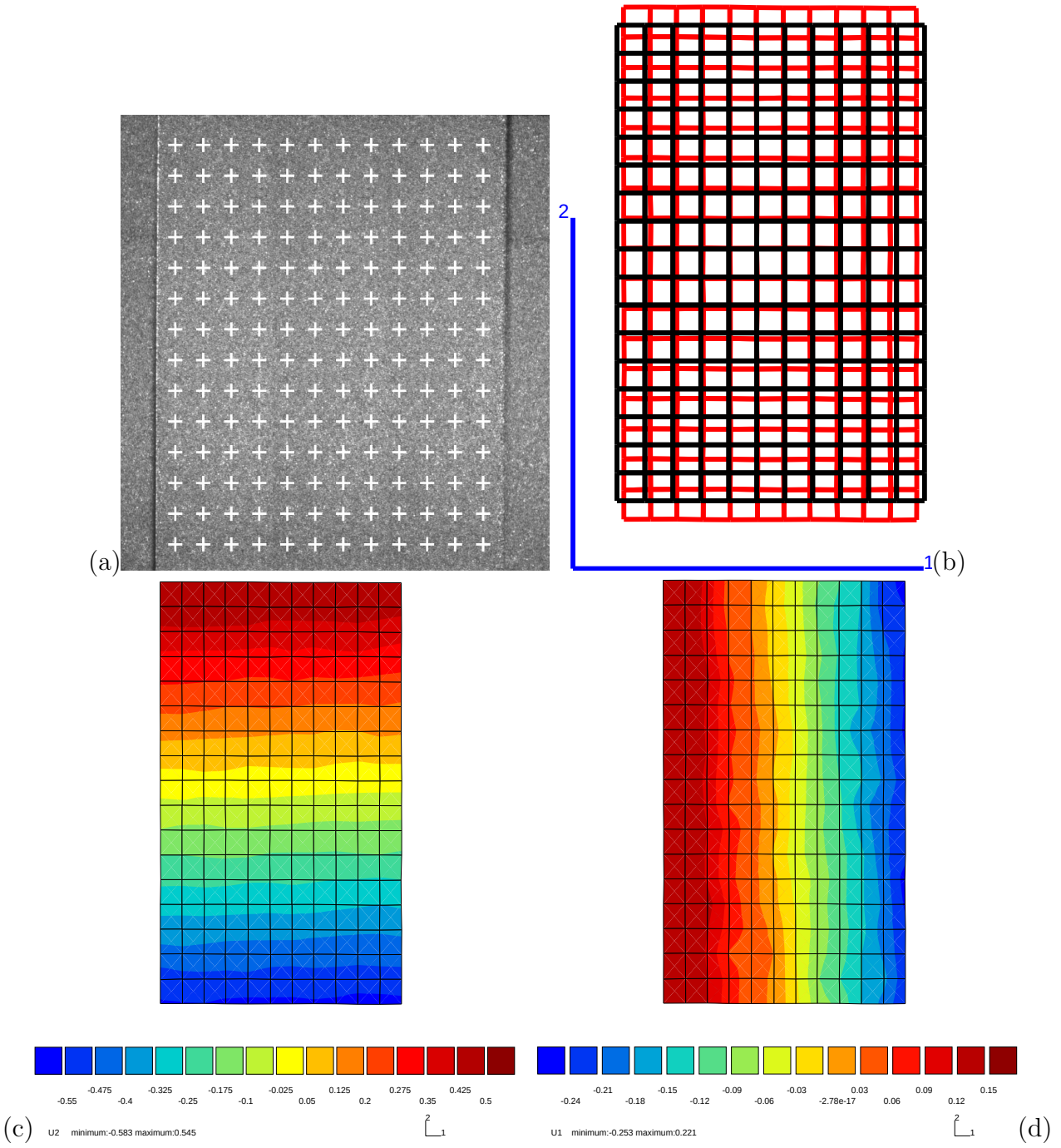


FIG. 2.3 – Mesure de champ de déplacement lors d'un essai de traction par corrélation d'images : (a) repérage régulier de motifs sur la surface de la zone utile de l'éprouvette de la figure 2.2, à l'aide d'une grille virtuelle, les niveaux de gris variables sur l'image sont dus au dépôt d'un peinture (b) superposition de la grille en fin d'essai (grille rouge) sur la grille initiale (grille noire) ; les déplacements des nœuds de la grille ont été déterminés par un algorithme de corrélation d'images ; (c) isovaleurs du champ de déplacement u_2, (d) isovaleurs du champ de déplacement u_1. La zone étudiée est un rectangle de largeur 10mm et de longueur 15mm. Une alternative à la méthode de corrélation d'images consiste à déposer ou à graver directement une grille sur la surface de l'échantillon comme sur la figure 2.1.

transformation de la forme

$$\underline{\boldsymbol{x}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{v}}_0 t, \quad t' = t - t_0 \tag{2.2}$$

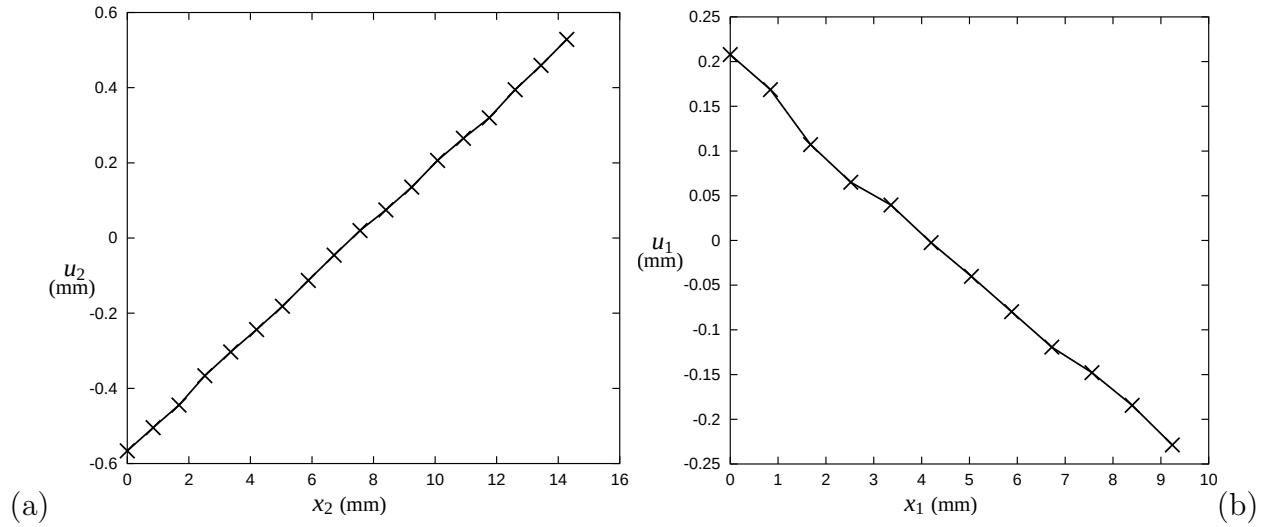


FIG. 2.4 – Mesure de champ de déplacement lors d'un essai de traction par corrélation d'images : (a) profil de déplacement u_2 le long d'une ligne verticale tracée sur la figure 2.2c ; (b) profil de déplacement u_1 le long d'une ligne horizontale tracée sur la figure 2.2d.

où $\underline{\boldsymbol{x}}$ et $\underline{\boldsymbol{x}}'$ désignent un point de l'espace vu par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement. Le vecteur vitesse $\underline{\boldsymbol{v}}_0$ et la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ sont uniformes et constants.

- les **transformations euclidiennes**, pour lesquelles

$$\underline{\boldsymbol{x}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{c}}(t), \quad t' = t - t_0 \tag{2.3}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ est un tenseur orthogonal dépendant du temps. Ce changement de référentiel préserve les distances et les intervalles de temps. On se limite en général aux transformations euclidiennes qui préservent aussi l'orientation : la transformation orthogonale $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ directe ($\det \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = 1$) est une rotation et appartient au groupe spécial orthogonal $GO^+(\tilde{E})$ (lire le paragraphe A.4.1).

2.2.2 Placement du corps matériel

La mécanique des milieux continus a pour objet l'étude du mouvement dans l'espace physique de **corps matériels** en satisfaisant des conditions de continuité mentionnées au chapitre 1. Du point de vue physique, un corps matériel $\mathcal{M}$ est un ensemble de **particules ou points matériels**. Du point de vue mathématique, il s'agit d'une **variété différentiable** munie d'un bord, c'est–à–dire d'un sous–ensemble de $\mathcal{E}$ muni d'un paramétrage local, que l'on supposera presque partout différentiable, à l'aide de 1, 2 ou 3 paramètres indépendants selon que l'on s'intéresse à des corps à 1, 2 ou 3 dimensions. Le bord de $\mathcal{M}$ sera noté $\partial\mathcal{M}$. En tant qu'ensemble de particules physiques (mais aussi en tant que variété différentiable), un corps matériel existe indépendamment de la région de l'espace Ω qu'il occupe à un instant donné de son évolution. Toutefois, on peut se contenter de suivre les positions successives dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un référentiel $\mathcal{R}$ du corps matériel à différents instants. On appelle **placement** p_t l'application qui, à un instant donné t, associe à chaque point matériel M du corps matériel $\mathcal{M}$ sa position $\underline{\boldsymbol{x}}(M,t)$ dans l'espace $(\mathcal{E},\mathcal{R})$. On note Ω_t l'image de $\mathcal{M}$ par p_t, c'est–à–dire la région qu'occupe $\mathcal{M}$ dans $(\mathcal{E},\mathcal{R})$ à l'instant t. On donne à Ω_t le nom de **configuration**.

$$\begin{aligned} p_t : \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \Omega_t \\ M &\mapsto \underline{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

On privilégie souvent une configuration particulière dite **configuration de référence** Ω_0 à un instant t_0 choisi. On appelle **configuration actuelle ou courante** la région Ω_t prise à l'instant courant t par le corps matériel. Pour un temps $t_0 < \tau < t$, Ω_τ représente une **configuration intermédiaire** du corps matériel. Les positions du point matériel M dans la configuration de référence et dans la configuration actuelle sont notées respectivement $\underline{\boldsymbol{X}}$ et $\underline{\boldsymbol{x}}$. Ces notions sont illustrées sur la figure 2.5.

La cinématique a pour objet la description dans l'espace–temps des mouvements des corps matériels indépendamment des causes et des lois qui les régissent. Elle peut se restreindre à l'étude de la **transformation** Φ_t qui, à chaque instant t, met en correspondance les positions d'un point matériel dans Ω_0 et Ω_t :

$$\begin{aligned} \Phi_t : \quad \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_t \\ \underline{\boldsymbol{X}} &\mapsto \underline{\boldsymbol{x}} \end{aligned}$$

$$\Phi_t = p_t \circ p_0^{-1}$$

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi_t(\underline{\boldsymbol{X}}) = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t) \tag{2.4}$$

Dans un système de coordonnées quelconque, la définition précédente revient à se donner trois fonctions $\Phi_i(X_1, X_2, X_3, t)$ $(i \in 1, 2, 3)$ des coordonnées X_i de $\underline{\boldsymbol{X}}$. On demande à chaque Φ_t d'être une application bijective[1] et bicontinue (i.e. un homéomorphisme). On écrira donc :

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \tag{2.5}$$

On admet aussi que Φ est bijective et bicontinue par rapport au temps. Il sera même nécessaire à plusieurs endroits d'admettre que Φ est un C^1–difféomorphisme (voire un C^2–difféomorphisme), c'est–à–dire une fonction de classe C^1 (voire C^2) : Φ et Φ^{-1} sont alors une (voire deux) fois continûment différentiables. Comme on l'a vu au chapitre 1, ces conditions de régularité peuvent ne pas être vérifiées en certains points isolés particuliers ou le long de lignes ou surfaces de discontinuité. La régularité est donc simplement requise "presque partout".

2.2.3 Descriptions matérielle et spatiale du mouvement

Dans la pratique, deux points de vue particuliers et distincts sont généralement adoptés pour suivre l'évolution de grandeurs physiques et mécaniques d'un corps matériel dans son mouvement.

Description lagrangienne du mouvement

La **configuration initiale** à $t = 0$ est choisie comme configuration de référence. Considérons un point matériel particulier M_0 occupant la position $\underline{\boldsymbol{X}}_0$ dans Ω_0. La **trajectoire** du point M_0 est la courbe

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t) = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}_0, t) \tag{2.6}$$

La description lagrangienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions de la variable $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$. Les 3 composantes du vecteur $\underline{\boldsymbol{X}}$, i.e. les coordonnées de M dans Ω_0, ainsi que le temps t sont appelées **variables de Lagrange**. Pour suivre la trajectoire d'un point matériel, on observe son **déplacement** $\underline{\boldsymbol{u}}$ défini par

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t) = \underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) \tag{2.7}$$

[1] L'injectivité de Φ_t interdit la fusion de deux points matériels tandis que le fait–même que Φ soit une application exclut la fission d'un point matériel en plusieurs points matériels.

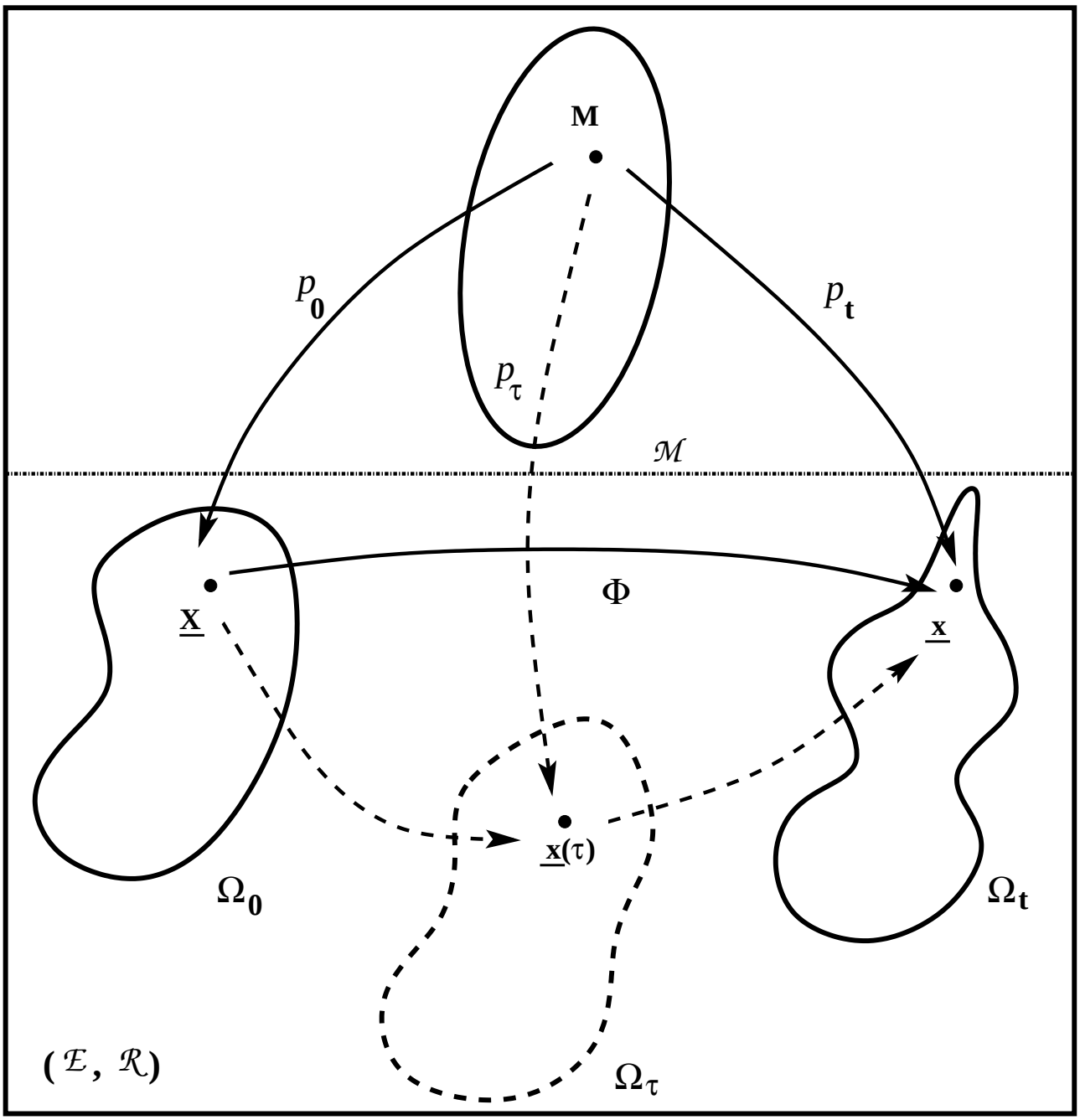


FIG. 2.5 – Placement du corps matériel $\mathcal{M}$ dans l'espace physique muni d'un référentiel $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ à trois instants distincts.

Les composantes du déplacement ont donc la dimension d'une longueur (m).

La méthode de corrélation d'images présentée au paragraphe 2.1 permet de construire le champ de déplacement dans une zone du corps étudié et donc de reconstituer la trajectoire de chaque point à partir du film du mouvement.

L'utilisation de traceurs pour suivre un écoulement fluide permet de visualiser en instantané un autre type de lignes dites **lignes d'émission**. Une ligne d'émission à un instant t est l'ensemble des positions de toutes les particules qui sont passées par un point géométrique P donné depuis l'instant $t_0 < t$.

Description eulérienne du mouvement

La description eulérienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions du point géométrique $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{E}$, sans se préoccuper des points matériels qui occupent cette position au cours du temps. Les 3 composantes du vecteur $\underline{\boldsymbol{x}}$ et le temps t sont les **variables d'Euler**. Dans ce contexte, la masse volumique par exemple est la fonction $\rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$.

On montrera l'équivalence entre ces deux descriptions au paragraphe 2.4.1. On passe d'une représentation à l'autre en utilisant la transformation Φ et son inverse $\underline{\boldsymbol{X}} = \Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$. Les variables de Lagrange se révèlent en général bien adaptées à l'étude des mouvements des corps solides et les variables d'Euler à l'étude des écoulements fluides.

2.2.4 Le gradient de la transformation

On adopte ici le point de vue lagrangien et on considère la transformation Φ d'une configuration initiale Ω_0 à une configuration actuelle Ω. Pour analyser la transformation localement dans un voisinage du point $\underline{\boldsymbol{X}}$, on fait appel à la différentielle par rapport aux coordonnées spatiales initiales de la relation (2.4) :

$$\underline{\boldsymbol{dx}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}} \tag{2.8}$$

D'un point de vue mathématique, les vecteurs $\underline{\boldsymbol{dX}}$ et $\underline{\boldsymbol{dx}}$ sont des éléments des espaces vectoriels tangents aux variétés différentiables Ω_0 et Ω_t en $\underline{\boldsymbol{X}}$ et $\underline{\boldsymbol{x}}$ respectivement. Comme $\underline{\boldsymbol{dX}}$ et $\underline{\boldsymbol{dx}}$ appartiennent à des espaces distincts, une expression comme $\underline{\boldsymbol{dX}} + \underline{\boldsymbol{dx}}$ n'a pas de sens. D'un point de vue plus physique, $\underline{\boldsymbol{dX}}$ donne la direction d'une **ligne** ou **fibre matérielle** tracée sur Ω_0 passant par $\underline{\boldsymbol{X}}$. Cette ligne se transforme en une courbe dont la tangente en $\underline{\boldsymbol{x}}$ est selon $\underline{\boldsymbol{dx}}$. Si en outre la norme du vecteur $\underline{\boldsymbol{dX}}$ est suffisamment petite, on peut assimiler la transformée du petit segment liant $\underline{\boldsymbol{X}}$ à $\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{dX}}$ au segment $\underline{\boldsymbol{dx}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}$ avec une erreur en $\mathcal{O}(\| \underline{\boldsymbol{dX}} \|^2)$.

On appelle **gradient de la transformation**, l'application linéaire tangente $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$. Son existence découle (presque partout) de la régularité admise pour Φ. On a en particulier

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t = 0) = \underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{2.9}$$

puisque, par construction, $\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, 0) = \underline{\boldsymbol{X}}$. On se restreint au cas d'un gradient $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ inversible, i.e. à déterminant non nul (sauf éventuellement sur des ensembles de mesure nulle). On peut en outre, sans perte de généralité, ne s'intéresser qu'à la situation :

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} > 0 \tag{2.10}$$

D'un point de vue mathématique, on suppose que $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \neq 0$ et l'application $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(t)$, continue sur l'intervalle de temps $[0, t]$, prend la valeur 1 en $t = 0$. Elle reste donc positive sur tout l'intervalle. D'un point de vue physique, le cas $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = 0$ signifie qu'il existe une fibre matérielle infinitésimale qui disparaît purement et simplement, ou, de manière équivalente, qu'un élément de volume perd une dimension au moins et se transforme en élément de surface ou de ligne, ce qui est exclu.

Dans une base cartésienne orthonormée $(\underline{\boldsymbol{E}}_i)$, ces relations s'écrivent :

$$dx_i = F_{ij} dX_j, \quad \text{avec} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = F_{ij}\, \underline{\boldsymbol{E}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_j \tag{2.11}$$

En suivant la convention d'Einstein sur les indices répétés, l'équation précédente représente de manière concise les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_2 &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_3 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_3} dX_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_3} dX_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_3} dX_3 \end{aligned}$$

Les relations précédentes se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Les composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ sont sans dimension physique puisqu'elles font intervenir des rapports de longueur (déplacement/distance).

On retiendra que la transformation Φ relie les positions initiale et actuelle d'un point matériel, tandis que le gradient de la transformation met en correspondance les fibres matérielles initiale et actuelle. Le gradient de la transformation s'exprime aussi en fonction du gradient du déplacement :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underline{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla}_X = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \operatorname{Grad} \underline{\boldsymbol{u}} \tag{2.13}$$

où l'on a introduit les opérateurs **nabla**[2] et **gradient** :

$$\boldsymbol{\nabla}_X := \frac{\partial}{\partial X^i} \underline{\boldsymbol{E}}_i, \quad \operatorname{Grad}(.) := (.) \otimes \boldsymbol{\nabla}_X \tag{2.14}$$

$$\operatorname{Grad} \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}) := \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}) \otimes \boldsymbol{\nabla}_X = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.15}$$

$$\operatorname{grad} \Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}) := \Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}) \otimes \boldsymbol{\nabla}_x = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} \tag{2.16}$$

En composantes cartésiennes, la relation (2.13) s'écrit :

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{2.17}$$

Le gradient de la transformation dans une base quelconque

Plus généralement, deux systèmes de coordonnées curvilignes quelconques avec leurs bases naturelles $(Q^i, \underline{\boldsymbol{E}}_i)_{i=1,2,3}$ et $(q^i, \underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,2,3}$ sur Ω_0 et Ω respectivement sont définies par

$$\underline{\boldsymbol{E}}_i = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{X}}}{\partial Q^i} \tag{2.18}$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial q^i} \tag{2.19}$$

$$\tag{2.20}$$

[2] La notation faisant appel l'opérateur nabla s'utilise en composantes de la manière suivante

$$\underline{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla}_X := u_i \left(\frac{\partial}{\partial X_j}\right) \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j := \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j$$

c'est à dire que la multiplication entre composantes est remplacée par l'application de l'opérateur différentiel à la composante la plus proche. Cette notation, très pratique pour des calculs plus compliqués, a l'avantage de bien montrer que l'indice de dérivation est donné par le second indice. Dans certains ouvrages, c'est la transposée de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ qui est utilisée : $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \boldsymbol{\nabla}_X \otimes \underline{\boldsymbol{u}}$. C'est un choix licite mais à repérer dès le début.

On introduit alors **les opérateurs Nabla** lagrangien et eulérien respectivement par

$$\boldsymbol{\nabla}_X := \frac{\partial}{\partial Q^i}\underline{\boldsymbol{E}}_i, \quad \boldsymbol{\nabla}_x := \frac{\partial}{\partial q^i}\underline{\boldsymbol{e}}_i, \tag{2.21}$$

et les *opérateurs gradients* correspondants. On peut écrire les composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ dans un système de coordonnées quelconques $(\{Q^i, E_i\}, \{q^i, e_i\})$ en procédant de la manière suivante :

$$\underline{\boldsymbol{dX}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{X}}}{\partial Q^i}\, dQ^i = dQ^i\, \underline{\boldsymbol{E}}_i \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{dx}} &= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial q^i}\, dq^i = dq^i\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \\ &= \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} dQ^j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \\ &= \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^j\right).\underline{\boldsymbol{dX}} \end{aligned} \tag{2.23}$$

car $dQ^j = \underline{\boldsymbol{E}}^j.\underline{\boldsymbol{dX}}$. On identifie

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^j \tag{2.24}$$

Cette relation montre bien que le gradient de la transformation est un tenseur bien particulier qui a un pied dans la configuration initiale et l'autre dans la configuration actuelle. On dit que c'est un **tenseur mixte**.

Remarquer enfin que

$$\boldsymbol{\nabla}_X(.) = \boldsymbol{\nabla}_x(.).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{\nabla}_x(.), \quad \mathrm{Grad}\,(.) = \mathrm{grad}(.)\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.25}$$

Coordonnées matérielles entraînées

Il est possible de choisir un système de coordonnées locales de bases $(\underline{\boldsymbol{e}}_i^F)_{i=1,2,3}$ attachées à la matière et qui évoluent avec elle de la manière suivante

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i^F(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{E}}_i \tag{2.26}$$

On l'appelle aussi **base convective**. Ce choix correspond à un marquage de la matière à l'aide d'une grille par exemple comme dans l'exemple introduit au paragraphe 2.1. Il est clair que dans un tel système de coordonnées, les points matériels ont toujours les mêmes coordonnées quelle que soit la configuration, et que le gradient de la transformation a pour composantes

$$\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = \delta^i_j \tag{2.27}$$

Un tel système de coordonnées peut s'avérer utile pour écrire certaines lois de comportement en particulier dans le cas anisotrope (matériaux composites, fluides chargées de fibres...).

Changement de référentiel

Dans les paragraphes précédents, le mouvement a été suivi dans le référentiel $\mathcal{R}$. On pourrait aussi l'observer depuis $\mathcal{R}'$ se déduisant de $\mathcal{R}$ par une transformation euclidienne (2.3),

caractérisée par une rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ et une translation $\underline{\boldsymbol{c}}\,(t)$. On suppose en outre pour simplifier que les repérages associés aux deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident à $t = 0$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(0) = \underset{\sim}{\mathbf{1}}, \quad \underline{\boldsymbol{c}}\,(0) = 0 \tag{2.28}$$

Soit Φ' la transformation du milieu correspondante et $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'$ son gradient :

$$\underline{\boldsymbol{x}}\,' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{c}}\,(t) \tag{2.29}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t') = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}\,'}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t) \tag{2.30}$$

Pour se convaincre du résultat précédent, on peut faire le calcul en travaillant sur les composantes du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ dans un repère cartésien orthonormé :

$$F'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial X_j} = Q_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} = Q_{ik}F_{kj} \tag{2.31}$$

Dans le cas où les deux référentiels ne coïncident pas à $t = 0$, on montre que la relation entre $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'$ est

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(0)^{-1} \tag{2.32}$$

Changement de configuration de référence

On peut choisir aussi une configuration de référence $\hat{\Omega}_0$ différente de Ω_0. $\hat{\Omega}_0$ est par exemple la région de l'espace occupée par le corps matériel à l'instant τ (cf. figure 2.5) : $\hat{\Omega}_0 = \Omega_\tau$. On note $\underline{\hat{\boldsymbol{X}}} := \underline{\boldsymbol{x}}\,(\tau)$. Soit $\hat{\Phi}(\underline{\hat{\boldsymbol{X}}}\,, t)$ la transformation faisant correspondre les configurations $\hat{\Omega}_0$ et Ω_t, et $\Phi_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,, \tau)$ celle qui relie Ω_0 et $\hat{\Omega}_0$. Ces transformations sont donc liées par

$$\hat{\Phi} = \Phi \circ \Phi_0^{-1} \tag{2.33}$$

Leurs gradients sont

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{F}}}(\underline{\hat{\boldsymbol{X}}}\,, t) := \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial \underline{\hat{\boldsymbol{X}}}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,, \tau) := \frac{\partial \underline{\hat{\boldsymbol{X}}}}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}}(\tau) \tag{2.34}$$

de sorte que

$$\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{F}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1} \tag{2.35}$$

Les changements de configuration de référence sont très utiles dans la pratique, en particulier en mise en forme, lorsque le corps matériel est soumis à plusieurs transformations successives (laminage puis emboutissage par exemple). D'un point de vue théorique, les changements de configuration de référence joueront un rôle essentiel dans le chapitre 5.

2.2.5 Transports convectifs

On a vu que le transport convectif (i.e. en suivant le mouvement) d'un élément de fibre matérielle $\underline{\boldsymbol{dX}}$ de la configuration initiale à la configuration courante se fait par l'intermédiaire du gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, selon la relation (2.8). Il est possible dès lors d'établir comment se transforment les volumes et les surfaces au cours du mouvement.

On se donne dans la suite trois vecteurs matériels non coplanaires $\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underline{\boldsymbol{dX}}_2$ et $\underline{\boldsymbol{dX}}_3$. On suppose que le triplet $(\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underline{\boldsymbol{dX}}_3)$ est orienté dans le sens direct. On entend par là que

$$\underline{\boldsymbol{dX}}_1.(\underline{\boldsymbol{dX}}_2 \wedge \underline{\boldsymbol{dX}}_3) > 0 \tag{2.36}$$

Le symbole $\wedge$ désigne le produit vectoriel. Ses trois vecteurs sont transportés respectivement en $\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3$ dans la configuration actuelle.

Transport d'un élément de volume

Le volume du parallélépipède délimité par les trois vecteurs $(\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underline{\boldsymbol{dX}}_3)$ vaut

$$dV = \underline{\boldsymbol{dX}}_1.(\underline{\boldsymbol{dX}}_2 \wedge \underline{\boldsymbol{dX}}_3) = [\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underline{\boldsymbol{dX}}_3] \tag{2.37}$$

Le produit mixte défini par l'équation (2.37) et noté $[.,.,.]$ est égal au déterminant de la matrice formée par les trois vecteurs colonnes des composantes des trois vecteurs étudiés. Le volume initial dV se transforme donc en un volume actuel dv valant

$$\begin{aligned} dv &= \underline{\boldsymbol{dx}}_1.(\underline{\boldsymbol{dx}}_2 \wedge \underline{\boldsymbol{dx}}_3) = [\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3] \\ &= [\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_3] = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}})\ [\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underline{\boldsymbol{dX}}_3] \end{aligned}$$

Autrement dit, par définition même du déterminant,

$$\frac{dv}{dV} = J, \quad \text{avec} \quad J := \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} > 0 \tag{2.38}$$

On note en effet généralement J le **jacobien** de la transformation Φ, i.e. le déterminant du gradient de Φ.

Une transformation est dite **isochore** au point $\underline{\boldsymbol{X}}$ si le volume est préservé autour de $\underline{\boldsymbol{X}}$ au cours de la transformation. Si la propriété (2.38) est vérifiée en tout point du corps matériel, la transformation est dite isochore.

Un **matériau** est dit **incompressible** s'il ne peut subir que des transformations isochores. On distinguera la notion d'isochorie de celle d'incompressibilité. En effet, l'isochorie est une propriété d'un mouvement, tandis que l'incompressibilité est une propriété de la matière[3].

Transport d'un élément de surface orienté

L'élément de surface $\underline{\boldsymbol{dS}}$ engendré par les deux vecteurs $\underline{\boldsymbol{dX}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{dX}}_2$ est le covecteur (i.e. la forme linéaire) qui à un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}}$ de l'espace associe le volume du parallélépipède $(\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underline{\boldsymbol{v}})$. L'élément de surface $\underline{\boldsymbol{dS}}$ est défini sur la configuration de référence :

$$\underline{\boldsymbol{dS}} = \underline{\boldsymbol{dX}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{dX}}_2 \tag{2.39}$$

Il se transforme en l'élément de surface $\underline{\boldsymbol{ds}}$ défini sur la configuration actuelle

$$\underline{\boldsymbol{ds}} = \underline{\boldsymbol{dx}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{dx}}_2 \tag{2.40}$$

Le covecteur $\underline{\boldsymbol{ds}}$ opère sur un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}}$ quelconque de la manière suivante[4] :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{ds}}.\underline{\boldsymbol{v}} &= (\underline{\boldsymbol{dx}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{dx}}_2).\underline{\boldsymbol{v}} = [\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}] \\ &= [\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}] = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}})\ [\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \underline{\boldsymbol{dX}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{v}}] \\ &= J\ \underline{\boldsymbol{dS}}.(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{v}}) = J\ (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{dS}}).\underline{\boldsymbol{v}} \end{aligned} \tag{2.41}$$

On peut donc identifier

$$\underline{\boldsymbol{ds}} = J\ \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{dS}} \tag{2.42}$$

[3] La transformation de glissement simple de la figure 2.8 est isochore, mais le matériau qui la subit n'est pas nécessairement incompressible.

[4] Au passage, on introduit la notation concise suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1})^T = (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T)^{-1}$$

Transport d'un élément de fibre matérielle :	$\underline{\boldsymbol{dx}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}$
Transport d'un élément de surface :	$\underline{\boldsymbol{ds}} = J\,\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}\,\underline{\boldsymbol{dS}}$
Transport d'un élément de volume :	$dv = J\,dV$

TAB. 2.1 – Récapitulatif : principales relations de transport convectif

Cette relation de transport d'élément de surface est souvent appelée **formule de Nanson** dans les ouvrages anglo–saxons.

Pour se convaincre du bien–fondé du calcul précédent, on peut aussi avoir recours aux composantes des tenseurs utilisés dans une base cartésienne orthonormée :

$$\begin{aligned} ds_i\, v_i &= J\, dS_i F^{-1}_{ij}\, v_j \\ &= J\, F^{-T}_{ji}\, dS_i\, v_j \end{aligned}$$

On peut écrire l'élément de surface sous la forme du produit d'un vecteur unitaire dit vecteur normal à l'élément de surface par sa norme :

$$\underline{\boldsymbol{dS}} = dS\ \underline{\boldsymbol{N}}\,, \quad \underline{\boldsymbol{ds}} = ds\ \underline{\boldsymbol{n}} \tag{2.43}$$

Les vecteurs $\underline{\boldsymbol{N}}$ et $\underline{\boldsymbol{n}}$ sont respectivement les vecteurs unitaires normaux à l'élément de surface considéré dans les configurations initiale et actuelle. Il faut remarquer que le vecteur normal à l'élément de surface n'est pas attaché à la matière et n'est donc pas une fibre matérielle. Il n'est que le produit vectoriel de deux vecteurs matériels. Son transport convectif est différent de celui d'une fibre matérielle. Par conséquent, les points matériels situés le long des directions $\underline{\boldsymbol{n}}$ et $\underline{\boldsymbol{N}}$ ne sont pas les mêmes.

2.2.6 Décomposition polaire du gradient de la transformation

Théorème 1 (Décomposition polaire) *Pour tout tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ inversible, il existe deux tenseurs symétriques définis positifs $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ uniques et un unique tenseur orthogonal $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ tels que*

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \tag{2.44}$$

Si $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} > 0$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ *est une rotation pure (i.e.* $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = +1$*).*

Preuve. On introduit les tenseurs

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T \tag{2.45}$$

Ils sont symétriques ($\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$)[5]. Ils sont de plus définis positifs. En effet,

$$\forall \underline{\boldsymbol{a}} \neq 0, \quad \underline{\boldsymbol{a}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{a}} = a_i F^T_{ik} F_{kj} a_j = (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{a}}).(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{a}}) > 0$$

car $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ est inversible. Par conséquent, $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ sont diagonalisables et possèdent chacun trois valeurs propres réelles strictement positives. On définit alors les tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ ayant les

[5] Noter que $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ n'est pas le transposé de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$!

mêmes vecteurs propres que $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ respectivement et pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ respectivement. Par construction,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}^2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} \tag{2.46}$$

On définit ensuite,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.47}$$

On vérifie que $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ sont orthogonaux. On détaille la preuve pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-2}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{2.48}$$

D'après (2.47), le signe du déterminant de $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ (resp. $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$) est le même que celui de $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. Les tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ ainsi construits répondent à la question posée. L'unicité de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ vient du fait que la racine carrée d'un tenseur symétrique défini positif défini plus haut est unique. L'unicité de la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ découle de celle de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. On démontre de même l'unicité de $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$. Il reste encore à montrer que $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$. Pour cela, on décompose $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ de la façon suivante

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T).\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$$

On met ainsi en évidence une décomposition de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ de la forme $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ car $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T$ est symétrique et défini positif (il a les même valeurs propres que $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$). L'unicité d'une telle décomposition mentionnée plus haut implique que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{V}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \tag{2.49}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

Le théorème précédent s'applique en particulier au gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. L'intérêt du théorème est de distinguer dans la transformation la contribution de rotation de celle de déformation pure, la notion de déformation étant prise dans un sens qui sera défini au paragraphe 2.3. Il sera utilisé à maintes reprises pour interpréter l'information contenue dans $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. On appelle $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ la **rotation propre** en $\underline{\boldsymbol{X}}$. Dans ce cas, on appelle $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ le **tenseur de Cauchy–Green droit** et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ le **tenseur de Cauchy–Green gauche**. Ils sont aussi appelés **tenseurs des dilatations**, le terme *dilatation* prêtant toutefois à confusion car il désigne parfois aussi un tenseur proportionnel à l'identité, ce qui n'est bien sûr pas le cas ici. On rappelle qu'ils sont définis par les équations (2.45). Quant à eux, $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ sont dits tenseurs des **déformations pures**[6].

2.2.7 Exemples de transformations homogènes

On parle de transformation homogène d'un corps matériel lorsque le gradient de la transformation est une fonction de t seulement, $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(t)$. La transformation Φ est donc une fonction affine de $\underline{\boldsymbol{X}}$:

$$\underline{\boldsymbol{x}}\,(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(t).\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{c}}\,(t) \tag{2.50}$$

Pour une transformation homogène, le vecteur $\underline{\boldsymbol{X}}_1 - \underline{\boldsymbol{X}}_2$ reliant deux points quelconques du corps matériel se transporte en

$$\underline{\boldsymbol{x}}_1 - \underline{\boldsymbol{x}}_2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.(\underline{\boldsymbol{X}}_1 - \underline{\boldsymbol{X}}_2)$$

[6] *Right and left stretch tensors*, en anglais.

Si $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ est homogène, alors $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ sont aussi homogènes (du fait de l'unicité de la décomposition polaire). Par contre, si $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ est homogène, la question de savoir si $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ est homogène est plus délicate. On l'abordera au paragraphe 2.3.4.

La figure 2.6 montre un exemple de transformation homogène d'un carré et un exemple de transformation hétérogène du même carré. Une grille (convective) a été dessiné sur la configuration initiale et permet de visualiser la déformation de petits éléments de la structure initiale. **Lorsque tous les carrés déformés sont superposables, la déformation est homogène.**

On envisage maintenant quelques transformations homogènes simples.

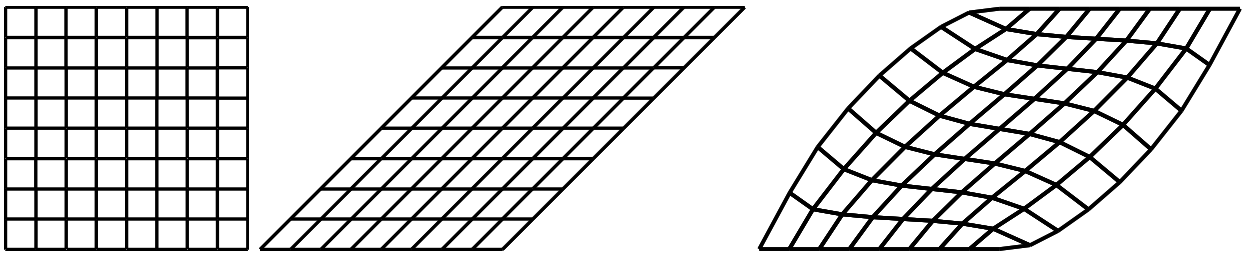


FIG. 2.6 – Deux transformations d'une structure carrée dont la configuration initiale est à gauche. La première transformation (au milieu) est homogène car les éléments de la grille tracée sur la structure sont superposables. Au contraire la transformation de droite est hétérogène.

Mouvement de corps rigide

Une transformation homogène est appelée mouvement de corps rigide lorsque la distance entre tout couple de points matériels reste inchangée au cours du mouvement :

$$\forall \underline{\boldsymbol{X}}_1, \underline{\boldsymbol{X}}_2 \neq 0, \quad (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.(\underline{\boldsymbol{X}}_1 - \underline{\boldsymbol{X}}_2))^2 = (\underline{\boldsymbol{X}}_1 - \underline{\boldsymbol{X}}_2).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.(\underline{\boldsymbol{X}}_1 - \underline{\boldsymbol{X}}_2) = (\underline{\boldsymbol{X}}_1 - \underline{\boldsymbol{X}}_2).(\underline{\boldsymbol{X}}_1 - \underline{\boldsymbol{X}}_2) \tag{2.51}$$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

Le gradient de la transformation est donc orthogonal direct. C'est une rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$. La transformation correspondante est

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{c}}(t) \tag{2.52}$$

où $\underline{\boldsymbol{c}}(t)$ désigne un mouvement de translation se superposant à la rotation. La relation (2.52) fait penser à deux autres situations déjà rencontrées :

- *changement de référentiel* : les relations (2.52) et (2.3) doivent être distinguées. La première désigne en effet deux événements distincts, à savoir deux positions $\underline{\boldsymbol{x}}$ et $\underline{\boldsymbol{X}}$ prises par un point matériel à deux instants différents, tandis que la seconde donne les positions d'un même événement enregistrées par deux observateurs distincts.
- *changement de coordonnées* : on peut écrire l'équation (2.52) sous forme matricielle dans une base quelconque et les relations obtenues sont alors les formules classiques de changement de base.

Un corps matériel qui ne peut subir que des mouvements de corps rigide est dit **rigide** ou **indéformable**. C'est une approximation parfois suffisante qui sera rappelée au chapitre 3. Les corps rigides sont indissociables de la notion de référentiel. On peut leur attacher des systèmes de coordonnées. On voit donc le lien entre les formules de changement de référentiels et de changement de base. On se gardera toutefois de les confondre puisque pour un référentiel donné, le choix du système de coordonnées est entièrement libre.

Extension simple

On étudie la transformation qui fait passer le corps matériel de la configuration de la figure 2.7a à la configuration 2.7b. Clairement, elle s'écrit dans la base cartésienne orthonormée $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$:

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1+\lambda) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \tag{2.53}$$

où λ est le paramètre de chargement. Le gradient de la transformation s'en déduit

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \lambda \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

La sollicitation est telle que les fibres horizontales dans le plan de la figure s'allongent sans changer d'orientation tandis que les fibre verticales restent inchangées. La rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. Le paramètre λ est directement la variation de volume $J - 1 = \lambda$.

L'essai d'extension simple est difficile à réaliser dans la pratique pour $\lambda > 0$. Par contre, si $\lambda < 0$, il s'agit d'un essai standard en mécanique des sols, appelé **essai œdométrique**, qui consiste à confiner un sol dans une enceinte rigide et à imposer un déplacement à la surface libre.

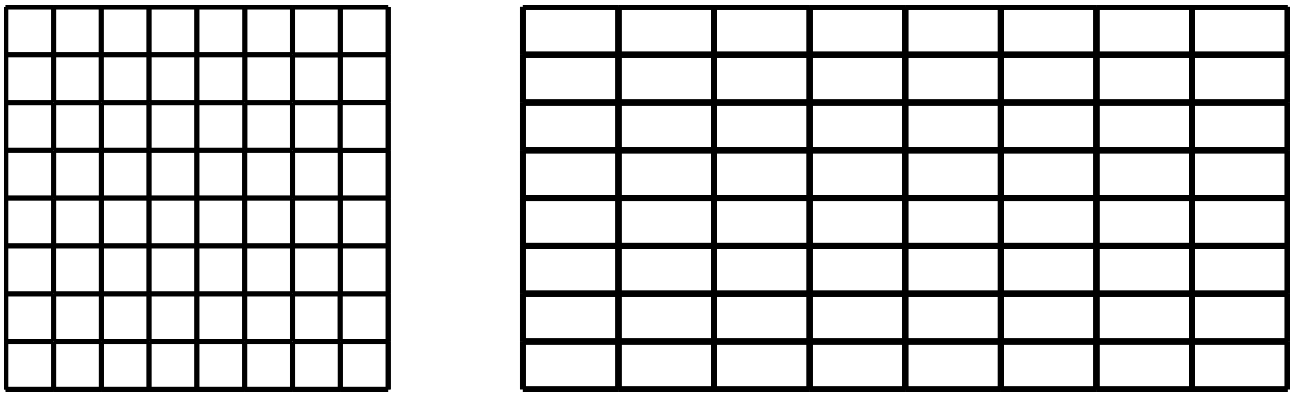


FIG. 2.7 – Cinématique de l'extension simple pour un corps carré muni d'une grille : état initial à gauche, état final à droite.

Glissement simple

La transformation illustrée sur la figure (2.8) porte le nom de glissement simple et s'écrit

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \tag{2.55}$$

où γ est l'amplitude du glissement (penser à un jeu de cartes). Le gradient de la transformation vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \gamma \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

On vérifie que $J = 1$ et que, par conséquent, la transformation est isochore. Le tenseur de Cauchy–Green droit s'obtient ensuite

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \gamma(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) + \gamma^2 \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

Les valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2 + \gamma\sqrt{\gamma^2+4}) = (\frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2+4}))^2 \tag{2.58}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2 - \gamma\sqrt{\gamma^2+4}) = (\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2+4}))^2 \tag{2.59}$$

$$\lambda_3 = 1 \tag{2.60}$$

Les racines positives de ces valeurs propres fournissent les valeurs propres du tenseur des déformations pures associé $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. L'une, λ_1, est supérieure à 1 (extension), l'autre, λ_2 est inférieure à 1 (contraction). Les vecteurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ sont les mêmes par construction de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et valent

$$\underline{\boldsymbol{V}}_1 = \frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2+4})\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \tag{2.61}$$

$$\underline{\boldsymbol{V}}_2 = \frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2+4})\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \tag{2.62}$$

$$\underline{\boldsymbol{V}}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{2.63}$$

On construit ainsi successivement $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$:

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{1+\gamma^2/2}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}] = \begin{bmatrix} \frac{1+\gamma^2/2}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

La rotation propre apparaît donc comme une rotation autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ et d'angle θ défini par

$$\tan\theta = -\frac{\gamma}{2} \tag{2.66}$$

Lorsque le glissement s'effectue indéfiniment ($\gamma \longrightarrow \infty$), l'angle de rotation propre tend vers $-\pi/2$.

2.3 Métrique et mesures de déformation

Il s'agit ici de définir précisément ce que l'on entend par changement de forme ou déformation du corps matériel. Cela passe par la mesure des variations de longueurs et d'angles de lignes matérielles au cours du mouvement. On insiste sur le fait que les tenseurs de déformation définis dans la suite de ce paragraphe sont sans dimension physique, tout comme le gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$.

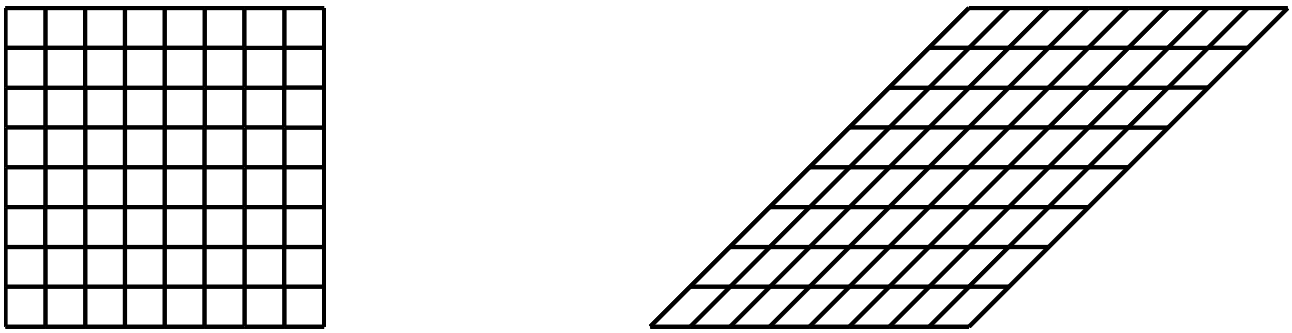


FIG. 2.8 – Cinématique du glissement simple pour un corps carré muni d'une grille : état initial à gauche, état final à droite.

2.3.1 Interprétation géométrique des tenseurs de Cauchy–Green

On considère deux directions matérielles $\underline{\boldsymbol{dX}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{dX}}_2$ au point $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$. Elles se transforment respectivement en $\underline{\boldsymbol{dx}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{dx}}_2$ au point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega_t$ selon

$$\underline{\boldsymbol{dx}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_1, \quad \underline{\boldsymbol{dx}}_2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2 \tag{2.67}$$

Le produit scalaire des fibres matérielles considérées évolue au cours du mouvement :

$$\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 = (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_1).(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2) = \underline{\boldsymbol{dX}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2 = \underline{\boldsymbol{dX}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2 \tag{2.68}$$

On trouve de même que

$$\underline{\boldsymbol{dX}}_1.\underline{\boldsymbol{dX}}_2 = \underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 \tag{2.69}$$

Le tenseur de Cauchy–Green droit $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ définit donc une métrique sur la configuration de référence à partir de la métrique canonique sur Ω_t. Le tenseur de Cauchy–Green gauche $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ instaure quant à lui une métrique sur Ω_t à partir de la métrique canonique initiale.

Allongements *(stretch)*

Les tenseurs de Cauchy–Green permettent de mesurer les variations de longueur d'une fibre matérielle $\underline{\boldsymbol{dX}}$ de la façon suivante :

$$|\underline{\boldsymbol{dX}}|^2 = \underline{\boldsymbol{dX}}.\underline{\boldsymbol{dX}}, \quad |\underline{\boldsymbol{dx}}|^2 = \underline{\boldsymbol{dx}}.\underline{\boldsymbol{dx}} \tag{2.70}$$

$$|\underline{\boldsymbol{dx}}|^2 - |\underline{\boldsymbol{dX}}|^2 = \underline{\boldsymbol{dX}}.(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{1}}).\underline{\boldsymbol{dX}} = \underline{\boldsymbol{dx}}.(\underset{\sim}{\boldsymbol{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^{-1}).\underline{\boldsymbol{dx}} \tag{2.71}$$

On peut introduire la direction de la ligne matérielle $\underline{\boldsymbol{dX}}$ étudiée jusqu'ici par

$$\underline{\boldsymbol{dX}} = |\underline{\boldsymbol{dX}}|\,\underline{\boldsymbol{M}} \tag{2.72}$$

où le vecteur directeur $\underline{\boldsymbol{M}}$ est de norme 1. On établit alors que le rapport d'allongement $\lambda(\underline{\boldsymbol{M}})$ vaut

$$\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}) = \frac{|\underline{\boldsymbol{dx}}|}{|\underline{\boldsymbol{dX}}|} = \sqrt{\underline{\boldsymbol{M}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{M}}} = |\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{M}}| = |\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}.\underline{\boldsymbol{M}}| \tag{2.73}$$

Soient C_{ij} les composantes, dans une base cartésienne orthonormée $(\underline{\boldsymbol{E}}_i)_{i=1,2,3}$, du tenseur de Cauchy–Green droit. On étudie l'allongement de $\underline{\boldsymbol{M}} = \underline{\boldsymbol{E}}_1$. La relation précédente donne

$$\lambda(\underline{\boldsymbol{E}}_1) = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2} \tag{2.74}$$

ce qui donne une interprétation directe simple de la composante C_{11} du tenseur de Cauchy–Green droit, à savoir le carré de l'allongement du premier vecteur de base.

Angles de glissement *(shear angle)*

On peut aussi suivre au cours du mouvement l'angle que font deux fibres matérielles, à savoir Θ dans la configuration de référence et θ dans la configuration actuelle :

$$\underline{\boldsymbol{dX}}_1 = |\underline{\boldsymbol{dX}}_1|\,\underline{\boldsymbol{M}}_1, \quad \underline{\boldsymbol{dX}}_2 = |\underline{\boldsymbol{dX}}_2|\,\underline{\boldsymbol{M}}_2 \tag{2.75}$$

$$\underline{\boldsymbol{dx}}_1 = |\underline{\boldsymbol{dx}}_1|\,\underline{\boldsymbol{m}}_1, \quad \underline{\boldsymbol{dx}}_2 = |\underline{\boldsymbol{dx}}_2|\,\underline{\boldsymbol{m}}_2 \tag{2.76}$$

$$\cos\Theta = \underline{\boldsymbol{M}}_1.\underline{\boldsymbol{M}}_2 \tag{2.77}$$

$$\cos\theta = \underline{\boldsymbol{m}}_1.\underline{\boldsymbol{m}}_2 = \frac{\underline{\boldsymbol{M}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2}{\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}_1)\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}_2)} \tag{2.78}$$

On appelle

$$\gamma := \Theta - \theta \tag{2.79}$$

l'angle de glissement des directions $\underline{\boldsymbol{M}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_2$ dans le plan de glissement $(\underline{\boldsymbol{M}}_1, \underline{\boldsymbol{M}}_2)$.
Si $\Theta = \pi/2$, on a

$$\sin\gamma = \frac{\underline{\boldsymbol{M}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2}{\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}_1)\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}_2)} \tag{2.80}$$

Si $\underline{\boldsymbol{M}}_1 = \underline{\boldsymbol{E}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_2 = \underline{\boldsymbol{E}}_2$, la relation précédente donne

$$\sin\gamma = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}C_{22}}} \tag{2.81}$$

ce qui donne une interprétation de la composante C_{12} du tenseur de Cauchy–Green droit.

2.3.2 Mesures de déformation

Les tenseurs

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}}), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^{-1}) \tag{2.82}$$

apparus au détour de l'équation (2.71) s'appellent respectivement **tenseur des déformations de Green ou de Green–Lagrange ou de Green–Saint–Venant** et **tenseur des déformations d'Almansi ou d'Almansi–Hamel**. Le premier est largement utilisé dans la pratique pour quantifier l'intensité et la direction de la déformation. L'utilisation du tenseur d'Almansi est bien évidemment tout aussi légitime selon le point de vue adopté (lagrangien ou eulérien, introduits plus loin). Le tenseur de Green–Lagrange peut s'exprimer aussi en fonction du gradient du déplacement

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}), \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}} = \operatorname{Grad}\underline{\boldsymbol{u}} \tag{2.83}$$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ est donc non linéaire en $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$ en raison du dernier terme. En composantes cartésiennes orthonormées, ces expressions deviennent

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \tag{2.84}$$

Les deux tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ sont nuls pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$, i.e. sur la configuration initiale. Ils sont symétriques mais non nécessairement positifs.

Une multitude de mesures de déformation

Pour "mesurer" les déformations, tout n'est qu'affaire de convention. Il existe une multitude de façons de "quantifier" (plutôt que mesurer, puisque la déformation n'a pas d'unité) la déformation des corps matériels. Il est par contre essentiel dans la pratique de bien préciser ce qu'on entend par "déformation" en particulier lorsque l'on utilise des données expérimentales concernant un matériau particulier, au risque d'encourir des malentendus aux conséquences désastreuses (dimensionnement erroné d'une pièce, structure ou d'un procédé de fabrication...) ! Toutefois, on convient d'appeler **mesure de déformation** un tenseur ayant les propriétés suivantes :

(i) il est symétrique et sans dimension physique ;
(ii) il est nul pour un mouvement de corps rigide et en $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$;
(iii) son développement limité autour de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$ s'écrit $\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T) + o(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}})$.

Toutes les mesures de déformation rassemblées dans le tableau 2.2 vérifient ces trois conditions. Le sens de la condition (iii) n'apparaîtra clairement qu'au paragraphe 2.3.3. Les mesures de déformation les plus utilisées appartiennent à la famille suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_n := \frac{1}{n}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^n - \underset{\sim}{\mathbf{1}}), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_n := \frac{1}{n}(\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}^n - \underset{\sim}{\mathbf{1}}) \tag{2.85}$$

où n est un entier relatif non nul. On reconnaît en particulier :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_{-2} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \tag{2.86}$$

On étend la définition (2.85) au cas $n = 0$ en posant :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_0 := \log \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_0 := \log \underset{\sim}{\boldsymbol{V}} \tag{2.87}$$

Le logarithme d'un tenseur symétrique défini positif est défini par

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r \, \underline{\boldsymbol{V}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{V}}_r \Longrightarrow \log \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} := \sum_{r=1}^{3} (\log \lambda_r) \, \underline{\boldsymbol{V}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{V}}_r \tag{2.88}$$

où les $(\lambda_r, \underline{\boldsymbol{V}}_r)$ sont les valeurs et vecteurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. La matrice de ses composantes est obtenue en diagonalisant $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$, en passant au logarithme, puis en revenant à la base initiale :

$$[\log \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}] = [P] \begin{bmatrix} \log \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \log \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \log \lambda_3 \end{bmatrix} [P^{-1}] \tag{2.89}$$

où $[P]$ désigne la matrice de passage de la base des $(\underline{\boldsymbol{E}}_i)$ à la base des $(\underline{\boldsymbol{V}}_i)$[7].

[7] On renvoie aux articles de Hill (Hill, 1968; Hill, 1978) pour une discussion détaillée sur les mesures de déformation. Le choix de la mesure de déformation le mieux adapté est celui qui conduit à l'expression la plus simple de la loi de comportement du matériau étudié. Un tel choix ne peut apparaître qu'après une analyse fine des réponses du matériau à de multiples sollicitations. Il peut exister aussi des raisons théoriques permettant de privilégier l'une ou l'autre des mesures de déformation. Le côté arbitraire de ce choix peut être réduit en s'interrogeant sur la notion de déformation au niveau de la variété matérielle intrinsèque $\mathcal{M}$ introduite au début de ce chapitre. Une telle démarche est proposée dans l'ouvrage (Rougée, 1997). Dans l'article (Xiao and Bruhns, 1997), la mesure logarithmique joue un rôle privilégié. On souhaite simplement indiquer ici qu'il s'agit d'un sujet de recherche toujours d'actualité.

Quelques propriétés des mesures de déformation

Le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ est symétrique et donc diagonalisable. Il est en outre défini positif. Il possède des vecteurs propres $(\underline{\boldsymbol{V}}_r)_{r=1,3}$, qui sont deux à deux orthogonaux. Soient $(\lambda_r)_{r=1,3}$ les valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}.\underline{\boldsymbol{V}}_r = \lambda_r \underline{\boldsymbol{V}}_r, \quad \lambda_r > 0 \tag{2.90}$$

sans sommation sur l'indice r. Les vecteurs propres sont appelés **directions principales** ou **axes principaux** de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$, et les valeurs propres **déformations principales**. On remarque que

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{2.91}$$

En multipliant l'équation (2.90) par la rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}.\underline{\boldsymbol{V}}_r = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{V}}_r = \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underline{\boldsymbol{V}}_r = \lambda_r \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underline{\boldsymbol{V}}_r \tag{2.92}$$

on s'aperçoit que les λ_r sont aussi valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$, les vecteurs propres correspondants étant ceux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ tournés par $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$:

$$\underline{\boldsymbol{v}}_r = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underline{\boldsymbol{V}}_r \tag{2.93}$$

Les grandeurs introduites permettent de définir la **décomposition spectrale** de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r \underline{\boldsymbol{V}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{V}}_r, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{V}} = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r \underline{\boldsymbol{v}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{v}}_r \tag{2.94}$$

La décomposition polaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ et la décomposition spectrale de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ permettent d'interpréter la déformation à l'aide des deux scénarios suivants, par ailleurs illustrés par la figure 2.9 :

- On allonge d'abord les fibres matérielles initialement parallèles aux directions propres $\underline{\boldsymbol{V}}_r$ du facteur λ_r pour les amener à leur longueur finale. On les tourne ensuite de $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ pour leur conférer leur orientation finale.
- On tourne les fibres matérielles initialement parallèles aux directions propres $\underline{\boldsymbol{V}}_r$ pour les amener à leur position finale $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underline{\boldsymbol{V}}_r$. On leur applique ensuite le tenseur gauche de déformation pure $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ pour leur conférer leur longueur finale.

C'est en ce sens que l'on dit que $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$ fait passer de la configuration initiale Ω_0 à la configuration actuelle Ω tandis que $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ est défini entièrement sur Ω_0 et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ entièrement sur Ω. On dit que $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ est une **mesure lagrangienne de déformation** et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ une **mesure eulérienne de déformation**. Il s'ensuit que le tenseur de Cauchy–Green droit (resp. gauche) est aussi une mesure lagrangienne (resp. eulérienne) de déformation. Ce résultat se généralise à la famille de mesures de déformation (2.85).

Les décompositions spectrales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ se déduisent de celles de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ respectivement :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r^2 \underline{\boldsymbol{V}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{V}}_r, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \sum_{r=1}^{3} \lambda_r^2 \underline{\boldsymbol{v}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{v}}_r \tag{2.95}$$

Finalement,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \sum_{r=1}^{3} \frac{1}{2}(\lambda_r^2 - 1)\, \underline{\boldsymbol{V}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{V}}_r, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \sum_{r=1}^{3} \frac{1}{2}(1 - \lambda_r^{-2})\, \underline{\boldsymbol{V}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{V}}_r, \tag{2.96}$$

Concernant ces directions principales en un point matériel $\underline{\boldsymbol{X}}$, on a le

Théorème 2 (Directions orthogonales au cours de la transformation) *Les trièdres de directions matérielles de Ω_0 deux à deux orthogonales et qui se transforment en trièdres de directions à nouveau deux à deux orthogonales à l'instant t sont les trièdres des directions principales du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(t)$ de Cauchy–Green droit. Lorsque les valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ sont distinctes, un tel trièdre est unique.*

Preuve. Le trièdre des directions principales $\underline{\boldsymbol{V}}_i$ du tenseur symétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(t)$ sont deux à deux orthogonales et se transforment effectivement en un trièdre de directions deux à deux orthogonales à l'instant t, ce que montre une vérification immédiate en utilisant 2.68. Réciproquement, s'il existe trois directions deux à deux orthogonales $(\underline{\boldsymbol{V}}_1, \underline{\boldsymbol{V}}_2, \underline{\boldsymbol{V}}_3)$ telles que

$$\underline{\boldsymbol{V}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{V}}_2 = 0 \tag{2.97}$$
$$\underline{\boldsymbol{V}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{V}}_3 = 0 \tag{2.98}$$
$$\underline{\boldsymbol{V}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{V}}_3 = 0 \tag{2.99}$$

Les équations (2.98) et (2.99) montrent que $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{V}}_3$ est orthogonal à $\underline{\boldsymbol{V}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{V}}_2$ et est donc colinéaire à $\underline{\boldsymbol{V}}_3$. On en déduit que $\underline{\boldsymbol{V}}_3$ est une direction propre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$. Le même raisonnement s'applique à $\underline{\boldsymbol{V}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{V}}_2$, ce qui achève la démonstration. □
Si la propriété d'orthogonalité d'un trièdre de directions matérielles existe aux instants t_0 et t, elle ne sera en général par vérifiée à un instant intermédiaire $t_0 < s < t$.
Un théorème similaire s'énonce qui porte sur les trièdres de directions matérielles de Ω deux à deux orthogonales et les directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}(t)$.

Autrement dit, tout trièdre principal de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ se transforme en un trièdre trirectangle. L'orientation du trièdre déformé par rapport au trièdre initial est donnée exactement par $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$. C'est pourquoi il est intéressant de suivre la déformation d'une grille dont les arêtes (fibres matérielles) sont parallèles aux directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. C'est effectivement le cas lorsque l'on observe que les trièdres trirectangles formés par des arêtes de la grille initiale se transforment en trièdres trirectangles. L'orientation de chaque élément de la grille finale par rapport au premier permet de "visualiser" la rotation propre. La grille sur le milieu continu subissant un glissement sur la figure 2.6 n'a clairement pas été déposée parallèlement aux directions de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. Par contre, c'est le cas dans les figures 2.7 et 2.12.

Le théorème évoque le seul trièdre qui est orthogonal aux instants t_0 et t, mais il existe par contre de nombreux couples de vecteurs qui sont orthogonaux à ces instants. Il suffit par exemple de prendre une direction principale de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et un vecteur du plan engendré par les deux autres directions principales.

Extensométrie

Dans la pratique, lorsqu'on utilise par exemple un extensomètre pour suivre la déformation (figure 2.2b), on suit deux points séparés initialement par la distance l_0 et par l à l'instant actuel. On suppose qu'au cours d'un tel essai la déformation est homogène dans la zone où sont placés les deux points de mesure. On note 1 la direction parallèle à la ligne matérielle étudiée et on suit la déformation le long de cette direction. Il est possible alors de voir ce que donnent les différentes mesures de déformation évoquées au cours de cette transformation. Les scalaires donnés ici correspondent à la composante 11 du tenseur utilisé.

$$C = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2, \quad B = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 \tag{2.100}$$

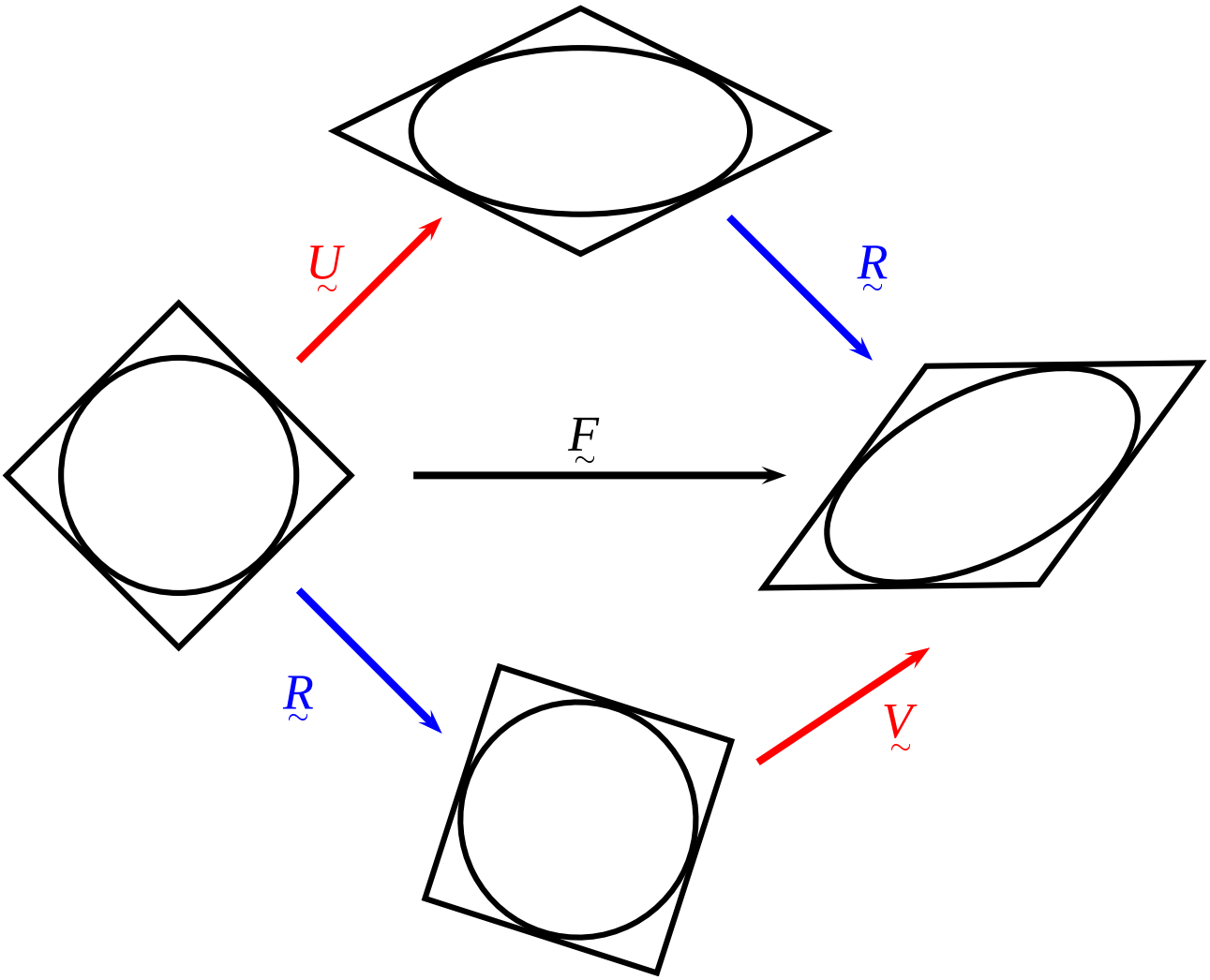


FIG. 2.9 – Décomposition polaire du gradient de la transformation. Les ellipses ont pour grand et petit axes les vecteurs propres respectifs de $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$.

$$E_1 = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad A_{-1} = \frac{l - l_0}{l} \tag{2.101}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - 1\right), \quad A_{-2} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2\right) \tag{2.102}$$

$$E_0 = \log\frac{l}{l_0}, \quad A_0 = \log\frac{l}{l_0} \tag{2.103}$$

Les profils correspondants sont tracés sur la figure 2.10. On vérifie que les mesures sont nulles en 1 et ont une tangente commune de pente 1. On voit aussi que E_0, A_{-1} et A_{-2} tendent vers $-\infty$ lorsque l tend vers 0, c'est–à–dire lorsque qu'on comprime considérablement l'éprouvette. Ces mesures offrent en quelque sorte une "résolution" meilleure dans ce domaine de déformation et sont, de ce fait, privilégiées en mécanique des sols par exemple où l'essai de compression est l'essai de base.

La mesure de déformation uniaxiale E_1 qui se rapporte à la longueur initiale est souvent appelée **déformation nominale** ou **déformation de l'ingénieur**. La **déformation logarithmique** E_0, dite aussi parfois **naturelle**, est très utilisée dans la pratique. A la livraison d'une courbe de traction par exemple, il est important de s'enquérir des grandeurs portées sur

les axes. Il est clair que l'information essentielle est contenue dans l'enregistrement de $F_{11} = l/l_0$. Les mesures de déformation sont donc toutes équivalentes. Toutefois, de nombreuses courbes expérimentales sont fournies traditionnellement en utilisant $\log(l/l_0)$. Il est important de le savoir !

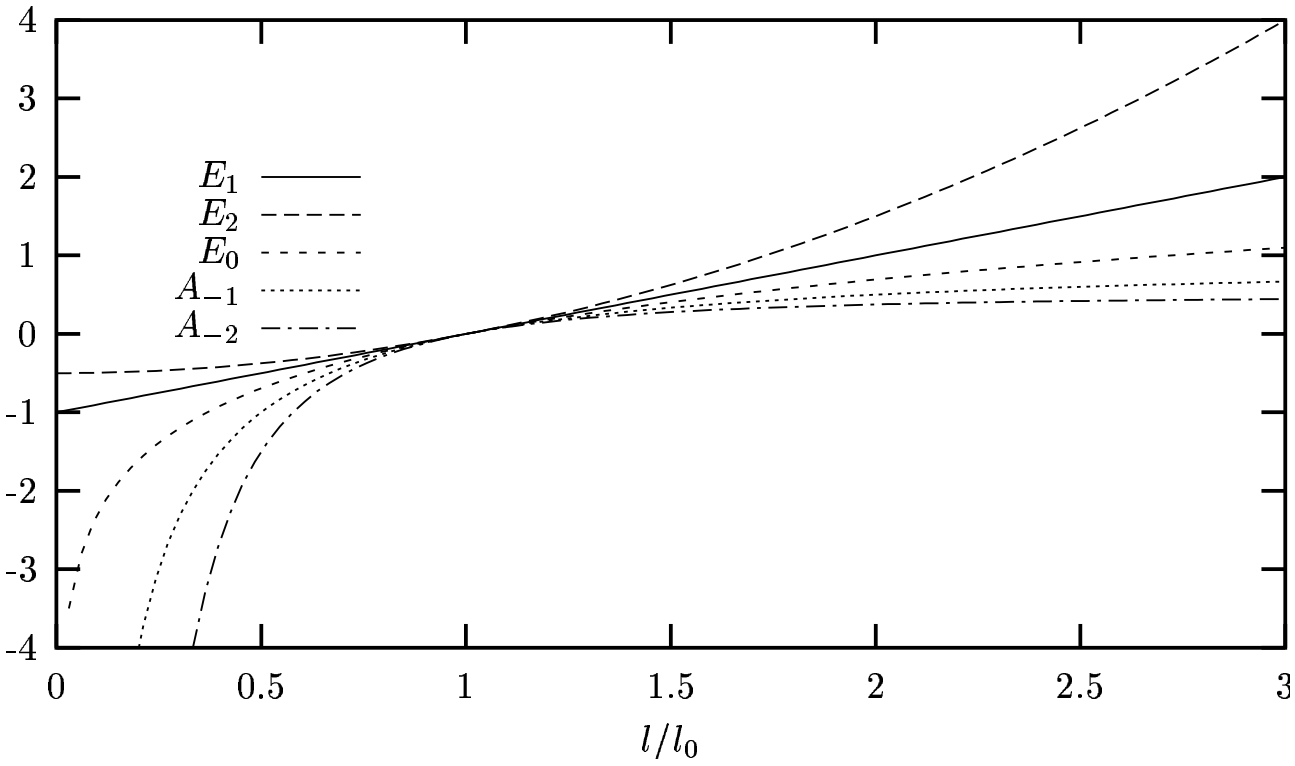


FIG. 2.10 – Evolution de différentes mesures de déformation en fonction du rapport l/l_0 des longueurs actuelle et initiale d'un segment matériel au cours d'une déformation pure homogène.

Composition des déformations

Si le corps matériel est soumis à une transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1$ depuis la configuration de référence Ω_0, puis à la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2$ partant de la configuration Ω_1, la transformation totale par rapport à Ω_0 vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1. \tag{2.104}$$

La composition des gradients de transformation est donc multiplicative. Par contre, les effets sur les tenseurs de déformation sont plus complexes. Par exemple,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1 \neq \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}_1. \tag{2.105}$$

De même, $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \neq \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_1 + \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_2$ (ici les indices 1 et 2 ne se réfèrent pas à la famille des mesures de déformation (2.85) mais aux déformations de Green–Lagrange entre les configurations Ω_0/Ω_1 et Ω_1/Ω_2 respectivement).

2.3.3 Transformations infinitésimales

Dans de nombreuses situations pratiques se pose le problème de l'étude des propriétés en service de matériaux et de structures. Matériaux et structures ne sont alors autorisés qu'à subir

$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$	gradient de la transformation ($\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} > 0$)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$	rotation propre ($\det \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = 1$)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$	tenseur droit de déformation pure ($\det \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$	tenseur gauche de déformation pure ($\det \underset{\sim}{\boldsymbol{V}} = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}} = \operatorname{Grad} \underline{\boldsymbol{u}}$	gradient du déplacement
$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^2$	tenseur de Cauchy–Green droit ($\det \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}})^2$)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}^2$	tenseur de Cauchy–Green gauche ($\det \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}})^2$)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}})$	tenseur de Green–Lagrange
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^{-1})$	tenseur d'Almansi
$\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}})$	déformation lagrangienne de Biot
$\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}^{-1})$	déformation eulérienne de Biot
$\log \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \frac{1}{2} \log \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$	déformation logarithmique lagrangienne de Hencky
$\log \underset{\sim}{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{2} \log \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$	déformation logarithmique eulérienne de Hencky

TAB. 2.2 – Récapitulatif : tenseurs décrivant la géométrie de la transformation

de faibles déformations : tôles d'aluminium de la nacelle d'un avion, structures en béton du génie civil... Ce genre de problèmes liés au **dimensionnement** et à la **fiabilité** des structures, peut être traité dans le cadre de l'hypothèse des transformations infinitésimales, i.e. en faisant l'hypothèse que

$$\|\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla}_X\| \ll 1 \Longleftrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \mathcal{O}(\underset{\sim}{\mathbf{1}}) \tag{2.106}$$

En choisissant par exemple comme norme la norme infinie i.e. le maximum de la valeur absolue des composantes, l'hypothèse porte donc aussi sur la valeur absolue de chacune des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$ qui doit être suffisamment petite. On parle de transformations infinitésimales par opposition aux **transformations finies** générales envisagées jusqu'ici. On parle aussi parfois de théorie linéaire géométrique. L'équation (2.106) montre que l'hypothèse ne porte pas tant sur la transformation Φ elle–même que sur son gradient $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$.

L'hypothèse (2.106) est liée à un référentiel particulier (ou à des référentiels "infiniment proches") et à une configuration de référence particulière. Une telle hypothèse est en outre hors de propos pour les problèmes d'écoulements de fluides et ceux de l'élaboration des matériaux et fabrication des pièces et structures notamment par **mise en forme**.

Dans la suite, le signe $\simeq$ signifie que l'égalité n'est vraie qu'à un terme de l'ordre $o(\|\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}\|)$ près, que l'on notera aussi $o(h)$ ou, de manière équivalente, $\mathcal{O}(h^2)$. Ainsi, dans le contexte infinitésimal, les termes pertinents sont les contributions des ordres $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(h)$. Il sera donc toujours licite de corriger une expression par des termes d'ordre 2 par rapport à l'ordre des termes présents dans l'expression considérée.

Tenseur des déformations infinitésimales

L'hypothèse des transformations infinitésimales a le mérite de simplifier considérablement les méthodes mathématiques de résolution du problème posé[8]. En particulier, on pourra négliger tous les termes en $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$ par rapport aux termes en $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$ dans les expressions des mesures de déformations rassemblées dans le tableau 2.2. On ne garde donc que les termes linéaires en $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$. C'est en ce sens que l'on parle de déformations **linéarisées**. Par exemple la déformation de Green–Lagrange se réduit à

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \simeq \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T) = \underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.107}$$

où l'on a introduit le tenseur des déformations infinitésimales

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T) \tag{2.108}$$

Dans une base cartésienne orthonormée $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$, le tenseur des déformations infinitésimales s'écrit :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij}\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}) \tag{2.109}$$

Sous forme matricielle,

$$[\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1}+u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2}) & u_{3,3} \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

où l'on a introduit la notation très utilisée en physique

$$u_{i,j} := \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{2.111}$$

[8] La solution trouvée n'est toutefois pertinente que si l'hypothèse des transformations infinitésimales est légitime pour le problème posé !

Le tenseur des déformations infinitésimales est donc la partie symétrique du gradient du déplacement. Dans ce contexte et selon la condition (*iii*) choisie pour définir les mesures de déformation au paragraphe 2.3.2, toutes les mesures de déformation coïncident autour de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}}$.

Il est toujours possible de calculer $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ d'après la formule (2.108) mais c'est uniquement dans le contexte des transformations infinitésimales qu'il prend son sens de tenseur des déformations. C'est pourquoi il n'apparaît pas dans le tableau récapitulatif 2.2 mais seulement dans le tableau 2.3. Une conséquence de ce fait est que l'on peut très bien avoir une déformation de Green–Lagrange nulle ($\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = 0, \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$) et une déformation infinitésimale non nulle ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$) ! Il suffit de considérer un mouvement de corps rigide (2.52) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \Longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = 0 \quad \text{mais} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) - \underset{\sim}{\mathbf{1}} \neq 0 \tag{2.112}$$

La déformation infinitésimale associée à ce mouvement ne sera quasi–nulle que pour une rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ elle–même infinitésimale (voir plus loin la représentation des petites rotations).

Il est utile d'expliciter ce que deviennent les variations de longueurs et d'angles dans le contexte infinitésimal. Le rapport d'allongement $\lambda(\underline{\boldsymbol{M}})$ d'une direction $\underline{\boldsymbol{M}}$ calculé en (2.73) devient

$$\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}) = \sqrt{\underline{\boldsymbol{M}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{M}}} \simeq \sqrt{1 + 2\underline{\boldsymbol{M}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}} \simeq 1 + \underline{\boldsymbol{M}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}} \tag{2.113}$$

Autrement dit,

$$\frac{|\underline{\boldsymbol{dx}}| - |\underline{\boldsymbol{dX}}|}{\underline{\boldsymbol{dX}}} \simeq \underline{\boldsymbol{M}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}} \tag{2.114}$$

La grandeur $\underline{\boldsymbol{M}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}$ mesure précisément l'allongement relatif d'un vecteur matériel $\underline{\boldsymbol{M}}$. Elle est donc directement utilisée pour interpréter les résultats de mesures à l'aide de jauges ou d'extensomètres (cf. figure 2.11).

Si $\underline{\boldsymbol{M}} = \underline{\boldsymbol{e}}_1$ (pour une base cartésienne orthonormée donnée), et si l'on note δ l'allongement de ce vecteur au cours de la déformation,

$$\delta \simeq \varepsilon_{11} \tag{2.115}$$

ce qui fournit une interprétation simple de la première composante du tenseur des déformations infinitésimales.

L'angle de glissement (2.78) quant à lui devient

$$\cos\theta \simeq \cos\Theta(1 + \underline{\boldsymbol{M}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}_1 + \underline{\boldsymbol{M}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2) + 2\underline{\boldsymbol{M}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2 \tag{2.116}$$

En remarquant que (voir équation (2.80) pour la définition de γ)

$$\cos\theta = \cos(\Theta - \gamma) = \cos\Theta\cos\gamma + \sin\Theta\sin\gamma \simeq \cos\Theta + \gamma\sin\Theta$$

on obtient

$$\gamma\sin\Theta = \cos\Theta(\underline{\boldsymbol{M}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}_1 + \underline{\boldsymbol{M}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2) + 2\underline{\boldsymbol{M}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2 \tag{2.117}$$

Dans le cas de deux directions initialement orthogonales, la relation précédente devient :

$$\gamma \simeq 2\underline{\boldsymbol{M}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2 \tag{2.118}$$

Si l'on prend $\underline{\boldsymbol{M}}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}_2$, le résultat précédent s'écrit

$$\gamma \simeq 2\varepsilon_{12} \tag{2.119}$$

ce qui fournit une interprétation simple de la composante de cisaillement du tenseur des déformations infinitésimales.

Les variations de volume sont évaluées dans le contexte infinitésimal de la manière suivante. D'après l'équation (2.38),

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dV} &= \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \det \begin{bmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1+u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1+u_{3,3} \end{bmatrix} \\ &\simeq 1+u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,3} = 1+\boldsymbol{\nabla}.\underline{\boldsymbol{u}} = 1+\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \tag{2.120}$$

où l'on a négligé tous les termes non linéaires en $u_{i,j}$. Autrement dit,

$$\frac{dv-dV}{dV} = \operatorname{div}\underline{\boldsymbol{u}} = \operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{2.121}$$

La variation infinitésimale de volume est donc fournie par la trace du tenseur des déformations infinitésimales. Une transformation infinitésimale localement isochore est donc caractérisée par

$$\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \tag{2.122}$$

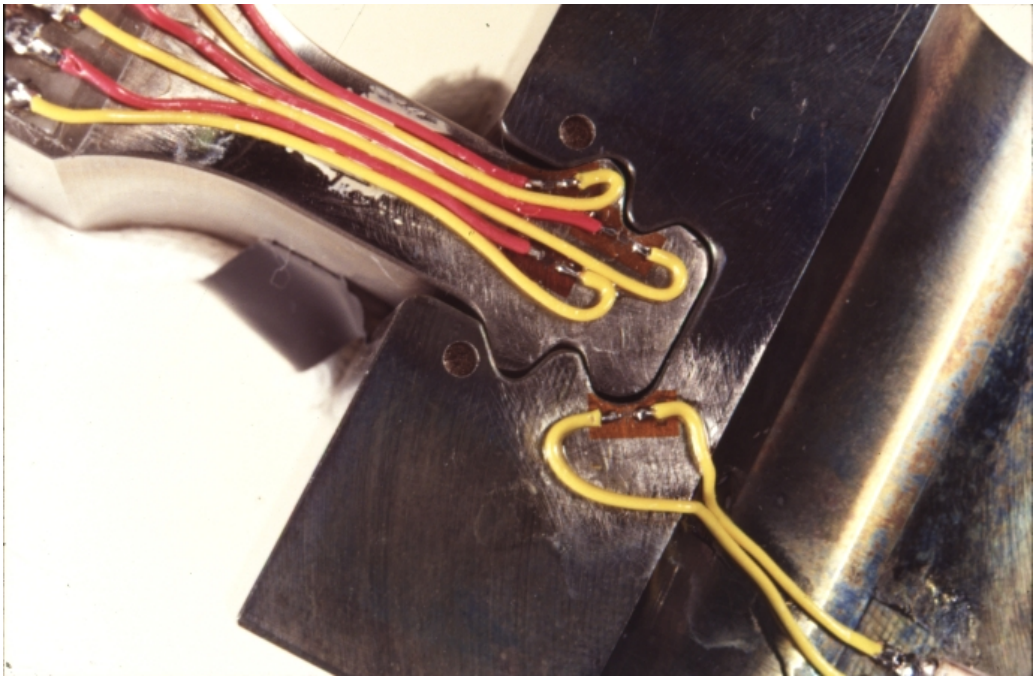


FIG. 2.11 – Mesures locales à l'aide de **jauges de déformation** collées ici sur un assemblage pied d'aube de turbine sur une portion de disque de turbine. Le pied d'aube en forme dite de pied de sapin est soumis à une traction tandis que le disque est fixé. Des déformations hétérogènes se développent dans le pied d'aube et dans le disque. La hauteur du pied de sapin est de 4cm. L'allongement des jauges provoque une variation de l'intensité du courant qui y circule. Une calibration permet de relier la mesure de courant à la déformation de la jauge. La jauge étant collée à la surface de la pièce, la déformation subie par la jauge est la même que la composante de déformation (2.114) locale de la pièce. La qualité du collage est bien sûr essentielle et ne peut être garantie que sur un domaine de déformation limité.

Transformation infinitésimale = petite déformation + petite rotation

On note $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$ la partie antisymétrique du gradient du déplacement :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T), \quad \omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{2.123}$$

Elle s'appelle **tenseur des rotations infinitésimales**. On revient sur cette définition au paragraphe suivant. Par suite,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} \simeq (\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}).(\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}) \tag{2.124}$$

On peut donc identifier à l'ordre $o(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}})$ près la rotation propre et la déformation pure associées à $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{V}} \tag{2.125}$$

Comme toutes les composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$ sont supposées suffisamment petites, il en va de même pour les tenseurs des déformations et des rotations infinitésimales. En résumé,

$$\begin{aligned} |\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}| \ll 1 \Longrightarrow |\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}| \ll 1, \quad |\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}| \ll 1 \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \simeq 1 \Longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \simeq 1 \end{aligned} \tag{2.126}$$

Le cadre des transformations infinitésimales est donc plus restrictif que celui où l'on ne demanderait qu'aux seules déformations d'être infinitésimales, puisqu'il implique aussi que les rotations restent infinitésimales.

On le voit, l'hypothèse d'une transformation infinitésimale implique que les déformations doivent rester infinitésimales. La réciproque est fausse en général. Si les déformations sont faibles, il n'en va pas nécessairement de même de la transformation associée. En effet les rotations correspondantes peuvent ne pas être négligeables du tout. La figure 2.12(a) de la flexion pure d'une plaque ou d'un fil mince est là pour nous en convaincre. On y voit l'état initial rectiligne de la plaque et l'état final qui lui est imposé. Les rotations que subissent certains éléments de la plaque sont indéniablement très fortes (la rotation relative entre les deux extrémités de la plaque est de 360°). L'expérience quotidienne de ce genre de sollicitations sur des fils métalliques par exemple nous indique que les déformations correspondantes sont d'autant plus faibles au cours de cette expérience que le fil est mince. Si le fil est très mince, l'expérience peut même être réalisée sans que le fil ne subisse de déformation permanente à l'issue de l'essai. Les corps élancés 1D (**fils, câbles et poutres** pour lesquels une dimension est très grande par rapport aux autres) ou 2D (**plaques et coques** pour lesquelles deux dimensions sont beaucoup plus grandes que la troisième) fournissent donc des exemples de transformations pour lesquelles les déformations sont faibles mais les rotations importantes. Sur la figure 2.12(b), le corps dont l'épaisseur n'est pas négligeable devant la courbure imposée au fil ou à la plaque subit quant à lui aussi bien de grandes déformations que de grandes rotations. Pour les corps résolument 3D par contre, il semble bien que petite déformation implique une transformation modérée, c'est du moins ce que suggère ce dernier exemple.

Un cadre plus réaliste pour le traitement des corps élancés mais aussi de certains procédés de mise en forme est l'hypothèse des rotations finies mais déformations infinitésimales. C'est de ce contexte qu'il s'agit dans la théorie dite des **poutres en grandes rotations**, appelée aussi, de manière moins pertinente, poutres en grands déplacements.

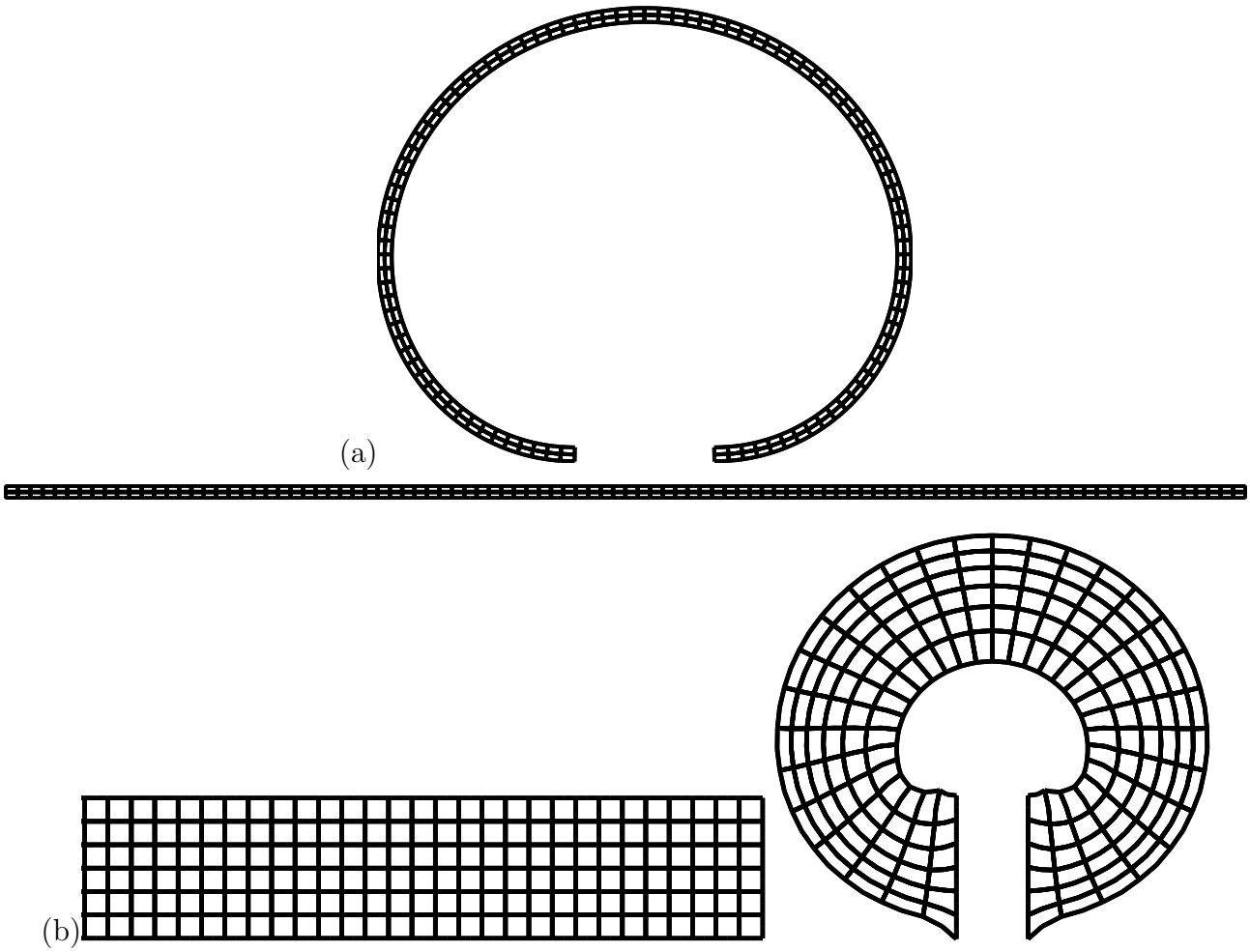


FIG. 2.12 – Flexion pure d'un corps mince (a) et d'un corps 3D (b). On a tracé une grille sur la surface initiale des corps pour mieux suivre la déformation. Les états initiaux et finaux sont montrés. L'expérience sur le corps épais n'est pas facile à réaliser : pour le faire, on a collé les extrémités de la barre à 2 parallélépipèdes en acier que l'on tourne chacune de 180°.

Représentation des petites rotations

Dans un repère tel que le troisième axe coïncide avec l'axe de rotation, la matrice d'une rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ s'écrit en fonction de l'angle de rotation ϕ :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

c'est–à–dire la somme de l'identité et d'une matrice antisymétrique lorsque $|\phi| \ll 1$. Le résultat précédent explicité dans une base particulière montre que le tenseur des rotations infinitésimales se décompose en la somme de l'identité et d'un tenseur antisymétrique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}^T + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} = 0 \tag{2.128}$$

Un tenseur antisymétrique 3D ne possède que trois composantes indépendantes. A chaque tenseur antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$ est associé l'unique vecteur $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$ tel que :

$$\forall \underline{\boldsymbol{x}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}.\underline{\boldsymbol{x}} =: \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}} \tag{2.129}$$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}}$	gradient du déplacement
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}} + (\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}})^T)$	tenseur des déformations infinitésimales
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}} - (\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}})^T)$	tenseur des rotations infinitésimales
$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} \simeq (\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}).(\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}})$	
$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$	
$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$	
$\frac{\lvert\underline{\boldsymbol{dx}}\rvert - \lvert\underline{\boldsymbol{dX}}\rvert}{\lvert\underline{\boldsymbol{dX}}\rvert} \simeq \underline{\boldsymbol{M}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}$	allongement relatif infinitésimal
$\frac{dv - dV}{dV} \simeq \mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{u}} = \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$	variation de volume infinitésimale

TAB. 2.3 – Récapitulatif : le contexte des transformations infinitésimales.

En notation matricielle, la définition précédente s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\overset{\times}{\omega}_3 & \overset{\times}{\omega}_2 \\ \overset{\times}{\omega}_3 & 0 & -\overset{\times}{\omega}_1 \\ -\overset{\times}{\omega}_2 & \overset{\times}{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.130}$$

où les $\overset{\times}{\omega}_i$ sont les composantes du vecteur $\underline{\overset{\times}{\boldsymbol{\omega}}}$.

Un **mouvement de corps rigide infinitésimal** s'écrit donc de la manière suivante :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{X}} = \underline{\boldsymbol{c}}\,(t) + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}(t).\underline{\boldsymbol{X}} = \underline{\boldsymbol{c}}\,(t) + \underline{\overset{\times}{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{X}} \tag{2.131}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$ est un tenseur antisymétrique indépendant de $\underline{\boldsymbol{X}}$. La relation précédente est la linéarisation de (2.52). La translation $\underline{\boldsymbol{c}}\,(t)$ peut être d'amplitude tout à fait quelconque.

2.3.4 Etude des déformations homogènes

Dans le contexte général des transformations finies, il est clair que lorsque la transformation est homogène au sens du paragraphe 2.2.7, les mesures de déformation introduites sont elles–aussi homogènes et ne dépendent donc que du temps t. La réciproque est vraie mais plus délicate à établir : une déformation homogène implique–t–elle une transformation correspondante homogène ?

Théorème 3 (Déformation homogène) *La déformation de Green–Lagrange $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ (resp. la déformation pure $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$) est homogène si et seulement si la transformation est homogène.*

Preuve. Si $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ est homogène, alors les tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et donc $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ sont homogènes aussi. Il reste donc a établir que $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est homogène. On peut pour cela utiliser la représentation de la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ à l'aide des angles d'Euler (cf. équation (A.84)). En écrivant les relations de Schwarz sur les dérivées croisées de $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$, on établit que les angles d'Euler doivent être indépendants de $\underline{\boldsymbol{X}}$. □

Déformation nulle

Théorème 4 (Déformation nulle) *La déformation de Green–Lagrange $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ est nulle en tout point de Ω_0 à un instant t si et seulement si la transformation de Ω_0 à Ω_t est un mouvement de corps rigide.*

Preuve. Si la transformation est un mouvement de corps rigide (2.52), le gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ se réduit alors à sa rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ de sorte que $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = 0$. Si $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = 0$, alors $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$. Par conséquent $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ se réduit à la rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}})$. D'après le théorème précédent 3, l'homogénéité de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ entraîne celle de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$. Le gradient de la transformation est donc un champ de rotation homogène. La transformation associée est donc un mouvement de corps rigide. □

Extension simple

On revient à la cinématique (2.53) d'extension simple. Du gradient de la transformation (2.54), on déduit les tenseurs de Cauchy–Green et de Green–Lagrange :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \lambda(2+\lambda)\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \frac{\lambda}{2}(2+\lambda)\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 \tag{2.132}$$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}] = \begin{bmatrix} (1+\lambda)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2}(2+\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.133}$$

On remarque que la déformation de Green–Lagrange est purement uni-axiale, ce qui correspond bien à l'image de l'extension simple de la figure (2.7). Si la transformation est infinitésimale $\lambda \ll 1$, on calcule

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 \tag{2.134}$$

Glissement simple

La déformation de Green–Lagrange associée au glissement simple se déduit de (2.57)

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}}) = \frac{\gamma}{2}(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) + \frac{\gamma^2}{2}\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.135}$$

Dans le cas d'une transformation infinitésimale $\gamma \ll 1$, le tenseur des déformations infinitésimales $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.136}$$

La cinématique du glissement simple infinitésimal conduit donc à une déformation de cisaillement pur d'intensité $\varepsilon_{12} = \gamma/2$. Dans des situations plus générales, la variable $\gamma := 2\varepsilon_{12}$ est fréquemment introduite (à la place de ε_{12}) et est appelée **cisaillement de l'ingénieur**.

2.3.5 Conditions de compatibilité

La figure 2.13 montre une grille déposée sur un corps matériel (configuration Ω_0 en (a)) et une transformation quelconque du corps (configuration Ω en (b)). Chaque "petit" élément carré initial de la grille est devenu un "petit" parallélogramme (sur la figure, les carrés déformés ne sont pas des parallélogrammes parce que les carrés initiaux ne sont pas assez "petits"). Les petits parallélogrammes sont tous distincts les uns des autres car la transformation n'est pas homogène. Chaque parallélogramme infinitésimal représente l'état de déformation local $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ où $\underline{\boldsymbol{X}}$ désigne les coordonnées matérielles de chaque carré initial infinitésimal. On a vu en effet que $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ caractérise complètement la variation de longueur des côtés du carré et la variation d'angle (équations (2.71) et (2.80) respectivement). La figure 2.13(c) montre la collection des parallélogrammes séparés les uns des autres comme les pièces d'un puzzle. Comme nous savons que ces pièces sont issues de la transformation d'un corps matériel continu, nous savons que nous réussirons à reconstituer le puzzle à partir des pièces isolées. Lorsqu'on le reconstitue, on trouve une à une les rotations $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ nécessaires à la reconstruction du champ de gradient $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ à partir de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$. Le problème de la **compatibilité** dans $\mathbb{R}^2$ d'un champ de déformation posé dans ce paragraphe peut alors s'énoncer de la manière suivante : étant donné une collection de petits parallélogrammes, chacun étant caractérisé par les composantes C_{11}, C_{22} et C_{12} d'un tenseur de Cauchy–Green, à quelles conditions sur le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ est–il possible de reconstituer le puzzle sans trou ni recouvrement ?

On peut poser le problème d'une manière plus géométrique encore. Puisque $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ représente un champ de métrique, à quelles conditions dérive–t–il d'un champ de coordonnées curvilignes ? Comment en déterminer le paramétrage ?

Cas général : position du problème

Soit donc un champ de tenseurs symétriques définis positifs $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$. A quelles conditions sur le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ existe–t–il une transformation $\Phi(\underline{\boldsymbol{X}})$ dont $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ soit le champ de tenseurs des dilatations associé ?

$$\exists \Phi ?, \quad (\mathrm{grad}\,\Phi)^T.(\mathrm{grad}\,\Phi) = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} \tag{2.137}$$

A la lumière de l'illustration de la figure 2.13, on se convaincra aisément qu'à tout champ de tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ donné ne corresponde pas systématiquement une transformation Φ ayant les propriétés de régularité requise, **à moins que le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ ne soit homogène**. Il suffit qu'un seul des morceaux du puzzle n'ait pas la forme compatible, pour qu'on ne puisse pas le reconstituer. On notera en particulier que dans le cas général 3D, le problème posé revient à passer de la donnée des 6 fonctions caractérisant le champ de tenseurs symétriques, à 3 fonctions caractérisant la transformation. Il doit donc exister des **conditions de compatibilité**.

De telles conditions peuvent être établies dans le cadre général des transformations finies. Toutefois nous n'en ferons pas usage dans le cadre de ce cours. Nous nous contentons donc de les établir ici dans le cas des transformations infinitésimales.

Avant cela toutefois, grâce aux résultats du paragraphe 2.3.4, on est en mesure de répondre à la question suivante, dans le contexte générale :

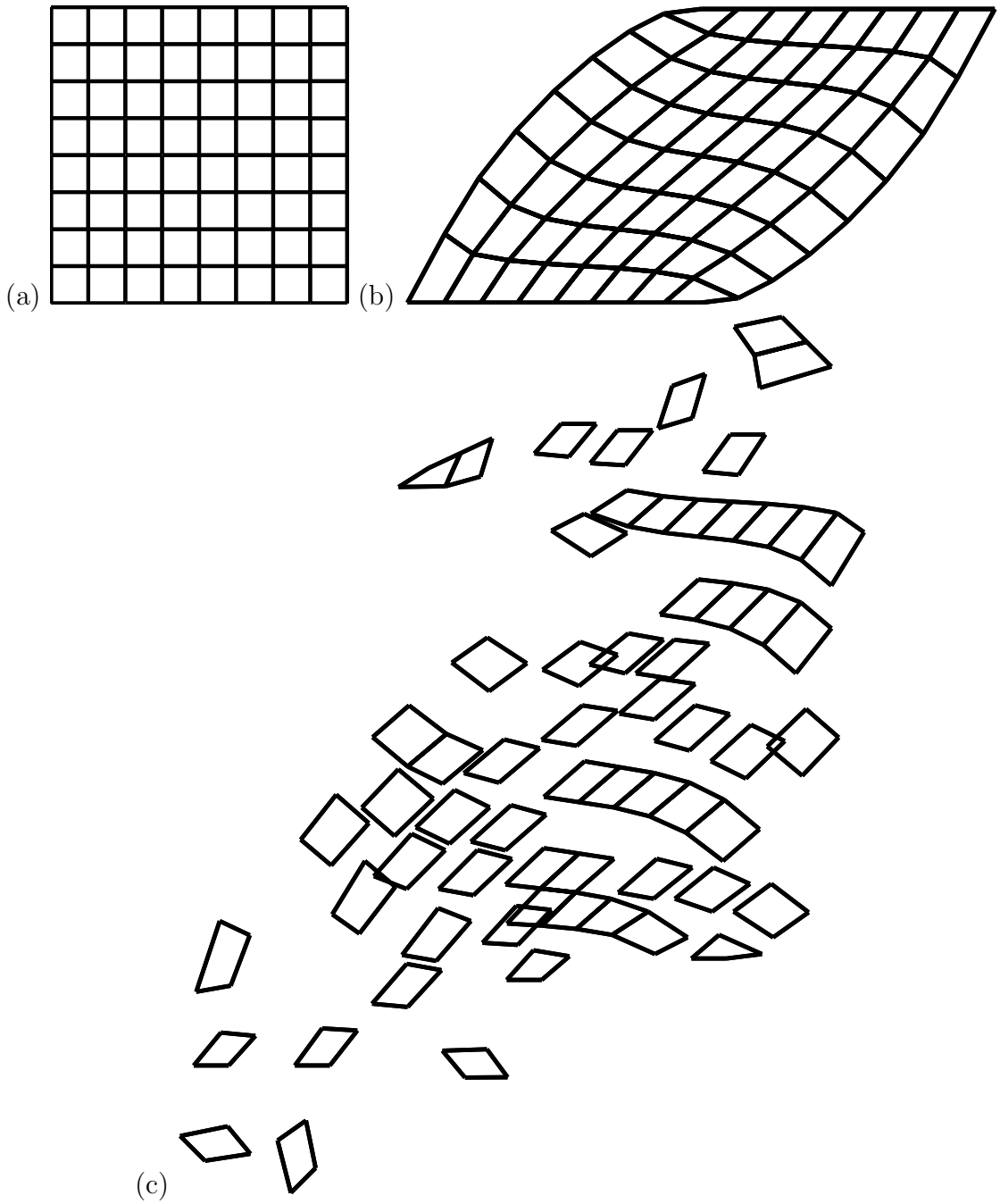


FIG. 2.13 – Illustration du problème de la compatibilité d'un champ de déformation : configuration initiale (a), configuration déformée (b) et éclaté du corps matériel déformé (c).

Si le champ de déformation proposé est compatible, de combien diffèrent les transformations solutions possibles ?

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ un champ **compatible** de tenseurs d'ordre 2 symétriques définis positifs. On Suppose qu'il existe 2 transformations $\Phi_1(\underline{\boldsymbol{X}})$ et $\Phi_2(\underline{\boldsymbol{X}})$ de déplacements dont $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ soit le champ des déformations de Cauchy–Green droit associé. Quel est le lien entre Φ_1 et Φ_2 ?

Les gradients des transformations Φ_1 et Φ_2 sont liés, en tout point $\underline{\boldsymbol{X}}$, par

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} \tag{2.138}$$

Cela implique que les parties de déformation pure de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2$ sont identiques :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}_2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \tag{2.139}$$

Par conséquents, il existe des champs de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_1$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2$ tels que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_1(\underline{\boldsymbol{X}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2(\underline{\boldsymbol{X}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}) \tag{2.140}$$

La transformation composée $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ admet pour gradient

$$\mathrm{Grad}\,(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_1^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \tag{2.141}$$

Cette transformation est donc un champ de rotations pures $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$. Au cours de la preuve du théorème 3, on a annoncé que cela n'est possible que si la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ est homogène. En conséquence, **les transformations Φ_1 et Φ_2 diffèrent d'un mouvement de corps rigide** :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_2(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_1(\underline{\boldsymbol{X}}), \quad \Phi_2(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\Phi_1(\underline{\boldsymbol{X}}) + \underline{\boldsymbol{c}} \tag{2.142}$$

Cas des transformations infinitésimales

Dans le contexte des transformations infinitésimales, il faut reformuler le problème de la compatibilité. On se donne un champ de tenseurs symétriques $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$, et on se demande à quelles conditions il existe un champ de déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ dont $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ soit le champ de gradient symétrisé associé. Ces conditions constituent le

Théorème 5 (Conditions de compatibilité) *Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ un champ de tenseurs symétriques*[9]*. Il existe un champ de vecteurs $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ tel que*

$$\forall \underline{\boldsymbol{X}}, \quad \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}} + (\mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}})^T)(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$$

si et seulement si, $\forall i,j,k,l$,

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} = \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} \tag{2.143}$$

Preuve. On établit successivement la condition nécessaire (2.143) puis son caractère suffisant :

- S'il existe $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ tel que, dans un repère cartésien orthonormé,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.144}$$

alors on peut calculer le champ des rotations infinitésimales

$$\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \tag{2.145}$$

On calcule ensuite le gradient du champ de rotation :

$$\begin{aligned} \omega_{ij,k} &= \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,kj} + u_{k,ij} - (u_{k,ji} + u_{j,ki})) \end{aligned}$$

[9] On suppose ici le champ défini sur un domaine **simplement connexe**, c'est–à–dire tel que toute courbe fermée tracée dans ce domaine puisse être réduite à zéro par déformation continue de la ligne sans sortir du domaine. Si le domaine est à connexions multiples (anneau, tore...), les conditions (2.143) ne sont pas suffisantes. Le champ de déplacement obtenu par la méthode d'intégration proposée dans la preuve risque de d'être multiforme (un exemple de fonction multiforme est la fonction arctangente). Il faut alors ajouter une *condition de fermeture* aux conditions de compatibilité. On renvoie à la discussion détaillée de ce point dans (Mandel, 1966) et aux développements du chapitre 16.

d'où

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \tag{2.146}$$

où l'on a utilisé une première fois le théorème de Schwarz : $(.)_{,ij} = (.)_{,ji}$. Le champ précédent doit vérifier nécessairement la condition suivante (théorème de Schwarz sur l'interversion des dérivées croisées) :

$$\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk} \tag{2.147}$$

ce qui, appliqué au membre de droite de l'équation (2.146), fournit

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il} = \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik}$$

qui constituent les conditions nécessaires recherchées (2.143).

- Si le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ vérifie les conditions (2.143), on calcule

$$W_{ijk} := \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \tag{2.148}$$

Les conditions (2.143) indiquent que

$$W_{ijk,l} = W_{ijl,k} \tag{2.149}$$

En vertu du théorème 24 (dit de Poincaré, voir annexe A), il existe donc des quantités ω_{ij} telles que

$$W_{ijk} = \omega_{ij,k} \tag{2.150}$$

En remarquant que $W_{ijk} = -W_{jik}$, on peut choisir ω_{ij} tel que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.
Evaluons alors :

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \\ H_{ij,k} - H_{ik,j} &= \varepsilon_{ij,k} + \omega_{ij,k} - \varepsilon_{ik,j} - \omega_{ik,j} \\ &= \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{kj,i} = 0 \end{aligned} \tag{2.151}$$

où l'on a utilisé deux fois (2.146). La quantité H_{ij} vérifie donc les conditions du théorème de Poincaré que l'on utilise une nouvelle fois pour affirmer qu'il existe un champ de vecteurs u_i tel que

$$H_{ij} = u_{i,j}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.152}$$

c'est–à–dire que le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ est compatible. □

On insiste sur le fait que la démonstration précédente présente aussi une méthode systématique de construction des champs de déplacement à partir du champ de déformation, qu'il faudra mettre en œuvre lors de la résolution de problèmes aux limites. Cette démarche sera appliquée une première fois au paragraphe 2.3.4 puis au chapitre 8.

Les conditions de compatibilité (2.143) doivent être satisfaites pour tous les quadruplets (i, j, k, l). Combien au juste cela fait–il de conditions indépendantes ? Pour le savoir, on va expliciter ces conditions en distinguant les cas bi et tridimensionnels :

- *Cas 2D.* Les indices ne parcourent que l'ensemble $\{1, 2\}$. Remarquer que si $i = j$ ou $k = l$, les conditions (2.143) sont automatiquement vérifiées. Prenons donc

$$\begin{array}{ccccccc} i & \neq & j & \text{et} & k & \neq & l \\ 1 & & 2 & \text{et} & 1 & & 2 \end{array}$$

Cette combinaison donne la seule condition à remplir :

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \tag{2.153}$$

En 2D, le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ n'a que 3 composantes indépendantes. Si l'on tient compte de la relation supplémentaire (2.153), il reste 2 degrés de liberté i.e. le nombre de composantes de déplacement cherchées.

- *Cas 3D.* On sélectionne les combinaisons d'indices pertinentes :

i	$\neq$	j	et	k	$\neq$	l
1		2	et	1		2
2		3	et	2		3
3		1	et	3		1
1		2	et	2		3
2		3	et	3		1
3		1	et	1		2

Cela conduit aux conditions

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \tag{2.154}$$
$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} - 2\varepsilon_{23,23} = 0 \tag{2.155}$$
$$\varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} - 2\varepsilon_{31,31} = 0 \tag{2.156}$$
$$\varepsilon_{12,23} + \varepsilon_{23,12} = \varepsilon_{22,31} + \varepsilon_{31,22} \tag{2.157}$$
$$\varepsilon_{23,31} + \varepsilon_{31,23} = \varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} \tag{2.158}$$
$$\varepsilon_{31,12} + \varepsilon_{12,31} = \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} \tag{2.159}$$

Cela fait six conditions. On peut montrer qu'elles ne sont pas indépendantes et que si trois d'entre elles sont vérifiées, alors les trois autres le sont automatiquement. Il n'est toutefois pas possible de réduire de manière explicite les 6 équations à trois seulement.

Les conditions de compatibilité font intervenir uniquement les composantes du second gradient du tenseur des déformations. On en déduit que **tout champ de déformations affine** (i.e. des déplacements fonctions quadratiques des X_i dans une base cartésienne) les vérifie automatiquement et **est donc compatible** (dans le contexte infinitésimal).

Application aux déformations infinitésimales nulles

On peut établir le théorème 4 dans le cadre linéarisé en utilisant les conditions de compatibilité précédentes. Le théorème porte sur les transformations conduisant à un champ de déformations nulles. On suppose donc que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}}) = 0, \forall \underline{\boldsymbol{X}}$ à un instant t donné. De quels champs $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ est–il le champ des déformations infinitésimales ? De tels champs $\underline{\boldsymbol{u}}$ existent à coup sûr puisque le champ de déformation nul vérifie automatiquement les conditions de compatibilité (2.143). Pour les trouver on va utiliser la démarche présentée au cours de l'exposé des conditions de compatibilité. L'équation (2.146) devient ici

$$\omega_{ij,k} = 0$$

En particulier,

$$\omega_{12,1} = 0, \quad \omega_{12,2} = 0, \quad \omega_{12,3} = 0 \Longrightarrow \omega_{12} = -r$$

où r est une constante. De même

$$\omega_{23} = -p, \quad \omega_{31} = -q$$

où p et q sont des constantes. Le gradient du champ de déplacement se réduit donc à sa partie antisymétrique :

$$u_{i,j} = \omega_{ij}$$

On écrit successivement,

$$u_{1,1} = 0, \quad u_{1,2} = -r, \quad u_{1,3} = q$$
$$u_{2,1} = r, \quad u_{2,2} = 0, \quad u_{2,3} = -p$$

$$u_{3,1} = -q, \quad u_{3,2} = p, \quad u_{3,3} = 0$$

L'intégration de ces trois équations fournit

$$\begin{aligned} u_1 &= -rX_2 + qX_3 + c_1 \\ u_2 &= rX_1 - pX_3 + c_2 \\ u_3 &= -qX_1 + pX_2 + c_3 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, la famille des solutions s'écrit

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \tag{2.160}$$

On reconnaît un mouvement de corps rigide infinitésimal conformément à l'équation (2.131). On rappelle que la rotation est petite mais que la translation c_i est quelconque.

2.3.6 Changement de référentiel euclidien / de configuration de référence

Que deviennent les mesures de déformation lorsque l'on change de référentiel ? On considère les changements de référentiels euclidiens de la forme (2.3), qui de plus coïncident sur la configuration de référence (équation (2.28)). Soit $\mathcal{R}'$ un autre référentiel d'observation. Le gradient de la transformation se transforme de la manière suivante d'après (2.30) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'(\underline{\boldsymbol{X}}, t') = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) \tag{2.161}$$

Les variations de volume ne sont bien évidemment pas affectées par le changement de référentiel (scalaires invariants)

$$J' := \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}' = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} =: J \tag{2.162}$$

où l'on utilise le fait que $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ est une rotation. Les formules de changement de référentiel pour les tenseurs de Cauchy–Green et pour les mesures de déformation s'obtiennent en utilisant abondamment la relation (2.161). On peut classer les résultats en deux groupes.

Théorème 6 (Changement de référentiel pour les déformations) *Le tenseur de Cauchy–Green droit $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et les mesures lagrangiennes de déformation sont invariantes par changement de référentiel euclidien coïncidant sur la configuration de référence :*

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} \tag{2.163}$$

Les tenseurs se transformant comme $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ par changement de référentiel euclidien sont dits **invariants**.

Le tenseur de Cauchy–Green gauche $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ et les mesures eulériennes de déformation se transforment de la manière suivante par changement de référentiel euclidien coïncidant sur la configuration de référence :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{2.164}$$

Les tenseurs se transformant comme $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ par changement de référentiel euclidien sont dits **objectifs**[10].

[10] Les définitions d'invariance et d'objectivité introduites ici ne sont pas universellement adoptées dans la littérature. On en trouvera d'autres tout aussi licites (voir par exemple (Ogden, 1997)). Il convient dans chaque cas de vérifier ce que chaque auteur entend par ces termes.

Preuve. En effet,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}' := \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} \tag{2.165}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}' := \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{2.166}$$

Par suite toute mesure de déformation utilisant le tenseur de Cauchy–Green droit sera invariante. Les mesures utilisant $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ (dites eulériennes) sont quant à elles objectives, à l'instar du tenseur d'Almansi :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}' := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}'^{-1}) = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{2.167}$$

D'autre part, la décomposition polaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ (2.44) permet de trouver celle de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'$ en utilisant l'unicité d'une telle décomposition :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T).(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}) \tag{2.168}$$

de sorte que l'on peut identifier

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{2.169}$$

Les tenseurs de déformation pure $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ sont donc respectivement invariant et objectif. La rotation propre, quant à elle, se transforme comme $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. □

En particulier la déformation de Green–Lagrange est invariante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \tag{2.170}$$

Les familles de mesures de déformation utilisant $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ comme (2.85) sont respectivement invariantes et objectives.

On sera amené dans le chapitre 5 à changer de configuration de référence suivant la règle (2.35) présentée au paragraphe 2.2.4 (voir aussi figure 2.5). On aura besoin du

Théorème 7 (Changement de configuration de référence pour les déformations) *Les tenseurs de Cauchy–Green par rapport à une nouvelle configuration de référence se déduisant de la première par la transformation quelconque* $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ *(non nécessairement orthogonale) s'écrivent :*

$$\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}, \quad \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T \tag{2.171}$$

Preuve. En effet, en utilisant (2.35),

$$\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} := \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^T.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}$$

$$\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}} := \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T$$

on obtient les résultats annoncés. □

On voit en particulier que $\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}}$ ne s'exprime pas directement en fonction de $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$.

Si l'on se contente de tourner la configuration de référence, c'est–à–dire si $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ est une rotation (mouvement de corps rigide appliqué à la configuration de référence), alors

$$\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T, \quad \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} \tag{2.172}$$

En particulier le tenseur eulérien $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ ne voit pas un tel changement de configuration de référence.

2.4 Vitesses de déformation

Dans les deux premières parties 2.2 et 2.3 de ce chapitre, on a comparé un état donné du corps matériel avec un état particulier choisi comme référence. Dans cette dernière partie du chapitre 2, on compare deux configurations infiniment proches Ω_t et $\Omega_{t+\Delta t}$, ce qui conduit donc à introduire des dérivations par rapport au temps.

2.4.1 Dérivées par rapport au temps : champs de vitesses et d'accélération

Le champ des vitesses sur un corps matériel $\mathcal{M}$ dans une transformation Φ de la configuration de référence Ω_0 vers la configuration actuelle Ω_t est défini par :

$$\underline{\boldsymbol{V}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) \tag{2.173}$$

La description eulérienne de ce champ de vitesses est

$$\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) := \underline{\boldsymbol{V}}\,(\Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}\,),t) = \underline{\boldsymbol{V}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) \tag{2.174}$$

Plus généralement, les grandeurs utilisées en mécanique des milieux continus sont considérées tantôt comme des fonctions des variables lagrangiennes $F(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ ou comme des fonctions des variables eulériennes $f(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$:

$$F(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = f(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = f(\Phi(X,t),t)$$

Les notations F, f[11] seront utilisées lorsque l'on effectue le changement de variables $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$. On définit la **dérivée temporelle matérielle** ou **dérivée temporelle particulaire** ou encore **dérivée temporelle en suivant le mouvement** par

$$\begin{aligned} \dot{F}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) &:= \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = \frac{d}{dt} f(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) + \frac{\partial f}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}.\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) + \frac{\partial f}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}.\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \frac{df}{dt} = \dot{f}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) \end{aligned} \tag{2.175}$$

où apparaît le **terme convectif** $(\operatorname{grad} f).\underline{\boldsymbol{v}}$. La définition précédente s'écrit ainsi à l'aide de composantes :

$$\dot{F} := \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \tag{2.176}$$

L'opérateur dérivée temporelle dans le mouvement peut s'appliquer de manière générale à des fonctions tensorielles sous la forme

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\underline{\boldsymbol{X}}} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{\underline{\boldsymbol{x}}} + \operatorname{grad}(\,).\underline{\boldsymbol{v}} \tag{2.177}$$

En particulier, on peut utiliser les notations introduites pour donner une chaîne d'égalités définissant le champ des vitesses (2.173) :

$$\dot{\underline{\boldsymbol{x}}} := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = \underline{\boldsymbol{V}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = \underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) \tag{2.178}$$

[11] Ne pas confondre la notation F ici avec le gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$.

Il est temps de montrer l'équivalence entre les descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement introduites au paragraphe 2.2.3. Il est clair que l'on obtient la description eulérienne à partir de la description lagrangienne en éliminant $\underline{\boldsymbol{X}}$ entre les relations $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$ et $\underline{\boldsymbol{V}} := \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$ pour obtenir $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$. Inversement comment obtenir la description lagrangienne à partir de la simple connaissance du champ $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$? Il suffit en fait d'intégrer le système différentiel en $\underline{\boldsymbol{x}}(t)$ suivant

$$\frac{d\underline{\boldsymbol{x}}}{dt}(t) = \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}(t), t) \tag{2.179}$$

pour une condition initiale donnée $\underline{\boldsymbol{x}}(0) = \underline{\boldsymbol{X}}$. La solution constitue la trajectoire du point matériel $\underline{\boldsymbol{X}}$ choisi.

On appelle **ligne de courant**[12] à un instant donné t_1 une courbe tangente en tout point au champ de vitesse $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t_1)$.

Un mouvement est dit **stationnaire** ou **permanent** si le champ des vitesses eulériennes $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ est indépendant du temps.

Enfin, le champ d'**accélération** $\underline{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \underline{\boldsymbol{a}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ est défini par

$$\underline{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) := \ddot{\underline{\boldsymbol{x}}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \frac{d\underline{\boldsymbol{v}}}{dt}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}).\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{a}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \tag{2.181}$$

2.4.2 Champ de gradient des vitesses

On s'enquiert ici de la vitesse d'évolution des lignes matérielles. Pour cela on dérive par rapport au temps la relation de transport des fibres matérielles (2.8) :

$$\overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{dx}}} = \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{F}}}.\underline{\boldsymbol{dX}} \tag{2.182}$$

Cette relation donne donc l'évolution d'une fibre matérielle infinitésimale (i.e. constituée de particules matérielles) au cours du mouvement. On peut relier directement la fibre matérielle dans son état actuel à sa vitesse en éliminant $\underline{\boldsymbol{dX}}$ dans la relation précédente :

$$\overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{dx}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{dx}}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} \tag{2.183}$$

Or

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{F}}} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \underline{\boldsymbol{X}}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}\, \partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) \\ &= \operatorname{Grad} \underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \end{aligned} \tag{2.184}$$

[12] Les lignes de courant s'obtiennent en intégrant le système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} \tag{2.180}$$

dans lequel le temps t_1 est fixé et joue le rôle de paramètre.

Le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$ précédemment introduit et permettant de suivre l'évolution des fibres matérielles au cours du mouvement n'est donc autre que le **tenseur gradient des vitesses**[13]

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) \tag{2.185}$$

Le gradient des vitesses peut être décomposé en parties symétrique et antisymétrique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} \tag{2.186}$$

avec

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T) \tag{2.187}$$

Le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ s'appelle **tenseur eulérien vitesse de déformation** ou **tenseur taux de déformation**. Le mot "vitesse" employé peut prêter à confusion. En effet il désigne en général la dérivée par rapport au temps d'une grandeur. Ce n'est pas le cas de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ défini ici simplement comme la partie symétrique du gradient eulérien des vitesses.

Le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ s'appelle **tenseur taux de rotation**. Puisque le taux de rotation est antisymétrique, on peut lui associer un **vecteur taux de rotation** ou **vecteur tourbillon** $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}$ tel que :

$$\forall \underline{\boldsymbol{y}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underline{\boldsymbol{y}} =: \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge \underline{\boldsymbol{y}} \tag{2.188}$$

La notation matricielle correspondant à la définition du vecteur tourbillon est la même que celle consignée dans l'équation (2.130). Par conséquent, l'expression des composantes cartésiennes dans un repère orthonormé est

$$\overset{\times}{W}_1 = -W_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \tag{2.189}$$

$$\overset{\times}{W}_2 = -W_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \tag{2.190}$$

$$\overset{\times}{W}_3 = -W_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \tag{2.191}$$

Ces formules permettent de reconnaître l'opérateur rotationnel eulérien appliqué au champ des vitesses[14]

$$\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} = -\frac{1}{2}\operatorname{rot}\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) \tag{2.192}$$

Les informations nécessaires sur l'opérateur rotationnel se trouve au paragraphe A.2.2. Un mouvement est dit localement **irrotationnel** si le tenseur taux de rotation ou, de manière équivalente, le vecteur tourbillon est nul.

Le choix des dénominations introduites et le sens mécanique des différents tenseurs sont justifiés au paragraphe 2.4.3.

[13] Avec la notation utilisant l'opérateur nabla introduite pour la première fois dans l'équation (2.13), on peut aussi noter le tenseur gradient des vitesses de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underline{\boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{\nabla}_x$$

[14] Avec la notation utilisant l'opérateur nabla introduite pour la première fois dans l'équation (2.13), en utilisant quelques relations issues du paragraphe A.1.3 de l'annexe A, on peut aussi noter

$$\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} = -\frac{1}{2}\underset{\approx}{\boldsymbol{\epsilon}} : (\underline{\boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{\nabla}_x), \quad \overset{\times}{\omega}_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}v_{j,k}$$

Autre décomposition du gradient des vitesses

En partant de la décomposition polaire de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, il est possible d'obtenir la décomposition suivante du tenseur gradient des vitesses :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} &= \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \\ \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} &= \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} &= \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T} + \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T} \end{aligned} \tag{2.193}$$

Il est important de remarquer que, **pour tout tenseur orthogonal $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$, le tenseur vitesse de rotation associé $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T}$ est antisymétrique**. En effet,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T} = \underline{1} \Longrightarrow \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}^{T} = -(\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T})^{T} \tag{2.194}$$

Par contre, le deuxième terme apparaissant dans la relation (2.193) n'est en général pas symétrique car $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}$ ne commutent pas systématiquement :

$$(\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1})^{T} = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}} \neq \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1} \tag{2.195}$$

Pour s'en convaincre, s'il est besoin, il suffit de considérer le contre–exemple simple suivant. Dans une base cartésienne orthonormée particulière, on considère

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12}(t) & 0 \\ U_{12}(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{U}_{12}(t) & 0 \\ \dot{U}_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.196}$$

où seule la composante U_{12} est supposée dépendre du temps. L'inverse de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ s'écrit

$$\left[\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}\right] = \frac{1}{U_{11} - U_{12}^{2}} \begin{bmatrix} 1 & -U_{12} & 0 \\ -U_{12} & U_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.197}$$

Enfin, on trouve

$$\left[\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}\right] = \frac{\dot{U}_{12}}{U_{11} - U_{12}^{2}} \begin{bmatrix} -U_{12} & U_{11} & 0 \\ 1 & -U_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}\right] = \frac{\dot{U}_{12}}{U_{11} - U_{12}^{2}} \begin{bmatrix} -U_{12} & 1 & 0 \\ U_{11} & -U_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.198}$$

Il apparaît donc que $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}$ ne commutent que si $U_{11} = 1$.

Il s'ensuit qu'en général

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{W}} \neq \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T}, \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \neq \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T} \tag{2.199}$$

Le tenseur taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ est donc en général distinct de la vitesse de rotation propre $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T}$.

2.4.3 Vitesses d'évolution des longueurs, angles et volumes

Pour suivre l'évolution du produit scalaire de deux fibres matérielles, on dérive par rapport au temps l'équation (2.68) :

$$\begin{aligned} \dot{\overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underline{\boldsymbol{dx}}_2}} &= \dot{\overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}_1}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 + \underline{\boldsymbol{dx}}_1.\dot{\overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}_2}} \\ &= \underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 + \underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 \\ &= 2\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 \end{aligned} \tag{2.200}$$

Le tenseur taux de déformation mesure donc la vitesse de variation du produit scalaire de deux directions matérielles sur la configuration actuelle. Il mesure donc les variations de longueur et d'angle d'éléments de fibres matérielles.

D'autre part, la relation (2.68) implique aussi

$$\overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underline{\boldsymbol{dx}}_2}^{\bullet} = \overbrace{\underline{\boldsymbol{dX}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2}^{\bullet} = \underline{\boldsymbol{dX}}_1.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2 = 2\underline{\boldsymbol{dX}}_1.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2 \tag{2.201}$$

de sorte que l'évolution des tenseurs de Green–Lagrange et de Cauchy–Green droit s'expriment en fonction du tenseur taux de déformation

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.202}$$

Taux d'allongement relatif

La relation (2.200) peut être utilisée pour suivre l'allongement d'une direction particulière $\underline{\boldsymbol{dx}}_1 = \underline{\boldsymbol{dx}}_2 = \underline{\boldsymbol{dx}}$:

$$\overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}.\underline{\boldsymbol{dx}}}^{\bullet} = \overbrace{\mid \underline{\boldsymbol{dx}} \mid^2}^{\bullet} = 2 \mid \underline{\boldsymbol{dx}} \mid \overbrace{\mid \underline{\boldsymbol{dx}} \mid}^{\bullet} = 2\underline{\boldsymbol{dx}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{dx}} \tag{2.203}$$

En reprenant la définition de l'allongement relatif $\lambda(\underline{\boldsymbol{m}})$ défini par l'équation (2.73) pour une direction matérielle $\underline{\boldsymbol{dx}} = \mid \underline{\boldsymbol{dx}} \mid \underline{\boldsymbol{m}}$, on obtient sa variation

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\overbrace{\mid \underline{\boldsymbol{dx}} \mid}^{\bullet}}{\mid \underline{\boldsymbol{dx}} \mid} = \underline{\boldsymbol{m}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}} \tag{2.204}$$

appelé **taux d'allongement relatif** de la direction matérielle portée par $\underline{\boldsymbol{m}}$. Cette relation doit être rapprochée de l'allongement relatif infinitésimal égal à $\underline{\boldsymbol{M}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}$ dans l'équation (2.113). Si $\underline{\boldsymbol{m}} = \underline{\boldsymbol{e}}_1$ premier vecteur d'une base orthonormée choisie, son taux d'allongement relatif instantané n'est autre que la composante D_{11} du tenseur des taux de déformation.

Le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est par définition symétrique mais il n'est pas nécessairement défini positif puisque le taux d'allongement relatif d'une direction matérielle peut tout aussi bien augmenter que diminuer ou rester inchangé au cours du mouvement.

Taux de glissement angulaire

On considère deux directions matérielles actuelles $\underline{\boldsymbol{dx}}_1 = \mid \underline{\boldsymbol{dx}}_1 \mid \underline{\boldsymbol{m}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{dx}}_2 = \mid \underline{\boldsymbol{dx}}_2 \mid \underline{\boldsymbol{m}}_2$, et on suit l'évolution de l'angle qu'elles délimitent. En partant de

$$\begin{aligned} \overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underline{\boldsymbol{dx}}_2}^{\bullet} &= \overbrace{\mid \underline{\boldsymbol{dx}}_1 \mid \mid \underline{\boldsymbol{dx}}_2 \mid \cos\theta}^{\bullet} = 2\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 \\ &= \mid \underline{\boldsymbol{dx}}_1 \mid \mid \underline{\boldsymbol{dx}}_2 \mid \cos\theta(\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1 + \underline{\boldsymbol{m}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2) - \mid \underline{\boldsymbol{dx}}_1 \mid \mid \underline{\boldsymbol{dx}}_2 \mid \dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \tag{2.205}$$

on obtient

$$\dot{\theta}\sin\theta = -2\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2 + \cos\theta(\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1 + \underline{\boldsymbol{m}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2) \tag{2.206}$$

Dans le cas particulier où les directions étudiées sont orthogonales à l'instant choisi (i.e. $\theta = \pi/2$), l'évolution de l'angle de glissement γ défini par (2.79) est donnée simplement par

$$\dot{\gamma} = -\dot{\theta} = 2\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2 \tag{2.207}$$

Si l'on prend $\underline{\boldsymbol{m}}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{m}}_2 = \underline{\boldsymbol{e}}_2$, le taux de glissement est exactement donné par le double de la composante D_{12} du tenseur taux de déformation. On voit aussi qu'en général deux directions orthogonales à l'instant t ne le resteront pas à l'instant $t + \Delta t$. On en déduit le

Théorème 8 (Directions orthogonales dans le mouvement) *Les trièdres de directions matérielles deux à deux orthogonales et qui le restent à l'instant t sont les trièdres des directions matérielles coïncidant, à l'instant t, avec les directions principales du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ des taux de déformation. Lorsque les valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ sont distinctes, un tel trièdre est unique.*

Preuve. C'est une conséquence de la relation (2.207) que l'on applique à trois directions matérielles deux à deux orthogonales $\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3$. Le tenseur symétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ a des valeurs propres réelles et possède des directions principales deux à deux orthogonales qui vérifient le théorème d'après (2.207). Réciproquement, s'il existe trois directions deux à deux orthogonales $(\underline{\boldsymbol{m}}_1, \underline{\boldsymbol{m}}_2, \underline{\boldsymbol{m}}_3)$ telles que

$$\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2 = 0 \tag{2.208}$$
$$\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_3 = 0 \tag{2.209}$$
$$\underline{\boldsymbol{m}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_3 = 0 \tag{2.210}$$

Les équations (2.209) et (2.210) montrent que $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_3$ est orthogonal à $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{m}}_2$ et est donc colinéaire à $\underline{\boldsymbol{m}}_3$. On en déduit que $\underline{\boldsymbol{m}}_3$ est une direction propre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Le même raisonnement s'applique à $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{m}}_2$, ce qui achève la démonstration. □

Le théorème évoque le seul trièdre qui reste orthogonal, mais il existe par contre de nombreux couples de vecteurs qui restent orthogonaux. Il suffit par exemple de prendre une direction principale de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et un vecteur du plan engendré par les deux autres directions principales.

Interprétation du tenseur taux de rotation

Pour cela, on part d'une fibre matérielle que l'on suit dans le mouvement :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{dx}} &= |\,\underline{\boldsymbol{dx}}\,|\,\underline{\boldsymbol{m}} \\ \overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{dx}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{dx}} &= |\,\underline{\boldsymbol{dx}}\,|\,\dot{\underline{\boldsymbol{m}}} + |\,\underline{\boldsymbol{dx}}\,|\,(\underline{\boldsymbol{m}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}})\underline{\boldsymbol{m}} \end{aligned} \tag{2.211}$$

où $\underline{\boldsymbol{m}}$ est unitaire. On en déduit l'évolution de la direction de la fibre matérielle :

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}} - (\underline{\boldsymbol{m}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}})\underline{\boldsymbol{m}} \tag{2.212}$$

Il faut insister sur le fait que $\dot{\underline{\boldsymbol{m}}} \neq \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}}$. Le vecteur $\underline{\boldsymbol{m}}$ ne se comporte donc pas comme une fibre matérielle. Il n'indique que la direction de la ligne matérielle $\underline{\boldsymbol{dx}}$ à un instant t, ce n'est déjà plus le cas en général à $t + \Delta t$.

Dans le cas particulier où $\underline{\boldsymbol{m}}$ unitaire correspond à une direction principale du taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$, on vérifie que la relation (2.212) se réduit à

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underline{\boldsymbol{m}} = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge \underline{\boldsymbol{m}} \tag{2.213}$$

Ce résultat montre que le vecteur unitaire attaché à une ligne matérielle coïncidant à l'instant t avec une direction principale de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ subit une rotation dont la vitesse est donnée par $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}(t)$. On en déduit le

Théorème 9 (Rotation du trièdre des directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$) *Le trièdre orthonormé des vecteurs unitaires portés par les directions matérielles qui coïncident à l'instant t avec les directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$, évolue selon un mouvement de solide rigide dont le taux de rotation à l'instant t vaut $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$.*

Le théorème fournit une interprétation claire du taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$.

Le théorème précédent montre que le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est lié à $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ puisque c'est le second qui dicte la rotation instantanée des directions matérielles coïncidant à l'instant t avec les directions principales du premier[15]. Cela peut sembler surprenant dans la mesure où, *a priori*, les parties symétrique et antisymétrique d'un tenseur quelconque sont indépendantes. Ce couplage entre $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ vient en fait de la nécessaire intégrabilité de $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$ qui est en effet, on le rappelle, le gradient d'un champ de vecteur. Ce point est explicité au paragraphe 2.4.4.

Evolution d'un élément de volume

On rappelle qu'un élément de volume initial dV se transforme en dv sur la configuration actuelle selon les équations (2.37) et (2.38). On en déduit l'évolution temporelle de la variation de volume élémentaire :

$$\begin{aligned} dv &= J\,dV, \quad \text{avec} \quad J = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \\ \overset{\bullet}{dv} &= \dot{J}\,dV \end{aligned} \tag{2.214}$$

et par suite

$$\overset{\bullet}{dv} = \frac{\dot{J}}{J}\,dv \tag{2.215}$$

La variation du volume fait donc intervenir la dérivée du déterminant de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. Il est possible de relier cette grandeur au tenseur gradient des vitesses, en utilisant les propriétés du produit mixte défini en (2.37) :

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{dv} &= \overset{\bullet}{[\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3]} \\ &= [\overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{dx}}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3] + [\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{dx}}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3] + [\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{dx}}}_3] \\ &= [\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3] + [\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underline{\boldsymbol{dx}}_3] + [\underline{\boldsymbol{dx}}_1, \underline{\boldsymbol{dx}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_3] \\ &= \left(\begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & L_{12} & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ 0 & L_{32} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & L_{13} \\ 0 & 1 & L_{23} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{vmatrix} \right) dv \\ &= (L_{11} + L_{22} + L_{33})\,dv \end{aligned} \tag{2.216}$$

qui n'est autre que la trace du gradient des vitesses. Pour établir le résultat précédent, on a choisi un volume élémentaire dv particulier constitué de trois vecteurs orthogonaux et les déterminants ont été explicités dans cette base. Le résultat garde toute sa généralité car, d'après (2.215), la quantité $\dot{J}/J$ ne dépend pas de dv de sorte que son expression peut être établie à l'aide d'un

[15] Le théorème ne dit pas que le trièdre des directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ tourne à la vitesse angulaire $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$, ce qui est faux. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre l'exemple du glissement simple traité en 2.4.6, pour lequel les directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ ne tournent pas alors même que $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ est non nul. Le théorème porte sur un trièdre de directions matérielles coïncidant à t uniquement avec les directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$.

dv particulier. Finalement,

$$\overset{\bullet}{\frac{dv}{dv}} = \frac{\dot{J}}{J} = \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \text{div}\,\underline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\nabla}_x.\underline{\boldsymbol{v}} \tag{2.217}$$

La divergence du vecteur vitesse apparaît car

$$\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = L_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

On insiste sur la relation suivante, contenue dans (2.217) :

$$\dot{J} = J\,\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}})\,\text{trace}\,(\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}) \tag{2.218}$$

Une autre manière d'établir ce résultat consiste à utiliser la différentielle du déterminant :

$$\frac{d\,J}{dt} = \frac{d\,J}{d\,\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} : \frac{d\,\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}{dt} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}})\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} = J\,\dot{F}_{ij}F^{-1}_{ji} = J\,\text{trace}\,(\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}) \tag{2.219}$$

La formule de la différentielle de l'application déterminant (A.146) a été utilisée (théorème 26 du paragraphe A.3.4)[16].

Evolution d'un élément de surface

Les éléments de surface ne sont pas des lignes matérielles et suivent la loi de transport (2.42) au cours du mouvement. La dérivée temporelle d'un élément de surface actuel $\underline{\boldsymbol{ds}}$ s'obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{ds}} &= J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{dS}} \\
\overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{ds}}} &= \dot{J}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{dS}} - J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{dS}} \\
&= \frac{\dot{J}}{J}\underline{\boldsymbol{ds}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T}.\underline{\boldsymbol{ds}}
\end{aligned} \tag{2.220}$$

où l'on a utilisé la formule donnant la dérivée de l'inverse de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ qui se déduit du théorème 25 au paragraphe A.3.3 :

$$\overset{\bullet}{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} \tag{2.221}$$

Finalement,

$$\overset{\bullet}{\underline{\boldsymbol{ds}}} = ((\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{L}})\underset{\sim}{\boldsymbol{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^{T}).\underline{\boldsymbol{ds}} \tag{2.222}$$

où l'on a utilisé (2.217). Dans un second temps on s'intéresse à l'évolution du vecteur normal $\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{ds}}/ds$ avec $ds = \|\underline{\boldsymbol{ds}}\|$. Pour cela, on utilise le fait que la norme du vecteur unitaire normal doit rester égal à 1, ce qui implique

$$\|\underline{\boldsymbol{n}}\|^2 = \underline{\boldsymbol{n}}.\underline{\boldsymbol{n}} = 1 \Longrightarrow \underline{\boldsymbol{n}}.\dot{\underline{\boldsymbol{n}}} = 0 \tag{2.223}$$

[16] Il n'est peut–être pas inutile d'expliciter les dérivations partielles effectuées dans (2.219) :

$$\frac{d\,J}{d\,\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} : \frac{d\,\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}{dt} = \frac{d\,J}{d\,F_{ij}}\frac{d\,F_{ij}}{dt}$$

en sommant sur les indices répétés comme d'habitude.

$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} = \operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}$	tenseur gradient des vitesses
$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T)$	tenseur taux de déformation
$\underset{\sim}{\boldsymbol{W}} := \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T)$	tenseur taux de rotation
$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$	
$\overset{\bullet}{\overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underline{\boldsymbol{dx}}_2}} = 2\underline{\boldsymbol{dx}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{dx}}_2 = \underline{\boldsymbol{dX}}_1.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}.\underline{\boldsymbol{dX}}_2$	
$\overset{\bullet}{\overbrace{\underline{\boldsymbol{dx}}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{dx}}$	élément de fibre matérielle
$\overset{\bullet}{\overbrace{\underline{\boldsymbol{ds}}}} = ((\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{L}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T).\underline{\boldsymbol{ds}}$	élément de surface
$\overset{\bullet}{\overbrace{dv}} = (\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{L}})\, dv = \frac{\dot{J}}{J}\, dv$	élément de volume
$\frac{\dot{\lambda}(\underline{\boldsymbol{m}})}{\lambda(\underline{\boldsymbol{m}})} = \underline{\boldsymbol{m}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}$	taux d'allongement relatif
$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}} - (\underline{\boldsymbol{m}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}})\underline{\boldsymbol{m}}$	direction unitaire d'une fibre matérielle actuelle
$\dot{\underline{\boldsymbol{n}}} = (\underline{\boldsymbol{n}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{n}})\underline{\boldsymbol{n}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T.\underline{\boldsymbol{n}}$	vecteur normal unitaire d'un élément de surface

TAB. 2.4 – Récapitulatif : autour des vitesses de déformation.

D'autre part,

$$\overset{\bullet}{\overbrace{\underline{\boldsymbol{ds}}}} = \overset{\bullet}{\overbrace{ds\,\underline{\boldsymbol{n}}}} = \overset{\bullet}{\overbrace{ds}}\,\underline{\boldsymbol{n}} + ds\,\dot{\underline{\boldsymbol{n}}} \tag{2.224}$$

En faisant alors le produit scalaire de l'équation (2.222) avec $\underline{\boldsymbol{n}}$ à l'instant t, on obtient

$$\frac{\overset{\bullet}{\overbrace{ds}}}{ds} = \frac{\dot{J}}{J} - \underline{\boldsymbol{n}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{n}} \tag{2.225}$$

où le fait que $\underline{\boldsymbol{n}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T.\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{n}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{n}}$ a été pris en compte. La relation (2.225) n'a plus alors qu'à être substituée dans (2.222) pour trouver

$$\dot{\underline{\boldsymbol{n}}} = (\underline{\boldsymbol{n}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{n}})\underline{\boldsymbol{n}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T.\underline{\boldsymbol{n}} \tag{2.226}$$

2.4.4 Conditions de compatibilité pour le champ taux de déformation

Etant donné un champ de tenseurs symétriques $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$, existe–t–il un champ de vitesses $\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ dont $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ serait le taux de déformation associé ? Un tel champ doit donc vérifier

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{v}} + (\operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{v}})^T) \tag{2.227}$$

La formulation de ce problème est formellement identique au problème de compatibilité d'un champ des déformations infinitésimales $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$, qui constitue le théorème 5 au paragraphe 2.3.5. Il existe une analogie de structure entre $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ qui mérite qu'on s'y attarde en rappelant que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\operatorname{Grad}\underline{\boldsymbol{u}} + (\operatorname{Grad}\underline{\boldsymbol{u}})^T) \tag{2.228}$$

Ainsi, $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ s'obtiennent tous deux par application de l'opérateur gradient symétrisé respectivement aux champs de vitesses et de déplacement (attention, c'est l'opérateur grad que l'on utilise pour construire $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ contre Grad pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$). Ce n'est pas très étonnant dans la mesure où $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ mesure la vitesse de déformation pour la transformation entre les configurations Ω_t et $\Omega_{t+\Delta t}$ infiniment proche. La déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, quant à elle, ne concerne que les transformations inifnitésimales.

Sous cette deuxième forme le problème de compatibilité se pose quelle que soit la déformation du milieu, tandis que la première forme (théorème 5) n'apparaît que dans le cadre des transformations infinitésimales.

La démarche permettant de trouver le champ $\underline{\boldsymbol{u}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,)$ à partir d'un champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,)$ donné, présenté au paragraphe 2.3.5 se transpose exactement pour déterminer le champ $\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,)$ à partir d'un champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,)$ donné. C'est pourquoi elle n'est qu'esquissée ici. Les conditions de compatibilité sont données par les équations (2.143) en remplaçant ε par D. Pour construire le champ de vitesses correspondant, on calcule d'abord $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ en passant par l'intermédiaire du gradient $W_{ij,k}$ grâce à une expression analogue à (2.146). On construit ensuite $\underline{\boldsymbol{v}}$ à partir du champ de gradient des vitesses $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$. La solution n'est unique qu'à un champ de vitesses de corps rigide près comme on le montrera au paragraphe 2.4.6.

Cas des transformations infinitésimales

Dans le contexte des transformations infinitésimales défini par l'hypothèse (2.106), on remarque que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} \simeq \underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{H}} \Longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} \simeq \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}} \tag{2.229}$$

et par suite

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \simeq \frac{1}{2}(\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}} + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}}^T) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} \simeq \frac{1}{2}(\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}} - \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}}^T) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}} \tag{2.230}$$

L'analogie de structure déjà évoquée entre $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ devient plus étroite encore puisque le premier est simplement la dérivée temporelle du second dans le cadre des transformations infinitésimales. Concernant les vecteurs associés aux tenseurs antisymétriques $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$,

$$\underline{\overset{\times}{\boldsymbol{W}}} \simeq \underline{\dot{\overset{\times}{\boldsymbol{\omega}}}} \tag{2.231}$$

2.4.5 Changement de référentiel euclidien

Lors d'un changement de référentiel euclidien, les points matériels et leurs vitesses se transforment en

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{x}}' &= \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{c}}(t) \\ \underline{\boldsymbol{v}}' &= \dot{\underline{\boldsymbol{x}}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{v}} + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.(\underline{\boldsymbol{x}}' - \underline{\boldsymbol{c}}) + \dot{\underline{\boldsymbol{c}}} \qquad (2.232) \\ &= \underbrace{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{v}}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}}' - \underline{\boldsymbol{c}}) + \dot{\underline{\boldsymbol{c}}}}_{\text{vitesse d'entraînement}} \qquad (2.233) \end{aligned}$$

où $\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}}$ est le vecteur vitesse de rotation associé au tenseur vitesse de rotation du référentiel $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$. Une dérivation temporelle supplémentaire conduit à la règle de transformation du champ d'accélération :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{a}}' &:= \dot{\underline{\boldsymbol{v}}}' = \dot{\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}}' - \underline{\boldsymbol{c}}) + \overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}} \wedge (\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}' - \dot{\underline{\boldsymbol{c}}}) + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underline{\boldsymbol{v}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}} + \ddot{\underline{\boldsymbol{c}}} \\ &= \dot{\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}}' - \underline{\boldsymbol{c}}) + \overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}} \wedge (\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}}' - \underline{\boldsymbol{x}}) + \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{v}}) + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{v}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}} + \ddot{\underline{\boldsymbol{c}}} \\ &= \underbrace{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\dot{\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}}' - \underline{\boldsymbol{c}}) + \overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}} \wedge (\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}}' - \underline{\boldsymbol{c}})) + \ddot{\underline{\boldsymbol{c}}}}_{\text{accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\overset{\times}{\underline{\mathbf{w}}} \wedge \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{v}}}_{\text{Coriolis}} \end{aligned} \qquad (2.234)$$

Dans l'accélération d'entraînement, on reconnaît l'accélération angulaire, l'accélération centripète, l'accélération de Coriolis et l'accélération de translation $\ddot{\underline{\boldsymbol{c}}}$. Au passage, on remarque que ni la vitesse, ni l'accélération ne se transforment comme des vecteurs objectifs[17]. En effet leur expression dans un autre référentiel n'est pas influencée seulement par la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ mais aussi par l'accélération du nouveau référentiel par rapport au premier. C'est un résultat bien connu en mécanique classique.

La règle (2.30) de transformation du gradient de la transformation par changement de référentiel euclidien permet de calculer la règle de transformation du gradient des vitesses correspondante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}' := \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}'.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \qquad (2.235)$$

En décomposant $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}'$ en parties symétrique et antisymétrique, on identifie

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \qquad (2.236)$$

On voit que seul $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est un tenseur objectif au sens défini en (2.164) tandis que $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}'$ est influencé par la vitesse de rotation du second référentiel par rapport au premier[18].

[17] Un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}}$ est dit objectif par changement de référentiel euclidien si

$$\underline{\boldsymbol{v}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{v}}$$

[18] Puisque $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ est antisymétrique, il est possible de construire en chaque point matériel un tenseur de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ en intégrant l'équation différentielle

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} \qquad (2.237)$$

Il est tentant dès lors d'attacher à chaque point matériel un référentiel tournant de $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ par rapport au référentiel

2.4.6 Exemples de champs de vitesses

Champ de vitesses de corps rigide

On obtient un champ de vitesses de corps rigide en dérivant par rapport au temps le champ de déplacement (2.52)

$$\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}(t).(\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}}\,) + \dot{\underline{\boldsymbol{c}}}\,(t), \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{2.238}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ est une rotation et $\dot{\underline{\boldsymbol{c}}}$ un champ de vitesse uniforme. Plus généralement tout tenseur antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ permet de définir un champ de vitesses de corps solide de la forme (2.238). Voici l'écriture matricielle d'un tel champ :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - c_1 \\ x_2 - c_2 \\ x_3 - c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 - c_1 \\ x_2 - c_2 \\ x_3 - c_3 \end{bmatrix} \tag{2.239}$$

Les réels p, q, r représentent les trois composantes indépendantes du tenseur antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ et sont homogènes à une vitesse de rotation (s^{-1}). Ce sont les composantes du vecteur rotation $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}$ tel que :

$$\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}}\,) + \dot{\underline{\boldsymbol{c}}} \tag{2.240}$$

La forme générale d'un champ de vitesses de mouvement de corps rigide est donc

$$\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underline{\boldsymbol{v}}_0 + \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}} \tag{2.241}$$

où l'on a posé $\underline{\boldsymbol{v}}_0 = \dot{\underline{\boldsymbol{c}}} - \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge \underline{\boldsymbol{c}}$. Il est important de remarquer la similarité de l'expression précédente avec (2.131) d'un mouvement de solide rigide infinitésimal. La différence fondamentale est que (2.131) n'est valable que dans le contexte infinitésimal, tandis que (2.241) est universelle. Cela vient du fait que seule une rotation infinitésimale est représentée par un tenseur antisymétrique, alors que toute vitesse de rotation est antisymétrique (cf. l'équation (2.194)). Le champ d'accélération correspondant s'obtient en dérivant deux fois (2.52) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{a}} \;&:=\; \dot{\underline{\boldsymbol{v}}} = \ddot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underline{\boldsymbol{X}} + \ddot{\underline{\boldsymbol{c}}} \\ &=\; \ddot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.(\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}}\,) + \ddot{\underline{\boldsymbol{c}}} \end{aligned} \tag{2.242}$$

Par ailleurs, on peut dériver aussi par rapport au temps l'expression (2.240) ce qui donne

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{a}} \;&=\; \dot{\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}}\,) + \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge (\dot{\underline{\boldsymbol{x}}} - \dot{\underline{\boldsymbol{c}}}\,) + \ddot{\underline{\boldsymbol{c}}} \\ &=\; \dot{\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}}\,) + \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge (\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{c}}\,)) + \ddot{\underline{\boldsymbol{c}}} \end{aligned} \tag{2.243}$$

Le taux de déformation associé au champ de vitesses (2.238) est nul puisque son gradient se réduit au taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$.

initial et appelé **référentiel corotationnel**. L'avantage de ce référentiel est qu'il est construit de telle sorte que $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}' = 0$, ce que l'on peut vérifier en utilisant les relations (2.236). De même, on considère les **référentiels en rotation propre** construits en chaque point matériel avec le champ de tenseurs de rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$. Comme en général $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \neq \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$, ces deux familles de référentiels sont distincts. Il faut insister sur le statut local très particulier de ces référentiels. En effet, on adopte ici un référentiel différent pour suivre chaque particule matérielle. Cela peut dans certains cas permettre une écriture plus simple des lois de comportement. On renvoie à l'ouvrage (Besson et al., 2001) pour ce point qui sort largement du cadre de ce cours.

On peut aussi établir un théorème analogue au théorème 4 : *Le taux de déformation* $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ *est nul en tout point de* Ω *à l'instant* t *si et seulement si le champ de vitesses correspondant est un champ de vitesses de corps rigide (2.238).* La démonstration est en tout point semblable à celle du théorème 4 en remplaçant dans les expression ω par W, et u par v.

Extension simple

Le gradient des vitesses pour la transformation (2.53) s'écrit

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} = \frac{\dot{\lambda}}{1+\lambda}\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} = 0 \tag{2.244}$$

On constate, dans le cas de l'extension simple, que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^{extension} = \frac{d}{dt}\left(\log \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{extension}\right)$$

Glissement simple

En glissement simple (2.56), le gradient des vitesses, le tenseur vitesses de déformations et le tenseur taux de rotation s'écrivent

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \dot{\gamma}\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \frac{\dot{\gamma}}{2}(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} = \frac{\dot{\gamma}}{2}(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 - \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1) \tag{2.245}$$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.246}$$

Le taux de rotation correspond donc à une rotation autour de l'axe 3 d'angle θ à la vitesse

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\gamma}}{2} \tag{2.247}$$

On remarque que cette vitesse ne sature pas si le glissement s'effectue indéfiniment. C'est une situation bien différente de celle de la rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ (cf. équation (2.66)) dont l'angle tend vers $-\pi/2$ lorsque γ tend vers l'infini. Il n'est donc pas si simple d'interpréter les différentes rotations à l'œuvre lors d'un glissement simple. C'est d'ailleurs toujours un sujet de recherches (Yang et al., 1992) !

Chapitre 3

Equations de bilan

Ce chapitre rassemble les équations de conservation à respecter lors d'un mouvement du milieu continu. Ce sont des lois universelles. Les équations de bilan possèdent une structure mathématique systématique qui est formulée de manière générale dans l'annexe B.

3.1 Conservation de la masse

3.1.1 Masse d'un corps matériel et sa conservation

Un corps matériel $\mathcal{M}$ possède une **masse** $m(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}^+$, i.e. un réel positif possédant une unité, le kg. La masse est une propriété additive :

$$m(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = m(\mathcal{M}_1) + m(\mathcal{M}_2) \tag{3.1}$$

si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux corps disjoints. La masse est supposée être une fonction continue du volume de matière. En particulier quand ce volume tend vers 0, la masse correspondante tend vers 0. La masse est une grandeur intrinsèque, indépendante du référentiel d'observation. C'est un scalaire objectif ou invariant (puisque la terminologie coïncide pour les scalaires). Le principe de conservation de la masse stipule que $m(\mathcal{M})$ reste inchangé au cours du temps

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{M}) = 0 \tag{3.2}$$

Il existe une densité de masse[1] telle que, pour une configuration quelconque Ω du corps matériel $\mathcal{M}$ dans $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$,

$$m(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} dm = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)\, dv = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,)\, dV = \text{Constante} \tag{3.3}$$

où la masse volumique (densité de masse) locale $\rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t) \geq 0$ est un champ scalaire défini sur Ω_t. La masse volumique sur la configuration de référence Ω_0 est noté $\rho_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,)$. La conservation de la masse implique que

$$dm = \rho\, dv = \rho_0\, dV = \text{Constante} \tag{3.4}$$

La relation de transport pour les éléments de volume, établie au paragraphe 2.2.5 (équation (2.38)), implique que

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dv}{dV} = J = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{3.5}$$

[1] C'est une conséquence du théorème de Radon–Nicodym en théorie de la mesure, étant donné la régularité de m.

En dérivant par rapport au temps la relation précédente à l'aide des relations (2.175) et (2.215),

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_0}{J} \\ \dot{\rho} &= -\rho_0 \frac{\dot{J}}{J^2} = -\rho \frac{\dot{J}}{J} = -\rho \,\mathrm{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = -\rho \,\mathrm{div}\, \underline{\boldsymbol{v}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

La forme locale de la conservation de la masse (3.2) en découle :

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div}\, \underline{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, (\rho \underline{\boldsymbol{v}}) = 0 \tag{3.8}$$

où sont données les expressions avec les dérivées temporelles particulaires et convectives (cf. équation (2.175)). En particulier

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathrm{grad}\, \rho).\underline{\boldsymbol{v}} \tag{3.9}$$

Les relations précédentes utilisent la description eulérienne du mouvement (cf. paragraphe 2.2.3). Les équations (3.7) et (3.8) sont parfois appelées **équation de continuité**. L'expression reste toutefois ambiguë et ne sera pas utilisée dans la suite.

Une conséquence très utile dans la suite de l'écriture des lois de conservation est que pour toute densité massique $f(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ continue, on a

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho f(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv = \int_\Omega \rho \dot{f}\, dv \tag{3.10}$$

Le cas $f = 1$ correspond à la loi globale de la conservation de la masse, tandis que le cas général découle de (3.4). On renvoie au résultat (B.9) pour la démonstration complète de cette affirmation.

3.2 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique

3.2.1 Quantité de mouvement et moment cinétique d'un corps matériel

La quantité de mouvement d'un corps matériel $\mathcal{M}$ dans sa configuration actuelle Ω_t ou initiale Ω_0 prise comme configuration de référence, par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, est définie par

$$\int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}}) \underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)\, dV \tag{3.11}$$

Elle est bien sûr égale au produit de la masse du corps par la vitesse de son centre d'inertie. Le moment cinétique d'un corps matériel $\mathcal{M}$ par rapport à un point quelconque $\underline{\boldsymbol{x}}_0$ de l'espace $\mathcal{E}$, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$, est défini sur la configuration actuelle par

$$\int_{\Omega_t} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv \tag{3.12}$$

Le triplet formé du point $\underline{\boldsymbol{x}}_0$, et des dérivées particulaires de la quantité de mouvement et du moment cinétique est appelé **torseur dynamique** du corps matériel à l'instant t par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

3.2.2 Application de la loi fondamentale de la dynamique

Dans le cadre de la mécanique newtonienne classique, le corps matériel est soumis à un torseur d'efforts appliqués constitué d'une force résultante $\underline{\boldsymbol{R}}$ et d'un moment résultant $\underline{\boldsymbol{M}}_O$ par rapport à un point $\underline{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathcal{E}$ fixé. La première loi de Newton postule qu'il existe un référentiel dit galiléen par rapport auquel l'absence d'effort résultant se traduit par une quantité de mouvement constante

$$\underline{\boldsymbol{R}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\, dv = 0 \tag{3.13}$$

pour tout sous–domaine $\mathcal{D}(t) \subset \Omega_t$ et tout instant t. La loi fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton) stipule alors que, dans un référentiel galiléen, le torseur dynamique est en équilibre avec le torseur des efforts appliqués :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\, dv = \underline{\boldsymbol{R}} \tag{3.14}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho \underline{\boldsymbol{v}}\, dv = \underline{\boldsymbol{M}}_0 \tag{3.15}$$

Si, en outre, le champ des vitesses est continu sur le domaine matériel $\mathcal{D}$, alors la règle (3.10) qui consiste à dériver les termes sous le signe somme, peut être appliquée (domaine $\mathcal{D}$ matériel), en tenant compte de la conservation de la masse (3.4). On obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}}\, dv, \quad \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho \underline{\boldsymbol{v}}\, dv = \int_{\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho \underline{\boldsymbol{a}}\, dv \tag{3.16}$$

Pour que les relations (3.14) et (3.15) soient valables pour un référentiel quelconque (non nécessairement galiléen), il faut ajouter les contributions de forces d'inertie au torseur des efforts appliqués.

3.2.3 Partition des efforts appliqués à un corps matériel

En mécanique des milieux continus, on se livre à la classification suivante des types d'efforts appliqués à un corps matériel, appelés aussi **efforts extérieurs** :

- **Efforts de champ ou à distance.** De tels efforts agissent directement en tout point de $\mathcal{M}$. L'archétype en est la force de gravitation universelle. Les forces électromagnétiques en sont un autre exemple. On suppose qu'ils peuvent être représentés par une **densité massique de forces** $\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\text{dist}} = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv \tag{3.17}$$

  pour tout sous–domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$. On suppose souvent que $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ est indépendant du domaine $\mathcal{D}$ lui–même. C'est une restriction importante dans le cas de la gravitation par exemple si l'on ne peut pas négliger la force gravitationnelle causée par la masse $\mathcal{D}$ elle–même. De telles situations peuvent bien sûr être étudiées aussi. Dans de nombreux cas on peut se contenter d'un champ de gravitation uniforme sur le domaine considéré $\underline{\boldsymbol{f}} = \underline{\boldsymbol{g}}$.
  La densité $\underline{\boldsymbol{f}}$ a pour dimension physique : N.kg^{-1}.
  De tels efforts engendrent une densité de couples massiques

$$\underline{\boldsymbol{m}}^{\text{dist}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \underline{\boldsymbol{f}} + \underline{\boldsymbol{m}} \tag{3.18}$$

  auxquels on a ajouté une source éventuelle de couples massiques $\underline{\boldsymbol{m}}$, par exemple d'origine électromagnétique.

- **Efforts surfaciques ou de contact**. De tels efforts peuvent être appliqués en tout point de la surface $\partial\mathcal{D}$ sous forme d'actions normales ou/et tangentielles. On les représente donc par une densité surfacique d'effort $\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\partial\mathcal{D},t)$ pour $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\mathcal{D}$

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\text{contact}} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\partial\mathcal{D},t)\,ds \tag{3.19}$$

Les efforts de contact dépendent *a priori* de toutes les caractéristiques de la surface au point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\mathcal{D}$, à savoir sa normale $\underline{\boldsymbol{n}}$, ses courbures de Gauss, etc[2]. Les forces de capillarité régissant la mécanique des mousses mais pilotant aussi la forme des ménisques dépendent par exemple de la courbure de la surface. Les efforts de contact représentent les **efforts de cohésion** de la matière puisqu'ils peuvent exister à la frontière de tout sous–domaine de $\mathcal{M}$ et donc sur toute surface partageant le corps matériel. Les forces physiques qui garantissent la cohésion d'un solide par exemple (penser à un réseau cristallin) ne sont pourtant pas à proprement parler des efforts de contact mais bien plutôt des actions à distance (penser à l'interaction coulombienne). Toutefois, dans de nombreuses situations, cette action à distance est limitée à un domaine très proche de la surface étudiée et pourra, avec une bonne approximation, être traduite par un effort de contact. Il s'agit d'une représentation locale des efforts de cohésion (actions à courte distance). Des formulations non locales doivent être envisagées en particulier si l'on cherche à représenter de manière plus détaillée des milieux discrets par une modélisation continue. Leur usage reste toutefois limité.
Le vecteur $\underline{\boldsymbol{t}}$ s'appelle **vecteur densité surfacique de forces ou vecteur–contrainte** et a pour dimension physique[3] : N.m^{-2} ou Pa (Pascal).
De tels efforts engendrent une densité surfacique de moments

$$\underline{\boldsymbol{m}}^{\text{contact}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \underline{\boldsymbol{t}} \tag{3.20}$$

Il serait légitime d'introduire, en toute généralité, une densité supplémentaire de couples surfaciques distincts du moment des forces de contact. Une telle situation conduit à la mécanique des milieux dits polaires, dont le domaine d'application reste aujourd'hui limité du moins pour les milieux massifs. La théorie des poutres, plaques et coques amène aussi à élargir le spectre des efforts de contact et de champ à prendre en compte.

Cette modélisation se traduit donc par la forme suivante du torseur des efforts appliqués sur le corps $\mathcal{M}$:

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \int_{\Omega_t} \rho\underline{\boldsymbol{f}}\,dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}\,ds \tag{3.21}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}}_O = \int_{\Omega_t} ((\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho\underline{\boldsymbol{f}} + \rho\underline{\boldsymbol{m}})\,dv + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \underline{\boldsymbol{t}}\,ds \tag{3.22}$$

Puissance des efforts appliqués dans un mouvement de corps rigide

Dans le cas d'un mouvement de corps rigide (2.241), la puissance des efforts appliqués s'écrit

$$\mathcal{P}^{ext}(\underline{\boldsymbol{v}}_0, \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}) := \int_{\Omega_t} \rho\underline{\boldsymbol{f}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,ds$$

[2] On verra en fait dans la suite que le cadre de représentation des efforts proposé dans ce chapitre n'autorise pas une dépendance aussi ambitieuse de $\underline{\boldsymbol{t}}$ par rapport à toutes les caractéristiques de la surface $\partial\mathcal{D}$. Voir aussi la note de la page 77.

[3] Le mot *contrainte* désigne le rapport d'une force par une surface.

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{\Omega_t} \rho \underline{\boldsymbol{f}}\, dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}\, ds\right).\underline{\boldsymbol{v}}_0 \\
&+ \left(\int_{\Omega_t} \underline{\boldsymbol{x}} \wedge \rho \underline{\boldsymbol{f}}\, dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{x}} \wedge \underline{\boldsymbol{t}}\, ds\right).\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

La propriété suivante du produit mixte a été utilisée dans le calcul précédent[4] :

$$
\underline{\boldsymbol{y}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{y}}.(\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}}) = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}.(\underline{\boldsymbol{x}} \wedge \underline{\boldsymbol{y}}) \tag{3.24}
$$

pour $\underline{\boldsymbol{y}} = \underline{\boldsymbol{f}}, \underline{\boldsymbol{t}}$ successivement. On en déduit le résultat très important suivant

$$
\mathcal{P}^{ext}(\underline{\boldsymbol{v}}_0, \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}) = \underline{\boldsymbol{R}}.\underline{\boldsymbol{v}}_0 + \underline{\boldsymbol{M}}_O.\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} \tag{3.25}
$$

le moment étant évalué par rapport à l'origine du repérage des positions. Ce résultat signifie que *la puissance d'un système de forces appliqué à un corps matériel dans un mouvement de corps rigide ne dépend que du torseur de ce système de forces.*

En utilisant la définition (2.129), le moment $\underline{\boldsymbol{M}}$ est associé au tenseur antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ tel que

$$
\underline{\boldsymbol{M}}.\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} \tag{3.26}
$$

La matrice du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$ est donnée par la formule (2.130)[5]. Pour finir, on rappelle que si $\{O, \underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{M}}_O\}$ est le torseur d'un système de forces par rapport au point O, alors $\{O', \underline{\boldsymbol{R}}', \underline{\boldsymbol{M}}_{O'}\}$ est le torseur du même système de forces par rapport au point O' si

$$
\underline{\boldsymbol{R}}' = \underline{\boldsymbol{R}}, \quad \underline{\boldsymbol{M}}_{O'} = \underline{\boldsymbol{M}}_O + \underline{\boldsymbol{OO'}} \wedge \underline{\boldsymbol{R}}
$$

3.2.4 Les lois d'Euler du mouvement

Elles s'obtiennent en appliquant les relations fondamentales de la dynamique (3.14) et (3.15) au cas du système de forces introduit au paragraphe précédent, à savoir l'action d'efforts à distance et d'efforts de contact. Le bilan de quantité de mouvement constitue la première loi d'Euler :

$$
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \partial\Omega_t, t)\, ds \tag{3.27}
$$

Le bilan de moment cinétique constitue la seconde loi d'Euler :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv &= \int_{\Omega_t} ((\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) + \rho\underline{\boldsymbol{m}})\, dv \\
&+ \int_{\partial\Omega_t} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \partial\Omega_t, t)\, ds
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

[4] En notation indicielle (base orthonormée), cela s'écrit

$$
\underline{\boldsymbol{y}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underline{\boldsymbol{x}} = y_i W_{ij} x_j = y_i \epsilon_{ijk} \overset{\times}{W}_j x_k = \overset{\times}{W}_j \epsilon_{jki} x_k y_i = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}.(\underline{\boldsymbol{x}} \wedge \underline{\boldsymbol{y}})
$$

où ϵ_{ijk} désigne les composantes du tenseur des permutations (cf. paragraphe A.1.3 de l'annexe A).

[5] La preuve du résultat précédent est alors simplement

$$
\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} = M_{ij} W_{ij} = 2\overset{\times}{W}_i M_i
$$

Ces lois s'appliquent à tout sous–domaine matériel de Ω_t en considérant le système de forces appliquées correspondant. Elles revêtent cette forme pour tout référentiel à condition d'incorporer à $\underline{\boldsymbol{f}}$ des forces d'inertie.

Lorsque le champ des vitesses est continu au sein du domaine matériel, on peut utiliser les relations (3.16) et les lois d'Euler s'écrivent

$$\int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\underline{\boldsymbol{a}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\,dv = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\,dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\partial\Omega_t,t)\,ds \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\underline{\boldsymbol{a}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\,dv &= \int_{\Omega_t} ((\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) + \rho\underline{\boldsymbol{m}}\,)\,dv \\ &+ \int_{\partial\Omega_t} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\partial\Omega_t,t)\,ds\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.3 Analyse des contraintes : la méthode de Cauchy

3.3.1 Insuffisance de la représentation pression des efforts intérieurs

Quelle est la forme nécessaire du vecteur $\underline{\boldsymbol{t}}$ d'effort de contact pour décrire la variété des situations rencontrées lorsque l'on sollicite mécaniquement les corps matériels ? Peut–on se contenter du modèle sommaire $\underline{\boldsymbol{t}} = 0$? Si l'on prend $\underline{\boldsymbol{t}} = 0$ dans les équations d'Euler, on retrouve les lois de Newton d'un corps soumis uniquement à des actions à distance, et donc "en chute libre" pour ainsi dire. Ce modèle est insuffisant pour décrire par exemple la réponse d'un solide à la pression d'un fluide dans lequel il serait immergé. Un tel exemple exige un modèle plus riche de la forme

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = -p(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\underline{\boldsymbol{n}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) \tag{3.31}$$

où l'on a introduit le scalaire pression p et la normale à la surface $\underline{\boldsymbol{n}}$. A son tour, ce modèle ne permet pas d'appliquer à un corps matériel une force tangentielle à sa surface. Il est vrai que de nombreux fluides ne supportent pas l'application de forces tangentielles et se déforment à volonté en réponse à l'application du moindre effort tangentiel. Mais ce n'est plus le cas d'un morceau d'élastomère par exemple qui supporte effectivement de telles charges tangentielles.

On remarquera que la représentation pression ne permet même pas d'expliquer le simple équilibre d'un objet solide posé sur une table. En effet, on se rappelle (et on l'établira à nouveau) qu'une telle représentation des efforts conduit à une équation d'équilibre de la forme

$$-\operatorname{grad} p + \rho\underline{\boldsymbol{g}} = 0 \tag{3.32}$$

qui s'intègre[6] en $p = p_a + \rho g z$ où p_a est la pression atmosphérique et g l'accélération de la pesanteur. A la frontière du solide, à une cote $z \neq 0$ donnée, la pression est donc distincte de la pression appliquée p_a. Le principe *actio = reactio* n'est donc pas vérifié, et cette situation devrait donc être instable. L'expérience indique le contraire. Dans le cas d'un récipient contenant de l'eau, le champ de pression trouvé précédemment est certainement pertinent dans le liquide mais c'est alors l'équilibre du récipient qui pose problème...

L'objet de la section suivante est de proposer une représentation simple des efforts de contact autorisant l'application de forces normales et tangentielles et permettant de justifier l'équilibre des solides pesants.

[6] Cette intégration suppose que ρ est constant et concerne seulement donc les fluides incompressibles.

3.3.2 Le postulat et le théorème de Cauchy

Le postulat de Cauchy consiste à restreindre la dépendance des efforts de contact vis–à–vis des caractéristiques de la surface :

Postulat de Cauchy[7] **:**

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\partial\mathcal{D},t) := \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t) \tag{3.33}$$

où $\underline{\boldsymbol{n}}$ est le vecteur normal à $\partial\mathcal{D}$ en $\underline{\boldsymbol{x}}$.

On suppose donc que le vecteur–contrainte ne dépend de la surface considérée que par l'intermédiaire de sa normale, excluant par exemple l'influence de la courbure. Il s'agit d'une simplification dont l'efficacité ne s'est pas démentie dans la plupart des applications en mécanique des fluides et des structures. Renoncer à cette dépendance simple conduit à la théorie dite du second gradient (cf. (Germain, 1973b)), dont le champ d'application reste limité en ce qui concerne les corps massifs (fluides et effets de capillarité par exemple, écoulement du sang dans un vaisseau étroit...). Il faudra par contre remettre en question cette simplification dans l'analyse des plaques par exemple.

L'énoncé (3.33) revient à dire que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux domaines quelconques dont les frontières partagent la même normale $\underline{\boldsymbol{n}}$ en un point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\mathcal{D}_1 \cap \partial\mathcal{D}_2$ (voir la figure 3.1), alors

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\partial\mathcal{D}_1,t) = \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\partial\mathcal{D}_2,t) \tag{3.34}$$

Dans le cadre de cette hypothèse, on peut réécrire la première loi d'Euler sous la forme suivante :

$$\int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}\,)\,dv \tag{3.35}$$

Cette expression montre que l'intégrale de surface doit être réductible à une intégrale de volume, ce qui n'est *a priori* pas vrai pour n'importe quelle forme du champ $\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,)$. Le théorème de la divergence (A.129) permet un tel transfert de la surface au volume, à condition toutefois que la densité surfacique soit linéaire en $\underline{\boldsymbol{n}}$. Pour un champ de vecteurs régulier $\underline{\boldsymbol{v}}$ par exemple

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\;ds = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}}\;dv \tag{3.36}$$

Si $\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,)$ est linéaire en $\underline{\boldsymbol{n}}$, autrement dit si $\underline{\boldsymbol{t}}$ est un **flux**, alors une réduction de la résultante des efforts de contact à une intégrale de volume est possible. Le théorème de Cauchy indique en fait que cette condition suffisante est aussi nécessaire. Pour établir ce résultat, il faut passer d'abord par le

[7] Le postulat de Cauchy est en fait un théorème. La démonstration de ce fait, due à Noll (Noll, 1959), dépasse le cadre de ce cours (voir aussi (Noll and Virga, 1990; Dell'Isola and Seppecher, 1995)). Cependant, on peut sentir l'argument en remarquant que, dans la loi d'Euler (3.27), on doit avoir l'égalité entre une intégrale de surface d'un côté (efforts surfaciques) et d'une intégrale de volume de l'autre (efforts volumiques et d'inertie). Une telle représentation n'est en fait possible que si $\underline{\boldsymbol{t}}$ ne dépend de $\partial\mathcal{D}$ que par l'intermédiaire de sa normale. Seul l'ajout d'une densité de doubles forces d'arêtes dans la représentation des efforts permet en fait d'élargir la dépendance du vecteur contrainte vis–à–vis des caractéristiques de la surface. Mais on quitte alors le cadre d'une théorie du premier gradient (Germain, 1973b; Dell'Isola and Seppecher, 1995). La méthode de construction de Cauchy fonctionne pour ainsi dire miraculeusement dans le cadre de la théorie du premier gradient. Elle masque hélas ses propres limitations et s'étend avec difficulté à des théories plus riches. On lui opposera la méthode des puissances virtuelles qui permet une modélisation systématique des milieux continus, notamment grâce à l'introduction dès les premières étapes de la démarche de la notion de puissance des efforts intérieurs (voir les commentaires de la fin du paragraphe 3.3.4). Au contraire, l'approche de Cauchy part de la représentation des efforts extérieurs.

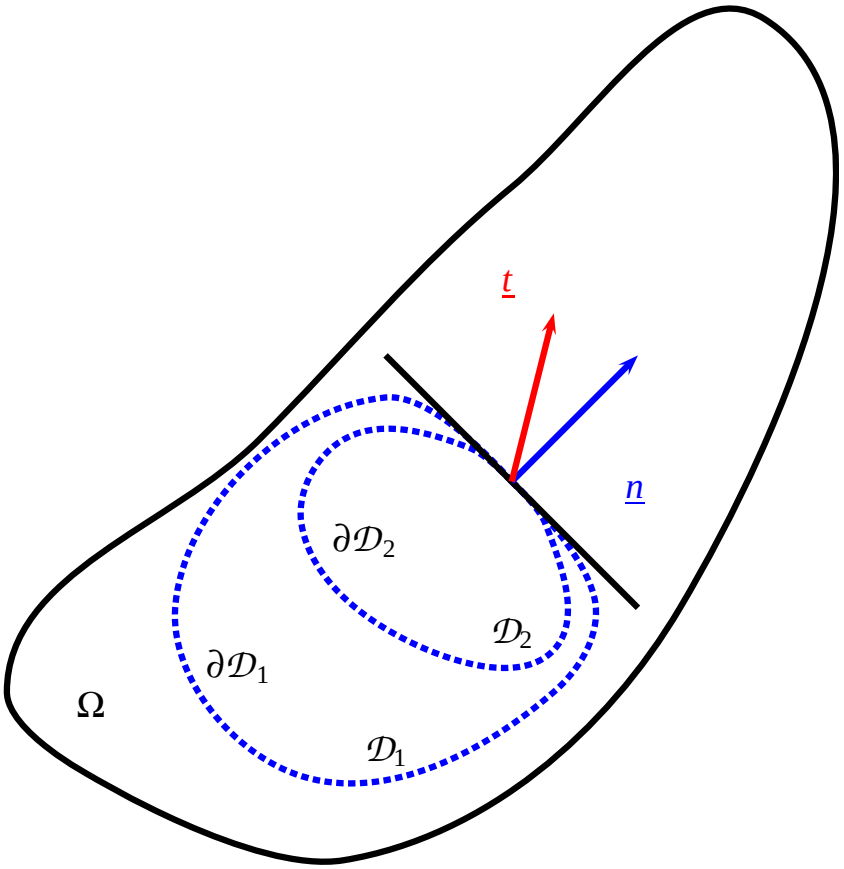


FIG. 3.1 – Deux sous–domaines d'un corps matériel dont les contours ont une normale commune. Le postulat de Cauchy affirme qu'en cet endroit les efforts de contact coïncident.

Lemme de Cauchy (lemme d'imparité) *L'effort de contact exercé au point* $\underline{\boldsymbol{x}}$ *par la matière du côté (1) d'une surface* $\mathcal{S}$ *contenant* $\underline{\boldsymbol{x}}$ *sur le côté (2) de cette surface est opposé à l'effort exercé par (2) sur (1), à condition toutefois que* $\underline{\boldsymbol{t}}$ *y soit continu et que l'accélération* $\underline{\boldsymbol{a}}$ *et l'effort massique* $\underline{\boldsymbol{f}}$ *y soient finis. En d'autres termes,*

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,-\underline{\boldsymbol{n}}\,,t) = -\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t) \tag{3.37}$$

Preuve. On utilise ce que les anglo–saxons appellent le *pillbox argument*, c'est–à–dire un domaine aplati $\mathcal{D}_\epsilon$ d'épaisseur ϵ contenant une portion de la surface $\mathcal{S} \ni \underline{\boldsymbol{x}}$ (voir figure 3.2). Lorsque l'on fait tendre $\epsilon \to 0$ dans la loi d'Euler

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\epsilon} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\mathcal{D}_\epsilon} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}\,)\,dv \tag{3.38}$$

les termes volumiques tendent vers zéro puisque l'accélération et les forces massiques sont supposées bornées. Il reste un terme surfacique dont la contribution latérale tend vers zéro, de sorte qu'il ne subsiste que

$$\int_{\mathcal{S}^+} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}^{\,+})\,ds + \int_{\mathcal{S}^-} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}^{\,-})\,ds = \int_{\mathcal{S}^+} (\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,) + \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,-\underline{\boldsymbol{n}}\,))\,ds = 0$$

pour tous les éléments de surface $\mathcal{S}^\pm$ ayant des normales opposées. La continuité supposée de l'intégrande sur la surface entraîne le résultat (3.37). □

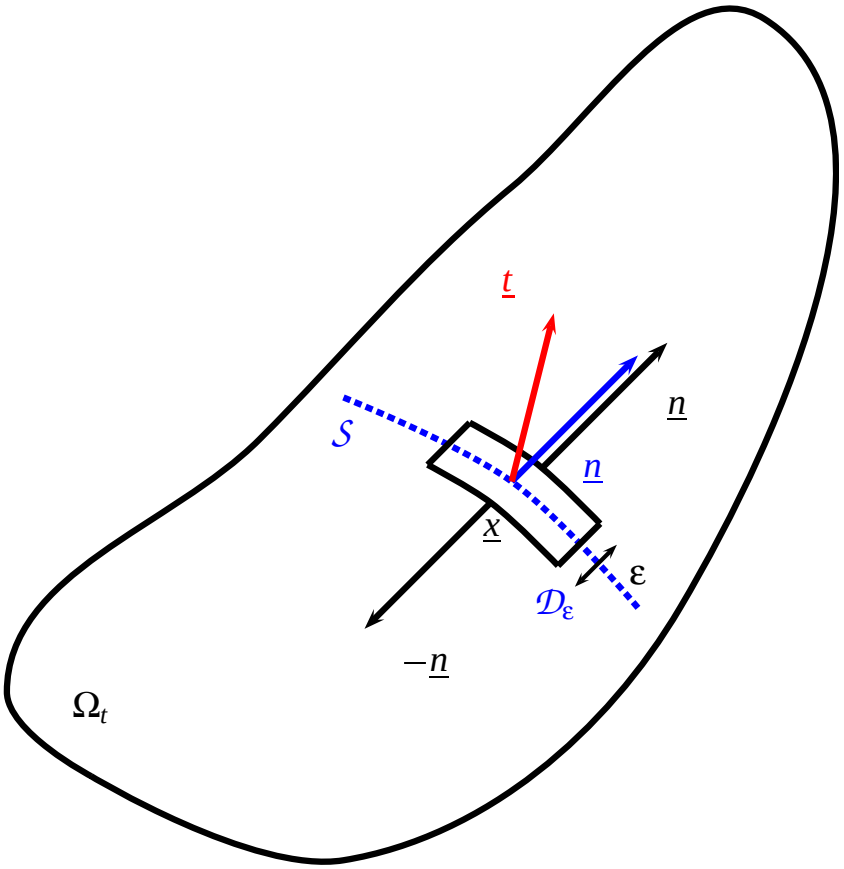


FIG. 3.2 – L'argument du "cachet d'aspirine" : on considère un sous–domaine $\mathcal{D}_\epsilon$ contenant une portion de la surface $\mathcal{S}$ autour du point $\underline{\boldsymbol{x}}$. Son épaisseur ϵ est amenée à tendre vers 0.

Ce théorème est l'équivalent de la loi de Newton de l'action et de la réaction, en remarquant toutefois que la troisième loi de Newton est un axiome tandis qu'il s'agit ici de la conséquence d'un autre axiome, à savoir le postulat de Cauchy. Il ne s'applique pas en présence d'une onde de choc (car l'accélération est non bornée sur une telle surface de discontinuité de vitesses) ou de forces concentrées sur la surface. Il implique l'existence du tenseur des contraintes, à la faveur du

Théorème 10 (Théorème de Cauchy) *Sous les mêmes hypothèses que celles du lemme de Cauchy, il existe un champ de tenseur du second ordre* $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ *tel que*

$$\underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{n}}, t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t).\underline{\boldsymbol{n}} \tag{3.39}$$

Preuve. On utilise l'argument dit du tétraèdre de Cauchy. Soit M un point de Ω_t et $\underline{\boldsymbol{n}}$ un vecteur unitaire de composantes

$$\underline{\boldsymbol{n}} = n_i \underline{\boldsymbol{e}}_i$$

dans la base orthonormée des $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$. On construit un tétraèdre élémentaire $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ contenant le point M et le point P de coordonnées (hn_1, hn_2, hn_3) et dont les quatre faces S_1, S_2, S_3 et S ont pour normales respectives

$$\underline{\boldsymbol{n}}_1 = -\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{n}}_2 = -\underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad \underline{\boldsymbol{n}}_3 = -\underline{\boldsymbol{e}}_3, \underline{\boldsymbol{n}}$$

(voir figure 3.3). La première loi d'Euler (3.29) est appliquée maintenant au domaine Δ_h. Sa

projection sur l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ s'écrit

$$\int_{\Delta_h} \rho(a_1 - f_1)\, dv = \int_{\partial\Delta_h} t_1\, ds \tag{3.40}$$

L'application du théorème de la moyenne aux termes volumiques du membre de gauche et aux termes surfaciques du membre de droite de l'équation précédente, indique qu'il existe des points $A, B \in \Delta_h$, $A_1 \in S_1, A_2 \in S_2, A_3 \in S_3$ et $A_4 \in S$ tels que[8]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}Sh(\rho a_1(A) - \rho f(B)) &= \int_{S_1} t_1(-\underline{\boldsymbol{e}}_1)\, ds + \int_{S_2} t_1(-\underline{\boldsymbol{e}}_2)\, ds + \int_{S_3} t_1(-\underline{\boldsymbol{e}}_3)\, ds + \int_S t_1(\underline{\boldsymbol{n}})\, ds \\
&= -\left(\int_{S_1} t_1(\underline{\boldsymbol{e}}_1)\, ds + \int_{S_2} t_1(\underline{\boldsymbol{e}}_2)\, ds + \int_{S_3} t_1(\underline{\boldsymbol{e}}_3)\, ds\right) + \int_S t_1(\underline{\boldsymbol{n}})\, ds \\
&= -(S_1 t_1(A_1, \underline{\boldsymbol{e}}_1) + S_2 t_1(A_2, \underline{\boldsymbol{e}}_2) + S_3 t_1(A_3, \underline{\boldsymbol{e}}_3)) + S t_1(A_4, \underline{\boldsymbol{n}})
\end{aligned} \tag{3.41}$$

On a introduit le volume $Sh/3$ du tétraèdre. Les surfaces S_i sont liées à S par les "cosinus directeurs"[9] :

$$S_i = S n_i \tag{3.42}$$

Lorsque l'on fait tendre $h \to 0$, les points A, B, A_i tendent vers M. En divisant l'équation (3.41) par S et à la limite $h \to 0$, le membre de gauche proportionnel à h tend vers 0 et on obtient

$$t_1(M, \underline{\boldsymbol{n}}) = t_1(M, \sum_{i=1}^{3} n_i \underline{\boldsymbol{e}}_i) = \sum_{i=1}^{3} n_i t_1(M, \underline{\boldsymbol{e}}_i) \tag{3.43}$$

où les signes sommes ont été introduits de manière exceptionnelle pour rendre plus visible le caractère linéaire de l'opérateur. Cette équation exprime la linéarité de t_1 par rapport à $\underline{\boldsymbol{n}}$. Le résultat s'étend de la même façon aux composantes t_2 et t_3. Il existe donc un opérateur linéaire $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(M)$ tel que

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}, \quad \text{avec} \quad \sigma_{ij}(M) = t_i(M, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \tag{3.44}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

L'opérateur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(M)$, en tant qu'application linéaire, est un tenseur d'ordre 2. □

Le théorème précédent a été publié par A. Cauchy en 1823. L'opérateur linéaire $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ s'appelle le **tenseur des contraintes de Cauchy** ou parfois **tenseur des contraintes vraies**. L'adjectif "vrai" vient du fait que le tenseur des contraintes de Cauchy est défini sur la

[8] En toute rigueur, le théorème de la moyenne ne s'applique généralement pas comme annoncé aux fonctions $\underline{\boldsymbol{f}}$ et $\underline{\boldsymbol{a}}$ sous l'hypothèse qui préside au théorème de Cauchy à savoir que $\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}$ est bornée mais non nécessairement supposée continue. En fait la démonstration reste valable car le membre de gauche peut alors effectivement toujours s'écrire come le produit de Sh par un vecteur borné quelque soit h.

[9] Pour retrouver cette expression, on peut faire appel au théorème de la divergence :

$$\int_{\partial\Delta_h} \underline{\boldsymbol{n}}\, ds = \int_{\Delta_h} \operatorname{div} \underset{\sim}{\mathbf{1}}\, dv = 0 = S\underline{\boldsymbol{n}} + \sum_{i=1}^{3} S_i \underline{\boldsymbol{n}}_i$$

configuration actuelle : c'est une "machine" (un opérateur)[10] qui, à un élément de surface orienté de la configuration actuelle, associe la force physiquement appliquée à cet élément de surface. L'objectif du chapitre 4 est d'apprendre à mieux le connaître. On établit dans la suite la version locale des équations de conservation de la quantité de mouvement.

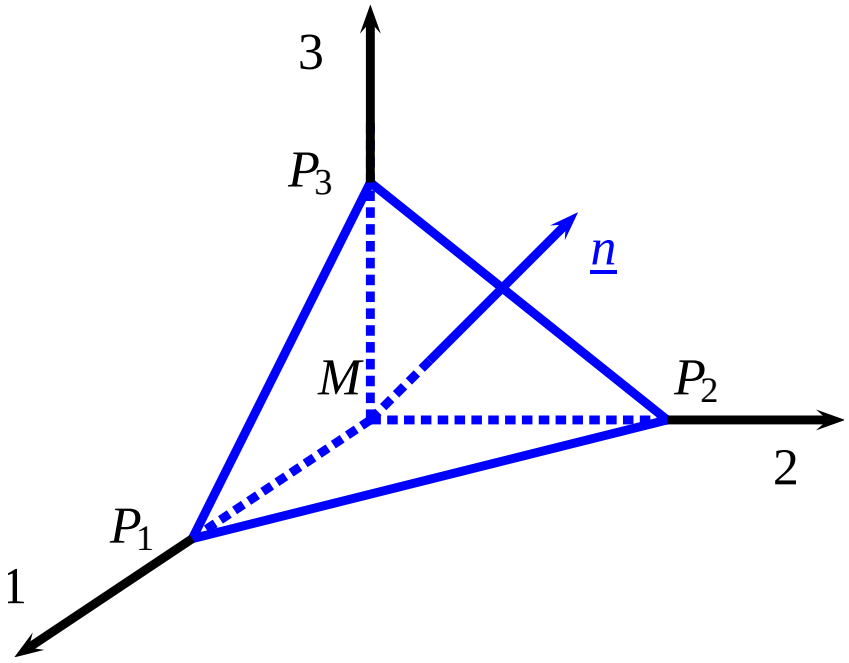


FIG. 3.3 – Le tétraèdre de Cauchy en un point $M \in \Omega_t$ et pour une normale donnée $\underline{\boldsymbol{n}}$.

3.3.3 Les lois de Cauchy du mouvement

Loi de conservation locale de la quantité de mouvement

Le passage de la première loi d'Euler à l'écriture locale du bilan de la quantité de mouvement s'appuie sur l'utilisation du théorème de la divergence que l'on écrit sous la forme suivante dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées, pour une fonction f continue sur $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ et ayant des dérivées premières dans $\mathcal{D}$ (cf. théorème (22)) :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f\, n_i \, ds = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dv \tag{3.46}$$

La formule (3.36) déjà évoquée n'en est qu'une application pour $f = v_i$. La résultante des efforts de contact se transforme donc en

$$\int_{\partial\mathcal{D}} t_i(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{n}}, t)\, ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) n_j \, ds = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dv \tag{3.47}$$

La première loi d'Euler (3.29) s'écrit donc maintenant

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\rho(a_i - f_i) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dv = 0 \tag{3.48}$$

[10] Si l'on fait abstraction un instant du caractère euclidien des tenseurs considérés, on remarquera que $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \in E^* \otimes E$, c'est–à–dire qu'il opère sur des covecteurs (les éléments de surface sont des covecteurs qui opèrent sur des vecteurs pour produire des volumes) pour produire un covecteur. Les forces physiques sont, on le rappelle, des covecteurs qui opèrent sur des vecteurs vitesses pour produire une puissance.

Le résultat étant vrai pour tout domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$, l'intégrande doit s'annuler en tout point $\underline{\boldsymbol{x}}$ où elle est continue :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \tag{3.49}$$

On rappelle que les indices répétés donnent lieu à une sommation. Le premier terme représente la divergence du vecteur construit à partir de la ligne i de la matrice σ_{ij} dans une base cartésienne orthonormée. Le vecteur $\sigma_{ij,j}$ (où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport à l'indice j) s'interprète en fait comme la divergence du tenseur du second ordre $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ selon la définition (A.101) de l'annexe A :

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{3.50}$$

en coordonnées cartésiennes orthonormées. On obtient ainsi la formulation intrinsèque du bilan local de quantité de mouvement

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho(\underline{\boldsymbol{f}} - \underline{\boldsymbol{a}}) = 0 \tag{3.51}$$

appelée **première loi de Cauchy**, ou **équation locale de la dynamique**. On utilise parfois une forme un peu différente de cette loi en explicitant la dérivée matérielle de la vitesse

$$\begin{aligned}
\rho \underline{\boldsymbol{a}} &= \rho \dot{\underline{\boldsymbol{v}}} \\
&= \rho \frac{\partial \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \rho (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}).\underline{\boldsymbol{v}} \\
&= \frac{\partial \rho \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \underline{\boldsymbol{v}} + \rho (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}).\underline{\boldsymbol{v}} \\
&= \frac{\partial \rho \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \underline{\boldsymbol{v}} \operatorname{div} (\rho \underline{\boldsymbol{v}}) + \rho (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{v}}).\underline{\boldsymbol{v}} \\
&= \frac{\partial \rho \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{\boldsymbol{v}} \otimes \underline{\boldsymbol{v}})
\end{aligned} \tag{3.52}$$

La relation (3.51) s'écrit donc aussi de la manière suivante

$$\frac{\partial \rho \underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{\boldsymbol{v}} \otimes \underline{\boldsymbol{v}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \rho \underline{\boldsymbol{f}} \tag{3.53}$$

Loi de conservation locale du moment cinétique

Dans le cadre de l'approche de Cauchy, la seconde loi d'Euler (3.30) sur un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ s'écrit

$$\int_{\mathcal{D}} ((\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}) - \rho \underline{\boldsymbol{m}}) \, dv = \int_{\partial \mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}) \, ds \tag{3.54}$$

Dans une base orthonormée directe d'origine $\underline{\boldsymbol{x}}_0$, la première composante vaut

$$\int_{\mathcal{D}} (x_2 \rho(a_3 - f_3) - x_3 \rho(a_2 - f_2) - \rho m_1) \, dv = \int_{\partial \mathcal{D}} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) n_j \, ds \tag{3.55}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) \, dv \tag{3.56}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} (x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + \delta_{2j} \sigma_{3j} - \delta_{3j} \sigma_{2j}) \, dv \tag{3.57}$$

Pour passer de la ligne (3.55) à (3.56) on a appliqué une nouvelle fois le théorème (3.46) sous les hypothèses de régularité requises. En utilisant l'équation de la dynamique (3.49) pour la

composante $i = 3$, la relation précédente se réduit à

$$\int_{\mathcal{D}} (\sigma_{32} - \sigma_{23} + \rho m_1)\, dv = 0 \tag{3.58}$$

Puisque cette relation doit être vraie pour tout sous–domaine $\mathcal{D}$ de Ω_t, il s'ensuit que

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = \rho m_1 \tag{3.59}$$

Le calcul doit être repris pour les composantes 2 et 3 de l'équation vectorielle (3.54), de sorte que

$$\sigma_{31} - \sigma_{13} = \rho m_2 \tag{3.60}$$
$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = \rho m_3 \tag{3.61}$$

Les équations (3.59) à (3.61) représentent les lois locales du bilan de moment cinétique. En utilisant le symbole des permutations ϵ_{ijk} (défini par les relations (A.69), ces relations prennent la forme synthétique

$$\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = \rho m_i \tag{3.62}$$

En l'absence de couples massiques $\underline{\boldsymbol{m}} = 0$, le résultat précédent implique que le tenseur des contraintes est symétrique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^T = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{3.63}$$

ce qui constitue **la seconde loi de Cauchy**[11]. Le mot "symétrique" est un raccourci exprimant que, selon le point de vue adopté, le tenseur des contraintes de Cauchy est une forme bilinéaire symétrique, un endomorphisme auto–adjoint, ou **un tenseur euclidien symétrique**. Les trois terminologies sont équivalentes. En d'autres termes, le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est caractérisé, dans le cas tridimensionnel, par 6 composantes indépendantes au lieu de 9.

Equations locales de la statique des milieux continus

Les lois de Cauchy (3.50) et (3.63) indiquent que pour un corps en équilibre (cas statique, $\underline{\boldsymbol{v}} = 0$ ou plus généralement constant en chaque point de Ω_t, mais non nécessairement uniforme), les équations de champ à satisfaire sont

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0 \tag{3.64}$$
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^T \tag{3.65}$$

Ces équations pourront aussi être appliquées pour un problème d'évolution lorsque les termes d'accélération $\rho \underline{\boldsymbol{a}}$ peuvent être négligées devant les efforts mis en jeu dans le problème. On parlera alors d'**évolution quasi–statique**.

[11] La seconde loi de Cauchy est parfois appelée **axiome de Boltzmann**. Le terme axiome est ambigu dans la mesure où le résultat (3.63) a été établi à partir du théorème du moment cinétique global. Toutefois, cette relation suppose qu'il n'existe pas de couples volumiques ni surfaciques comme on l'a déjà fait remarquer, ce qui représente un axiome de la théorie non polaire des milieux continus. Lorsque les couples de surface sont introduits, une théorie plus générale dite micropolaire ou, plus généralement encore, une théorie de Cosserat peut être développée (Forest, 2006).

3.3.4 Le théorème des puissances virtuelles

Les relations locales de la dynamique des milieux continus sont les équations (3.51) et (3.63). Si l'on effectue le produit scalaire de (3.51) avec un champ de vecteurs $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$ de classe C^1, dit **virtuel**[12], et que l'on intègre le résultat sur un sous–domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$, en l'absence de discontinuité des vitesses réelles, on obtient

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}).\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, dv + \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{\boldsymbol{f}} - \underline{\boldsymbol{a}}).\underline{\boldsymbol{v}}^\star = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i^\star \, dv + \int_{\mathcal{D}} \rho(f_i - a_i) v_i^\star \, dv = 0 \tag{3.66}$$

En effectuant une intégration par partie sur le premier terme du membre de droite, et en appliquant le théorème de la divergence, on trouve, dans un repérage orthonormé,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij,j} v_i^\star \, dv &= \int_{\mathcal{D}} (\sigma_{ij} v_i^\star)_{,j} \, dv - \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} v_{i,j}^\star \, dv \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} v_i^\star n_j \, ds - \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} v_{i,j}^\star \, dv \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}} .\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, ds - \int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\nabla}_x \underline{\boldsymbol{v}}^\star \, dv \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}} .\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, ds - \int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\star \, dv \end{aligned} \tag{3.67}$$

La dernière équation (3.67) fait intervenir le tenseur symétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\star$ défini ci–dessous et utilise pour cela explicitement la propriété de symétrie du tenseur des contraintes (seconde loi de Cauchy) garantissant que

$$\sigma_{ij} v_{i,j}^\star = \sigma_{ij} D_{ij}^\star, \quad \text{avec} \quad D_{ij}^\star = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

L'équation (3.66) peut alors se mettre sous la forme :

$$-\int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\star \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}} .\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{f}} .\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}} .\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, dv \tag{3.68}$$

Dès lors, on introduit les notions de

- *Puissance virtuelle des efforts intérieurs* dans le champ $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$

$$\mathcal{P}^i(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) := -\int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\star \, dv \tag{3.69}$$

  avec

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^\star := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}_x \underline{\boldsymbol{v}}^\star + (\boldsymbol{\nabla}_x \underline{\boldsymbol{v}}^\star)^T) \tag{3.70}$$

- *Puissance virtuelle des efforts à distance* dans le champ $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$

$$\mathcal{P}^e(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) := \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{f}} .\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, dv \tag{3.71}$$

- *Puissance virtuelle des efforts de contact* dans le champ $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$

$$\mathcal{P}^c(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) := \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}} .\underline{\boldsymbol{v}}^\star \, ds \tag{3.72}$$

[12] Comme en théorie des distributions, il suffit en fait de considérer des champs–tests dérivables à tous les ordres et à un support compact. En particulier, le champ de vitesses réel n'a pas en général cette régularité.

- *Puissance virtuelle du champ d'accélération* dans le champ $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$

$$\mathcal{P}^a(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) := \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}} \,.\, \underline{\boldsymbol{v}}^\star \, dv \tag{3.73}$$

ce qui conduit au

Théorème 11 (Théorème des puissances virtuelles) *Le champ des contraintes* $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ *et d'accélération* $\underline{\boldsymbol{a}}$ *dans un corps matériel soumis aux effort* $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ *et* $\underline{\boldsymbol{t}}$*, vérifient les équations locales de la dynamique (3.51) et (3.63) si et seulement si la puissance des efforts intérieurs, à distance et de contact équilibre la puissance du champ d'accélération dans tout mouvement virtuel* $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$ *et pour tout sous–domaine* $\mathcal{D}$*, sous l'hypothèse de continuité des champs impliqués :*

$$\mathcal{P}^i(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) + \mathcal{P}^c(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) + \mathcal{P}^e(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) = \mathcal{P}^a(\underline{\boldsymbol{v}}^\star) \tag{3.74}$$

Preuve. Soient $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{f}})$ des champs de contraintes, d'accélération et d'efforts massiques satisfaisant les lois de Cauchy (3.51) et (3.63), et des efforts surfaciques $\underline{\boldsymbol{t}}$ tels que $\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}$. L'équation (3.74) est identique à (3.68) établie précédemment qui résulte directement des lois locales de la dynamique. Réciproquement, si la relation (3.68) est satisfaite pour tout champ virtuel $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$ et tout sous–domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$, on peut établir les lois de Cauchy en procédant de la manière suivante. On considère d'abord des champs $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$ de translation homogène du corps matériel. L'équation (3.74) appliquée à tout sous–domaine implique, après utilisation du théorème de la divergence, l'équation locale (3.51). Pour retrouver (3.63), il suffit de considérer un champ $\underline{\boldsymbol{v}}^\star$ correspondant à une rotation pure. □

Lorsque le champ virtuel est assimilé à un champ de vitesses (resp. de déplacement), on parle du **théorème des puissances virtuelles** (resp. **théorème des travaux virtuels**). On peut aussi appliquer le théorème au cas particulier $\underline{\boldsymbol{v}}^\star = \underline{\boldsymbol{v}}$, à savoir le champ réel de vitesses régnant à l'instant t dans la configuration Ω_t, à condition toutefois que le champ réel soit continu. La puissance des efforts intérieurs s'écrit alors

$$\mathcal{P}^i(\underline{\boldsymbol{v}}) = -\int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \, dv \tag{3.75}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est le tenseur taux de déformation défini par l'équation (2.187), i.e. la partie symétrique du gradient des vitesses. Il faut remarquer alors que les dimensions physiques des grandeurs en jeu sont

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \sim \mathrm{MPa.s^{-1}} = \mathrm{Jm^{-3}s^{-1}} = \mathrm{Wm^{-3}}$$

c'est–à–dire une densité volumique de puissance. Intégrée sur un domaine $\mathcal{D}$, on obtient une puissance ce qui justifie *a posteriori* les dénominations utilisées précédemment. En appliquant en outre le théorème au domaine Ω_t entier, l'équation (3.74) n'est autre que le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\mathcal{P}^i(\underline{\boldsymbol{v}}) + \mathcal{P}^e(\underline{\boldsymbol{v}}) + \mathcal{P}^c(\underline{\boldsymbol{v}}) = \dot{\mathcal{K}}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{K} := \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \rho \underline{\boldsymbol{v}} \,.\, \underline{\boldsymbol{v}} \, dv \tag{3.76}$$

valable en l'absence d'ondes de choc. On peut en effet établir simplement que la variation d'énergie cinétique n'est autre que la puissance du champ d'accélération :

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}^a(\underline{\boldsymbol{v}}) \tag{3.77}$$

Cela vient du fait que :

$$\frac{1}{2}\overset{\bullet}{\overbrace{\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{v}}}} = \underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{v}} \tag{3.78}$$

Du point de vue mathématique, le théorème 11 constitue la **formulation variationnelle** des équations d'équilibre et est appelé parfois **principe de d'Alembert**. Il permet de mettre en œuvre les puissants outils du calcul des variations.

Ce théorème est à la base des méthodes de résolution numérique des problèmes de mécanique des milieux continus, fluides comme solides, et en particulier de la **méthode des éléments finis** de résolution numérique des équations aux dérivées partielles. On passe alors par une discrétisation spatiale et temporelle des grandeurs continues en présence. Il intervient aussi dans l'établissement des **théorèmes de l'énergie** présentés dans le cours (Amestoy and Damamme, 2003). La structure du théorème précédent est si générale qu'il est possible de l'ériger en véritable **principe des puissances virtuelles** et de bâtir sur ce principe les lois du mouvement de la mécanique des milieux continus. Il s'agit d'une approche alternative à la méthode de Cauchy qui a connu son développement dans les années 1970. Le succès de la méthode des puissances virtuelles est dû au caractère linéaire par rapport aux champ virtuels de l'expression des puissances rencontrées. La méthode peut alors s'appliquer à des situations physiques et mécaniques délicates (théorie du second gradient, théorie des poutres, plaques et coques...).

3.4 Conservation de l'énergie

3.4.1 Premier principe de la thermodynamique des milieux continus

La conservation de l'énergie constitue le premier principe de la thermodynamique (Brun, 1991; Fargue, 2004b). Les différentes contributions à l'énergie totale du sous–système $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ sont

- **l'énergie cinétique**
$$\mathcal{K} := \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\; dv \tag{3.79}$$
- **la puissance des efforts appliqués**
$$\mathcal{P}(\underline{\boldsymbol{v}}) := \mathcal{P}^c(\underline{\boldsymbol{v}}) + \mathcal{P}^e(\underline{\boldsymbol{v}}) = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\; ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{f}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\; dv \tag{3.80}$$
- L'**énergie interne** $\mathcal{E}$ du système, représentée par une densité massique e d'énergie interne
$$\mathcal{E} := \int_{\mathcal{D}} \rho e(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv \tag{3.81}$$
- L'apport de **chaleur** $\mathcal{Q}$ au système sous la forme d'un apport surfacique $h(\underline{\boldsymbol{x}}, t, \partial\mathcal{D})$ et d'un apport volumique $\rho r(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ d'origine non mécanique
$$\mathcal{Q} := \int_{\partial\mathcal{D}} h\, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r\, dv \tag{3.82}$$
Des exemples de sources de chaleur r non mécanique sont le rayonnement thermique et l'effet Joule dans un conducteur déformable. Quant à l'apport surfacique, cela peut être le flux de chaleur fourni par un corps voisin (conduction) ou l'environnement (four).

On postule que les grandeurs locales introduites e, h, r ne dépendent pas du référentiel d'observation (on parle de grandeurs objectives). Il s'agit donc de scalaires invariants par changement de référentiel. L'énergie cinétique par contre est bien sûr liée au référentiel choisi. La **première loi de la thermodynamique** stipule alors que, *dans un mouvement observé*

dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie interne et cinétique de tout sous–domaine d'un corps matériel dans la configuration courante est due à la puissance mécanique et à l'apport de chaleur :

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}(\underline{\boldsymbol{v}}) + \mathcal{Q} \tag{3.83}$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique (3.76) permet d'éliminer $\mathcal{K}$ dans le bilan précédent et de faire intervenir la puissance des efforts intérieurs :

$$\dot{\mathcal{E}} = -\mathcal{P}^i(\underline{\boldsymbol{v}}) + \mathcal{Q} \tag{3.84}$$

A l'instar du problème mécanique déjà évoqué de représentation des efforts, le problème des échanges de chaleur demande une réflexion sur la représentation des apports de chaleur volumiques et surfaciques. L'analogue du postulat de Cauchy est **le principe de Fourier–Stokes** qui propose que l'apport surfacique de chaleur $h(\underline{\boldsymbol{x}}, \partial\mathcal{D}, t)$ ne dépende du bord de $\mathcal{D}$ que par l'intermédiaire de la normale sortante $\underline{\boldsymbol{n}}(\underline{\boldsymbol{x}})$:

$$h(\underline{\boldsymbol{x}}, \partial\mathcal{D}, t) = h(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{n}}, t) = -\underline{\boldsymbol{q}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t).\underline{\boldsymbol{n}} \tag{3.85}$$

L'existence du **vecteur flux de chaleur** $\underline{\boldsymbol{q}}$ est une conséquence directe de la dépendance $h(\underline{\boldsymbol{x}}, t, \underline{\boldsymbol{n}})$ et se démontre de la même façon que le lemme de Cauchy (3.37). Le signe $-$, purement conventionnel, vient du fait que $\underline{\boldsymbol{q}}$ mesure le flux entrant de chaleur (apport de chaleur au système). Un flux de chaleur entrant signifie que $\underline{\boldsymbol{q}}$ fait un angle aigu avec $-\underline{\boldsymbol{n}}$. L'invariance postulée de h par changement de référentiel implique que $\underline{\boldsymbol{q}}$ est un vecteur objectif.

L'équation de bilan d'énergie (3.84) s'écrit maintenant de manière explicite

$$\int_{\mathcal{D}} \rho\dot{e}\, dv = \int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\, dv - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{q}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r\, dv \tag{3.86}$$

3.4.2 Formulation locale du premier principe

Partant de (3.86), on peut aboutir à une formulation locale du bilan d'énergie. Pour cela, on transforme le seul terme surfacique présent, à savoir l'apport de chaleur surfacique, en une intégrale de volume grâce au théorème de la divergence :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{q}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds = \int_{\partial\mathcal{D}} q_i n_i\, ds = \int_{\mathcal{D}} q_{i,i}\, dv = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}}\, dv \tag{3.87}$$

Pour tout sous–domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$, on a donc

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\rho\dot{e} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} - \rho r\right) dv = 0 \tag{3.88}$$

Sous réserve de continuité des champs introduits, on en déduit **la formulation locale du premier principe de la thermodynamique**

$$\rho\dot{e} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} + \rho r \tag{3.89}$$

On voit apparaître dans ce bilan d'énergie un apport d'énergie mécanique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Une autre forme de l'équation précédente, souvent rencontrée dans la littérature physique et mécanique, s'obtient en explicitant la dérivée matérielle $\dot{e}$, et en tenant compte de la conservation de la masse (3.8) :

$$\rho\dot{e} = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \underline{\boldsymbol{v}}) \tag{3.90}$$

Conservation de la masse

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \, dv = 0$$

Bilan de quantité de mouvement (première loi d'Euler)

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{f}} \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}} \, ds$$

Bilan de moment cinétique (seconde loi d'Euler)

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho \underline{\boldsymbol{a}} \, dv = \int_{\mathcal{D}} ((\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \rho \underline{\boldsymbol{f}}) \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) \wedge \underline{\boldsymbol{t}} \, ds$$

Bilan d'énergie

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \, dv - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{q}} . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r \, dv$$

TAB. 3.1 – Récapitulatif : forme globale des équations de bilan de la thermomécanique des milieux continus, pour un sous–domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ (en l'absence de discontinuité).

et par suite

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{q}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \rho r \tag{3.91}$$

Une autre forme est souvent mentionnée aussi. Elle se déduit de la formulation globale (3.83) sans appliquer le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{\rho}{2} \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{v}}) + \operatorname{div}((\rho e + \frac{\rho}{2} \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{v}}) \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{q}} - \underline{\boldsymbol{v}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) - \rho(r + \underline{\boldsymbol{v}} . \rho \underline{\boldsymbol{f}}) = 0 \tag{3.92}$$

3.5 Equations de bilan en présence de discontinuités

Les équations de champ précédentes ont été établies en supposant que les champs considérés (vitesses, masse volumique, contraintes) étaient au moins continus dans le domaine d'étude. Il faut envisager l'existence d'une surface $\mathcal{S} \subset \Omega_t$ au travers de laquelle vitesses, contraintes et masse volumique sont susceptibles de subir des discontinuités.

3.5.1 Un théorème de transport

On souhaite suivre une quantité au cours du temps sur un *volume de contrôle* $V(t) \subset \Omega_t$, non nécessairement matériel. La frontière $\partial V(t)$ de $V(t)$ est supposée lisse : elle possède une normale sortante $\underline{\boldsymbol{n}}$ en tout point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial V(t)$, et le plan tangent y varie continûment. Toutefois, l'existence possible d'arêtes et de sommets est acceptée. La surface géométrique $\partial V(t)$ se déplace à la vitesse normale sortante donnée par le champ w_n. La vitesse de propagation d'une surface géométrique $\mathcal{S}$ au sein de Ω_t est par définition un champ de vecteur défini le long de $\mathcal{S}$ et colinéaire à la normale en tout point. En effet cette vitesse est, par définition, la limite du vecteur $\boldsymbol{M_t M_{t+\Delta t}}/\Delta t$ où M_t est sur $\mathcal{S}(t)$ et $M_{t+\Delta t}$ est l'intersection de la droite colinéaire à $\underline{\boldsymbol{n}}(t)$ passant par M_t.

Equations de champ :

$\dot{\rho} + \rho \mathrm{div}\, \underline{\boldsymbol{v}} = 0$	conservation de la masse
$\mathrm{div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = \rho \underline{\boldsymbol{a}}$	quantité de mouvement (Cauchy 1)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$	moment cinétique (Cauchy 2)
$\rho \dot{e} + \mathrm{div}\, \underline{\boldsymbol{q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \rho r$	bilan d'énergie

Equations aux discontinuités :

$[\![\rho U]\!] = 0$

$[\![\rho U \underline{\boldsymbol{v}}]\!] - [\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0$

$[\![(\rho e + \frac{1}{2}\rho \underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{v}})U]\!] + [\![\underline{\boldsymbol{q}} - \underline{\boldsymbol{v}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0$

TAB. 3.2 – Récapitulatif : forme locale des équations de bilan de la thermomécanique des milieux continus. Points réguliers et équations aux discontinuités.

$\mathrm{div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0$	quantité de mouvement
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$	moment cinétique
$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0$	continuité du vecteur–contrainte

TAB. 3.3 – Récapitulatif : équations de champ et au bord pour la statique des milieux continus.

On établit alors l'**équation de transport dite de Reynolds** pour pour tout champ de tenseur continu $f(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ admettant une dérivée temporelle :

$$\frac{d}{dt}\int_V f\,dv = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial V} f\,w_n\,ds \tag{3.93}$$

Ce résultat constitue le théorème 30 démontré au paragraphe B.2.1 de l'annexe B.

Cas d'un volume matériel

Un cas particulier est celui d'un volume matériel $\mathcal{D}_t$, c'est–à–dire dont le bord est toujours constitué des mêmes points matériels. Dans ce cas la vitesse normale sortante d'un point du bord coïncide avec la vitesse normale du point matériel correspondant :

$$w_n(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underline{\dot{\boldsymbol{x}}}\,.\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t).\underline{\boldsymbol{n}} \tag{3.94}$$

où $\underline{\boldsymbol{n}}$ est la normale sortante au point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\mathcal{D}_t$ La formule (3.93) prend alors la forme

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} f\,dv = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}_t} f\,\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds \tag{3.95}$$

Ce résultat peut être établi directement en se ramenant à un domaine fixe matériel de référence. En effet, le domaine matériel $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ est une région de la configuration actuelle d'un corps matériel $\mathcal{M}$ et on peut lui associer le domaine $\mathcal{D}_0$ correspondant sur la configuration de référence. De même la densité $f(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ est représentée par $F(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ sur Ω_0. On peut alors effectuer le changement de variable $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ dans l'intégrale à calculer et introduire le jacobien correspondant

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} f\,dv &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} F\,J dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} (\dot{F}J + F\dot{J})dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \dot{f}\,dv + \int_{\mathcal{D}_t} f(\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}}\,)\,dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\frac{\partial f}{\partial t} + (\operatorname{grad} f).\underline{\boldsymbol{v}} + f(\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}}\,))\,dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div}\,(f\underline{\boldsymbol{v}}\,)\,dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}_t} f\,\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds
\end{aligned} \tag{3.96}$$

où l'on a utilisé la formule de la dérivée matérielle (2.175), la formule d'évolution du jacobien (2.217) et finalement le théorème de la divergence (A.129).

Formellement, le résultat précédent permet de mettre en évidence une règle pratique très efficace de calcul de la dérivée d'une intégrale sur un domaine mobile matériel. Il "suffit" de dériver sous le signe intégrale en pensant à dériver aussi l'élément de volume dv. En effet, on peut constater formellement que cette règle conduit au même résultat que le théorème (3.95) :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} f\,dv = \int_{\mathcal{D}_t} \overbrace{f dv}^{\bullet} \tag{3.97}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f} dv + f \overset{\bullet}{\overbrace{dv}}) \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f} + f \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}}) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} f \, \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds
\end{aligned} \tag{3.98}
$$

où (2.217) a été utilisé à nouveau.

3.5.2 Surface de discontinuité

Sur la figure 3.4a, on envisage l'existence au sein d'un domaine matériel $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ d'une **surface** orientée $\mathcal{S}$ présentant une discontinuité pour le champ $f(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$. On entend par là que f est continue sur $\mathcal{D} - \mathcal{S}$ mais présente une **discontinuité** au travers de $\mathcal{S}$. Le **saut de** f est défini comme

$$
[\![f]\!] := f^+ - f^- \tag{3.99}
$$

où f^+ et f^- sont les limites à droite et à gauche respectivement en un point de $\mathcal{S}$, i.e. en venant de $\mathcal{D}^+$ et de $\mathcal{D}^-$. La propriété de continuité de part et d'autre de $\mathcal{S}$ garantit que ces limites à droite et gauche de $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ ne dépendent pas du trajet dans $\mathcal{D}^+$ ou $\mathcal{D}^-$ respectivement pris pour atteindre $\underline{\boldsymbol{x}}$. Les frontières $(\partial\mathcal{D})^+$ et $(\partial\mathcal{D})^-$ sont définis de telle sorte que le contour de $\mathcal{D}$ soit la réunion de ces deux bords

$$
\partial\mathcal{D} = (\partial\mathcal{D})^+ \cup (\partial\mathcal{D})^- \tag{3.100}
$$

Les frontières de $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$ sont alors

$$
\partial\mathcal{D}^+ = (\partial\mathcal{D})^+ \cup \mathcal{S}, \quad \partial\mathcal{D}^- = (\partial\mathcal{D})^- \cup \mathcal{S} \tag{3.101}
$$

La surface de discontinuité $\mathcal{S}$ n'est pas nécessairement matérielle (c'est–à–dire que $\mathcal{S}$ n'est pas constituée des mêmes points matériels au cours du temps) et se propage à une vitesse w_n. On définit la composante normale de la vitesse de la matière par rapport à la surface de discontinuité

$$
U = \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{n}} - w_n \tag{3.102}
$$

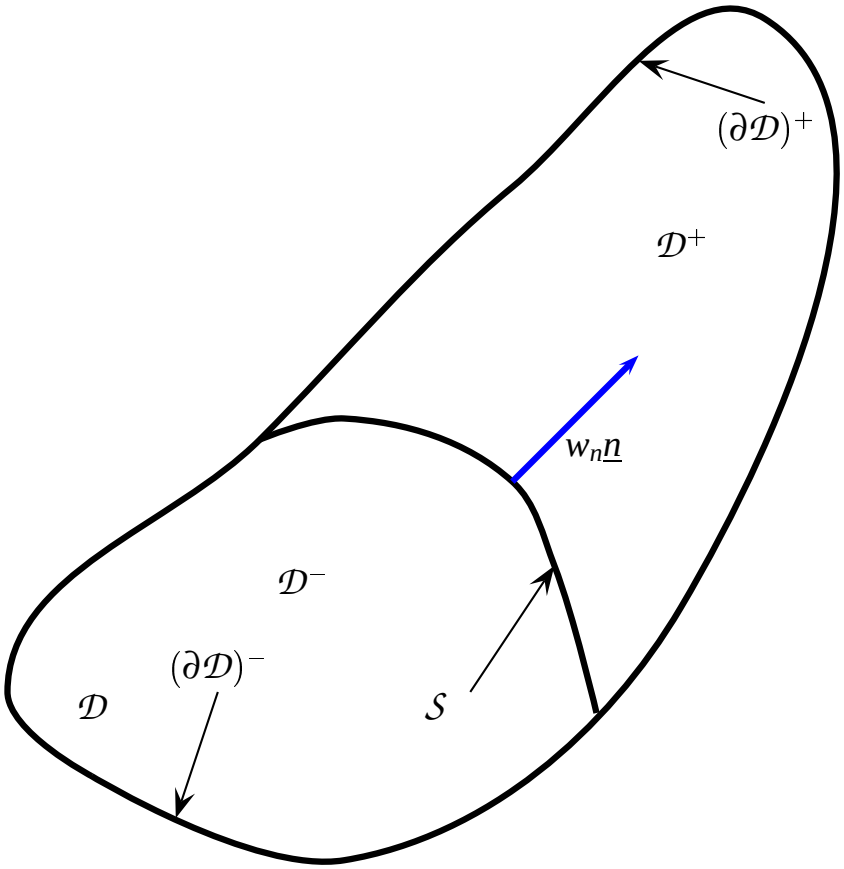
3.5.3 Bilan de masse

Le champ de masse volumique $\rho(\underline{\boldsymbol{x}})$ est supposé continu sur le domaine matériel $\mathcal{D}(t) \subset \Omega_t$ sauf sur la surface $\mathcal{S}$ qui se propage au sein de $\mathcal{D}$ à la vitesse w_n (voir la figure 3.4a). La masse totale contenue dans $\mathcal{D}$ est la somme des contributions de $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$:

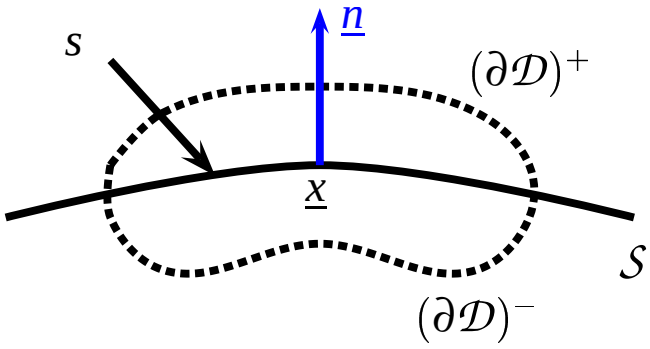
$$
\int_{\mathcal{D}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{D}^+} \rho \, dv + \int_{\mathcal{D}^-} \rho \, dv \tag{3.103}
$$

On peut calculer la variation de masse dans $\mathcal{D}^+$ (resp. $\mathcal{D}^-$) grâce à la formule de Reynolds (3.93), en tenant compte du faite que la partie $(\partial\mathcal{D})^+$ (resp. $(\partial\mathcal{D})^-$) de sa frontière se déplace avec la matière à la vitesse $\underline{\boldsymbol{v}}$, tandis que la surface de discontinuité $\mathcal{S}$ se propage à la vitesse w_n :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^-} \rho \, dv &= \int_{\mathcal{D}^-} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \int_{(\partial\mathcal{D})^-} \rho \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds + \int_{\mathcal{S}} \rho^- \, w_n \, ds \\
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^+} \rho \, dv &= \int_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv + \int_{(\partial\mathcal{D})^+} \rho \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds - \int_{\mathcal{S}} \rho^+ \, w_n \, ds
\end{aligned}
$$



(a)



(b)

FIG. 3.4 – Etablissement des théorèmes de transport : (a) propagation d'une surface singulière $\mathcal{S}$ dans un domaine $\mathcal{D}$, (b) voisinage $\mathcal{D}$ d'un point singulier $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ pour l'établissement des conditions de discontinuité.

On a tenu compte du fait que la normale sortante à la surface $\mathcal{S}$ vue comme une partie de la frontière de $\mathcal{D}^+$ est $-\underline{\boldsymbol{n}}$ par définition. Ces relations peuvent être réécrites sous la forme suivante, en introduisant la vitesse relative U donnée par (3.102) et le contour complet $\partial\mathcal{D}^\pm$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^-}\rho\,dv &= \int_{\mathcal{D}^-}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}^-}\rho\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds - \int_{\mathcal{S}}\rho^-\,U^-\,ds \\
\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^+}\rho\,dv &= \int_{\mathcal{D}^+}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}^+}\rho\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds + \int_{\mathcal{S}}\rho^+\,U^+\,ds
\end{aligned}$$

On est alors en mesure d'appliquer le théorème de la divergence sur les domaines réguliers $\mathcal{D}^-$ et $\mathcal{D}^+$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^-}\rho\,dv &= \int_{\mathcal{D}^-}(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\underline{\boldsymbol{v}}))\,dv-\int_{\mathcal{S}}\rho^-\,U^-\,ds\\ \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^+}\rho\,dv &= \int_{\mathcal{D}^+}(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\underline{\boldsymbol{v}}))\,dv+\int_{\mathcal{S}}\rho^+\,U^+\,ds\end{aligned}$$

L'équation locale (3.8) de conservation de la masse s'applique à l'intérieur de $\mathcal{D}^-$ et $\mathcal{D}^+$. En additionnant les deux contributions précédentes, on obtient finalement

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}\rho\,dv=\int_{\mathcal{S}}[\![\rho U]\!]\,dv \tag{3.104}$$

Le domaine $\mathcal{D}$ étant matériel, la masse qu'il contient est constante de sorte que la dérivée temporelle précédente est nulle. Le résultat précédent est valable pour toute portion de la surface de discontinuité, l'intégrande doit donc s'annuler en tout point de $\mathcal{S}$ le long de laquelle elle est continue (i.e. presque partout le long de $\mathcal{S}$) :

$$[\![\rho U]\!]=0,\quad\text{ou}\quad[\![\rho(\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}-w_n)]\!]=0 \tag{3.105}$$

La quantité entre crochets est le débit de masse à travers la surface géométrique $\mathcal{S}$ (unité $\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$). La relation (3.105) traduit donc la conservation de ce débit. La masse volumique peut ainsi présenter des discontinuités sur des ensembles de mesure nulle. On peut penser à deux matériaux de densités différentes accolés le long d'une interface idéale. Toutefois, dans ce cas, l'interface est matérielle (i.e. $w_n=\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}$) et la condition (3.105) est automatiquement satisfaite. Des situations plus pertinentes correspondent plutôt aux ondes de choc[13] dans les fluides ou à des fronts de changement de phase dans les solides.

3.5.4 Bilan de quantité de mouvement

On envisage ici le cas où le champ de vitesses $\underline{\boldsymbol{v}}$ présente une discontinuité au travers de la surface $\mathcal{S}$ au sein du domaine matériel $\mathcal{D}(t)\subset\Omega_t$. On reprend la démarche précédente en appliquant la formule de Reynolds (3.93) à $f:=\rho\underline{\boldsymbol{v}}$. On effectue les bilans sous les portions de $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^-}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,dv &= \int_{\mathcal{D}^-}\frac{\partial\rho\underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t}\,dv+\int_{\partial\mathcal{D}^-}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\;\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds-\int_{\mathcal{S}}\rho^-\underline{\boldsymbol{v}}^-\,U^-\,ds\\ \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^+}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,dv &= \int_{\mathcal{D}^+}\frac{\partial\rho\underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t}\,dv+\int_{\partial\mathcal{D}^+}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds+\int_{\mathcal{S}}\rho^+\underline{\boldsymbol{v}}^+\,U^+\,ds\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la divergence, ces expressions deviennent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^-}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,dv &= \int_{\mathcal{D}^-}(\frac{\partial\rho\underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\underline{\boldsymbol{v}}\otimes\underline{\boldsymbol{v}}))\,dv-\int_{\mathcal{S}}\rho^-\underline{\boldsymbol{v}}^-\,U^+\,ds\\ \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^+}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,dv &= \int_{\mathcal{D}^+}(\frac{\partial\rho\underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\underline{\boldsymbol{v}}\otimes\underline{\boldsymbol{v}}))\,dv+\int_{\mathcal{S}}\rho^+\underline{\boldsymbol{v}}^+\,U^+\,ds\end{aligned}$$

Le terme $\frac{\partial\rho\underline{\boldsymbol{v}}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\underline{\boldsymbol{v}}\otimes\underline{\boldsymbol{v}})$ n'est autre que l'accélération $\underline{\boldsymbol{a}}$ d'après la relation (3.52) établie dans la première partie de ce chapitre. En additionnant les deux relations précédentes, on

[13] Les ondes de chocs sont associées à des discontinuités du champ des vitesses et à une vitesse relative $U\neq 0$.

aboutit à l'expression suivante de la variation de quantité de mouvement sur un domaine matériel présentant une surface de discontinuité $\mathcal{S}$ (non nécessairement matérielle) :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}}\, dv + \int_{\mathcal{S}} [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] \rho U\, ds \tag{3.106}$$

On a tenu compte du fait que le débit relatif ρU est continu au passage de $\mathcal{S}$. Lorsque le champ de vitesses est continu ou lorsque la surface de discontinuité est matérielle, la relation précédente se réduit à $(3.16)_1$ utilisée dans la première partie de ce chapitre.

L'équation fondamentale de la dynamique appliquée au domaine matériel $\mathcal{D}$, traversé par la surface de discontinuité $\mathcal{S}$, s'écrit alors[14] :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}}\, dv + \int_{S} [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] \rho U\, ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds \tag{3.107}$$

On va appliquer cette relation à un voisinage d'un point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ comme sur la figure 3.4b. Le voisinage $\mathcal{D}$ contient la portion de surface

$$s = \mathcal{D} \cap \mathcal{S} \tag{3.108}$$

On va calculer la limite de (3.107) lorsque $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$ tendent vers s d'une façon telle que le volume de $\mathcal{D}$ tende vers 0 tandis que s reste inchangée (cf. figure 3.4b). Si $\rho(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}})$ reste borné de part et d'autre de s, les intégrales volumiques associées tendent vers 0 et, à la limite, il ne reste plus que

$$\int_{s} [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] \rho U\, ds = \int_{s} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{+}.\underline{\boldsymbol{n}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{-}.(-\underline{\boldsymbol{n}}))\, ds = \int_{s} [\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}}\, ds \tag{3.109}$$

Valable pour toute portion de surface s et pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$, l'équation précédente implique que l'intégrande doit s'annuler en tout point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ (sauf éventuellement sur un sous–ensemble de $\mathcal{S}$ de mesure nulle). On obtient les équations locales de saut à travers une surface de discontinuité :

$$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} - \rho U [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] = 0 \tag{3.110}$$

De manière équivalente, en tenant compte de (3.102) et (3.105), cette équation s'écrit aussi

$$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} - [\![(\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}} - w_n)\rho \underline{\boldsymbol{v}}]\!] = 0 \tag{3.111}$$

On rappelle que w_n désigne la vitesse de propagation de la surface $\mathcal{S}$ qui n'est en général pas une surface matérielle. Dans le cas d'une **onde de choc**, le saut $[\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!]$ est non nul et la vitesse ρU est non nulle. La matière traverse la surface en changeant brutalement de vitesse.

Dans le cas statique ou dans le cas d'une surface matérielle $\mathcal{S}$ ($U = 0$), l'équation aux discontinuités se réduit à

$$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{3.112}$$

C'est un résultat essentiel : **dans le cas statique, le vecteur–contrainte est continu à la traversée de toute surface**. On insiste sur le fait que la condition de continuité du vecteur–contrainte (3.112) n'implique pas en général la continuité des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. Il y a en effet seulement trois conditions de continuité pour six composantes de contraintes.

L'équation de bilan de moment cinétique $(3.16)_2$ possède elle–aussi sa version discontinue. Mais comme $\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0$ est continu à la traversée de $\mathcal{S}$, l'équation aux discontinuités correspondante est une conséquence directe de (3.111) et n'apporte pas d'information supplémentaire.

[14] en l'absence d'efforts concentrés sur $\mathcal{S}$.

3.5.5 Bilan d'énergie

On part de la formulation globale (3.83) du premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}(\rho e+\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,)\,dv=\int_{\mathcal{D}}\rho\underline{\boldsymbol{f}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\;dv+\int_{\partial\mathcal{D}}(\underline{\boldsymbol{t}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\;-\underline{\boldsymbol{q}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,)\,ds \tag{3.113}$$

Lorsque le domaine matériel $\mathcal{D}$ est traversé par une surface de discontinuité $\mathcal{S}$, les dérivées particulaires précédentes doivent être évaluées avec précaution. En suivant la démarche adoptée dans les deux paragraphes précédents, on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}(\rho e+\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,)\,dv &= \int_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho e+\frac{1}{2}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,)+\operatorname{div}\left((\rho e+\frac{1}{2}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,)\underline{\boldsymbol{v}}\,\right)\right)\,dv\\ &+ \int_{\mathcal{S}}[\![\rho e+\frac{1}{2}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,]\!]\rho U\,ds\\ &= \int_{\mathcal{D}}(\rho\dot{e}+\rho\underline{\boldsymbol{a}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,)\;dv+\int_{\mathcal{S}}[\![\rho e+\frac{1}{2}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,]\!]\rho U\,ds\end{aligned} \tag{3.114}$$

L'équation de bilan global d'énergie en présence de discontinuités s'obtient alors en substituant la relation précédente dans la loi (3.113). La version locale de ce bilan s'en déduit en l'appliquant à des domaines $\mathcal{D}$ comme sur la figure 3.4b, de plus en plus petits. Finalement, en (presque) tout point de $\mathcal{S}$, on doit avoir :

$$[\![(\rho e+\frac{1}{2}\rho\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\,)U]\!]+[\![\underline{\boldsymbol{q}}\;-\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}}\;=0 \tag{3.115}$$

En particulier, dans le cas d'une surface de discontinuité matérielle, on retrouve la continuité du flux $\underline{\boldsymbol{q}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}$ à condition de prendre en compte la continuité du vecteur–contrainte $\underline{\boldsymbol{t}}\;=\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}.\underline{\boldsymbol{n}}$ (cf. équation (3.112)).

Chapitre 4

Le tenseur des contraintes dans tous ses états

4.1 Les tenseurs de contraintes

4.1.1 Représentation lagrangienne des équations d'équilibre

La première loi d'Euler (3.27) est exprimée sur tout sous–domaine $\mathcal{D}$ de la configuration actuelle Ω_t :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}}\, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{f}}\, dv \tag{4.1}$$

Toutes les grandeurs introduites sont des fonctions eulériennes de $(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$. Il est légitime de chercher s'il existe une formulation lagrangienne des lois de la dynamique. Pour cela, un changement de variable $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t)$ est nécessaire. Ce changement de variable conduit alors à la représentation lagrangienne suivante du bilan global de quantité de mouvement sur $\mathcal{D}_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subset \Omega_0$:

$$\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\boldsymbol{A}}\, dV = \int_{\partial\mathcal{D}_0} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}.\underline{\boldsymbol{N}}\, dS + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\boldsymbol{F}}\, dV \tag{4.2}$$

Toutes les grandeurs présentes dans (4.2) sont des fonctions lagrangiennes de $(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t)$ définies sur la configuration de référence Ω_0. On a utilisé au passage le fait que $\rho dv = \rho_0 dV$ et introduit les grandeurs fonctions des variables lagrangiennes suivantes :

- L'accélération $\underline{\boldsymbol{A}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t) = \underline{\boldsymbol{a}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$ définie par (2.181).
- Les efforts massiques $\underline{\boldsymbol{F}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t) = \underline{\boldsymbol{f}}\,(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t), t)$ définies sur la configuration de référence.
- La normale $\underline{\boldsymbol{N}}$ au point $\underline{\boldsymbol{X}} \in \partial\mathcal{D}_0$. Elle est reliée à la normale au point $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t) \in \partial\mathcal{D}$ par la formule de transport de l'élément de surface (2.42) :

$$\underline{\boldsymbol{n}}\, ds = J\, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{N}}\, dS$$

- Le **tenseur des contraintes nominales** $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$. Pour le construire, on effectue le transport du vecteur contrainte sur la configuration de référence :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{t}}\, ds &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds = J\, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{N}}\, dS \\ &= \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}.\underline{\boldsymbol{N}}\, dS = \underline{\boldsymbol{T}}_S dS \end{aligned} \tag{4.3}$$

avec, après identification,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} := J \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} \quad \text{et} \quad \underline{\boldsymbol{T}}_S := \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}.\underline{\boldsymbol{N}} \tag{4.4}$$

L'intégrale de surface dans (4.2) se transforme en une contribution volumique grâce au théorème de la divergence :

$$\int_{\partial\mathcal{D}_0} S_{ij} N_j \, dS = \int_{\mathcal{D}_0} \frac{\partial S_{ij}}{\partial X_j} \, dV = \int_{\mathcal{D}_0} \text{Div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} \, dV \tag{4.5}$$

où l'opérateur divergence $\text{Div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}.\boldsymbol{\nabla}_X$ fait intervenir les dérivées partielles par rapport aux variables $\underline{\boldsymbol{X}}$. Le bilan (4.2) devient donc

$$\int_{\mathcal{D}_0} (\rho_0 \underline{\boldsymbol{A}} - \text{Div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} - \rho_0 \underline{\boldsymbol{F}}) \, dV = 0 \tag{4.6}$$

Le résultat précédent étant valable pour tout sous–domaine $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0$, et sous réserve de continuité des champs en présence, on obtient **la formulation lagrangienne locale de la dynamique des milieux continus** :

$$\text{Div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} + \rho_0 \underline{\boldsymbol{F}} = \rho_0 \underline{\boldsymbol{A}} \tag{4.7}$$

La seconde loi de Cauchy traduite en termes de fonctions lagrangiennes s'écrit alors

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T \tag{4.8}$$

puisque $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est symétrique.

Interprétation du tenseur des contraintes nominales

Le tenseur des contraintes nominales $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$ précédemment introduit est aussi appelé **tenseur de Boussinesq** ou **premier tenseur de Piola–Kirchhoff**. Il n'est pas symétrique mais en vertu de la seconde loi de Cauchy, il vérifie la propriété (4.8). Il a un pied dans la configuration de référence et un pied dans la configuration actuelle (tenseur mixte) puisqu'il associe à un élément de surface $\underline{\boldsymbol{N}}\, dS$ de la configuration de référence le vecteur force $\underline{\boldsymbol{t}}\, ds$ sur la configuration actuelle. Il n'est donc pas purement lagrangien (tout comme le gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$). Le tenseur de Boussinesq est donc la machine à produire les efforts actuels à partir d'un élément de surface initial. Son intérêt pour l'ingénieur est dès lors évident : l'ingénieur mesure les efforts en cours d'essai sur des éprouvettes ou des pièces de structure mais ne peut rapporter ces efforts qu'aux surfaces initiales des échantillons car les mesures de variations de section sont en général délicates et relativement coûteuses. En supposant que l'état de contrainte dans une éprouvette de section initiale S_0 et de section courante S soit homogène, l'effort mesuré vaut

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \underline{\boldsymbol{t}}\, S = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, S = \underline{\boldsymbol{T}}_S\, S_0 = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}.\underline{\boldsymbol{N}}\, S_0 \tag{4.9}$$

C'est pourquoi on parle parfois de la **contrainte de l'ingénieur** à propos de $\underline{\boldsymbol{T}}_S$ ou de $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$.

4.1.2 Contraintes et déformations conjuguées

On reprend l'expression (3.75) de la puissance des efforts intérieurs sur un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ qui fait intervenir les grandeurs purement eulériennes que sont le tenseur des contraintes de Cauchy $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et le taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Pour passer à une représentation lagrangienne de la puissance des efforts intérieures sur le domaine $\mathcal{D}_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{D})$, on profite du fait que $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est relié à la dérivée du tenseur de Green–Lagrange, grandeur purement lagrangienne, par la relation (2.202) :

$$\mathcal{P}^i = \int_{\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \, dv = \int_{\mathcal{D}_0} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \, J dV$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{D}_0} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1})\, JdV = \int_{\mathcal{D}_0} \sigma_{ij} F^{-T}_{ik} \dot{E}_{kl} F^{-1}_{lj}\, JdV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} (F^{-1}_{ki} \sigma_{ij} F^{-T}_{jl})\, \dot{E}_{kl}\, JdV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}\, dV
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

qui fait apparaître le **second tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}$** :

$$
\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = J\, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} \tag{4.11}
$$

Contrairement à $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$ précédemment introduit, le tenseur de Piola–Kirchhoff II est symétrique. Il est en outre purement lagrangien :

$$
\underline{\boldsymbol{T}}\, dS := \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}.\underline{\boldsymbol{N}}\, dS = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{T}}_S\, dS = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{t}}\, ds \tag{4.12}
$$

il associe à un élément de surface initial le transporté convectif du vecteur–contrainte $\underline{\boldsymbol{t}}$ sur la configuration initiale. On voit d'ailleurs que $\underline{\boldsymbol{t}}$ est transporté comme un vecteur matériel. $\underline{\boldsymbol{T}}$ est donc le vecteur contrainte entièrement lié à la configuration de référence.

La densité de puissance des efforts intérieurs rapportée à l'élément de volume initial peut donc s'exprimer en fonction de différents couples de variables constitués d'un tenseur de contraintes et d'une certaine vitesse ou d'un taux de déformation :

$$
J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} \tag{4.13}
$$

D'un point de vue physique, il est plus pertinent d'exprimer la densité de puissance massique des efforts intérieurs :

$$
\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}}{\rho} = \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}}{\rho_0} = \frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}}{\rho_0} \tag{4.14}
$$

Pour chaque couple, la contrainte et la déformation associée sont dites **conjuguées** (ou aussi duales). Le gradient de la transformation est la déformation conjuguée du tenseur des contraintes nominales. La déformation de Green–Lagrange est la déformation conjuguée du tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff. Le "vitesse de déformation"[1] associée au tenseur des contraintes $J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ (correction par J du tenseur de Cauchy, appelé tenseur des contraintes de Kirchhoff) est le taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Par contre, il n'y a pas de déformation conjuguée pour $J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ car $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ ne s'exprime pas directement comme la dérivée temporelle d'une mesure de déformation. Les tenseurs des contraintes introduits (ainsi que d'autres, au cas où vous les rencontreriez[2]) et les déformations conjuguées sont consignés dans le tableau (4.1). Il est possible en fait de construire un **tenseur des contraintes généralisé** conjugué à chaque mesure de déformation, par exemple issue de la famille (2.85).

[1] Terminologie abusive lorsque le taux de déformation considéré n'apparaît pas de manière directe comme la dérivée temporelle d'une déformation.

[2] On a ajouté le tenseur des contraintes de Mandel selon une terminologie récente introduite en Allemagne dans (Haupt, 2000; Bertram, 2005). Jean Mandel (1902–1982) fut professeur de mécanique à l'Ecole des Mines de Paris. Le tenseur des contraintes qui porte son nom prend son sens en théorie de la plasticité.

tenseur des contraintes	type	taux de déformation associé	déformation conjuguée
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ (Cauchy)	eulérien	-	-
$J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ (Kirchhoff)	eulérien	$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$	-
$\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} := J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}$ (Boussinesq ou PK I)	mixte	$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}$	$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} := J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}$ (Piola–Kirchhoff II)	lagrangien	$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}$	$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$
$\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}$ (Mandel)	lagrangien	$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1}.\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}$	-

TAB. 4.1 – Récapitulatif : Quelques tenseurs de contraintes en fonction du tenseur des contraintes de Cauchy et leurs déformations conjuguées. Noter que le gradient de la transformation est traité ici, de manière abusive, comme une mesure de déformation.

4.1.3 Changement de référentiel

Lorsque l'on change de référentiel par une transformation euclidienne (2.3), les efforts surfaciques $\underline{\boldsymbol{t}}$ et volumiques $\rho\underline{\boldsymbol{f}}$ se transforment comme des grandeurs dites **objectives**[3] selon

$$\underline{\boldsymbol{t}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{t}}\,, \quad \underline{\boldsymbol{f}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{f}} \tag{4.15}$$

Comment se transforme le tenseur des contraintes de Cauchy dans un tel changement de référentiel ? Pour le voir, on écrit

$$\underline{\boldsymbol{t}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}'.\underline{\boldsymbol{n}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}'.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{n}} \tag{4.16}$$

$$= \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} \tag{4.17}$$

En identifiant les équations (4.16) et (4.17), on obtient la règle de transformation de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T} \tag{4.18}$$

en se rappelant que $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T}$ puisque $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ est orthogonal. Le tenseur des contraintes se transforme comme un tenseur objectif, tout comme le tenseur vitesse de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ (cf. équation (2.236)). Qu'en est–il du tenseur purement lagrangien des contraintes de Piola–Kirchhoff II ? Pour le trouver, on utilise la règle de transformation du gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ d'après le résultat (2.30) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}' := J'\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}'.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'^{-T} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} \tag{4.19}$$

Le tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff II est donc **invariant** par changement de référentiel, tout comme sa déformation conjuguée, le tenseur de Green–Lagrange $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$. C'est le

[3] Certains auteurs éprouvent le besoin d'ériger cette règle de changement de référentiel en véritable principe, dit principe d'objectivité pour les forces et les contraintes (*Euclidean Frame Indifference* en anglais). Il semble que ce "principe" soit en fait concomitant de la représentation choisie des efforts, en liaison avec les lois de Newton, aptes à être appliquées, de façon convenable, dans n'importe quel référentiel, ainsi que le suggère P. Germain (Germain, 1986). Pour enfreindre un tel principe, il faut sans doute violer les lois de Newton... C'est pourquoi, l'objectivité des forces et des contraintes est universellement admise.

propre des grandeurs purement lagrangiennes que d'être invariantes par les transformations euclidiennes (2.3). Le tenseur de Boussinesq, quant à lui, n'est ni invariant, ni objectif :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} \tag{4.20}$$

Une conséquence importante des règles de transformation par changement de référentiel pour les contraintes et les déformations conjuguées, est que la puissance des efforts intérieurs est invariante par changement de référentiel. Pour le voir, on calcule la densité de puissance des efforts intérieurs dans le nouveau référentiel :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}' : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}' &= \operatorname{trace}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}'.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}'^{T}\right) = \operatorname{trace}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}'.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}'\right) \\ &= \operatorname{trace}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T}\right) = \operatorname{trace}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}\right) \\ &= \operatorname{trace}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\right) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \end{aligned} \tag{4.21}$$

où l'on a simplement utilisé le fait que $\operatorname{trace}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}\right) = \operatorname{trace}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\right)$. Comme $J' = J$, les égalités (4.13) impliquent que la puissance des efforts intérieurs est la même quel que soit le couple de variables conjuguées que l'on utilise et quel que soit le référentiel où on l'évalue. Ce résultat remarquable a la signification physique suivante : la puissance des efforts intérieurs ne dépend pas du référentiel d'observation[4]. Il n'en va pas de même de la puissance du champ d'accélération (cf. (3.77), en effet le vecteur $\underline{\boldsymbol{a}}$ n'est pas objectif et se transforme selon la règle (2.234)), et *a fortiori* de la puissance des efforts extérieurs (même si l'on y intègre les forces d'inertie).

4.1.4 Changement de base

Les formules de transformation des composantes du tenseur des contraintes selon des bases quelconques correspondent aux formules de changement de base établies à la page A.1.1 de l'annexe A pour les tenseurs d'ordre 2 de variance quelconque.

On a seulement besoin dans ce chapitre de rappeler ces formules dans le cas d'un changement de bases orthonormées pour un tenseur euclidien d'ordre 2 :

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = Q_{ki}\,\underline{\boldsymbol{e}}_k, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_i = Q^{-1}_{ki}\,\underline{\boldsymbol{e}}'_k = Q_{ik}\,\underline{\boldsymbol{e}}'_k \tag{4.22}$$

La matrice de passage formée des composantes Q_{ik} (premier indice : ligne, second indice : colonne) est orthogonale dans le cas d'un changement de bases orthonormées. Son inverse coïncide avec sa transposée. On peut dès lors établir les formules de changement de base pour le tenseur euclidien $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{ij}\,\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = \sigma'_{kl}\,\underline{\boldsymbol{e}}'_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_l = \sigma'_{kl} Q_{ik} Q_{jl}\,\underline{\boldsymbol{e}}'_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_j \tag{4.23}$$

L'identification des composantes dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}'_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_l)_{i,j=1,3}$ conduit aux formules de passage suivantes :

$$\sigma_{kl} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma'_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = Q_{ki} Q_{lj} \sigma_{kl}, \tag{4.24}$$

En notation matricielle, cela donne

$$[\sigma'] = [Q]^T\,[\sigma]\,[Q] \tag{4.25}$$

On notera l'équivalence de forme entre les expressions de changement de base (4.24) et les expressions de changement de référentiel (4.18). Le sens en est certes différent, mais dans la pratique, les résultats établis en termes de changement de base (notamment les propriétés d'invariance) pourront être interprétés en termes de changement de référentiel.

[4] C'est à nouveau l'expression du "principe" d'objectivité, évoqué à la note 3, page 100, écrit ici pour la puissance des efforts intérieurs. Cet énoncé est redevable des mêmes remarques, en suivant en cela (Germain, 1986).

4.2 Valeurs et directions principales des contraintes

4.2.1 Décomposition spectrale et invariants du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes de Cauchy est une forme bilinéaire symétrique. Il est par conséquent diagonalisable : il possède trois valeurs propres réelles σ_i, appelées **contraintes principales** et trois vecteurs propres $\underline{\boldsymbol{n}}_i$ deux à deux orthogonaux, appelés **directions principales des contraintes** :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \, \underline{\boldsymbol{n}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{n}}_i, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}_i = \sigma_i \, \underline{\boldsymbol{n}}_i \tag{4.26}$$

Dans la suite, on supposera que les contraintes principales sont rangées dans l'ordre décroissant tel que :

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \tag{4.27}$$

où σ_1 est la contrainte normale maximale et σ_3 la contrainte normale minimale. Il faut noter qu'en général les directions et contraintes principales du tenseur symétrique des contraintes de Piola–Kirchhoff II sont distinctes de celles du tenseur des contraintes de Cauchy.

La base $(\underline{\boldsymbol{n}}_1, \underline{\boldsymbol{n}}_2, \underline{\boldsymbol{n}}_3)$, dite principale, constitue une base orthonormée de l'espace. La matrice des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans cette base prend la forme diagonale :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]_{\text{principale}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Invariants des contraintes par changement de base

On appelle invariants des contraintes des fonctions à valeurs réelles des composantes du tenseur des contraintes qui ne dépendent pas du choix de la base de décomposition. De tels invariants existent pour tout endomorphisme. Les invariants principaux d'un endomorphisme sont définis au paragraphe A.3.1. Ils s'agit des coefficients du polynôme caractéristique de l'endomorphisme considéré, ou plus généralement de fonctions des racines de ce polynôme. Dans le cas du tenseur des contraintes, tenseur euclidien d'ordre 2 symétrique, ces racines sont les contraintes principales. Les expressions classiquement utilisées pour les invariants principaux sont :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.29}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2}((\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})^2 - \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^2) = \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{-1} \det \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.30}$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{6}((\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})^3 - 3(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^2) + 2(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^3)) \tag{4.31}$$

La seconde relation utilisant l'inverse de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ n'est bien sûr valable que si aucune contrainte principale n'est nulle. Les expressions précédentes indiquent que les ensembles $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\{I_1, I_2, I_3\}$ et $\{\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^2, \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^3\}$ contiennent la même information et sont donc équivalents. Ils méritent le nom d'invariants puisque leurs valeurs ne dépendent pas de la base ni du référentiel choisis. Ils sont équivalents à la connaissance des valeurs propres du tenseur des contraintes. A partir de là, on peut construire une multitude d'invariants comme autant de fonctions des trois valeurs propres du tenseur des contraintes.

4.2.2 Contraintes normale et tangentielle, cisaillement

On décompose maintenant le vecteur–contrainte $\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}$ s'appliquant sur une facette de normale $\underline{\boldsymbol{n}}$ en une composante normale σ_n et une composante tangentielle $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ contenue dans le plan de la facette de norme τ appelée contrainte tangentielle ou de **cisaillement** ou **cission** (cf. figure 4.1) :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} = \sigma_n \underline{\boldsymbol{n}} + \underline{\boldsymbol{\tau}} \tag{4.32}$$

$$\text{avec} \quad \sigma_n := \underline{\boldsymbol{n}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} = n_i \sigma_{ij} n_j \tag{4.33}$$

$$\tau^2 := \underline{\boldsymbol{t}}.\underline{\boldsymbol{t}} - \sigma_n^2 \tag{4.34}$$

Lorsque la facette est normale à une direction principale des contraintes $\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{n}}_i$, la composante tangentielle $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ est nulle et σ_n est égal à la contrainte principale σ_i. Si l'on considère maintenant un parallélépipède dont les faces sont orthogonales aux vecteurs d'une base orthonormée $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$, les 3 composantes du vecteur contrainte sur la facette de normale $\underline{\boldsymbol{e}}_i$ sont exactement les composantes $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i}$ du tenseur des contraintes dans cette base ($i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$) :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \sigma_{1i}\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sigma_{2i}\underline{\boldsymbol{e}}_2 + \sigma_{3i}\underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{4.35}$$

Cette signification des composantes du tenseur des contraintes est illustrée sur la figure 4.2. On remarquera en particulier qu'en vertu de la symétrie du tenseur des contraintes, l'existence d'un cisaillement ou cission σ_{32} appliquée sur la facette de normale $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ implique l'existence d'une cission $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ sur la face de normale $\underline{\boldsymbol{e}}_3$. Le résultat s'étend à des facettes non nécessairement orthogonales entre elles de normales respectives $\underline{\boldsymbol{n}}$ et $\underline{\boldsymbol{n}}'$:

$$\underline{\boldsymbol{t}}.\underline{\boldsymbol{n}}' = \underline{\boldsymbol{t}}'.\underline{\boldsymbol{n}}, \quad \text{où} \quad \underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} \text{ et } \underline{\boldsymbol{t}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}' \tag{4.36}$$

relation parfois dite de *réciprocité des cissions*.

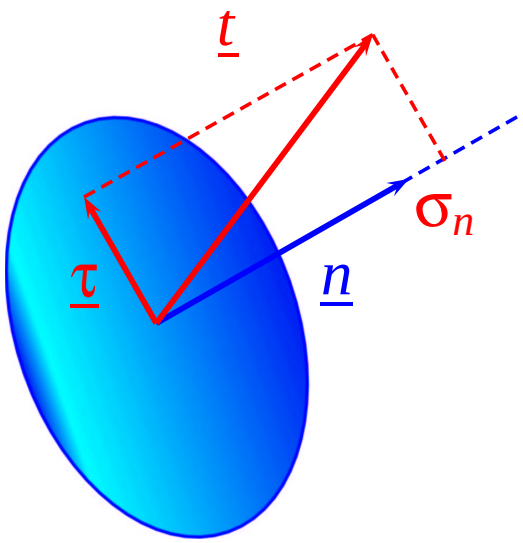


FIG. 4.1 – Décomposition du vecteur–contrainte en contraintes normale et tangentielle sur une facette de normale $\underline{\boldsymbol{n}}$.

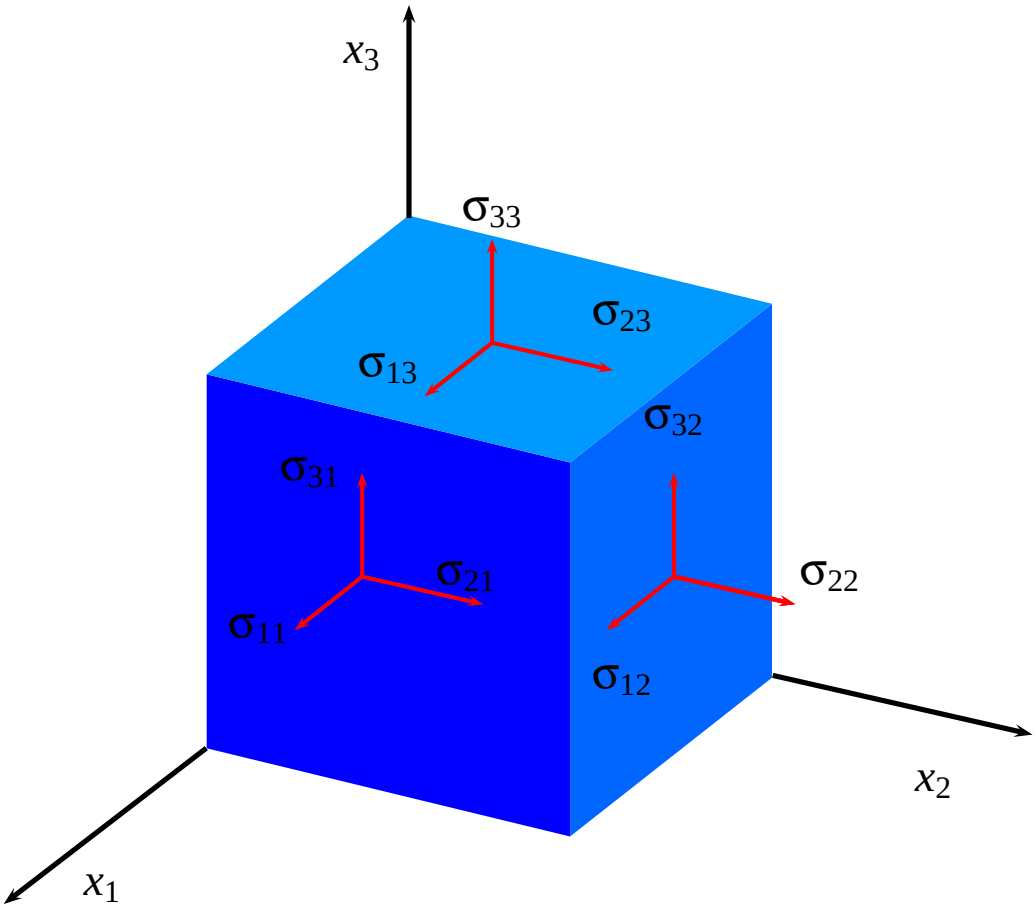


FIG. 4.2 – Composantes des vecteurs-contraintes sur les faces d'un cube dans une base orthonormée.

4.2.3 Représentation de Mohr

Comment le vecteur–contrainte en un point matériel donné varie–t–il lorsque l'on change l'orientation de la facette ? Pour répondre à cette question, on adopte la représentation proposée par Otto Mohr qui consiste à travailler dans le plan (σ_n, τ) des contraintes normales et tangentielles.

Soient (n_1, n_2, n_3) les composantes d'un vecteur normal $\underline{\boldsymbol{n}}$ dans la base principale $(\underline{\boldsymbol{n}}_1, \underline{\boldsymbol{n}}_2, \underline{\boldsymbol{n}}_3)$ de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ donné et fixé. On établit d'abord les expressions reliant les composantes n_i et les contraintes normale σ_n et tangentielle τ, par l'intermédiaire des contraintes principales σ_i rangées dans l'ordre décroissant (4.27). Par définition (voir équation (4.28)),

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} = \sigma_1 n_1 \, \underline{\boldsymbol{n}}_1 + \sigma_2 n_2 \, \underline{\boldsymbol{n}}_2 + \sigma_3 n_3 \, \underline{\boldsymbol{n}}_3 \tag{4.37}$$

de sorte que, d'après (4.33),

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{4.38}$$

et d'après (4.34),

$$\sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \tag{4.39}$$

En ajoutant l'équation indiquant que la norme de $\underline{\boldsymbol{n}}$ est par définition égale à un, on peut

interpréter les trois équations obtenues comme un système linéaire d'inconnues n_i^2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \sigma_n^2 + \tau^2 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

La résolution du système (4.40) fournit[5] :

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \tag{4.42}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \tag{4.43}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \tag{4.44}$$

On remarque alors que la positivité des n_i^2 implique les inégalités suivantes sur σ_n et τ :

$$\begin{aligned} \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) &\geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) &\leq 0 \\ \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \tag{4.45}$$

$$(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2})^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \tag{4.46}$$

$$(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \tag{4.47}$$

La figure 4.3 représente les trois cercles de centres respectifs $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0), (\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0), (\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0)$ et de rayons respectifs $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, dans le plan de Mohr (σ_n, τ). Les inégalités (4.45) à (4.47) signifient que l'extrémité du vecteur–contrainte $\underline{\boldsymbol{t}}$ de coordonnées (σ_n, τ) dans le plan de Mohr se situe à l'extérieur des deux premiers cercles mentionnés et à l'intérieur du plus grand cercle. La zone contenant *a priori* l'extrémité de $\underline{\boldsymbol{t}}$ est bleue sur la figure 4.3a. Ce domaine est délimité par les **cercles de Mohr**. Réciproquement, on peut établir que tout point (σ_n, τ) donné de la zone bleue est atteint pour une direction $\underline{\boldsymbol{n}}$ donnée par les formules (4.42) à (4.44). En particulier les frontières du domaine constituées par les cercles de Mohr sont atteints respectivement pour $n_3 = 0$, $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$.

Etude du grand cercle de Mohr

A titre d'exemple, on étudie plus spécifiquement le cas où l'extrémité du vecteur–contrainte est sur le grand cercle de Mohr. Les facettes concernées sont celles qui contiennent la seconde direction principale des contraintes $\underline{\boldsymbol{n}}_2$.

[5] Pour obtenir le résultat sous la forme simple donnée par les équations (4.42) à (4.44), il faut remarquer que le déterminant de la matrice (4.40) (dite de Vandermonde) se met sous la forme

$$\sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_3\sigma_1^2 - \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_3^2\sigma_1 - \sigma_2^2\sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) \tag{4.41}$$

On va suivre l'évolution du vecteur–contrainte lorsque la facette tourne autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{n}}_2$. Pour cela on construit un trièdre direct à l'aide de directions $(\underline{\boldsymbol{n}}_1, \underline{\boldsymbol{n}}_3, \underline{\boldsymbol{n}}_2)$ (changer au besoin le sens des vecteurs initialement choisis). Le vecteur normal évolue dans le plan $(\underline{\boldsymbol{n}}_1, \underline{\boldsymbol{n}}_3)$ et fait l'angle θ avec la direction $\underline{\boldsymbol{n}}_1$. De

$$\underline{\boldsymbol{n}} = \cos\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_1 + \sin\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_3$$

on tire

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \sigma_1 \cos\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_1 + \sigma_3 \sin\theta\, \underline{\boldsymbol{n}}_3$$

ce qui montre que le vecteur–contrainte n'a pas de composante selon $\underline{\boldsymbol{n}}_2$ pour les facettes étudiées. Il est donc possible de construire un trièdre direct $(\underline{\boldsymbol{n}}, \underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{n}}_2)$. L'intérêt de cette définition est de pouvoir considérer la contrainte algébrique τ (on n'avait jusqu'ici guère évoqué que son carré[6]) telle que

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} = \tau \underline{\boldsymbol{m}}, \quad \text{avec} \quad \underline{\boldsymbol{m}} = -\sin\theta \underline{\boldsymbol{n}}_1 + \cos\theta \underline{\boldsymbol{n}}_3$$

Les contraintes normale et tangentielle se calculent alors

$$\sigma_n = \underline{\boldsymbol{t}}.\underline{\boldsymbol{n}} = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_3 \sin^2\theta = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\theta \tag{4.48}$$

$$\tau = \underline{\boldsymbol{t}}.\underline{\boldsymbol{m}} = -\sigma_1 \sin\theta\cos\theta + \sigma_3 \sin\theta\cos\theta = -\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\theta \tag{4.49}$$

On reconnaît la représentation paramétrique du cercle centré en $(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0)$ et de rayon $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. On confirme donc que lorsque la facette tourne autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{n}}_2$, le vecteur–contrainte décrit le grand cercle de Mohr. En outre, lorsque $\underline{\boldsymbol{n}}$ tourne de l'angle θ, le vecteur–contrainte se déplace sur le grand cercle d'un angle double dans le sens opposé. Cette situation est représentée sur la figure 4.3. Cette règle permet donc d'associer à chaque point du grand cercle l'orientation de la facette correspondant à cette valeur du vecteur–contrainte.

Le raisonnement conduit dans le plan $(\underline{\boldsymbol{n}}_1, \underline{\boldsymbol{n}}_3)$ est identique pour les autres cercles principaux, en choisissant avec précaution le vecteur $\underline{\boldsymbol{m}}$ faisant un angle de $\pi/2$ positif avec $\underline{\boldsymbol{n}}$.

Une conséquence très importante des constructions précédentes est le

Théorème 12 (Cisaillement maximal) *Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ le tenseur des contraintes en un point matériel, la contrainte tangentielle $\tau_{\max}$ maximale subie sur les facettes lorsqu'on fait varier les normales $\underline{\boldsymbol{n}}$ vaut $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ où σ_1 et σ_3 sont respectivement les contraintes principales maximale et minimale. Elle s'exerce sur les facettes contenant la direction $\underline{\boldsymbol{n}}_2$, à $\pm\pi/4$ des directions $\underline{\boldsymbol{n}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{n}}_3$.*

Le résultat se lit sur le grand cercle de Mohr de la figure 4.3. L'orientation de la facette correspondante s'obtient avec $2\theta = \pi/2$. □

La construction de Mohr permet d'établir aussi que la contrainte normale maximale subie en un point matériel est bien la contrainte principale maximale σ_1.

4.3 Etats de contraintes remarquables

On peut classer les états de contraintes rencontrés dans les éprouvettes ou les composants industriels selon les valeurs des contraintes principales. On distingue alors les états de contraintes à une, deux ou trois contraintes principales imposées indépendantes.

[6] Une telle définition algébrique de la cission n'est pas possible dans le cas général car il n'existe pas de choix naturel de $\underline{\boldsymbol{m}}$ pour toutes les facettes en un point donné. On doit alors se contenter d'une représentation dans le demi–plan $(\sigma_n, |\tau|)$.

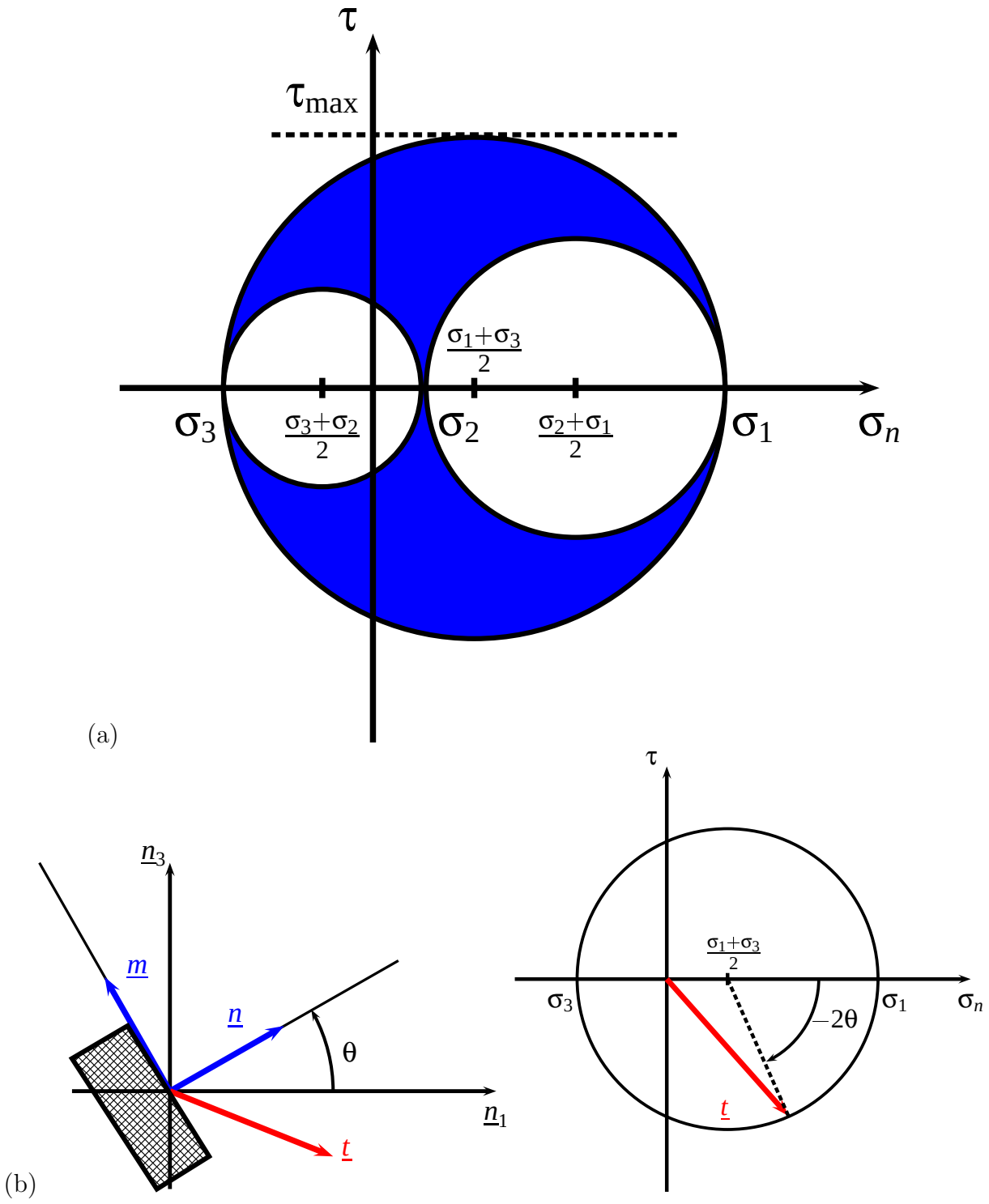


FIG. 4.3 – Représentation de Mohr : (a) les cercles principaux, (b) vecteur–contrainte pour une facette contenant la direction principale des contraintes $\underline{\boldsymbol{n}}_2$.

4.3.1 Etat de traction/compression simple : $(\sigma, 0, 0)$

L'état de contrainte en un point est dit de traction simple lorsqu'il existe à chaque instant t un vecteur $\underline{\boldsymbol{d}}$ unitaire de l'espace tel que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma\, \underline{\boldsymbol{d}} \otimes \underline{\boldsymbol{d}} \tag{4.50}$$

La direction $\underline{\boldsymbol{d}}$ s'appelle direction ou **axe de traction**. Il s'agit d'un état de contrainte **uni-axial**. La matrice de ses composantes prend la forme simple suivante dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{d}}, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$:

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

Un état de traction simple peut toutefois se cacher derrière une matrice de forme plus compliquée. Pour le voir, considérons l'axe de sollicitation suivant, dans une base orthonormée donnée $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$:

$$\underline{\boldsymbol{d}} = \cos\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_2$$

L'état de traction simple selon $\underline{\boldsymbol{d}}$ se décompose en

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma\, \underline{\boldsymbol{d}} \otimes \underline{\boldsymbol{d}} = \sigma\,(\cos\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_2) \otimes (\cos\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_2) \\ &= \sigma(\cos^2\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sin^2\alpha\, \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \sin\alpha\cos\alpha\,(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1)) \end{aligned} \tag{4.52}$$

ce qui, sous forme matricielle, donne

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma\cos^2\alpha & \sigma\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sigma\sin\alpha\cos\alpha & \sigma\sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

C'est ainsi que les états de contraintes suivants

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 0 \\ 50 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 75 & 43 & 0 \\ 43 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

correspondent respectivement à une traction de 100 MPa selon la direction bissectrice de $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2)$ et à une traction de 100 MPa dans la direction contenue dans le plan $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2)$ et faisant un angle de 30° avec $\underline{\boldsymbol{e}}_1$. Pour dévoiler l'état qui se cache derrière une matrice de chargement donné, il faut en faire l'analyse spectrale.

La représentation de Mohr de l'état de traction simple donnée dans le tableau 4.2, montre que les facettes perpendiculaires à l'axe de traction $\underline{\boldsymbol{d}}$ ne subissent qu'une contrainte normale égale à σ. Par contre, les facettes contenant l'axe $\underline{\boldsymbol{d}}$ sont libres de forces. Les autres facettes subissent à la fois des efforts normaux et tangentiels. La contrainte tangentielle maximale vaut $\sigma/2$ sur les facettes dont les normales sont situées sur le cône faisant un angle de $\pi/4$ avec $\underline{\boldsymbol{d}}$.

Lorsque $\sigma > 0$, il s'agit d'un état de **traction**. Lorsque $\sigma < 0$, il s'agit d'un état de **compression**.

4.3.2 Etat de cisaillement simple : $(\tau, -\tau, 0)$

L'état de contraintes en un point donné est dit de cisaillement simple s'il existe deux directions orthogonales[7] $\underline{\boldsymbol{d}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{d}}_2$ telles que

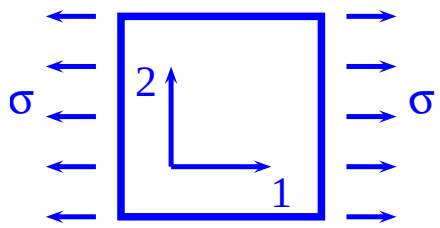
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \tau\,(\underline{\boldsymbol{d}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_2 + \underline{\boldsymbol{d}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_1) \tag{4.54}$$

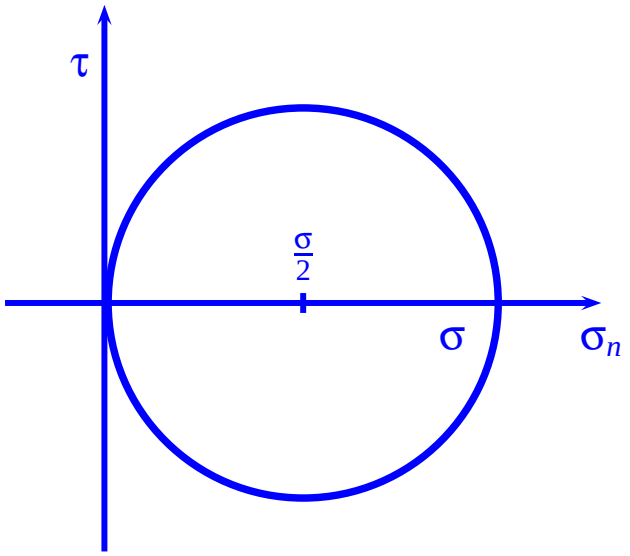
[7] Si l'état de contraintes prend la forme (4.54) avec $\underline{\boldsymbol{d}}_1.\underline{\boldsymbol{d}}_2 = \cos\alpha$, alors on vérifiera que les contraintes principales associées sont $(\cos\alpha + 1)\tau$, $(\cos\alpha - 1)\tau$ et 0. Les contraintes principales maximale et minimale sont opposées seulement lorsque $\alpha = \pm\pi/2$. Dans les autres cas, il s'agit d'un état de contrainte bi-axial analysé au paragraphe 4.3.3.

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma\, \underline{\boldsymbol{d}} \otimes \underline{\boldsymbol{d}}$

Composantes dans le repère $(\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{d}}, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$:

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





TAB. 4.2 – Récapitulatif : l'état de traction simple.

Ses composantes dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{d}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2 = \underline{\boldsymbol{d}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$ sont

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

L'analyse spectrale de l'état de cisaillement simple conduit à

$$\sigma_1 = \tau, \quad \underline{\boldsymbol{n}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\boldsymbol{d}}_1 + \underline{\boldsymbol{d}}_2) \tag{4.56}$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \underline{\boldsymbol{n}}_2 = \underline{\boldsymbol{d}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{d}}_2 \tag{4.57}$$

$$\sigma_3 = -\tau, \quad \underline{\boldsymbol{n}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\boldsymbol{d}}_1 - \underline{\boldsymbol{d}}_2) \tag{4.58}$$

La matrice des composantes de l'état de contraintes (4.54) dans la base $(\underline{\boldsymbol{n}}_1, \underline{\boldsymbol{n}}_3, -\underline{\boldsymbol{d}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{d}}_2)$ est donc

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

Les facettes normales à $\underline{\boldsymbol{n}}_1$ subissent donc une contrainte normale de traction τ et ne sont soumises à aucune contrainte tangentielle. Au contraire, les facettes normales à $\underline{\boldsymbol{n}}_3$ subissent une contrainte normale de compression $-\tau$. On peut donc interpréter l'état de cisaillement simple comme un état de contraintes bi-axial composé d'une traction selon $\underline{\boldsymbol{n}}_1$ et d'une compression de même valeur absolue selon $\underline{\boldsymbol{n}}_3$. Cette propriété remarquable est illustrée par les figures du tableau 4.3.

4.3.3 Etat de contraintes bi-axial / contraintes planes : $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$

L'état de contraintes est dit **plan** dans le plan $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2)$, si, pour $\underline{\boldsymbol{e}}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_2$,

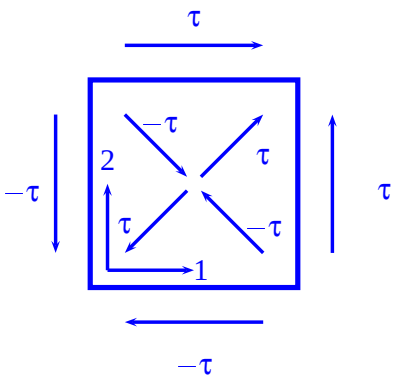
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3 = 0$$

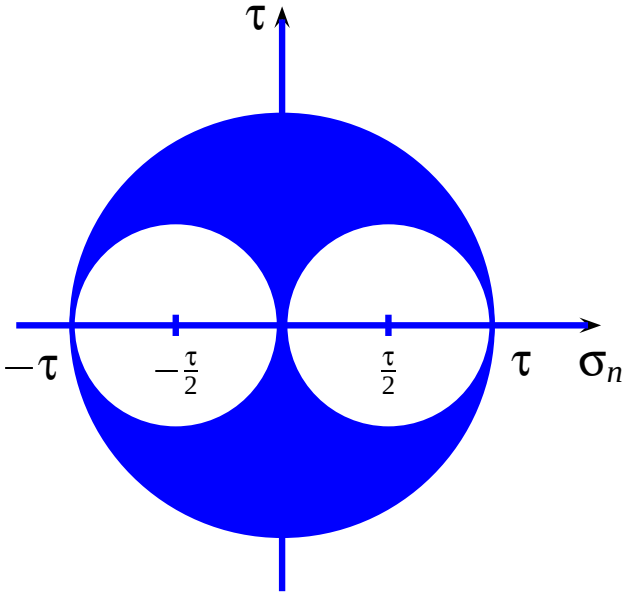
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \tau\,(\underline{\boldsymbol{d}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_2 + \underline{\boldsymbol{d}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_1)$

avec $\underline{\boldsymbol{d}}_1.\underline{\boldsymbol{d}}_2 = 0$

Composantes dans le repère $(\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{d}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2 = \underline{\boldsymbol{d}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$:

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





TAB. 4.3 – Récapitulatif : l'état de cisaillement simple.

La matrice des composantes dans la base orthonormée $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$ s'écrit

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

On voit que l'une des contraintes principales est 0 pour la direction principale $\underline{\boldsymbol{e}}_3$. Pour obtenir les deux autres contraintes principales, il faut diagonaliser la sous–matrice 2x2 contenant les composantes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$. Il existe donc des directions $\underline{\boldsymbol{d}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{d}}_2$ orthogonales telles que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_1\, \underline{\boldsymbol{d}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_1 + \sigma_2\, \underline{\boldsymbol{d}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_2 \tag{4.61}$$

La matrice des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ donné par (4.60) prend la forme suivante dans la base $(\underline{\boldsymbol{d}}_1, \underline{\boldsymbol{d}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

On parle d'un état de contrainte bi-axial puisque l'état de contraintes est contrôlé par les deux variables indépendantes σ_1 et σ_2. La représentation de Mohr du tableau 4.4 montre que les facettes contenant la direction $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ voient le cisaillement maximal (resp. la contrainte normale maximale) $\sigma_1/2$ (resp. σ_1) si $\sigma_1 > 0$ et $|\sigma|/2$ (resp. 0), si $\sigma_1 = 0$.

4.3.4 Etat de contrainte tri–axial : $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

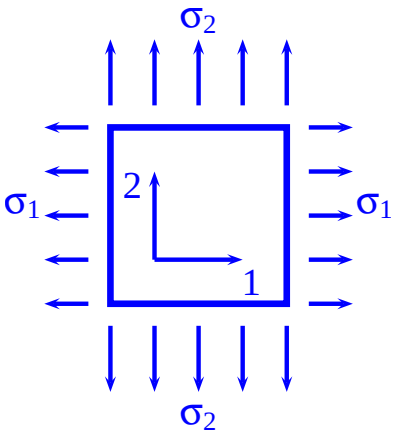
Lorsqu'aucune des contraintes principales n'est nulle, on parle d'état de contrainte tri-axial. La représentation de Mohr correspondante est sur la figure 4.3. En toute rigueur, on cherchera

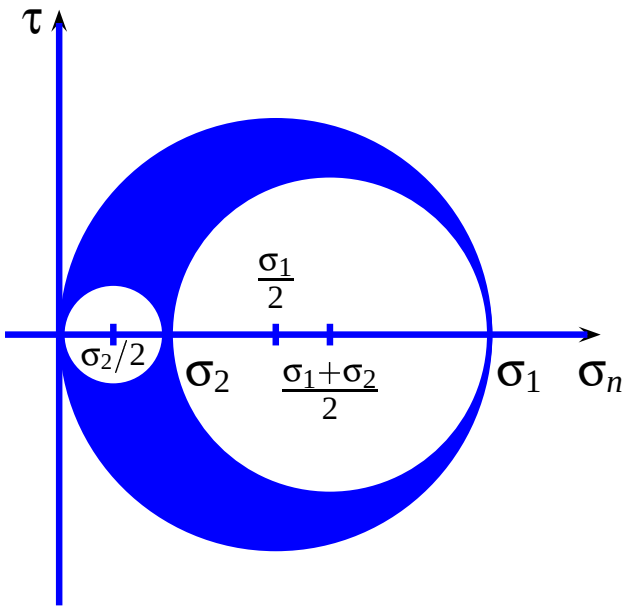
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_1 \underline{\boldsymbol{d}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_1 + \sigma_2 \underline{\boldsymbol{d}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_2$

avec $\underline{\boldsymbol{d}}_1 . \underline{\boldsymbol{d}}_2 = 0$

Composantes dans le repère $(\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{d}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2 = \underline{\boldsymbol{d}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$:

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





TAB. 4.4 – Récapitulatif : l'état de contraintes bi-axial.

pour de tels essais mécaniques à imposer indépendamment chacune des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

4.4 Critères en contrainte pour les matériaux isotropes

Comment peut–on comparer des états de contraintes entre eux ? On sait bien qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur l'espace des matrices ou des tenseurs d'ordre deux. Comment déclarer alors qu'un état de contrainte est plus sévère qu'un autre ? Il faut recourir à une norme ou plus généralement à une fonction scalaire du tenseur des contraintes, qui dépendra du facteur critique étudié (plasticité, rupture...) et du matériau. En effet, on peut utiliser une fonction **critère** pour délimiter un domaine de fonctionnement du matériau. Par exemple, pour des solides élastiques, on cherche à déterminer la limite en contrainte au–delà de laquelle la réponse du matériau n'est plus réversible. Au–delà de cette limite, le matériau peut rompre (**rupture**) purement et simplement ou présenter des déformations permanentes (**plasticité**).

4.4.1 Fonctions isotropes du tenseur des contraintes

On se limite[8] ici au cas de matériaux isotropes pour lesquels le critère est une fonction scalaire $f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ isotrope par rapport à son argument $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$. La fonction $f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ est dite **isotrope** si, pour toute transformation orthogonale $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$, on a

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{4.63}$$

Cela signifie en pratique que, pour un chargement $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ donné par rapport à une base fixée non liée à l'échantillon (et supposé s'appliquer de manière homogène), le critère prend la même valeur quelle que soit l'orientation de l'échantillon. Autrement dit, on peut découper (usiner) l'éprouvette dans le matériau massif sans se préoccuper de l'orientation de la découpe. Le fait que la limite d'élasticité d'un matériau dépende ou non de directions particulières liées au matériau est souvent la conséquence de son procédé d'élaboration et/ou de mise en forme. L'hypothèse d'isotropie peut n'être vérifiée que pour une certaine précision, à déterminer, du critère.

Les fonctions isotropes à valeurs réelles d'une variable tensorielle d'ordre 2 symétrique ne peuvent pas être arbitraires. Elles ne sauraient dépendre des directions propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ qui sont des directions particulières. Il ne reste alors qu'une dépendance vis–à–vis des contraintes principales, qui ne doit d'ailleurs privilégier aucune d'entre elles. De manière équivalente, il ne peut s'agir que d'une fonction arbitraire des invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$f^{\text{isotrope}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \breve{f}(I_1, I_2, I_3) \tag{4.64}$$

La fonction $\breve{f}$ peut être quelconque. Par contre, $\hat{f}$ doit être une fonction symétrique de ses arguments :

$$\hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \hat{f}(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2) = \hat{f}(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)$$

Le résultat (4.64) est ce que l'on appelle un **théorème de représentation**. Il constitue le théorème 29 démontré de manière plus précise à la page 442.

[8] On montre en fait avec des arguments développés au chapitre 5 qu'un critère décrit par une fonction $f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy n'est licite que pour des matériaux isotropes. Pour des matériaux anisotropes en grandes transformations, il faudra recourir à un critère de la forme $f(\underset{\sim}{\mathbf{II}})$.

4.4.2 Pression, déviateur des contraintes

Pour tout tenseur euclidien $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ d'ordre 2, on définit ses parties sphérique et déviatorique de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\text{sph}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\text{dev}} \tag{4.65}$$

$$\text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\text{sph}} := \frac{1}{3}(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{4.66}$$

$$\text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\text{dev}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\text{sph}} \tag{4.67}$$

L'introduction de cette décomposition pour le tenseur des contraintes s'explique par le fait que les matériaux présentent des sensibilités différentes à l'application de contraintes purement sphériques ou purement déviatorique. On introduit parfois la notation

$$p := -\frac{\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{3}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{sph}} = -p\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{4.68}$$

La partie déviatorique des contraintes mesure donc l'écart de l'état de contraintes avec un état de pression pure. En particulier, on verra que les états de cisaillement sont entièrement contenus dans le déviateur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}$. On insiste sur le fait que, par définition du déviateur,

$$\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} = 0$$

4.4.3 Critère de contrainte normale maximale

Les matériaux fragiles rompent généralement lorsque la contrainte normale σ_n atteint une valeur critique σ_0. La fonction critère correspondante s'écrit

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \left(\underset{\|\underline{\boldsymbol{n}}\|=1}{\text{Sup}} \ \sigma_n \right) - \sigma_0 \tag{4.69}$$

Le critère de rupture stipule que le matériau reste sain tant que

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) < 0 \tag{4.70}$$

La représentation de Mohr permet de se rendre compte que la fonction f définie par (4.69) est bien une fonction symétrique des contraintes principales. En effet, d'après la figure 4.3, la contrainte normale maximale n'est autre que la plus grande des valeurs propres positives. Le critère s'écrit donc aussi

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_0$$

Le critère prévoit donc que le matériau casse en traction pour une contrainte $\sigma = \sigma_0$. Lors d'un essai de cisaillement simple, la rupture aura lieu pour $\tau = \sigma_0$.

La rupture s'effectue souvent dans le plan normale à la direction principale $\underline{\boldsymbol{n}}_1$ associée à la contrainte principale maximale σ_1. Dans les alliages métalliques, la rupture fragile est souvent caractéristique du comportement à froid. La surface de rupture présente souvent un aspect brillant lié à la **rupture fragile** par **clivage** des grains qui composent le matériau métallique. La figure 4.4 montre la rupture fragile d'un éprouvette en torsion : on peut vérifier que la surface de rupture est orthogonale aux directions principales des contraintes. L'expertise de cette rupture est réalisée en application du cours au paragraphe 13.3.

Le critère de rupture fragile (4.69) est en fait très simplifié. En réalité, la contrainte à rupture est une variable aléatoire. Un véritable modèle de rupture fragile se formule de manière statistique[9]. La contrainte normale σ_n joue alors le rôle de variable critique.

[9] Dans les normes en cours, c'est souvent la statistique de Weibull qui est invoquée.

FIG. 4.4 – Rupture hélicoïdale d'une éprouvette en fonte sollicitée en torsion (source Centre des Matériaux).

4.4.4 Critère de contrainte tangentielle maximale (Tresca)

Au contraire, d'autres matériaux, dits **ductiles** sont peu sensibles à l'effet de contrainte normale et cèdent plutôt ou se déforment plastiquement pour une valeur critique de la contrainte tangentielle $|\tau| = \|\underline{\boldsymbol{\tau}}\|$:

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = 2\left(\underset{\|\underline{\boldsymbol{n}}\|=1}{\text{Sup}} \|\underline{\boldsymbol{\tau}}(\underline{\boldsymbol{n}})\|\right) - \sigma_0 \tag{4.71}$$

Le domaine de comportement "sain" (élastique par exemple) est à nouveau décrit par l'inégalité (4.70). Il s'agit bel et bien d'une fonction des contraintes principales car on sait que la contrainte tangentielle maximale vaut $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ d'après le théorème 12. La fonction critère se formule donc de manière équivalente

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \max_{1\leq i,j\leq 3}(\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0$$

En traction, la limite d'élasticité est atteinte pour $\sigma = \sigma_0$. En cisaillement simple, elle est atteinte pour $\tau = \sigma_0/2$, ce qui distingue nettement ce critère du précédent. On remarquera aussi que la fonction critère est insensible à l'application d'une pression p

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - p\underset{\sim}{\mathbf{1}}) = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

L'expérience montre que la plupart des alliages métalliques et des roches non poreux se déforment élastiquement jusqu'à des pressions faramineuses (de l'ordre de plusieurs GPa). Ce critère porte le nom de Henri Tresca qui le proposa en 1864.

4.4.5 Critère de von Mises

Le critère de Tresca n'est pas le seul critère isotrope permettant de prévoir avec une bonne précision l'apparition de la plasticité dans les métaux, loin s'en faut. D'un usage plus courant dans les simulations numériques de la réponse de structures élastoplastiques, le critère dit de von Mises (d'après Richard von Mises qui le valida en 1913) fait appel à une fonction quadratique des différences entre les contraintes principales :

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2)} - \sigma_0 \tag{4.72}$$

Ce critère est lui aussi insensible à l'application d'une pression hydrostatique. On vérifiera qu'il peut revêtir d'autres formes et en particulier s'exprimer en fonction du déviateur des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}$:

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) - \sigma_0, \quad \text{avec} \quad J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}^{\text{dev}}\sigma_{ij}^{\text{dev}}} \tag{4.73}$$

Dans la littérature de l'élastoplasticité, la notation $J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ est souvent utilisée et appelée second invariant des contraintes. C'est effectivement un invariant scalaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ mais il est distinct de l'invariant principal I_2 introduit précédemment. La grandeur $J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ permet de comparer des états de contraintes vis–à–vis du critère de von Mises et porte souvent le nom de **contrainte équivalente** σ_{eq} de von Mises. On établira les relations équivalentes suivantes

$$\begin{aligned}
\sigma_{eq} &:= J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_{11}^{dev})^2+(\sigma_{22}^{dev})^2+(\sigma_{33}^{dev})^2+2(\sigma_{12}^{dev})^2+2(\sigma_{23}^{dev})^2+2(\sigma_{31}^{dev})^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\sigma_{12}^2+6\sigma_{23}^2+6\sigma_{31}^2)}
\end{aligned}$$

La limite d'élasticité en traction d'après le critère de von Mises est $\sigma = \sigma_0$ et en cisaillement $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$. On voit que le critère de von Mises prévoit une limite d'élasticité plus forte que celui de Tresca, ce qui *a priori* doit permettre de déterminer expérimentalement le critère le mieux adapté. En général, on trouve que la limite d'élasticité en cisaillement est située entre ces deux estimations, voire plus proche de $\sigma_0/2$ prévu par Tresca à condition d'avoir une extensométrie fine permettant de distinguer des déformation irréversibles faibles de l'ordre de ou inférieures à 10^{-4}. Les domaines d'élasticité réels sont en pratique plus complexes que ne l'indiquent les critères précédents et peuvent être modélisés aujourd'hui avec de plus en plus de précision en particulier dans le cas de sollicitations complexes multiaxiales.

Chapitre 5

Formulation des lois de comportement

5.1 Nécessité des lois de comportement

5.1.1 Décompte des inconnues et des équations

Dans le cas des corps rigides dont le mouvement a été décrit au paragraphe 2.2.7, les inconnues du problème sont au nombre de 6, à savoir 3 degrés de liberté de translation et 3 angles de rotations qui interviennent dans la cinématique (2.52). Les équations à résoudre se résument aux équations d'Euler du mouvement (3.27) et (3.28), à savoir les bilans globaux de quantité de mouvement et de moment cinétique pour un torseur des efforts appliqués donné. Il s'agit de 6 équations qui, en principe, permettent donc de déterminer sans ambiguïté les 6 degrés de liberté cinématiques.

Il en va tout autrement dans le cas des corps déformables. Les équations de champ du problème *mécanique* à résoudre se résument aux bilans locaux de masse et de quantité de mouvement, à savoir une équation scalaire et une équation vectorielle, c'est–à–dire **4 équations** au total. On fait l'économie du bilan de moment cinétique en considérant systématiquement le tenseur des contraintes de Cauchy comme étant symétrique. Ces équations de la mécanique des milieux continus sont consignées dans la table 3.2 et on ne s'intéresse ici qu'au cas de points réguliers d'un corps Ω. En général, les actions extérieures (forces massiques) $\underline{\boldsymbol{f}}$ sont supposées connues et elles constituent des données du problème. Les inconnues du problème sont donc la masse volumique ρ, la transformation $\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$ et la contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ en chaque point matériel $\underline{\boldsymbol{X}}$. Cela représente au total **10 inconnues** scalaires attachées à chaque point matériel (à comparer aux 6 inconnues globales pour les corps rigides !). En l'état le problème est donc mal posé.

On met ainsi en évidence le **problème de fermeture**[1], omniprésent en théorie physique des champs. Il reste 6 équations de champ à trouver. Il s'agit des équations qui expriment les 6 composantes des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ en fonction des inconnues fondamentales du problème que sont la masse volumique, ρ et la transformation Φ. De telles équations ne sont pas universelles. En effet, l'expérience courante nous enseigne qu'un même champ de déplacement linéaire (conduisant donc à une déformation homogène) appliqué à un échantillon en acier ou en caoutchouc ne donne pas lieu aux mêmes efforts internes. Les équations manquantes n'ont donc pas un caractère universel contrairement aux 4 équations de bilan déjà formulées. Elles revêtent une forme différente selon la nature physique de la matière ou du matériau étudié et prennent le nom de **lois de comportement mécanique**[2]. Il y aura donc des lois de comportement dont la forme et les paramètres associés seront différents pour les métaux, les polymères, les céramiques, les gels et les liquides...

[1] *closure problem* en anglais.

[2] *constitutive equations* en anglais.

Pour le développement des lois de comportement, nous travaillons au niveau du point matériel, i.e. de l'élément de volume de la mécanique. Il doit s'agir d'un **volume élémentaire représentatif** (VER) du matériau considéré, ainsi qu'il a été défini au paragraphe 1.2.2. Ce volume intègre les hétérogénéités sous–jacentes de la matière. Dans le cadre de l'approche phénoménologique développée dans ce chapitre, on ne fera appel à aucune connaissance liée à cette microstructure si ce n'est ses propriétés de symétrie. Toutefois les développements proposés ne seront valides que dans la mesure où un tel VER existe pour le matériau étudié. Les considérations de se chapitre sont donc attachées au point matériel. Munis des lois de comportement ainsi établies, ou du moins de leur forme générale, nous reviendrons aux équations de champs et au problème aux limites ainsi posé au chapitre 8.

Nous verrons que ces lois, caractérisant les propriétés mécaniques des matériaux considérés, devront nécessairement mettre en jeu la variable **température**. Il faut donc faire appel à une autre équation universelle, en l'occurrence la conservation de l'énergie, dont l'exploitation exige de fournir des précisions supplémentaires quant au comportement thermique et entropique de la matière. Cette discussion est repoussée au paragraphe 5.4.

En principe les lois de comportement peuvent se déduire de la connaissance de la distribution détaillée des particules et des interactions entre ces particules au sein d'un matériau donné, par une démarche de *mécanique statistique*. C'est ainsi que la loi des gaz parfaits et les lois d'élasticité de certains solides en petites déformations (au moins à 0 Kelvin...) se déduisent de la mécanique statistique ou des potentiels d'interaction entre molécules. Dans la majorité des cas toutefois, cette démarche déductive se révèle inextricable et ne donne pas lieu à des lois de comportement explicites. On pourra toutefois les approcher par une démarche **phénoménologique** assise à la fois sur des arguments raisonnables quant au choix des variables en jeu et au respect de quelques principes de physique générale, et l'exploitation d'une batterie d'essais expérimentaux. L'intelligence nécessaire à cette démarche phénoménologique ne doit pas être sous–estimée. Elle est remarquablement illustrée par exemple dans l'ouvrage (Ogden, 1997) lorsqu'il s'agit de choisir les mesures de déformation les mieux adaptées pour décrire le comportement des élastomères. C'est l'approche la plus efficace en sciences de l'ingénieur. On va la détailler dans la suite pour les comportements les plus simples. L'étude des lois de comportement constitue la théorie des matériaux[3] au cœur de la physique et de la mécanique de la matière. L'une de ces disciplines est la **rhéologie** ou science des écoulements qui a pour objet les relations entre contraintes et vitesses de déformations dans les polymères, métaux, fluides complexes...

La forme des lois de comportement n'est pas arbitraire. Toute loi n'est pas licite. Des restrictions universelles ou quasi–universelles peuvent y être apportées, qui constituent les principes fondamentaux de la formulation des lois de comportement. Elles font l'objet du paragraphe 5.2. Elles laissent toutefois un choix immense de lois possibles bien adapté à l'extrême variété des comportements observés dans la nature et dans l'industrie.

5.1.2 Variété des comportements

Du point de vue phénoménologique, c'est–à–dire en observant la réponse des matériaux à des sollicitations diverses telles que des essais uniaxiaux (traction, cisaillement...), on distingue trois classes de comportement mécanique principales :

- **Elasticité.** Le comportement élastique linéarisé uni-axial est symbolisé par un ressort dont l'allongement Δl est proportionnel à la charge appliquée F, au moins dans un certain domaine de charge dit domaine d'élasticité. Le facteur de proportionnalité est la **souplesse**

[3] *material theory* en anglais.

$1/k$, où k est la **raideur** du ressort (unité N.m^{-1} ou Pa.m) :

$$F = k\Delta l \tag{5.1}$$

En pratique, la raideur d'un ressort dépend de sa géométrie (paramètres de l'hélice, section du fil, frottement entre spires ou lamelles pour les ressorts jointifs ou à lamelles...) et de caractéristiques élastiques intrinsèques du matériau utilisé.

- **Viscosité.** Le comportement visqueux uni-axial est celui d'un amortisseur ou d'un piston dont la réponse dépend de la vitesse de sollicitation, ici de manière linéaire pour simplifier :

$$F = \eta\Delta\dot{l} \tag{5.2}$$

Le coefficient de viscosité de l'amortisseur η a pour unité N.m^{-1}.s ou Pa.s.m. L'unité Pa.s est appelée Poiseuille par exemple en mécanique des fluides et en rhéologie des polymères. Dans ce contexte, plus la vitesse de déformation est rapide, plus la force est grande. Une sensibilité inverse à la vitesse peut exister, par exemple pour certains aciers dans un certain domaine de température, mais elle requiert alors une description non linéaire.

- **Plasticité.** Le comportement rigide parfaitement plastique uni-axial se caractérise par l'existence d'un seuil de contrainte en–deçà duquel aucune déformation n'est observée et pour laquelle une déformation permanente quelconque est possible. Il est schématisé par un patin posé sur un substrat rugueux et qui est susceptible de se déplacer à volonté pour une charge appliquée suffisante. Il fait appel à une fonction critère

$$f(F) = |F| - F_0 \tag{5.3}$$

et le glissement ("écoulement") du patin s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta\dot{l} = 0 \quad &\text{si} \quad f < 0 \quad \text{ou} \quad \text{si} \quad (f = 0 \,\text{et}\, \dot{f} < 0) \\ \Delta\dot{l} \neq 0 \quad &\text{si} \quad (f = 0 \quad \text{et} \quad \dot{f} = 0) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Ces comportements schématiques élémentaires sont récapitulés dans l'encadré 5.1.

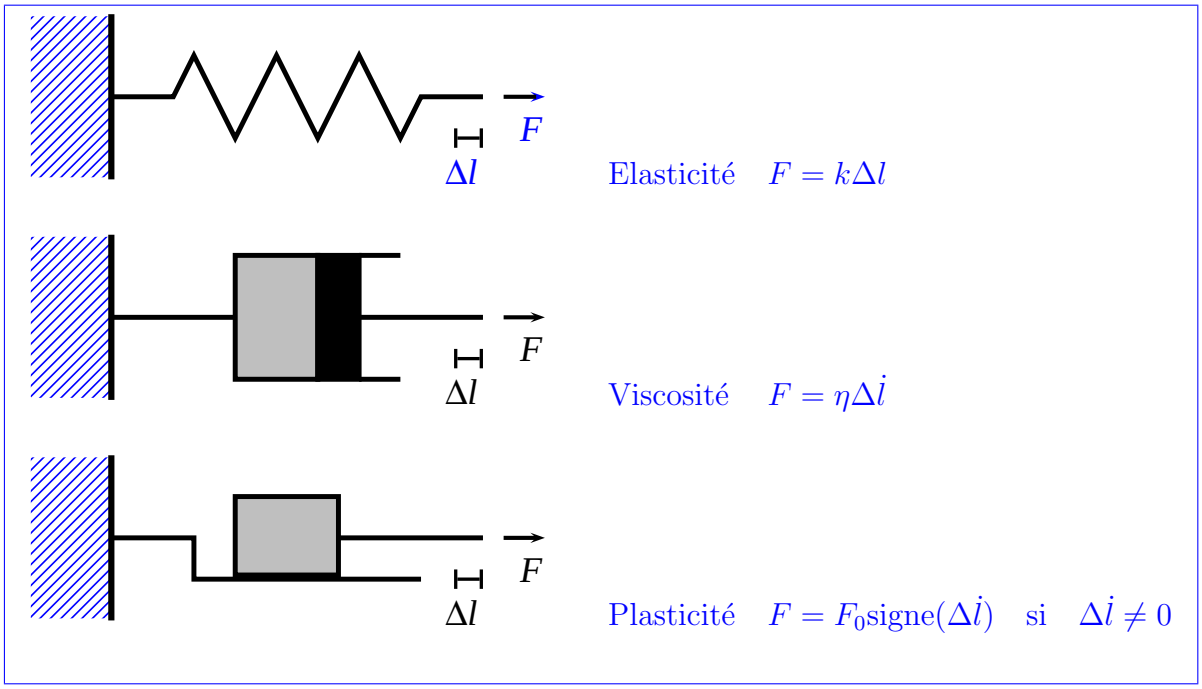
La combinaison des briques élémentaires précédentes conduit à des comportements plus complexes effectivement rencontrés dans la pratique : **viscoélasticité, élastoplasticité, viscoplasticité** et finalement **élastoviscoplasticité**. On se contente ici d'illustrer la viscoélasticité linéaire uni–axiale à l'aide du modèle de Maxwell représenté sur la figure 5.1. L'association étant en série, l'effort F se transmet d'un élément à l'autre du montage de sorte que le système est régi par l'équation différentielle

$$\Delta\dot{l}(t) = \Delta\dot{l}_{\text{piston}}(t) + \Delta\dot{l}_{\text{ressort}}(t) = \frac{F(t)}{\eta} + \frac{\dot{F}(t)}{k} \tag{5.5}$$

La réponse du modèle à une histoire de sollicitation $\Delta\dot{l}(s)$ "depuis la nuit des temps" $s = -\infty$ où le système était supposé au repos, jusqu'à l'instant actuel $s = t$ est donc

$$F(t) = k\int_{-\infty}^{t} \exp(-\frac{k}{\eta}(t-s))\,\Delta\dot{l}(s)\,ds \tag{5.6}$$

Cette expression montre que la réponse actuelle en force dépend en général de **l'histoire** complète de déformation du matériau, ce qui illustre bien la complexité du problème de l'identification des lois de comportement. La loi de comportement est donc ici une fonctionnelle de l'histoire du matériau. L'histoire est pondérée par un terme exponentiel qui privilégie



TAB. 5.1 – Récapitulatif : schématisation des trois comportements élémentaires dans le cas uni-axial.

l'influence des instants proches de l'instant actuel. Le matériau perd donc la **mémoire** des sollicitations trop anciennes. C'est une des caractéristiques de la viscoélasticité.

La complexité du comportement mécanique des matériaux est illustrée sur la figure 5.2 dans le cas d'un alliage métallique à base de nickel et d'aluminium utilisé dans les aubes de turbines des moteurs d'avion. La figure 5.2a montre en particulier que la réponse en traction à 950°C (courbe σ en fonction de ε selon l'axe de traction) dépend de la vitesse de sollicitation $\dot{\varepsilon}$. Ces essais mettent donc en évidence la viscosité du matériau à cette température. Les courbes ont toutefois une partie commune linéaire pour les très faibles déformations $0 \leq \varepsilon \leq 0.2\%$ qui correspond au domaine d'élasticité de ce matériau à cette température. Les points désignent les résultats expérimentaux tandis que les traits continus correspondent à des simulations numériques à l'aide d'une loi de comportement fortement non linéaire identifiée pour ce matériau dans (Fivel and Forest, 2004b). La description théorique des essais est correcte même s'il est difficile d'obtenir un accord parfait entre modélisation et expérience. La complexité du modèle retenu doit dépendre de la précision souhaitée dans le dimensionnement des pièces. La figure 5.2b montre la réponse du matériau à un chargement cyclique (fatigue oligocyclique, i.e. à faible nombre de cycles, par opposition à la fatigue à grand nombres de cycles qui explore l'endurance du matériau dans un domaine essentiellement élastique) où l'on fait varier ε entre -1% et 1% périodiquement. On décrit les trois étapes du premier cycle, à savoir la mise en charge à partir de $\varepsilon = 0, \sigma = 0$, et les parties linéaire puis non linéaire de la réponse du matériau. Lorsque 1% de déformation est atteinte, on fait diminuer la déformation. Lorsque la charge repasse par $\sigma = 0$, on voit qu'il y a une déformation permanente d'environ 0.5%, caractéristique d'un comportement plastique. Pour les cycles suivants, on voit que la réponse du matériau se stabilise sur une boucle d'hysteresis. Le comportement d'un tel matériau apparaît donc comme élastoviscoplastique.

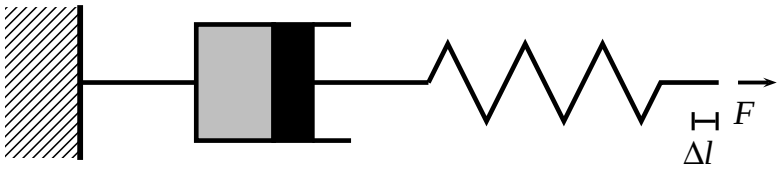


FIG. 5.1 – Viscoélasticité linéaire uni-axiale : le modèle de Maxwell.

5.2 Les principes de la théorie du comportement mécanique des matériaux

Il existe une multitude de lois de comportement permettant de décrire, forcément partiellement, la formidable variété des matériaux qu'ils soient issus de la nature ou de l'industrie. Mais il existe des principes universels ou quasi–universels qui président à l'écriture de ces lois. Ces points communs à (presque) toutes les lois de comportement sont énoncés dans ce paragraphe[4]. On verra que les restrictions imposées par ces principes fondamentaux peuvent dans certains cas limiter singulièrement le choix des lois possibles. Elles ne suffisent cependant pas à déterminer complètement la loi de comportement d'un matériau.

Les principes sont énoncés dans le cas des lois de comportement mécanique liant la contrainte locale à la transformation du milieu. La température intervient dans ces lois comme paramètre. Par concision, le paramètre température est omis dans les fonctions et fonctionnelles de ce paragraphe. Le cas des lois de comportement thermique sera brièvement étudié dans les mêmes termes au paragraphe 5.4. L'intérêt de cette démarche en deux temps est d'isoler ce qui peut être dit dans un cadre purement mécanique avant d'établir les restrictions qu'impose la thermodynamique dans un second temps.

5.2.1 Déterminisme et fonctionnelle mémoire

On cherche à déterminer le tenseur des contraintes de Cauchy $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ en un point matériel d'un corps Ω dans sa configuration courante à l'instant t, en fonction des variables masse volumique et vecteur vitesses. De manière équivalente, on peut chercher ces dépendances en fonction de la transformation Φ du corps matériel, supposée connue pour tous les instants depuis l'origine $s = 0$ jusqu'à l'instant $s = t$, et pour tous les points $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$. En effet, la transformation Φ permet de calculer le champ de vitesses eulérien en tout point d'après l'équation (2.174). La masse volumique en tout point et à tout instant antérieur à t se déduit alors de l'équation de conservation de la masse.

Le principe du déterminisme stipule que la contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$ est déterminée par l'histoire présente et passée (et non future) du corps matériel. Cette histoire est identifiée ici à la connaissance de $\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,, s)$ pour tout $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$ et à tous les instants $s \leq t$. On suppose donc l'existence d'une **fonctionnelle mémoire** écrite ci–dessous de manière symbolique

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t) = \underset{0\leq s\leq t, \underline{\boldsymbol{Y}} \in \Omega_0}{\mathcal{F}} (\Phi(\underline{\boldsymbol{Y}}\,, s)) \tag{5.7}$$

On se convaincra aisément du peu de restrictions qu'apportent ces relations somme toute

[4] Ce chapitre ne traite que de la thermomécanique et n'envisage pas les couplages possibles avec l'électromagnétisme. Dans le cas général de l'électromagnétothermomécanique, il est nécessaire de voir l'impact des principes énoncés ici et des éventuelles modifications à apporter. On trouvera ces informations dans les ouvrages (Maugin, 1980; Eringen and Maugin, 1990).

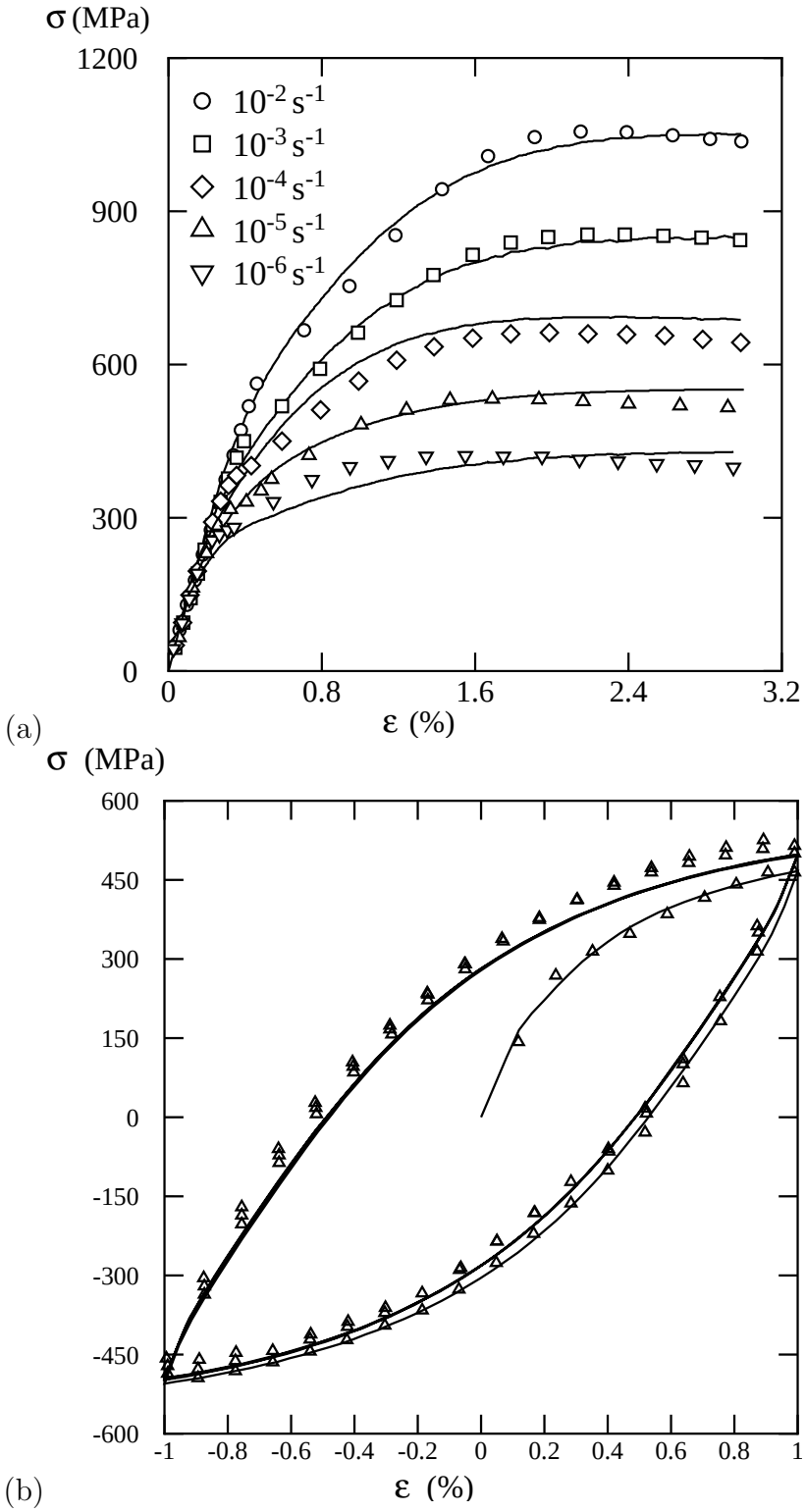


FIG. 5.2 – Comportement mécanique d'un superalliage à base de nickel pour aube de turbine : (a) comportement en traction à vitesse de déformation imposée, (b) comportement cyclique. Les résultats expérimentaux sont donnés par les symboles et les prévisions du modèle sont en trait continu.

formelles. L'étau va toutefois se resserrer au fur et à mesure de l'introduction des principes

suivants[5].

5.2.2 Principe de l'action locale

Le principe de l'action locale réduit la dépendance spatiale des fonctionnelles précédentes à un voisinage arbitrairement petit autour du point $\underline{\boldsymbol{X}}$ étudié. Un voisinage infinitésimal autour de $\underline{\boldsymbol{X}}$ est suffisant pour calculer les gradients de $\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ à tous les ordres n entiers positifs. La fonctionnelle mémoire devient donc

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{0\leq s\leq t, n>0}{\mathcal{F}} \left(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s), \frac{\partial^n \Phi}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}^n}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)\right) \tag{5.8}$$

Les milieux de degré n sont des milieux continus pour lesquels, on fait intervenir les gradients de la transformation jusqu'à l'ordre n. On a déjà mentionné la théorie du second gradient ($n=2$) au détour du paragraphe 2.2.4 pour dire que son usage reste très limité. C'est pourquoi il est pragmatique et *a posteriori* largement suffisant de se limiter au premier gradient de la transformation. On parle alors de théorie du premier gradient et le milieu continu ainsi modélisé est dit **matériellement simple**[6]. Le premier gradient de la transformation Φ est noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) := \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) \tag{5.9}$$

La fonctionnelle mémoire prend dès lors la forme suivante

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}} (\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s), \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)) \tag{5.10}$$

Il est difficile de justifier ces deux restrictions successives autrement qu'en disant qu'elles ont l'avantage de simplifier considérablement le problème de la formulation des lois de comportement. Il s'agit clairement là de deux principes non universels (les milieux non locaux, ça existe) mais qui embrassent une classe très large de comportements pertinents pour les problèmes de l'ingénieur. C'est donc un pari qui se révélera suffisamment fécond *a posteriori*.

5.2.3 Ecriture de la loi de comportement dans un autre référentiel

Lorsque la loi de comportement mécanique (5.10) est connue dans un référentiel $\mathcal{R}$, il est possible de l'énoncer pour n'importe quel autre observateur $\mathcal{R}'$ en appliquant la transformation euclidienne correspondante. La loi de comportement dans le référentiel $\mathcal{R}'$ s'écrit *a priori* :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}'(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}'} (\Phi'(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s), \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)) \tag{5.11}$$

[5] On pourrait se demander si la connaissance de la transformation et de la température à tout instant présent et passé et en tout point représente de manière exhaustive l'histoire du matériau et envisager l'existence de variables internes caractérisant par exemple des aspects de la microstructure des matériaux et dont pourraient dépendre les fonctionnelles introduites. Historiquement, la notion de variable interne a plutôt été développée dans les années 1970 pour concurrencer l'approche fonctionnelle dite aussi héréditaire, qui date des années 1960, souvent lourde à mettre en œuvre pour des comportements complexes. En toute logique, ne faudrait–il pas conjuguer les deux approches ? C'est un débat toujours ouvert qui fera sûrement l'objet de recherches futures en thermomécanique des matériaux.

[6] Une définition équivalente d'un milieu matériellement simple est la suivante (Truesdell and Noll, 1965) : un milieu est dit simple au point $\underline{\boldsymbol{X}}$ si sa réponse à des transformations homogènes dans un voisinage fini de $\underline{\boldsymbol{X}}$ suffit à déterminer sa réponse à une déformation quelconque en $\underline{\boldsymbol{X}}$.

Le changement de référentiel est caractérisé par la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ et la translation $\underline{\boldsymbol{c}}(t)$. Les grandeurs cinématiques sont alors reliées aux grandeurs correspondantes selon $\mathcal{R}$ par les relations

$$\Phi'(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\Phi(X, t) + \underline{\boldsymbol{c}}(t), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}'(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) \tag{5.12}$$

Le tenseur des contraintes est, par construction[7], une grandeur objective (cf. paragraphe 4.1.3). Les contraintes lues dans le référentiel $\mathcal{R}'$ se déduisent des précédentes par les relations :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{5.13}$$

En substituant la fonctionnelle dans les équations (5.13), on déduit l'expression de la fonctionnelle mémoire $\mathcal{F}'$ en fonction de la fonctionnelle mémoire initiale $\mathcal{F}$, $\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO^+(E)$:

$$\underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}'}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(s).\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, s) + \underline{\boldsymbol{c}}(s), \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(s).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, s)\right) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}}\left(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, s), \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, s)\right).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{5.14}$$

5.2.4 Le principe d'invariance de forme de la loi de comportement

Les relations de comportement écrites sous forme fonctionnelle ont été énoncées dans un référentiel initial et l'on devrait indexer les fonctionnelles introduites avec le nom du référentiel choisi. On a d'ailleurs établi les règles de transformation de la loi de comportement par changement de référentiel. Le principe d'invariance de forme va plus loin en affirmant que la loi de comportement revêt en fait la même forme après n'importe quelle transformation euclidienne. En d'autres termes :

$$\mathcal{F}'(\cdot) = \mathcal{F}(\cdot) \tag{5.15}$$

La forme de la fonctionnelle est donc supposée indépendante du référentiel d'observation. Il est important de se rappeler que l'on ne considère pas seulement les changements de référentiels galiléens mais bien les transformations euclidiennes caractérisées par les relations (2.3) et (2.28). De telles transformations donnent en général lieu à des forces d'inertie qui sont bien sûr prises en compte. Toutefois, celles–ci n'interviennent pas dans la puissance des efforts intérieurs mais seulement dans la puissance des efforts à distance (3.71). Le principe précédent ne dénie pas du tout le fait que des efforts centrifuges peuvent engendrer des contraintes (c'est le cas des disques de turbines de moteur d'avion par exemple étudié au chapitre 14), ces distributions de contraintes se calculant simplement à l'aide des équations de bilan de quantité de mouvement. Il porte bien plutôt sur la nature des propriétés du matériau. L'application du principe d'invariance de forme suppose donc que, dans la modélisation des efforts, on a su faire un partage clair entre efforts intérieurs et actions extérieures. Ce principe stipule en particulier que la raideur d'un corps élastique ne dépend pas du référentiel d'observation, ce qui semble bien intuitif[8].

[7] L'objectivité du tenseur des contraintes fait l'objet du *principe d'objectivité*, concomitant à l'énoncé des puissances virtuelles qui fonde la représentation des efforts en accord avec les lois de Newton (cf. théorème 11 et (Germain, 1986)).

[8] Ce principe est discutable et peut souffrir des exceptions dans certains domaines de la physique. Des contre-exemples ont été avancés dans le cas de la conduction thermique (Müller, 1985). Dans le cas mécanique, ne pourrait–pas imaginer des matériaux dont les propriétés mécaniques seraient affectées par des efforts d'inertie intenses (changement de phase par exemple ou existence d'une microstructure cachée sensible aux accélérations) ? Les contre-exemples, si vous en trouvez, méritent qu'on s'y attarde en vérifiant s'il n'est pas possible de trouver une nouvelle répartition des efforts permettant de réconcilier le modèle avec le principe d'invariance de forme de la loi de comportement. A nouveau, c'est l'efficacité et la pertinence de la majorité des résultats obtenus qui justifiera *a posteriori* du bien fondé de ce "principe" qu'on dira donc "quasi–universel".

Le principe d'invariance de forme interdit en fait une dépendance explicite de la fonctionnelle mémoire vis–à–vis de la position $\underline{\boldsymbol{x}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)$. En effet effectuons un changement de référentiel $\underline{\boldsymbol{x}}\,' = \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{c}}\,(t)$. On doit avoir

$$\forall \underline{\boldsymbol{c}}\,(t) \in E, \quad \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}}\,(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s) + \underline{\boldsymbol{c}}\,, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)) = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}}\,(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s), \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)) \tag{5.16}$$

En dérivant la fonctionnelle par rapport à $\underline{\boldsymbol{c}}\,$, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}} = 0$$

Il reste qu'il peut exister une dépendance directe de $\mathcal{F}$ vis–à–vis du point matériel $\underline{\boldsymbol{X}}\,$. On dira alors que le corps matériel est **hétérogène**. Les lois de comportement sont présentées ici en considérant le corps matériel comme **homogène**. C'est une restriction sans importance car dans de nombreux cas les corps matériels sont constitués de parties homogènes. Les conditions à respecter à l'interface entre deux matériaux sont les mêmes que les conditions de discontinuités développées au chapitre 3. Il n'y pas non plus de problème majeur à traiter le cas de matériaux à gradient de propriété où les propriétés dépendent continûment (presque partout) de la coordonnées $\underline{\boldsymbol{X}}\,$ (penser aux propriétés élastiques ou plastiques d'une soudure par exemple et de sa zone affectée thermiquement), mais pour simplifier les notations, on ne considère que la situation homogène par morceaux dans ce cours.

On n'a pas encore évoqué jusqu'ici la dépendance directe en temps de la fonctionnelle mémoire. Peut–on introduire une dépendance explicite de la forme

$$\underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s), t)\,?$$

Si l'on considère un changement de chronologie ($\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}, t' = t - t_0$), le principe d'invariance de forme implique alors que

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s), t - t_0) = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s), t) \tag{5.17}$$

En dérivant la fonctionnelle par rapport à t_0, on trouve[9]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0$$

de sorte qu'une dépendance explicite des lois de comportement en fonction du temps est illicite. Cela ne signifie nullement que des effets de vitesse de sollicitation, ou de vieillissement du matériau soient exclus. Dans le modèle de Maxwell par exemple, le comportement est régi par l'équation différentielle (5.5) qui ne fait pas intervenir explicitement la variable t. Quant aux phénomènes physiques dépendant du temps comme le fluage, la relaxation ou le vieillissement, ils seront modélisés à l'aide d'équations différentielles portant sur des variables bien choisies et incluant leurs dérivées temporelles. Les aspects temporels du comportement sont donc une conséquence indirecte de la forme de la fonctionnelle mémoire, ou plus généralement de l'introduction de variables internes.

Ce principe d'invariance de forme est aussi appelé *principe d'indifférence matérielle*. Une conséquence remarquable de l'objectivité des contraintes et du principe d'invariance de forme

[9] En effet, il n'y a pas de dépendance en t_0 dans les autres arguments (il en va de même du paramètre température non écrit explicitement dans les expressions : la température est un scalaire invariant par changement de chronologie). Enfin, t_0 n'intervient pas dans la formule (2.3) de changement de référentiel (temps et espace étant découplés dans les changements de référentiels euclidiens).

est que la loi de comportement n'est pas affectée par la superposition au mouvement étudié d'un mouvement de corps rigide (2.52)[10].

5.2.5 Respect des symétries matérielles

La loi de comportement (5.7) a en fait été écrite pour des mouvements par rapport à une configuration de référence Ω_0. Pour s'en souvenir, on réécrit la fonctionnelle réduite (5.14) avec un indice Ω_0 :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{0\le s\le t}{\mathcal{F}_{\Omega_0}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)\right) \tag{5.18}$$

Si $\hat{\Omega}_0$ est une autre configuration prise comme référence, le mouvement par rapport à cette nouvelle configuration de référence ainsi que son gradient s'écrivent (cf. page 29),

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \hat{\Phi}(\underline{\hat{\boldsymbol{X}}}\,,t), \quad \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{F}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1} \quad \text{où} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{P}} := \mathrm{Grad}\,(\hat{\Phi}^{-1}\circ\Phi) \tag{5.19}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ est indépendant du temps. L'état courant de contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ peut aussi être donné par la loi de comportement écrite par rapport à la configuration de référence $\hat{\Omega}_0$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{0\le s\le t}{\mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}}\left(\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{F}}}(\underline{\hat{\boldsymbol{X}}}\,,s)\right) \tag{5.20}$$

En rapprochant les équations (5.18) et (5.20), on trouve la relation liant $\mathcal{F}_{\Omega_0}$ et $\mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}$:

$$\mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{F}}}) = \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}) \tag{5.21}$$

En d'autres termes, la connaissance de la loi de comportement par rapport à une configuration de référence permet de construire la loi de comportement par rapport à toute autre configuration de référence.

En général, si la même transformation mécanique est appliquée à deux configurations initiales distinctes d'un corps matériel, le résultat sera différent en terme de contraintes[11]. Mais il

[10] La composition du mouvement Φ avec un mouvement de corps rigide (2.52) s'écrit

$$\underline{\boldsymbol{x}}\,(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) + \underline{\boldsymbol{c}}\,(t)$$

La contrainte correspondante se calcule grâce à la loi de comportement

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) &= \underset{0\le s\le t}{\mathcal{F}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)\right)\\ &= \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{0\le s\le t}{\mathcal{F}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)\right).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T\end{aligned}$$

d'après la relation (5.14). Le champ de contraintes obtenu après superposition du mouvement de corps rigide est donc égal à celui engendré par Φ tourné de $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$. L'inertie n'affecte donc pas la loi de comportement. Par contre le champ de contraintes sera bien évidemment affecté par le terme $\rho(\underline{\boldsymbol{f}} - \underline{\boldsymbol{a}}\,)$ dans l'équation de Cauchy (3.51).

[11] Imaginons par exemple un composite à fibres longues de carbure de silicium parallèles entre elles et noyées dans une matrice de résine solide. Considérons la configuration initiale telle que le matériau est vierge de toute contrainte avec les fibres orientées dans la direction 3 d'un repère indépendant du matériau et imposons un déplacement affine $u_3 = AX_3$ avec A constant donné. Les contraintes σ_{33} obtenues seront plus importantes que si ce même déplacement $u_3 = AX_3$ avait été imposé à une configuration du composite où les fibres sont orientées selon la direction 1. Un autre exemple trivial : si l'on applique 1% de déformation à une éprouvette de traction en métal pré–déformée de 0.5% prise comme configuration de référence, on obtiendra en général des contraintes plus élevées que si cette déformation 1% avaient été appliquée à cette même éprouvette dans son état non pré–déformé !

peut arriver que l'état final soit le même si la matière possède des symétries qui rendent les configurations Ω_0 et $\hat{\Omega}_0$ indiscernables. Si l'on considère un monocristal de structure cubique et que l'on effectue sur l'échantillon (à l'insu de l'expérimentateur !) une symétrie de 90° par rapport à l'un des axes de symétrie du cristal, le résultat de l'essai mécanique sera identique. Deux configurations Ω_0 et $\hat{\Omega}_0$ sont **matériellement indiscernables** si

$$\mathcal{F}_{\Omega_0}(\cdot) = \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\cdot) \tag{5.22}$$

De manière équivalente, on peut réécrire l'équation précédente :

$$\mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}) = \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}) \tag{5.23}$$

Noter que deux configurations pourront être indiscernables pour une propriété physique (thermique par exemple) et non pour une autre (mécanique par exemple), mais par simplicité on ne fera pas cette distinction dans la suite. Une transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \in GL(E)$ est appelée **symétrie matérielle**[12] si elle vérifie (5.22). On peut se restreindre à des éléments du groupe unimodulaire $\mathcal{U}(E)$ (i.e. $|\det \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}| = 1$) car il serait bien étonnant que l'on puisse impunément changer le volume d'un matériau sans modifier sa réponse. On a alors le

Théorème 13 (Groupe des symétries matérielles) *L'ensemble des symétries matérielles d'un corps matériel par rapport à une configuration de référence Ω_0, noté $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ est un sous–groupe du groupe unimodulaire :*

$$\mathfrak{G}_{\Omega_0} \subset \mathcal{U}(E) \tag{5.24}$$

Preuve. Il suffit de montrer que l'ensemble des symétries matérielles $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ est un groupe. Il contient bien sûr l'identité $\underset{\sim}{\mathbf{1}}$. Soient $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_2 \in \mathfrak{G}_{\Omega_0}$, en utilisant (5.23), $\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}) &= \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_1) \\ &= \mathcal{F}_{\Omega_0}((\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_1).\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_2) \\ &= \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.(\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_2)) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}_2 \in \mathfrak{G}_{\Omega_0}$.

Enfin, soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \in \mathfrak{G}_{\Omega_0}$, comme son déterminant est par définition non nul, son inverse $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}$ existe et en utilisant à nouveau (5.23)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}) &= \mathcal{F}_{\Omega_0}((\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}).\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}) \\ &= \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1} \in \mathfrak{G}$. L'ensemble $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ a bien une structure de groupe. □

Le nombre d'éléments du groupe des symétries matérielles dépend de la classe cristallographique particulière concernée. Pour les corps isotropes, $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ coïncide avec le groupe orthogonal tout entier. Les matériaux dits isotropes transverses présentent un axe de symétrie privilégié. Les autres groupes (cubique, orthotrope...) sont des groupes finis ou discrets (nombre fini de symétries).

Le lien qui existe entre les groupes des symétries matérielles d'un même corps matériel par rapport à deux configurations de références distinctes est donné par le

Théorème 14 (Règle de Noll) *Si Ω_0 et $\hat{\Omega}_0$ sont deux configurations d'un corps matériel et si $\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{P}}}$ est le gradient de la transformation de Ω_0 vers $\hat{\Omega}_0$, alors*

$$\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}_0} = \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{P}}}.\mathfrak{G}_{\Omega_0}.\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{P}}}^{-1} \tag{5.25}$$

[12] Noter qu'on autorise ici $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ négatif (mais non nul) car on s'intéresse par exemple à des symétries miroirs qui ne peuvent être obtenues par déformation réelle du corps matériel.

Preuve. On insiste sur le fait que $\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}$ n'est pas nécessairement une symétrie matérielle. Pour tout élément $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \in \mathfrak{G}_{\Omega_0}$, on va montrer que $\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}^{-1}$ est dans $\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}_0}$. En effet, d'après (5.21) et (5.23), $\forall \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}) &= \mathcal{F}_{\Omega_0}(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}) \\ &= \mathcal{F}_{\Omega_0}(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}) \\ &= \mathcal{F}_{\Omega_0}(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}^{-1}).\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}) \\ &= \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}^{-1}) \end{aligned} \tag{5.26}$$

ce qui montre que $\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}^{-1} \in \mathfrak{G}_{\hat{\Omega}_0}$. Ce résultat a été établi par Walter Noll en 1958. □

Le groupe des symétries matérielles dépend bel et bien de la configuration par rapport à laquelle on étudie les propriétés de symétrie. Pour s'en convaincre, on peut penser à nouveau à un cristal où les atomes sont rangés sur un réseau cubique, et qui présente donc les symétries associées à ce système. En déformant élastiquement le matériau selon un axe de symétrie on change la distance inter-atomique selon cette direction et on brise donc quelques symétries au passage.

On peut vérifier que le groupe des symétries matérielles est inchangé lorsque le changement de configuration est une homothétie $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} = \alpha\underset{\sim}{\mathbf{1}}, \alpha \neq 0$ ou si $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \in \mathfrak{G}_{\Omega_0}$.

Le groupe des symétries matérielles est un outil pour classer les types de comportement, comme on le verra au paragraphe 5.3.2.

5.3 Premières applications des principes fondamentaux

Dans cette partie, on exploite d'abord plus à fond les principes précédents pour extraire des formes dite réduites de lois de comportement, c'est–à-dire comportant un nombre aussi réduit que possible de variables. Dans un second temps, on exprime la notion de solide et de fluide. La dernière partie concerne quelques premières lois de comportement simples.

5.3.1 Formes réduites des lois de comportement

On repart de la forme la plus concise des équations de comportement établies jusqu'ici à l'aide des différentes principes :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}_{\Omega_0}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s))$$

Il est en fait possible, en exploitant encore le principe d'invariance de forme, de réduire la dépendance en $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ de cette fonctionnelle.

D'après le principe d'invariance de forme (5.15) appliqué à (5.14), la relation précédente doit vérifier

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\ \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}_{\Omega_0}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)^T = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}_{\Omega_0}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(s).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)),\quad \forall \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}\in GO^+(E) \tag{5.27}$$

On en déduit le

Théorème 15 (Forme réduite) *Pour un corps matériellement simple, la loi de comportement prend la forme suivante*

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t).\ \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{FR}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)).\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) \tag{5.28}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est la rotation propre et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ le tenseur droit de déformation pure qui interviennent dans la décomposition polaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. La dépendance en $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ de la forme réduite $\mathcal{FR}$ peut être quelconque.

Preuve. En substituant la décomposition polaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(s) = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(s).\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(s)$ dans la condition (5.27) et en choisissant $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(s) = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T(s)$, on obtient directement (5.28). Réciproquement, si la loi de comportement a la forme (5.28), alors pour toute rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est la rotation propre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}_{\Omega_0}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(s).\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(s)) &= (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}).\ \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{FR}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(s)).(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}})^T \\
&= \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.(\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\ \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{FR}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(s)).\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \\
&= \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\ \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{F}_{\Omega_0}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(s)).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T
\end{aligned}$$

de sorte que (5.28) est suffisante pour assurer (5.27). □

Il est remarquable que seule la rotation propre à l'instant actuel t intervienne dans la forme réduite (5.28), ce qui signifie que l'histoire passée de la rotation du corps matériel n'influence pas du tout l'état de contrainte actuel. Par contre toute l'histoire de déformation pure $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(s)$ intervient en général. On peut aussi réécrire (5.28) sous la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^R(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{FR}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)),\quad \text{avec}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^R = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \tag{5.29}$$

en introduisant le **tenseur des contraintes relatives** $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^R$ tourné de $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ par rapport au tenseur de Cauchy. Ce nouveau tenseur des contraintes a la propriété remarquable suivante : il est

invariant par changement de référentiel et on peut donc le voir comme un tenseur de contraintes lagrangien. La déformation pure elle–même est invariante par changement de référentiel. La loi de comportement (5.29) relie donc uniquement des grandeurs invariantes. C'est pourquoi la forme précise de la fonctionnelle peut être quelconque (sous réserve quand même des restrictions liées à la thermodynamique qui viendront plus loin).

En multipliant (5.29) de part et d'autre par $J\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}$, on obtient une relation de comportement entre le tenseur de Piola–Kirchhoff II (purement lagrangien) et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ ou, de manière équivalente, le tenseur de Cauchy–Green droit $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ (puisque $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ sont reliés de manière univoque) :

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}(\underline{\boldsymbol{X}},t) &:= J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}},t).\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1} \\ &= J\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{R}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}.\underset{0\le s\le t}{\mathcal{FR}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}},s)).\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1} \\ &= \underset{0\le s\le t}{\mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}},s)) \end{aligned} \tag{5.30}$$

La loi de comportement peut donc être écrite de manière purement lagrangienne. Cette formulation a l'intérêt de ne faire intervenir que des grandeurs invariantes par changement de référentiel et laisse donc une grande liberté sur le choix de la fonctionnelle $\mathcal{F}^{\Pi}$. On peut bien sûr former d'autres couples de variables (contrainte$\longleftrightarrow$déformation) qui soient reliées par la loi de comportement.

5.3.2 Une définition des fluides et des solides

Les mots solide et fluide ont d'abord un sens physique lié à la nature physique des forces cohésives entre atomes ou molécules qui constituent la phase en présence ou à l'arrangement local de ces particules. En thermomécanique, on n'a pas forcément accès à la structure physique intime de la matière étudiée et on peut essayer plutôt de détecter le caractère fluide ou solide par les manifestations phénoménologiques que sont les comportements mécanique et thermique. La définition que l'on va proposer ici, si elle n'est pas en contradiction avec la notion physique, s'en distingue puisqu'elle ne fait référence qu'à la réponse macroscopique du corps étudié et non à la microstructure du matériau.

On propose de classer les corps matériels selon la nature de leur groupe des symétries matérielles $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$. Lorsqu'on évoque la notion de symétrie, on pense immédiatement aux solides cristallins pour lesquels les atomes ou molécules sont rangés selon un ordre quasiment parfait présentant des symétries spécifiques. La cristallographie nous enseigne qu'il existe 32 groupes de symétrie (ponctuelle[13]) que l'on peut regrouper en 6 systèmes rassemblés dans le tableau 5.2[14]. Dans ce cadre, les solides présentant le moins de symétries sont dits **tricliniques** et leur groupe des symétries matérielles **minimal** est

$$\mathfrak{G}_{\Omega_0} = \{\underset{\sim}{\mathbf{1}}, -\underset{\sim}{\mathbf{1}}\} \tag{5.31}$$

Dans le cas d'un matériau à structure cristallographique **cubique**, le groupe des symétries est engendré par 3 rotations d'angle $\pi/2$ autour de 3 axes deux à deux orthogonaux, ou par 4 rotations d'angle $2\pi/3$ et 3 miroirs (Phan and Podvin, 2003).

Le groupe de symétrie peut coïncider avec le groupe orthogonal tout entier

$$\mathfrak{G}_{\Omega_0} = GO(E) \tag{5.32}$$

[13] On renvoie au cours de l'Ecole (Phan and Podvin, 2003).

[14] Les classes de symétries données dans le tableau 5.2 portent les mêmes noms que les systèmes de réseaux cristallographiques que l'on a appelés dans ce cours groupes cristallographiques.

auquel cas le matériau est dit **isotrope**. On parle de solide **anisotrope** lorsque le groupe des symétries matérielles est un sous–groupe strict du groupe orthogonal. Pour faire les constats précédents, il fallait encore trouver une configuration particulière Ω_0 du corps matériel pour laquelle le groupe des symétries matérielles ait la forme simple proposée. En particulier, si l'on déforme un solide cubique, certaines symétries seront perdues mais on sait qu'alors le groupe des symétries par rapport à cette configuration déformée est donné par la règle de Noll (5.25). Ces réflexions nous incitent à proposer la

Définition. *Un corps matériel est un* **solide** *s'il existe une configuration Ω_0 par rapport à laquelle le groupe des symétries matérielles est un sous–groupe du groupe orthogonal :*

$$\mathfrak{G}_{\Omega_0} \subset GO(E) \tag{5.33}$$

Noter que pour une configuration déformée Ω_1 par rapport à Ω_0 le groupe des symétries matérielles $\mathfrak{G}_{\Omega_1}$ sera donné par la règle de Noll (5.25) et ne sera en général pas inclus dans le groupe orthogonal. Il s'agit néanmoins toujours du même solide. Exception : le groupe des symétries matérielles d'un solide triclinique ne dépend pas de la configuration de référence puisque le groupe (5.31) est invariant par la règle de Noll. La configuration privilégiée Ω_0 est souvent appelée **configuration sans distorsion** du solide. Cela ne signifie pas configuration sans déformation ou sans contrainte. En effet, l'application d'une homothétie (appelée aussi dilatation) $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} = \alpha\underset{\sim}{\mathbf{1}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ laisse le groupe des symétries d'un solide inchangé (on le vérifie aisément grâce à la règle de Noll (5.25)) mais déforme bel et bien le solide.

Le groupe des symétries matérielles d'un corps peut contenir et être plus grand encore que le groupe orthogonal. Toutefois, le théorème 27 de maximalité de Noll (page 439) indique qu'alors ce ne peut être que le groupe unimodulaire tout entier. Cela signifie que le corps est insensible à toutes les symétries et à tous les changements de forme conservant le volume. C'est l'idée que l'on peut se faire d'un fluide dont le comportement est inchangé quand on le change de récipient, par opposition aux solides précédents dont les propriétés de symétrie changent lorsque le solide change de forme. C'est pourquoi on propose la

Définition. *Un corps matériel est un* **fluide** *si, pour une configuration Ω_0, le groupe des symétries matérielles coïncide avec le groupe unimodulaire :*

$$\mathfrak{G}_{\Omega_0} = \mathcal{U}(E) \tag{5.34}$$

Remarquer que si une telle configuration existe alors pour toutes les autres configurations Ω on aura $\mathfrak{G}_\Omega = \mathcal{U}(E)$. En effet le groupe unimodulaire est stable par application de la règle de Noll, puisque tout élément $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$ de $\mathfrak{G}_\Omega$ s'écrit sous la forme $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}_0.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}$ où $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}_0 \in \mathcal{U}(E)$ et que

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{G}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{P}})(\det \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}_0)(\det \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}) = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}_0 = \pm 1$$

Un fluide a donc la propriété remarquable suivante. Son groupe des symétries matérielles est le même quelle que soit la configuration de référence. En d'autres termes, un fluide ne possède pas de configuration de référence privilégiée. C'est pourquoi l'approche eulérienne est préférée pour l'étude des écoulements de fluides.

Ces définitions conduisent à la réflexion suivante qui peut sembler curieuse au premier abord : *il existe a priori des corps matériels qui ne sont ni fluides ni solides* ! En effet rien n'oblige le groupe des symétries matérielles à être le transmué d'un sous–groupe du groupe orthogonal ni à coïncider avec le groupe unimodulaire. De tels corps sont appelés de manière imagée **cristaux liquides, semi–fluides** ou, de manière abusive, **fluides anisotropes**. La dernière dénomination s'explique par le fait suivant. Le groupe des symétries matérielles de tels corps

est contenu dans $\mathcal{U}(E)$ et a une intersection non nulle avec le groupe orthogonal. Il ne peut toutefois contenir le groupe orthogonal tout entier, sinon il devrait nécessairement être un fluide d'après le théorème 27 (page 439). Les semi–fluides sont donc nécessairement anisotropes. Les fluides anisotropes sont en fait omniprésents. Il suffit d'imaginer par exemple une résine fluide contenant des fibres solides. L'écoulement de tels fluides chargés est important en mise en forme des composites[15].

Les différents groupes de symétrie et les différentes classes de corps matériels envisagés sont représentés sur la figure 5.3.

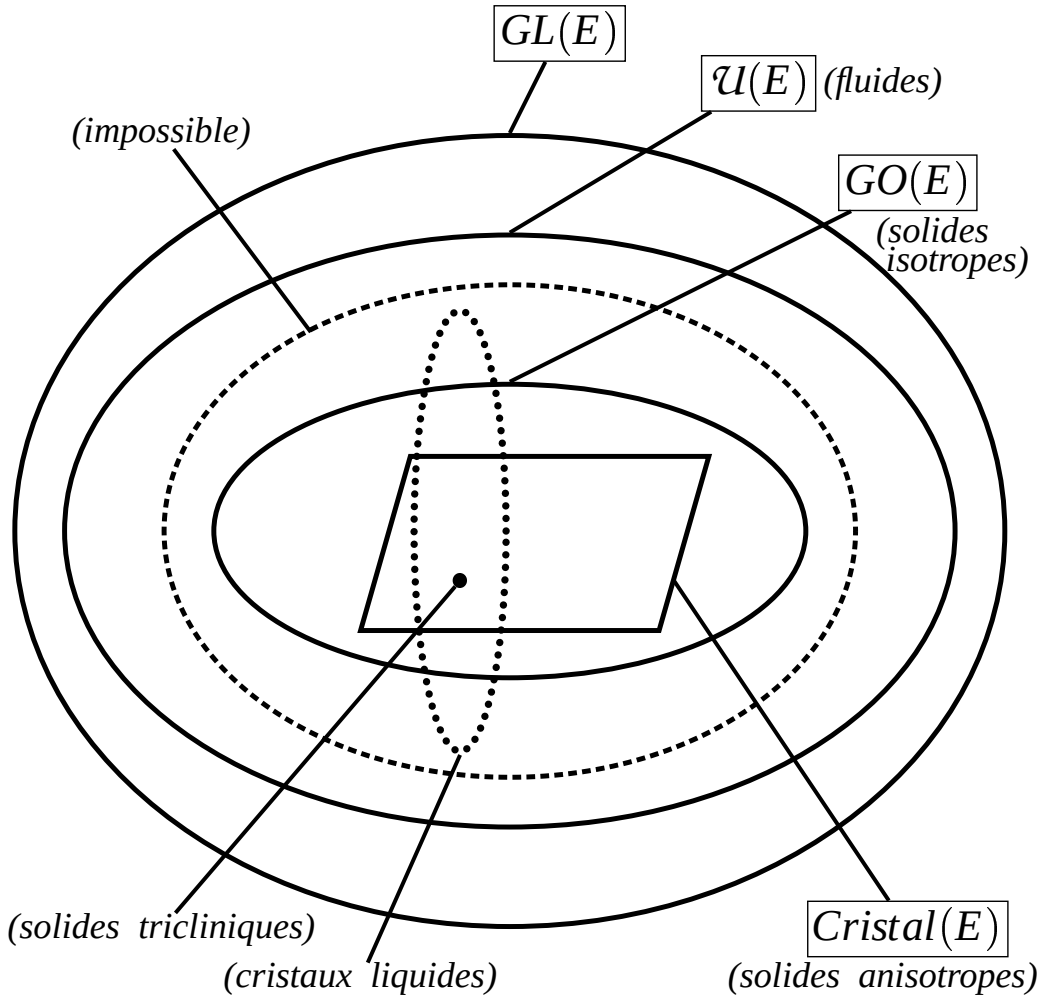


FIG. 5.3 – Les sous–groupes du groupe linéaire et les groupes de symétries matérielles.

5.3.3 Fluides visqueux

On essaie d'étendre la loi de comportement de viscosité élémentaire (5.2) introduite dans le cas uni-axial au paragraphe 5.1.2 au cas général d'un corps tridimensionnel. On propose une

[15] Les *Sheet Molding Compounds (SMC)* sont des composites à fibres de verre et à matrice polymères. Ils sont aujourd'hui très utilisés dans l'automobile pour leur légèreté et la possibilité de réaliser des pièces aux formes complexes. En service, ces matériaux sont des solides (anisotropes) mais lors de leur élaboration dans des moules spéciaux à hautes températures, il s'agit de fluides anisotropes. L'écriture de lois de comportement pour de tels milieux est un enjeu essentiel pour établir la faisabilité des pièces.

système	forme de la cellule représentative	groupe ponctuel (notation cristallographique)	nombre de constantes indépendantes d'un tenseur d'ordre 2	nombre de constantes indépendantes d'un tenseur d'ordre 4
triclinique	parallélépipède quelconque	$\bar{1}$	6	21
monoclinique	prisme doit à base quelconque	$\frac{2}{m}$		13
orthorhombique (orthotrope)	prisme droit à base rectangle	mmm	9	
quadratique	prisme droit à base carrée	$\frac{4}{m}mm$	3	6
hexagonal	prisme droit à base losange	$\frac{6}{m}mm$ (mode P) $\bar{3}m$ (mode R)	2	5
cubique	cube	$m\bar{3}m$	1	3
isotrope	-	$GO(E)$ $(\infty/\infty mm)$	1	2

TAB. 5.2 – Systèmes cristallographiques. En cristallographie ces classes sont appelées groupes de symétrie ponctuelle des réseaux (cf. (Phan and Podvin, 2003)). La classe d'isotropie est ajoutée ici de manière abusive. On donne aussi le nombre de composantes indépendantes de propriétés physiques tensorielles d'ordre 2 et 4 selon les classes de symétrie. Ce dernier point sera discuté en détail au chapitre 7.

loi de viscosité de la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)) \tag{5.35}$$

pour une configuration de référence donnée (nécessaire pour fixer la densité massique de référence du fluide). On a simplifié la dépendance de la fonctionnelle vis–à–vis de l'histoire du matériau en la remplaçant par une simple fonction du gradient des vitesses $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$. En particulier le gradient de la transformation actuel n'influence pas la contrainte, c'est une caractéristique fondamentale de la viscosité pure. Le choix de la dépendance (5.35) n'est pas anodin. Il semble très général, il est en fait très restrictif. En effet, la loi est invariante par changement de configuration de référence $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ puisque

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} = \overbrace{\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}^{\bullet}.(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}})^{-1} = \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}} \tag{5.36}$$

Le groupe des symétries matérielles contient donc $\mathcal{U}(E)$. Les milieux concernés par une loi de comportement de la forme (5.35) sont donc des fluides. Dans la suite, l'indice Ω_0 pourra donc être omis.

On passe maintenant cette forme de loi de fluide au crible du principe d'invariance de forme pour voir si elle ne peut pas être précisée davantage. Considérons deux référentiels distincts et écrivons dans chacun la loi de comportement :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}})$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathcal{F}'(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}') = \mathcal{F}'(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T)$$

où l'on a utilisé la formule de changement de référentiel (2.235) pour le gradient des vitesses. Le principe d'invariance de forme stipule que $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, lorsque l'on change de référentiel par une transformation euclidienne, d'où

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T + \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) \tag{5.37}$$

Pour tout tenseur antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$, on peut choisir $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ tel que pour un instant t_1 donné,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t_1) = \underset{\sim}{\mathbf{1}} \quad \text{et} \quad \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}(t_1) = -\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$$

Prenons pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ le taux de rotation associé à $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}(t_1) = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}(t_1) + \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}(t_1)$ et évaluons la condition (5.37) au temps $t = t_1$:

$$\mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}) = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}})$$

Cette condition exclut toute dépendance de $\mathcal{F}$ vis–à–vis du taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$. Une première conséquence de l'application des principes est donc que la loi de comportement du fluide visqueux se met sous la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)) \tag{5.38}$$

La condition d'invariance de forme (5.37) implique pour la dépendance (5.38) que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) \tag{5.39}$$

Cette condition exprime que $\mathcal{F}$ est une fonction tensorielle isotrope de son argument $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Au sujet des fonctions isotropes, on a exploré le cas des fonctions scalaires d'argument tensoriel d'ordre 2 lorsque l'on a introduit la notion de critère (cf. paragraphe 4.4). Concernant les fonctions à valeurs tensorielles d'ordre 2 (symétriques) et d'argument tensoriel d'ordre 2 (symétrique), on renvoie au paragraphe A.4.2. On y trouvera en particulier quelques **théorèmes**

de représentation qui donnent les formes possibles que prennent les fonctions isotropes. Le théorème 29 de Rivlin–Ericksen donne la seule forme possible de $\mathcal{F}$ compatible avec la condition d'isotropie (5.39)

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \alpha_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2 \tag{5.40}$$

où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Il est remarquable que l'application des principes fondamentaux conduise ici à une forme quasi–explicite de la loi de viscosité. C'est l'intérêt majeur de ce chapitre. On peut remarquer aussi que $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est invariant par changement de configuration de référence

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} = \overset{\bullet}{\overbrace{\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}}}.(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}})^{-1} = \dot{\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^{-1} = \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}}$$

de sorte que le groupe des symétries matérielles de ces matériaux visqueux contient au moins le groupe unimodulaire. Ces milieux sont donc des fluides. DEJA DIT ? ? ? ? ? ? ? En rajoutant une dépendance en ρ aux fonctions α_i dans la loi de comportement (5.40), ce qui est licite et n'entraîne aucune restriction supplémentaire même en reconsidérant les conséquences des principes fondamentaux, on obtient la loi des **fluides visqueux de Reiner–Rivlin**, établie en 1945.

Un cas particulier de fluide visqueux de Reiner–Rivlin (5.40) est obtenu en linéarisant la loi précédente par rapport à $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p(\rho)\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \eta_1(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\eta_2\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \tag{5.41}$$

C'est la loi des **fluides de Navier–Stokes**, dits aussi **fluides newtoniens** compressibles. Les paramètres η_1 et η_2 caractérisent la viscosité du fluide et la fonction $p(\rho)$ son élasticité. Dans le cas incompressible, la pression p est une réaction. Lorsque la compressibilité de viscosité $\eta_1 + 2\eta_2/3 = 0$, on parle d'un **fluide de Stokes**.

5.4 Le crible de la thermodynamique des milieux continus

Le dernier crible au travers duquel devra passer la loi de comportement est celui de la thermodynamique (Fer, 1970; Müller, 1985; Fargue, 2004a).

La température intervient à divers titres dans le **comportement thermomécanique des matériaux** :

- Elle induit des déformations et/ou des contraintes au sein de l'élément de matière. Les variations de température entraînent une dilatation ou une contraction de l'élément de matière. Si l'on empêche le corps matériel de se dilater librement, des contraintes considérables se développent en son sein. Il s'agit des **contraintes d'origine thermique** qui jouent un rôle essentiel dans la plupart des structures et des composants industriels.
- C'est un paramètre dont dépendent les propriétés élastiques, visqueuses et plastiques des matériaux. En général, la raideur, le coefficient de viscosité et la limite d'élasticité diminuent avec la température.
- D'autre part la température est intervient dans le problème dit de thermique posé par l'équation de conservation de l'énergie (cf. table 3.2). La question du décompte des inconnues et des équations se pose aussi pour le problème thermique. Les inconnues sont au nombre de 5 en chaque point matériel. Il s'agit de la température T, du flux de chaleur $\underline{\boldsymbol{q}}$ et de l'énergie interne massique e. Les sources extérieures de chaleur r sont supposées connues,

en tant que données du problème thermique. Une seule équation de champ est disponible, la conservation l'énergie. Le problème de fermeture se pose donc de la même façon dans le cas thermique que dans le cas mécanique. Une **loi de comportement thermique** liant le flux de chaleur au champ de température caractérisant les échanges de chaleur au sein du milieu continu, est nécessaire, ainsi qu'une autre liant énergie interne et température. Ces lois ne sont pas universelles et dépendent du matériau étudié. Un gradient de température imposé ne conduit pas au même flux de chaleur dans un fil de cuivre que dans un fil d'alumine. De telles lois doivent respecter les mêmes principes fondamentaux que les lois de comportement mécanique.

- On notera le **couplage thermomécanique** entre les problèmes mécanique et thermique. Dans de nombreux cas, le problème mécanique est résolu en supposant le champ de température connu par ailleurs. Inversement, on résout souvent le problème thermique en négligeant le couplage avec la mécanique ou bien en supposant les champs de contraintes et de vitesses connus.

L'ensemble des 5 équations de conservation et des 10 équations de comportement constituent le **problème thermomécanique** qui consiste à déterminer les 15 inconnues que sont la densité, la vitesse, les contraintes, la température, le flux de chaleur et l'énergie interne en chaque point matériel du corps étudié. Dans cette section comme dans les précédentes, on s'en tient toutefois à des considérations attachées à l'élément de volume de matière.

5.4.1 Lois de comportement thermomécanique

Le premier principe de la thermodynamique des milieux continus met en avant l'équation de conservation de l'énergie qui, dans sa forme locale, s'écrit :

$$\rho \dot{e} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} + \rho r$$

d'après (3.89). En plus du coupage avec la mécanique via la puissance des efforts intérieurs, elle fait intervenir la densité d'énergie interne e et le flux de chaleur $\underline{\boldsymbol{q}}$. L'inconnue principale de cette équation est alors la température $\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}, s)$[16] au point matériel $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$ à l'instant t. On ne peut espérer résoudre le problème thermomécanique qu'à condition de disposer, en plus de la loi de comportement mécanique,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \underset{0 \leq s \leq t, \underline{\boldsymbol{Y}} \in \Omega_0}{\mathcal{F}} \Big(\Phi(\underline{\boldsymbol{Y}}, s), \breve{T}(\underline{\boldsymbol{Y}}, s) \Big) \tag{5.42}$$

de deux autres relations thermodynamiques liant l'énergie libre et le flux de chaleur à l'histoire du matériau représentée par la transformation Φ et la température en chaque point matériel à tout instant passé et présent :

$$\underline{\boldsymbol{q}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \underset{0 \leq s \leq t, \underline{\boldsymbol{Y}} \in \Omega_0}{\mathcal{G}} \Big(\Phi(\underline{\boldsymbol{Y}}, s), \breve{T}(\underline{\boldsymbol{Y}}, s) \Big) \tag{5.43}$$

$$e(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \underset{0 \leq s \leq t, \underline{\boldsymbol{Y}} \in \Omega_0}{\mathcal{H}} \Big(\Phi(\underline{\boldsymbol{Y}}, s), \breve{T}(\underline{\boldsymbol{Y}}, s) \Big) \tag{5.44}$$

[16] On définit un champ de température en description lagrangienne

$$\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = T(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t), t) = T(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$$

où $T(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ est le champ de température eulérien défini sur la configuration actuelle Ω_t, tout comme on l'a fait pour les champs de vitesses lagrangien et eulérien $\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$ et $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$.

Ces relations font intervenir des fonctionnelles mémoire pour le comportement thermodynamique du matériau.

Comme dans le cas mécanique, on s'intéresse essentiellement aux milieux dits matériellement simples pour lesquels, l'énergie interne et le flux de chaleur en un point matériel ne dépendent *a priori* que de la transformation et de la température, et de leur premier gradient[17], en ce point :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}},t) &= \underset{0\le s\le t}{\mathcal{F}}\Big(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}},s),\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}},s),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}},s),\underline{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{X}},s)\Big)\\
\underline{\boldsymbol{q}}(\underline{\boldsymbol{x}},t) &= \underset{0\le s\le t}{\mathcal{G}}\Big(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}},s),\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}},t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}},s),\underline{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{X}},s)\Big) \qquad (5.45)\\
e(\underline{\boldsymbol{x}},t) &= \underset{0\le s\le t}{\mathcal{H}}\Big(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}},s),\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}},t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}},s),\underline{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{X}},s)\Big) \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

Le premier gradient de la température est noté $\underline{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{X}},t)$:

$$\underline{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{X}},t) := \frac{\partial\breve{T}}{\partial\underline{\boldsymbol{X}}}(\underline{\boldsymbol{X}},t) \qquad (5.47)$$

On définit aussi le gradient eulérien de la température :

$$\underline{\boldsymbol{g}}(\underline{\boldsymbol{x}},t) := \frac{\partial T}{\partial\underline{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{x}},t) = \frac{\partial\breve{T}}{\partial\underline{\boldsymbol{X}}}.\frac{\partial\underline{\boldsymbol{X}}}{\partial\underline{\boldsymbol{x}}} = \underline{\boldsymbol{G}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}} \qquad (5.48)$$

Comme dans le cas purement mécanique, on étudie la transformation des lois de comportement thermodynamique par changement de référentiel euclidien. Le changement de référentiel est caractérisé par la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t)$ et la translation $\underline{\boldsymbol{c}}(t)$. La température $\breve{T}'(\underline{\boldsymbol{X}},t) = \breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}},t)$ est une grandeur scalaire invariante par changement de référentiel. Le gradient de température lagrangien $\underline{\boldsymbol{G}}$ est donc invariant par changement de référentiel.

Le flux de chaleur $\underline{\boldsymbol{q}}$ et la densité d'énergie interne sont, par construction[18], des grandeurs objectives (cf. paragraphe 3.4.1). Ces grandeurs lues dans le référentiel $\mathcal{R}'$ se déduisent des précédentes par les relations :

$$\underline{\boldsymbol{q}}'(\underline{\boldsymbol{x}}',t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underline{\boldsymbol{q}}(\underline{\boldsymbol{x}},t), \quad e'(\underline{\boldsymbol{x}}',t) = e(\underline{\boldsymbol{x}},t) \qquad (5.49)$$

Le principe d'invariance de forme par changement de référentiel s'applique aux lois de comportement thermodynamique. Comme dans le cadre mécanique, on en déduit des formes réduites des lois de comportement thermodynamique :

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{q}}(\underline{\boldsymbol{x}},t) &= \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}},t).\underset{0\le s\le t}{\mathcal{G}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}},t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}},t),\underline{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{X}},t))\\
e(\underline{\boldsymbol{x}},t) &= \underset{0\le s\le t}{\mathcal{H}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}},t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}},t),\underline{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{X}},t))
\end{aligned}$$

[17] Nous verrons qu'en général la loi de comportement mécanique $\mathcal{F}$ ne dépend pas de $\underline{\boldsymbol{G}}$. Ce résultat est démontré d'ailleurs dans le cas de la thermoélasticité traité au chapitre suivant. La dépendance en $\underline{\boldsymbol{G}}$ est introduite ici par souci de généralité. A ce stade de l'écriture des lois de comportement, certains auteurs d'ailleurs brandissent un "principe" d'équiprésence stipulant qu'a priori toutes les variables retenues dans la modélisation doivent figurer comme arguments des lois de comportement (Truesdell and Toupin, 1960; Rivlin, 1969).

[18] L'objectivité du vecteur flux de chaleur fait l'objet du *principe d'objectivité*. Dans la théorie de la chaleur, on admet l'objectivité du flux de chaleur (ou resp., de manière équivalente, de l'énergie interne) comme base de la représentation des phénomènes de transport de chaleur. *In fine*, le premier principe implique alors l'objectivité de e (resp. $\underline{\boldsymbol{q}}$).

Il faut ensuite étudier la transformation de la loi de comportement thermodynamique par changement de configuration de référence. Un tel changement de configuration $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ de référence se manifeste sur le gradient thermique par :

$$\underline{\hat{\boldsymbol{G}}} = \underline{\boldsymbol{G}} \,.\, \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T} \,.\, \underline{\boldsymbol{G}} \tag{5.50}$$

Il existe un groupe des symétries matérielles pour le comportement thermodynamique, qui diffère en général du groupe des symétries matérielles associé au comportement mécanique. Les notions de fluide et de solide thermique s'introduisent de manière analogue au cas mécanique traité au paragraphe 5.3.2. Noter qu'un fluide du point de vue thermique ne l'est pas nécessairement du point de vue mécanique !

Le premier principe étant désormais pris en compte, il reste à vérifier que l'inégalité fondamentale du second principe n'est pas mise en défaut.

5.4.2 Enoncé du second principe de la thermodynamique des milieux continus

L'**entropie** $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ d'une partie $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ est définie à partir d'une densité massique d'entropie $s(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$:

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dv \tag{5.51}$$

La variation d'entropie est due, pour partie, à des apports sous forme surfacique et volumique

$$\varphi(\mathcal{D}) = -\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\varphi}} \,.\, \underline{\boldsymbol{n}} \; ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r_s \, dv \tag{5.52}$$

où $\underline{\boldsymbol{\varphi}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$ est le vecteur **flux d'entropie** et r_s une densité de production locale d'entropie. La **production interne d'entropie** est alors la différence

$$\Sigma(\mathcal{D}) := \dot{\mathcal{S}}(\mathcal{D}) - \varphi(\mathcal{D}) \tag{5.53}$$

Les énoncés précédents ont la structure d'équations de bilan comme pour les variables quantité de mouvement et énergie étudiées au chapitre 3. Toutefois, le **second principe de la thermodynamique** n'est pas une loi de conservation mais l'inégalité suivante

$$\Sigma(\mathcal{D}) \geq 0, \quad \forall \mathcal{D} \subset \Omega_t \tag{5.54}$$

ou, de manière explicite,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\varphi}} \,.\, \underline{\boldsymbol{n}} \; ds - \int_{\mathcal{D}} \rho r_s \, dv \geq 0 \tag{5.55}$$

En appliquant la démarche déjà mise en œuvre pour la quantité de mouvement et pour l'énergie, on aboutit à la **forme locale de l'inégalité de l'entropie** :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\varphi}} - \rho r_s \geq 0 \tag{5.56}$$

ou, de manière équivalente

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho s \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{\varphi}} \right) - \rho r_s \geq 0 \tag{5.57}$$

pour les points réguliers de Ω_t. Il existe aussi des conditions de discontinuité le long d'éventuelles surface singulières $S \subset \Omega_t$. Elles s'établissent de la même manière que pour la quantité de mouvement et l'énergie interne et s'écrivent :

$$[\![\rho s(\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}} - w_n)]\!] + [\![\underline{\boldsymbol{\varphi}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} \geq 0 \tag{5.58}$$

L'inégalité (5.56) est écrite de manière très générale. Dans la très grande majorité des situations rencontrées par l'ingénieur et le physicien, le flux d'entropie et la production locale sont proportionnels au flux de chaleur et à la production locale de chaleur, respectivement, le coefficient de proportionnalité étant l'inverse de la température absolue T :

$$\underline{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T}, \quad r_s = \frac{r}{T} \tag{5.59}$$

C'est l'hypothèse qu'on fera dans la suite[19]. Le second principe (5.56) prend alors la forme

$$\rho\dot{s} + \operatorname{div}\frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T} - \rho\frac{r}{T} \geq 0 \tag{5.60}$$

A ce stade, on introduit l'énergie libre Ψ de densité massique ψ car c'est la grandeur énergétique privilégiée en thermomécanique des solides[20] :

$$\Psi(\mathcal{D}) := \int_{\mathcal{D}} \rho\psi \, dv, \quad \text{avec} \quad \psi := e - Ts \tag{5.61}$$

Pour mieux faire apparaître les contributions mécaniques et thermiques à la production d'entropie, on élimine la variation d'entropie $\dot{s}$ dans (5.56) à l'aide de

$$\dot{s} = \frac{1}{T}(\dot{e} - \dot{T}s - \dot{\psi})$$

et de l'équation de l'énergie (3.89)

$$\rho\dot{e} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \operatorname{div}\underline{\boldsymbol{q}} + \rho r$$

On calcule ainsi la **dissipation** volumique d :

$$\begin{aligned} d &:= \rho T\dot{s} + T\operatorname{div}\frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T} - \rho r \\ &= \rho(\dot{e} - \dot{T}s - \dot{\psi}) + T\operatorname{div}\frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T} - \rho r \\ &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \operatorname{div}\underline{\boldsymbol{q}} + \rho r - \rho(\dot{T}s + \dot{\psi}) + T\operatorname{div}\frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T} - \rho r \end{aligned}$$

Or $T\operatorname{div}\dfrac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T} = \operatorname{div}\underline{\boldsymbol{q}} - \underline{\boldsymbol{q}}.\dfrac{\operatorname{grad} T}{T}$, de sorte que la dissipation se réduit finalement à

$$d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{\boldsymbol{q}}.\frac{\operatorname{grad} T}{T} \tag{5.62}$$

[19] Les lois (5.59) souffrent des exceptions lorsqu'on cherche à les établir à partir d'une approche de type mécanique statistique, notamment en théorie cinétique des gaz (Müller, 1985). Mais nous n'en parlerons pas dans la suite.

[20] L'énergie interne est définie comme une fonction de la déformation et de l'entropie. L'énergie libre est définie comme une fonction de la déformation et de la température. Comme en mécanique des solides, les essais sont souvent réalisés en conditions isothermes, c'est la fonction énergie libre à laquelle on a le plus facilement accès en général.

On obtient ainsi **l'inégalité de Clausius–Duhem** qui constitue une condition d'admissibilité thermodynamique des lois de comportement thermomécanique :

$$d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{\boldsymbol{q}} \,.\, \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \tag{5.63}$$

La densité de dissipation au sein du milieu se décompose en deux contributions :

- la **dissipation intrinsèque** d_{int} :

$$d^{(int)} := \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) \tag{5.64}$$

- la **dissipation thermique**

$$d^{(th)} := -\underline{\boldsymbol{q}} \,.\, \frac{\operatorname{grad} T}{T} \tag{5.65}$$

de sorte que

$$d = d^{(int)} + d^{(th)} \geq 0$$

En général les lois donnant les contraintes, l'énergie libre et l'entropie ne dépendent pas explicitement du gradient de température. Dans ce cas, la condition d'admissibilité thermodynamique des lois de comportement thermodynamique devient

$$d^{(int)} \geq 0 \quad \text{et} \quad d^{(th)} \geq 0 \tag{5.66}$$

Il s'agit là de conditions suffisantes d'admissibilité thermodynamique de la loi de comportement. Toutefois, dans le cas particulier de la thermoélasticité traité au chapitre suivant, nous démontrerons rigoureusement que $d^{(th)} \geq 0$ en établissant l'indépendance[21] vis–à–vis du gradient de la température.

On peut alors distinguer les situations

- **isothermes** pour lesquelles $\dot{T} = 0$ et $\operatorname{grad} T = 0$ de sorte que l'inégalité de Clausius–Duhem se réduit à

$$d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho\dot{\psi} \geq 0$$

ou d'une manière générale

$$p^i - \rho\dot{\psi} \geq 0 \tag{5.67}$$

en introduisant la puissance des efforts intérieurs quelle qu'en soit sa modélisation.

- **adiabatiques** pour lesquelles $\underline{\boldsymbol{q}} = 0$ de sorte que l'inégalité de Clausius–Duhem se réduit à

$$d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) \geq 0$$

Il faudra donc veiller à ce que les lois de comportement développées garantissent la positivité de la dissipation. C'est l'énoncé du **principe d'entropie** qui exige que les lois de comportement soient telles que le second principe soit satisfait pour tout processus thermodynamique caractérisé par l'évolution de l'ensemble des variables $\{\rho, \Phi, T, \underline{\boldsymbol{f}} - \underline{\boldsymbol{a}}, r\}$.

L'exploitation définitive de l'inégalité de Clausius–Duhem ne sera permise qu'après avoir précisé le **statut thermodynamique** du comportement du matériau étudié, essentiellement le jeu de variables d'état adopté. Cela fournira des informations relatives à l'entropie et à $d^{(int)}$. Un exemple de cet achèvement sera proposé dans le cas du solide thermoélastique au chapitre suivant.

[21] Le raisonnement s'étendra d'ailleurs au cas de milieux continus à variables internes.

$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho s\, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{q}}}}{T}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds - \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{r}{T}\, dv \geq 0$	forme globale du second principe
$\rho\dot{s} + \operatorname{div} \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{q}}}}{T} - \rho\frac{r}{T} \geq 0$	forme locale du second principe
$[\![\rho s(\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}} - w_n)]\!] + [\![\frac{\underline{\underline{\boldsymbol{q}}}}{T}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} \geq 0$	inéquation aux discontinuités
$d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{\boldsymbol{q}}.\frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0$	inégalité de Clausius–Duhem

TAB. 5.3 – Récapitulatif : le second principe de la thermodynamique des milieux continus.

5.4.3 Loi de conduction thermique

Il convient maintenant de préciser la loi de comportement thermique. On explicite ici la forme réduite de la fonctionnelle mémoire $\mathcal{G}$:

$$\underline{\boldsymbol{q}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t).\underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{G}\mathcal{R}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)) \tag{5.68}$$

On peut définir le vecteur flux de chaleur lagrangien $\underline{\boldsymbol{Q}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ tel que

$$\underline{\boldsymbol{q}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds = \underline{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{N}}\, dS \Longrightarrow \underline{\boldsymbol{Q}} := J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{q}} \tag{5.69}$$

Noter que $\underline{\boldsymbol{Q}}$ est invariant par changement de référentiel. La loi de conduction thermique peut donc se mettre sous une forme lagrangienne réduite

$$\underline{\boldsymbol{Q}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = \underset{0\leq s\leq t}{\mathcal{G}\mathcal{R}_{\Omega_0}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,s)) \tag{5.70}$$

Fluides et solides conducteurs

Commençons par analyser une loi de conduction simple liant le flux de chaleur eulérien au gradient de température eulérien :

$$\underline{\boldsymbol{q}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \mathcal{G}(\underline{\boldsymbol{g}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)) \tag{5.71}$$

et faisons appel au principe d'invariance de forme. La fonction $\mathcal{G}$ doit vérifier, pour toute rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\mathcal{G}(\underline{\boldsymbol{g}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)) = \mathcal{G}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{g}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)) \tag{5.72}$$

Cette relation implique que $\mathcal{G}$ est une fonction isotrope de son argument vectoriel. La fonction $\mathcal{G}$ ne peut donc pas être quelconque. Le théorème de représentation 28 (page 439) n'autorise que la forme

$$\underline{\boldsymbol{q}} = h(\underline{\boldsymbol{g}}.\underline{\boldsymbol{g}}\,)\,\underline{\boldsymbol{g}} \tag{5.73}$$

où h est une fonction scalaire quelconque. Il s'agit en fait d'une loi de conduction de fluide du point de vue thermique[22]. Lorsque h est une fonction constante, il s'agit de la **loi de Fourier isotrope**.

Pour des comportements plus généraux notamment de solides, tournons–nous vers une formulation lagrangienne de la loi de conduction issue de (5.70). Si l'on se contente d'une dépendance du flux de chaleur actuel avec le seul gradient thermique actuel (on enlève provisoirement le couplage thermomécanique), on peut proposer une relation de la forme

$$\underline{\boldsymbol{Q}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)) \tag{5.74}$$

Une transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ est une symétrie matérielle du milieu considéré du point de vue thermique si

$$\underline{\hat{\boldsymbol{Q}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underline{\boldsymbol{Q}} = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}}\,) \tag{5.75}$$

Un tel milieu est alors isotrope du point de vue de la conduction thermique si

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\mathcal{G}_{\Omega_0}(\underline{\boldsymbol{G}}\,) = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{G}}\,), \quad \forall \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t) \in GO^+(E)$$

La fonction $\mathcal{G}$ est donc une fonction isotrope et la loi de conduction prend la forme

$$\underline{\boldsymbol{Q}} = h(\underline{\boldsymbol{G}}\,.\underline{\boldsymbol{G}}\,)\,\underline{\boldsymbol{G}} \tag{5.76}$$

d'après le théorème de représentation 28 (page 439). Un tel milieu est fluide si (5.75) vaut pour toutes les transformations unimodulaires. Appliqué à (5.76), cette condition implique

$$h(\underline{\boldsymbol{G}}\,.\underline{\boldsymbol{G}}\,)\underline{\boldsymbol{G}} = h(\underline{\boldsymbol{G}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}}\,)\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}}\,, \quad \forall \underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \in \mathcal{U}(E)$$

Seule la fonction nulle $h = 0$ permet de réaliser cette condition de sorte que

$$\underline{\boldsymbol{Q}} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{q}} = 0$$

La loi de conduction sous la forme (5.74) n'autorise donc pas la description de la conduction thermique dans les fluides.

On est donc amené à considérer une forme de loi de conduction thermique lagrangienne plus générale[23], toujours contenue dans la forme générique (5.70)

$$\underline{\boldsymbol{Q}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t), \underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)) \tag{5.77}$$

La transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ est une symétrie matérielle pour la conduction thermique si

$$\underline{\boldsymbol{Q}} = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}, \underline{\boldsymbol{G}}\,) \Longrightarrow \underline{\hat{\boldsymbol{Q}}} = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{C}}}, \underline{\hat{\boldsymbol{G}}}\,) \quad \text{avec} \quad \underline{\hat{\boldsymbol{Q}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underline{\boldsymbol{Q}}\,, \quad \underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{C}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}, \quad \underline{\hat{\boldsymbol{G}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}} \tag{5.78}$$

et donc si

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}, \underline{\boldsymbol{G}}\,) = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}, \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}}\,) \tag{5.79}$$

[22] En effet,

$$\underline{\hat{\boldsymbol{g}}} = \hat{J}\underset{\sim}{\hat{\boldsymbol{F}}}^{-T}.\underline{\hat{\boldsymbol{G}}} = J(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1})^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{G}} = \underline{\boldsymbol{g}}$$

le gradient de température eulérien est donc invariant par changement de configuration de référence. Il en va donc de même de la loi de comportement thermique (5.73).

[23] Il s'agit en fait des solides et fluides élastiques conducteurs, en anticipant sur la terminologie introduite dans le chapitre suivant car la dépendance de la fonction de comportement ne porte que sur $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underline{\boldsymbol{G}}$ à l'instant courant.

En particulier, le milieu décrit par (5.77) est isotrope si

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}},\underline{\boldsymbol{G}}) = \mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T,\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{G}}), \quad \forall \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO^+(E)$$

La fonction vectorielle $\mathcal{G}$ est donc isotrope par rapport à ces deux arguments, l'un tenseur d'ordre 2 symétrique, l'autre vecteur. De telles fonctions ne peuvent pas être quelconques. Il existe un théorème de représentation (que nous admettrons ici, en renvoyant le lecteur à l'ouvrage (Liu, 2002)) indiquant que

$$\underline{\boldsymbol{Q}} = k_1\underline{\boldsymbol{G}} + k_2\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{G}} + k_3\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2.\underline{\boldsymbol{G}} \tag{5.80}$$

Les paramètres[24] scalaires k_i sont des fonctions des invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et des autres invariants :

$$\underline{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{G}}\,,\underline{\boldsymbol{G}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{G}}\,,\underline{\boldsymbol{G}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2.\underline{\boldsymbol{G}}$$

Il faut ajouter aussi une dépendance de ces grandeurs par rapport à la densité et la température. Une condition suffisante pour que la dissipation thermique soit systématiquement positive avec une loi de la forme (5.80) est que

$$k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0, \quad k_3 \geq 0$$

en profitant du caractère défini positif de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2$.

Pour obtenir la forme de la loi de conduction des fluides conducteurs, il faut trouver parmi les fonctions (5.80) celles qui permettent de vérifier la condition (5.79) pour tous les éléments $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ du groupe unimodulaire. Cette tâche n'est pas entreprise ici. On peut toutefois obtenir une forme générale lagrangienne de loi de conduction lagrangienne de fluide thermique à partir de la loi de conduction eulérienne de fluide (5.73) déjà établie par application des règles de transport pour $\underline{\boldsymbol{q}}\,/\underline{\boldsymbol{Q}}$ et $\underline{\boldsymbol{g}}\,/\underline{\boldsymbol{G}}$:

$$\underline{\boldsymbol{Q}} = J\,h(\underline{\boldsymbol{G}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{G}})\,\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1}.\underline{\boldsymbol{G}} \tag{5.81}$$

Noter en particulier la présence de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1}$ dans cette loi de fluide thermique. On vérifie que cette relation vérifie effectivement la condition (5.79). Puiqu'un fluide est isotrope, la loi précédente devrait être de la forme (5.80), ce qui n'est pas évident à première vue. Pour le voir, il faut en fait remarquer que, d'après le théorème 23 de Cayley–Hamilton, $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1}$ s'exprime en fonction de l'identité, de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2$ et des invariants de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1} = \frac{1}{J}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2 - I_1\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} + I_2\underset{\sim}{\boldsymbol{1}}\right)$$

Loi de Fourier

Le second principe sous sa forme (5.66) exige que la dissipation thermique soit positive pour tout processus thermodynamique :

$$d^{(th)} = -\frac{1}{T}\,\underline{\boldsymbol{q}}.\underline{\boldsymbol{g}} = -\frac{1}{T}\frac{\rho}{\rho_0}\,\underline{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{G}} \geq 0 \tag{5.82}$$

L'inégalité précédente est appelée **inégalité de Fourier**. Elle implique que le flux de chaleur fait un angle obtus avec le gradient thermique et que, en d'autres termes, la chaleur va toujours du chaud vers le froid. Pour garantir à coup sûr la positivité de la dissipation thermique pour tous les processus thermodynamiques, on postule généralement la **loi de Fourier** :

$$\underline{\boldsymbol{Q}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}(\underline{\boldsymbol{C}},T).\underline{\boldsymbol{G}} \tag{5.83}$$

[24] tout comme, par ailleurs, l'énergie interne e.

qui consiste à prendre pour fonction $\mathcal{G}$ une fonction linéaire par rapport au gradient de température. La dissipation thermique est alors la forme quadratique

$$d^{(th)} = \frac{1}{T}\frac{\rho}{\rho_0}\underline{\boldsymbol{G}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}.\underline{\boldsymbol{G}}$$

On se limite à un tenseur d'ordre 2 symétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}$ tel que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{K}} \tag{5.84}$$

La dissipation D est positive dès que $\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}$, symétrique, est défini positif[25].

5.4.4 Fluides visqueux conducteurs

Concernant la conduction thermique dans les fluides visqueux introduits au paragraphe 5.3.3, il faut considérer les lois de comportement thermomécaniques couplées :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \mathcal{F}(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \underline{\boldsymbol{g}})$$
$$\underline{\boldsymbol{q}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \mathcal{G}(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}, \underline{\boldsymbol{g}})$$

En raison du principe d'invariance de forme par changement de référentiel, les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ doivent être des fonctions isotropes de leurs arguments $\underline{\boldsymbol{g}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Nous utilisons le théorème de représentation des fonctions isotropes à deux arguments tensoriels d'ordres 1 et 2, auquel nous avons fait appel au paragraphe 5.4.3 :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha_0\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \alpha_2\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2 + \alpha_3\underline{\boldsymbol{g}}\otimes\underline{\boldsymbol{g}} + \alpha_4(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{g}}\otimes\underline{\boldsymbol{g}} + \underline{\boldsymbol{g}}\otimes\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{g}}) + \alpha_5\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{g}}\otimes\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{g}} \tag{5.85}$$
$$\underline{\boldsymbol{q}} = k_1\underline{\boldsymbol{g}} + k_2\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{g}} + k_3\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2.\underline{\boldsymbol{g}} \tag{5.86}$$

Les paramètres scalaires α_i, k_i sont des fonctions des invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ et des autres invariants :

$$\underline{\boldsymbol{g}}.\underline{\boldsymbol{g}}, \underline{\boldsymbol{g}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{g}}, \underline{\boldsymbol{g}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^2.\underline{\boldsymbol{g}}$$

On ajoutera aussi une dépendance de ces grandeurs par rapport à la densité et la température pour avoir des lois aussi générales que possibles. On voit que les couplages sont nombreux et non linéaires. Toutefois, le passage au crible thermodynamique limite singulièrement ces couplages. En effet la condition de positivité de la dissipation implique en particulier :

$$\alpha_3 = \alpha_5 = 0, \alpha_4 \geq 0, k_2 = 0, k_3 \geq 0$$

Si on linéarise ces deux lois par rapport à $\underline{\boldsymbol{g}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ en les supposant suffisamment petits, il ne reste plus que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \eta_1(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{D}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\eta_2\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \tag{5.87}$$
$$\underline{\boldsymbol{q}} = -k\underline{\boldsymbol{g}} \tag{5.88}$$

où il ne reste plus que 3 paramètres caractérisant le fluide : les viscosités η_1 et η_2 et le coefficient de conductivité thermique k. On remarque aussi que les deux lois de comportement linéarisées sont découplées. On reviendra dans le chapitre 7 sur la linéarisation des lois de comportement.

[25] On anticipe sur le chapitre suivant pour faire remarquer que le flux de chaleur ne dérive pas du potentiel énergie libre, à la différence des contraintes en thermoélasticité. En effet, la conduction thermique est un phénomène entièrement dissipatif. La propriété (5.84) de symétrie du tenseur de conductivité thermique $\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}$ n'est donc pas une conséquence du second principe, contrairement au cas du tenseur des modules d'élasticité comme on le verra au paragraphe 6.2.3. Il s'agit en fait d'un postulat impliquant l'existence d'un potentiel quadratique de dissipation. Les conditions (5.84) sont appelées relations de réciprocité d'Onsager–Casimir (de Groot and Mazur, 1984; Prigogine, 1996).

5.5 Exemples de lois de comportement illicites

Deviner pourquoi les lois de comportement ci–dessous sont farfelues :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \eta \underline{\boldsymbol{x}} \otimes \underline{\boldsymbol{x}}$$

La position ne peut pas apparaître explicitement dans la loi de comportement.
Dans le cas de structures constituées de plusieurs matériaux (ou pour les matériaux hétérogènes), les coefficients (propriétés mécaniques) de la loi de comportement peuvent dépendre de la position comme paramètre.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \eta \underline{\boldsymbol{v}} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}$$

La vitesse ne peut pas apparaître explicitement dans la loi de comportement.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \eta t^n \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

Le temps ne peut pas apparaître explicitement dans la loi de comportement.

$$\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}} = \eta \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

Il s'agit d'une relation liant une grandeur non objective (la dérivée temporelle de $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$) avec une grandeur objective ($\tilde{\boldsymbol{D}}$). La forme d'une telle loi comportement n'est donc pas invariante par changement de référentiel.

Chapitre 6

Corps élastiques

Les principes fondamentaux qui président à l'écriture des lois de comportement thermomécanique des matériaux présentés et illustrés dans le chapitre précédent sont mis à profit dans ce chapitre pour décrire la classe des lois de comportement thermoélastique. La démarche proposée est en deux temps. Des considérations purement mécaniques sont d'abord développées pour définir et préciser autant que possible les lois d'élasticité. La notion d'hyperélasticité apparaît ensuite lorsque ces lois sont passées au crible de la thermodynamique des milieux continus dont la conséquence majeure est l'existence d'un potentiel d'élasticité.

6.1 Elasticité

Un milieu (matériellement simple) est dit **élastique** si l'état de contrainte actuel est entièrement déterminé par le gradient de la transformation à l'instant actuel et non par son histoire passée :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)) \tag{6.1}$$

La fonctionnelle mémoire se réduit donc à une simple fonction. En particulier le comportement ne dépend pas de la vitesse de sollicitation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. La forme de la loi dépend *a priori* de la configuration de référence choisie Ω_0.

6.1.1 Formes réduites

Les principes d'indifférence matérielle et d'invariance de forme étudiés au chapitre précédent impliquent que la loi d'élasticité peut s'écrire sous la forme réduite

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t).\mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)).\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) \tag{6.2}$$

C'est l'application directe du théorème 15 de la page 129. De manière équivalente, la loi d'élasticité (6.2) peut s'écrire avec le couple formé du tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff II et du tenseur droit de déformation de Cauchy–Green :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = \mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)) \tag{6.3}$$

Il s'agit là d'un cas particulier de la forme (5.30) établie au chapitre précédent.

On définit maintenant la forme de la loi de comportement des matériaux **thermoélastiques** en ajoutant des relations pour le flux de chaleur, l'énergie libre (ou de manière équivalente l'énergie interne comme au chapitre précédent) et enfin l'entropie massiques :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) \;=\; \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t).\mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)).\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$$

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{q}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) &= \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t).\mathcal{G}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t))\\
\psi(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) &= \mathcal{H}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t))\\
s(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t) &= \mathcal{J}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t))
\end{aligned}$$

ou en représentation purement lagrangienne avec le couple $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}},\underset{\sim}{\boldsymbol{C}})$:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) &= \mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t))\\
\underline{\boldsymbol{Q}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) &= \mathcal{G}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t))\\
\psi_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) &= \mathcal{H}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t))\\
s_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) &= \mathcal{J}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t),\underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t))
\end{aligned}$$

6.1.2 Symétries matérielles

Il faut se demander maintenant comment se transforme la loi de comportement lorsque l'on change de configuration de référence par une transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \in GL(E)$ telle que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \tag{6.4}$$

Le changement de configuration consiste à prendre une nouvelle configuration de référence $\hat{\Omega}_0$ tournée par rapport à Ω_0 ou bien même déformée selon le schéma de la figure 6.1. On dira que $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ est un symétrie matérielle du corps élastique si

$$\mathcal{F}_{\Omega_0}(\cdot) = \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\cdot)$$

ou, de manière équivalente,

$$\mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}(\cdot) = \mathcal{F}^{\Pi}_{\hat{\Omega}_0}(\cdot)$$

L'ensemble des symétries matérielles d'un corps élastique pour une configuration de référence donnée Ω_0 forme le groupe $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$, sous–groupe du groupe unimodulaire $\mathcal{U}(E)$ (qui contient, on le rappelle toutes les transformations n'affectant pas le volume du corps). Lorsque l'on change de configuration de référence par la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$, le groupe des symétries matérielles se transforme en

$$\mathfrak{G}_{\hat{\Omega}_0} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\mathfrak{G}_{\Omega_0}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}$$

par application de la règle de Noll (14). Ce nouveau groupe peut contenir moins d'axes ou plans de symétries que le premier, c'est le cas de $\mathfrak{G}_{\check{\Omega}_0}$ par rapport à $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ sur les exemples de la figure 6.1 (le plan de symétrie à 45° n'en est plus un). Par contre la formule montre bien que le groupe des symétries matérielles est inchangé par application d'une dilatation $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} = \alpha\underset{\sim}{\mathbf{1}}$. Il est bien sûr inchangé aussi si $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \in \mathfrak{G}_{\Omega_0}$ (c'est le cas des configurations $\hat{\Omega}_0$ et $\check{\Omega}_0$ de la figure 6.1).

Pour de nombreux solides, il existe une configuration privilégiée pour laquelle le groupe des symétries matérielles est un groupe cristallographique, c'est–à–dire un sous–groupe strict du groupe orthogonal. Un telle configuration est souvent appelée configuration *non distordue* du solide. On appelle ces solides des **solides anisotropes**. Cette définition ne se limite pas aux corps élastiques. Pour un corps élastique, on dira qu'une configuration est **naturelle** si elle est non distordue et sans contraintes ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0$).

On peut maintenant classer les corps élastiques selon la nature de leurs groupes des symétries matérielles. Les corps élastiques "les moins symétriques", i.e. les "plus" **anisotropes** sont les **solides tricliniques**

$$\mathfrak{G}_{\Omega_0} = \{\underset{\sim}{\mathbf{1}}, -\underset{\sim}{\mathbf{1}}\}$$

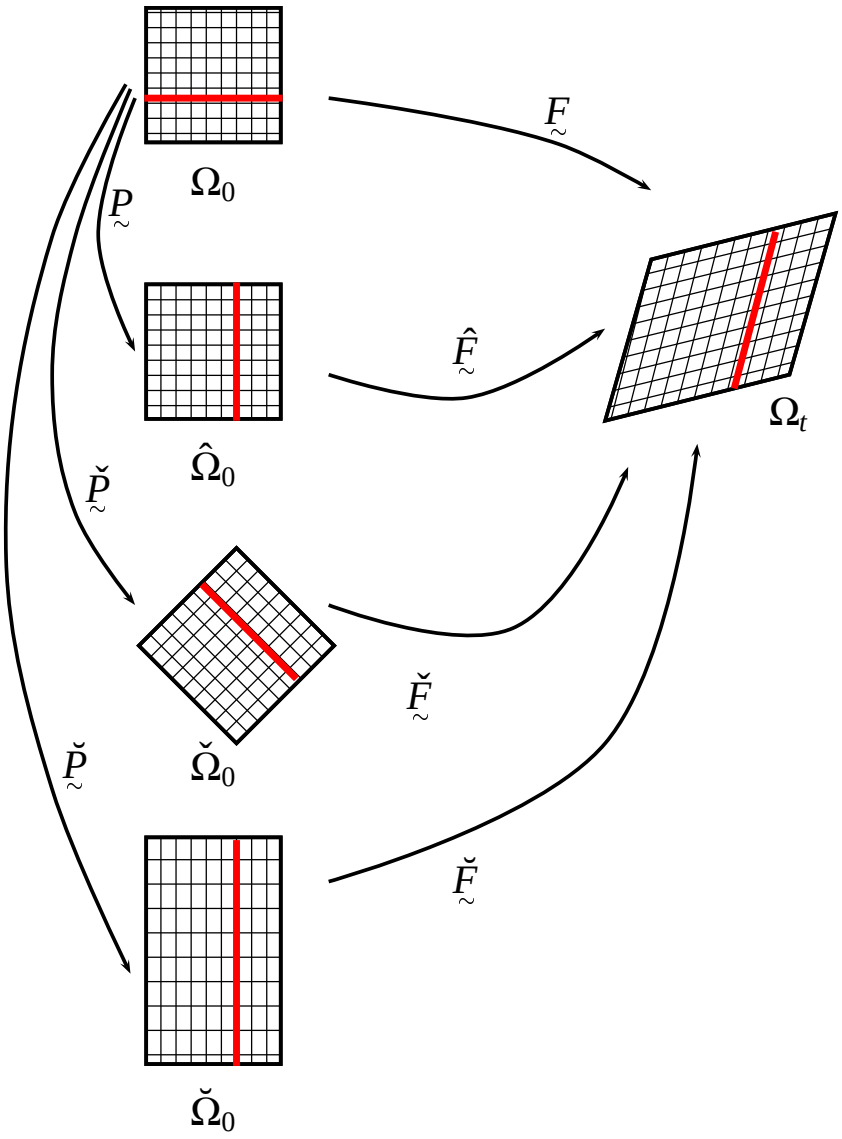


FIG. 6.1 – Transformation d'un corps matériel élastique : changements de configurations de référence. La configuration $\hat{\Omega}_0$ est tournée de $\pi/2$ par rapport à Ω_0. La configuration $\check{\Omega}_0$ est tournée de $\pi/4$. La configuration $\breve{\Omega}_0$ a subi une extension simple dans la direction verticale par rapport à la configuration Ω_0. La configuration actuelle Ω_t montre que le corps est cisaillé et étiré dans les deux directions du plan. Une ligne matérielle rouge a été tracée sur le matériau pour mieux suivre les transformations.

Toutes les classes cristallographiques sont représentées parmi les solides cristallins (métaux ou céramiques) ou structures composites (stratifiés, réseaux de poutres, nids d'abeille...). On se contente pour l'instant de mentionner le cas des solides cubiques (ex : cristaux de sel, d'aluminium, de cuivre, de fer...). Ces solides présentent 24 symétries matérielles qui s'obtiennent à partir de 3 **générateurs** qui sont

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi/2}_{\underline{\boldsymbol{i}}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi/2}_{\underline{\boldsymbol{j}}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi/2}_{\underline{\boldsymbol{k}}} \tag{6.5}$$

rotations d'angle $\pi/2$ par rapport à trois axes orthogonaux $\underline{\boldsymbol{i}}, \underline{\boldsymbol{j}}, \underline{\boldsymbol{k}}$. On renvoie au tableau 5.2 (page 133) pour la liste des classes cristallographiques utiles en thermomécanique des matériaux (concernant les systèmes cristallographiques pour les solides cristallins voir aussi le tableau A.2,

page 440).

Formes réduites et symétries matérielles

La loi de comportement peut être formulée par rapport à l'une ou l'autre des configurations de références Ω_0 et $\hat{\Omega}_0$ reliées par le changement de configuration de référence $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}), \quad \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}} = \mathcal{F}^{\Pi}_{\hat{\Omega}_0}(\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}})$$

Les règles de transformation lors d'un changement de référentiels sont[1]

$$\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T, \quad \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1} \tag{6.6}$$

La relation entre les lois de comportement $\mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}$ et $\mathcal{F}^{\Pi}_{\hat{\Omega}_0}$ s'en déduit :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T = \mathcal{F}^{\Pi}_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}) \tag{6.7}$$

Lorsque $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ est un élément du groupe de symétrie du matériau, alors les fonctions $\mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}$ et $\mathcal{F}^{\Pi}_{\hat{\Omega}_0}$ coïncident et

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T = \mathcal{F}^{\Pi}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^{-1}) \tag{6.8}$$

Solides élastiques isotropes

Le cas des solides élastiques isotropes est particulièrement important car c'est souvent la première approximation du comportement qui est utilisée en l'absence de données expérimentales suffisantes pour caractériser l'anisotropie du matériau. On traite ici le cas mécanique pur, laissant les aspects thermiques pour le paragraphe suivant. D'après le résultat (6.8) précédent, la fonction d'élasticité $\mathcal{F}$ doit vérifier la propriété d'isotropie

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\mathcal{F}^{\Pi}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T = \mathcal{F}^{\Pi}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) \tag{6.9}$$

Sa forme ne peut donc pas être quelconque. Le théorème de représentation dit de Rivlin–Ericksen (29) donne la seule forme possible de $\mathcal{F}$ compatible avec la condition d'isotropie (6.9)

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \alpha_0\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} + \alpha_2\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2 \tag{6.10}$$

où les α_i sont des fonctions des 3 invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$, ou, de manière équivalente, des fonctions symétriques des 3 déformations principales λ_i, définies par la décomposition spectrale (2.94). En multipliant l'expression précédente à gauche par $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ et à droite par $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T$ puis l'ensemble par J^{-1}, on obtient la version eulérienne de la loi des corps élastiques isotropes

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \beta_0\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \beta_1\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} + \beta_2\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^2 \tag{6.11}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ est le tenseur de Cauchy–Green gauche. Les fonctions β_i dépendent des valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ car ce sont les mêmes que celles de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ (cf. équation (2.95)). Cette relation ne doit pas faire illusion en laissant croire qu'elle ne dépend pas de la configuration de référence puisque $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ est une mesure eulérienne de déformation. En fait $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ dépend bel et bien de la configuration de référence Ω_0 :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T.\hat{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^T$$

Cela confirme que la loi d'élasticité d'un corps isotrope garde *a priori* la mémoire d'une configuration de référence. Cette dépendance disparaît toutefois dans le cas extrême des

[1] La règle concernant $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ n'est autre que la relation (2.171) établie au chapitre 2 tandis que la transformation du second tenseur de Piola–Kirchhoff s'obtient en utilisant sa définition (4.11) combinée à la règle de transformation (6.4) pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$.

Fluides élastiques

Lorsque,

$$\mathfrak{G}_{\Omega_0} = \mathcal{U}(E) \tag{6.12}$$

les "transmués" $\hat{\underset{\sim}{P}}.\mathfrak{G}_{\Omega_0}.\hat{\underset{\sim}{P}}^{-1}$ sont identiques à $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ pour tout $\hat{\underset{\sim}{P}} \in GL(E)$[2]. Il s'agit par définition d'un fluide (cf. paragraphe 5.3.2). Comme un tel corps est isotrope par rapport à $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$, il l'est aussi pour toutes les autres configurations. Voilà donc un corps isotrope par rapport à toutes ses configurations. Ce n'est pas le cas des solides élastiques isotropes précédents qui en général ne sont plus isotropes par rapport à une configuration déformée.

La fonction d'élasticité $\mathcal{F}_{\Omega_0}$ doit vérifier pour un tel corps

$$\mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{F}) = \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{F}.\underset{\sim}{P}), \quad \forall \underset{\sim}{P} \in \mathcal{U}(E) \tag{6.13}$$

C'est aussi vrai pour toute autre configuration de référence obtenue à partir de Ω_0 à l'aide d'une transformation appartenant au groupe unimodulaire. Pour réduire à nouveau la forme de $\mathcal{F}$, on va prendre un $\underset{\sim}{P}$ particulier. Pour cela, on remarque que tout tenseur $\underset{\sim}{F}$ ($\det \underset{\sim}{F} \neq 0$) peut se décomposer sous la forme

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}^{sph}.\bar{\underset{\sim}{F}}, \quad \text{avec} \quad \det \underset{\sim}{F}^{sph} = \det \underset{\sim}{F} = J \quad \text{et} \quad \det \bar{\underset{\sim}{F}} = 1 \tag{6.14}$$

où $\underset{\sim}{F}^{sph}$ s'appelle la partie sphérique de $\underset{\sim}{F}$ et $\bar{\underset{\sim}{F}}$ sa partie unimodulaire. En fait, il suffit de prendre[3]

$$\underset{\sim}{F}^{sph} = J^{1/3}\underline{\underline{1}} \quad \text{et} \quad \bar{\underset{\sim}{F}} = \frac{1}{J^{1/3}}\underset{\sim}{F} \in \mathcal{U}(E)$$

La transformation $\bar{\underset{\sim}{F}}$ fait passer de la configuration Ω_0 à la configuration intermédiaire $\hat{\Omega}_0$. La partie sphérique $\underset{\sim}{F}^{sph}$ fait passer enfin de $\hat{\Omega}_0$ à la configuration actuelle Ω_t.

Prenons alors $\underset{\sim}{P} = \bar{\underset{\sim}{F}}^{-1} \in \mathcal{U}(E)$ dans (6.13) pour voir que

$$\mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{F}) = \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underset{\sim}{F}_{sph}) = \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{F}_{sph}) \tag{6.15}$$

Pour la dernière égalité, on utilise le fait que la configuration $\hat{\Omega}_0$ est obtenue par une transformation unimodulaire $\bar{\underset{\sim}{F}}$ appartenant au groupe des symétries matérielles du milieu considéré. La fonction d'élasticité ne dépend donc que de la partie sphérique de $\underset{\sim}{F}$. Pour aller plus loin, il reste à appliquer le principe d'invariance de forme, non utilisé jusqu'ici. Par changement de référentiel $\underset{\sim}{Q}(t)$, la loi se transforme en

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma}' &= \mathcal{F}'_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{F}^{sph\prime}) = \mathcal{F}'_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{Q}.\underset{\sim}{F}^{sph}) \\
&= \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{Q}.\underset{\sim}{F}^{sph}) \quad \text{(invariance de forme)} \\
&= \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{F}^{sph}.\underset{\sim}{Q}) \quad \text{(la partie sphérique commute avec la rotation)} \\
&= \mathcal{F}_{\hat{\Omega}_0}(\underset{\sim}{F}^{sph}) \quad \text{(la rotation est dans le groupe de symétrie du fluide)} \\
&= \underset{\sim}{\sigma}
\end{aligned} \tag{6.16}$$

[2] En effet, si $\hat{\underset{\sim}{P}} \in GL(E)$, alors

$$\underset{\sim}{P} \in \mathcal{U}(E) \Longrightarrow \hat{\underset{\sim}{P}}.\underset{\sim}{P}.\hat{\underset{\sim}{P}}^{-1} \in \mathcal{U}(E)$$

[3] Cette décomposition en parties sphérique et unimodulaire est unique.

et par conséquent,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T, \quad \forall \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO(E)$$

ce qui n'est possible que si $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est sphérique. La loi du fluide élastique s'écrit donc

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p(\rho)\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{6.17}$$

où p est une fonction scalaire de J, ou de manière équivalente de la masse volumique actuelle ρ, appelée contrainte hydrostatique ou pression. On reconnaît l'état de contrainte d'un fluide parfait sans viscosité (*inviscid* en anglais)[4]. La loi du fluide élastique peut s'écrire aussi pour le tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff II :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} = -pJ\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T} = -pJ\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1} \tag{6.18}$$

Remarquer la dépendance caractéristique en $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1}$, liée au transport de la métrique courante sur la configuration de référence.

6.1.3 Thermoélasticité isotrope

On donne ici les lois (non linéaires) les plus générales pour les solides thermoélastiques conducteurs isotropes. Les fonctions $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont des fonctions isotropes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ et de $\underline{\boldsymbol{g}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$. De telles fonctions ne peuvent être quelconques et le théorème de représentation correspondant a été admis au paragraphe 5.4.3. Les lois de thermoélasticité isotropes sont

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha_0\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} + \alpha_2\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^2 + \alpha_3\underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underline{\boldsymbol{g}} + \alpha_4(\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underline{\boldsymbol{g}} + \underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underline{\boldsymbol{g}}) + \alpha_5\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underline{\boldsymbol{g}} \otimes \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underline{\boldsymbol{g}} \tag{6.19}$$

$$\underline{\boldsymbol{q}} = \beta_1\underline{\boldsymbol{g}} + \beta_2\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underline{\boldsymbol{g}} + \beta_3\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^2.\underline{\boldsymbol{g}} \tag{6.20}$$

Les paramètres scalaires α_i, β_i, mais aussi l'énergie interne sont des fonctions des invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ et des autres invariants

$$\underline{\boldsymbol{g}}.\underline{\boldsymbol{g}}, \underline{\boldsymbol{g}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underline{\boldsymbol{g}}, \underline{\boldsymbol{g}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^2.\underline{\boldsymbol{g}}$$

Il faut ajouter la dépendance de ces grandeurs par rapport à la densité et la température. On voit que les couplages sont nombreux et non linéaires. On verra toutefois que la thermodynamique exclut certains de ces couplages.

Si on linéarise ces deux lois par rapport à $\underline{\boldsymbol{g}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ en les supposant suffisamment petits ($|\underline{\boldsymbol{g}}| \ll 1$, $|\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}}| \ll 1$, il ne reste plus que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} \tag{6.21}$$

$$\underline{\boldsymbol{q}} = -k\,\underline{\boldsymbol{g}} \tag{6.22}$$

Seuls 3 paramètres caractérisent le solide thermoélastique isotrope : les modules λ et μ et le coefficient de conductivité thermique κ de la loi de Fourier. On remarque aussi que les deux lois de comportement linéarisées sont découplées. On reviendra dans le chapitre 7 sur la linéarisation des lois de comportement, et on donnera en particulier un sens physique clair aux modules d'élasticité isotrope.

[4] On peut montrer que tout fluide au repos, même visqueux, a un état de contraintes de la forme (6.17).

6.2 Hyperélasticité

Le second principe de la thermodynamique n'a pas été utilisé jusqu'ici. Il est grand temps de le faire car il apporte une restriction essentielle, à savoir la propriété dite d'hyperélasticité explicitée dans ce paragraphe. On s'intéresse particulièrement à la classe des corps élastiques anisotropes, le cas isotrope étant un cas particulier. Dans ce cas, on a vu qu'il existe une configuration de référence privilégiée. C'est pourquoi on va travailler avec des grandeurs lagrangiennes. Les théorèmes de réduction appliqués aux corps élastiques dans le paragraphe précédent montrent que le jeu de variables privilégiées pour la représentation des solides élastiques anisotropes est

$$\{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t), T(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t), \underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)\}$$

où l'on a allégé la notation $\breve{T}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ en $T(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$. $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ est la déformation de Green–Lagrange, reliée de manière univoque au tenseur droit de Cauchy–Green $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ par (2.82). L'énergie libre ψ joue un rôle essentiel dans la théorie des corps élastiques anisotropes. C'est une fonction des variables précédentes

$$\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t), T(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t), \underline{\boldsymbol{G}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)) \tag{6.23}$$

6.2.1 Exploitation du second principe ; lois d'état

Pour obtenir la formulation lagrangienne de la forme locale (5.60), il faut repartir de la formulation globale du second principe pour un sous–domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_t$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho s(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T}.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds - \int_{\mathcal{D}} \rho\frac{r}{T}\,dv \geq 0$$

Avec le changement de variable $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$, cela devient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 s_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)\,dV + \int_{\partial\mathcal{D}_0} \frac{\underline{\boldsymbol{Q}}}{T}.\underline{\boldsymbol{N}}\,dS - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0\frac{r_0}{T}\,dV \geq 0 \tag{6.24}$$

avec $s_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = s(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ et $r_0(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t) = r(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$. On rappelle que $\mathcal{D}_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{D})$. Le flux de chaleur lagrangien $\underline{\boldsymbol{Q}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ est relié au flux eulérien $\underline{\boldsymbol{q}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ par la relation (5.69). En utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{\mathcal{D}_0}\left(\rho_0\dot{s}_0 + \mathrm{Div}\,\frac{\underline{\boldsymbol{Q}}}{T} - \rho_0\frac{r_0}{T}\right)dV \geq 0 \tag{6.25}$$

valable pour tout sous–domaine $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0$. On en déduit la forme locale du second principe dans sa formulation lagrangienne

$$\rho_0\dot{s}_0 + \mathrm{Div}\,\frac{\underline{\boldsymbol{Q}}}{T} - \rho_0\frac{r_0}{T} \geq 0 \tag{6.26}$$

L'inégalité de Clausius–Duhem en est une conséquence directe en suivant la même démarche que pour établir (5.63). On obtient ainsi **l'inégalité de Clausius–Duhem** en description lagrangienne :

$$D = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} - \rho_0(\dot{\psi}_0 + \dot{T}s_0) - \underline{\boldsymbol{Q}}\,.\frac{\underline{\boldsymbol{G}}}{T} \geq 0 \tag{6.27}$$

où $D(\underline{\boldsymbol{X}}\,,t)$ est la densité de **dissipation** lagrangienne. Noter que D a pour unité $\mathrm{W.m^{-3}}$ et que l'on calcule l'énergie dissipée en intégrant D par rapport au temps. L'énergie libre ψ_0 est une fonction des variables (6.23) de sorte que

$$\dot{\psi}_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} + \frac{\partial\psi_0}{\partial T}\,\dot{T} + \frac{\partial\psi_0}{\partial\underline{\boldsymbol{G}}}.\dot{\underline{\boldsymbol{G}}} \tag{6.28}$$

En substituant (6.28) dans (6.27) et en ordonnant les termes en $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}, \dot{T}$ et $\dot{\underline{\boldsymbol{G}}}$, la dissipation devient

$$D = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}) : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} - \rho_0 (\frac{\partial \psi_0}{\partial T} + \dot{s}_0)\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\boldsymbol{G}}} . \dot{\underline{\boldsymbol{G}}} - \underline{\boldsymbol{Q}} . \frac{\underline{\boldsymbol{G}}}{T} \geq 0 \tag{6.29}$$

La dissipation D doit être positive pour tous les processus thermomécaniques, c'est–à–dire toutes les transformations $\{\rho_0, \Phi, T, \underline{\boldsymbol{f}}, r\}$ satisfaisant les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Or, pour tout processus thermodynamique $\{\Phi, T\}$, on peut trouver $\{\rho, \underline{\boldsymbol{f}}, r\}$ tels que les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie soient identiquement vérifiées[5]. En particulier pour toute évolution $\{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T, \underline{\boldsymbol{G}}, \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}, \dot{T}, \dot{\underline{\boldsymbol{G}}}\}$ (en supposant quand même $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \neq 0$ et $T > 0$) en un point matériel $\underline{\boldsymbol{X}}$ et à l'instant t, on peut construire un processus thermodynamique $\{\Phi, T\}$ prenant ces valeurs en $(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$. Cela permet d'affirmer que l'inégalité (6.29) doit être vérifiée pour des valeurs de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}, \dot{T}, \dot{\underline{\boldsymbol{G}}}$ quelconques. Or l'expression de D est clairement linéaire en ces incréments. Ceci implique donc que les termes figurant devant $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}, \dot{T}, \dot{\underline{\boldsymbol{G}}}$ doivent s'annuler. Ainsi, l'application du second principe de la thermodynamique aux corps élastiques fournit les relations

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} \tag{6.30}$$

$$s_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial T} \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\boldsymbol{G}}} = 0 \tag{6.32}$$

Ces relations sont des lois de comportement dite **hyperélastiques** pour les contraintes et l'entropie (de manière équivalente pour l'énergie interne). Elles montrent que l'énergie libre est un **potentiel d'élasticité** dont découlent les relations contraintes–déformations et entropie–température. En toute rigueur, étant donné la propriété de symétrie du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}$, la relation (6.30) doit être modifiée en ne considérant que la partie symétrique de la dérivée partielle de l'énergie libre par rapport à la déformation. En pratique, le potentiel ψ_0 peut être pris comme une fonction symétrique des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$, sans restriction de généralité. Des couplages thermomécaniques sont bien sûr possibles puisque ψ_0 est une fonction générale de $(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)$. Par contre l'énergie libre ne peut pas dépendre du gradient de température $\underline{\boldsymbol{G}}$, c'est un résultat fort de l'analyse. Ces résultats sont relativement récents puisqu'ils n'ont été établis qu'en 1963 par Coleman et Noll dans la référence (Coleman and Noll, 1963).

On aurait pu prendre aussi un potentiel fonction du tenseur droit de Cauchy–Green $\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}, T)$. Comme $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}/2$ (cf. équation (2.202)), la première loi d'hyperélasticité s'écrit alors

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} \tag{6.33}$$

Il existe aussi une relation d'hyperélasticité (6.30) pour le tenseur des contraintes de Cauchy qui se déduit de (6.30) par

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \frac{1}{J} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \frac{\rho_0}{J} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \rho \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T \tag{6.34}$$

[5] Les efforts et production d'énergie massiques $\underline{\boldsymbol{f}}$ et r nécessaires pour satisfaire les équations de bilan s'expriment en effet directement en fonction de $\{\Phi, T\}$. Il est probable que dans la plupart des cas, on ne sait pas réaliser physiquement de telles distributions de sources internes. Il peut donc être moins troublant d'éviter de recourir à cet argument pour l'exploitation du second principe. C'est possible et cela conduit à une exploitation plus générale du second principe. Mais une telle méthode sort du cadre de ce cours. On renvoie à (Liu, 2002) pour ces prolongements (en particulier la méthode dite des multiplicateurs de Lagrange).

en tenant compte de $\rho_0 = J\rho$ (conservation de la masse (3.5)).

On pourrait se demander s'il est possible aussi de travailler directement avec les grandeurs eulériennes $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{B}})$ et d'écrire les lois d'hyperélasticité avec ces variables. En fait, comme le tenseur des contraintes de Cauchy ne possède pas de déformation conjuguée (cf. tableau 4.1 et équation (4.13)), il n'existe pas dans le cas général de potentiel élastique $\psi(\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})$[6]. Le mieux que l'on puisse faire c'est d'obtenir des relations mixtes telles que (6.34). On peut par exemple définir un potentiel $\psi(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}})$ et l'on trouve alors, après exploitation du second principe :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T \tag{6.35}$$

6.2.2 Propriétés importantes des matériaux hyperélastiques

Une loi de comportement hyperélastique est une loi d'élasticité particulière au sens de (6.1), mais toute loi d'élasticité n'est pas hyperélastique. En effet, toute loi (6.1) ne dérive pas d'un potentiel (6.30). La différence majeure entre une loi élastique (6.1) et une loi hyperélastique (6.30) est qu'avec une loi élastique, le travail élastique fourni dépend en général du trajet de déformation suivi, tandis qu'il n'en dépend pas si l'on utilise une loi hyperélastique. Pour le voir, on considère un trajet de déformation imposé allant de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_A$ (instant t_A) à l'état $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_B$ (instant t_B) selon un trajet particulier dans l'espace des déformations, à température constante T. On calcule alors la densité de travail mécanique fourni en un point matériel lors de cette transformation, en intégrant le long du trajet la densité de puissance (4.13) :

$$\begin{aligned} W(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_A \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_B) &:= \int_{t_A}^{t_B} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}\, dt = [\rho_0 \psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)]_A^B \\ &= \rho_0 \psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_B, T) - \rho_0 \psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_A, T) \end{aligned} \tag{6.36}$$

On voit que le travail de déformation W ne dépend que de la valeur des variables d'état au début et à la fin du processus et est indépendant du trajet de déformation[7]. Ce n'est pas le cas pour un corps élastique en général. Un contre–exemple sera donné au paragraphe suivant.

Si le trajet de déformation est fermé ou **cyclique**, i.e. si $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_A = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_B$, le résultat précédent implique que le travail fourni au cours de l'ensemble du cycle est nul. Cela signifie que l'énergie élastique stockée au cours d'une partie du trajet est rendue intégralement durant le trajet retour même s'il s'effectue par un autre chemin. C'est le caractère **réversible** du comportement hyperélastique.

Une propriété commune à tous les corps élastiques est l'indépendance de l'état de contrainte vis–à–vis de la vitesse de déformation $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}$. Cela est simplement dû au fait qu'on a délibérément restreint la fonctionnelle mémoire à une simple dépendance en $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ et non en $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}$. Pour un corps élastique, l'état de contrainte atteint à l'issue d'un trajet de déformation ne dépend pas du temps mis pour le parcourir. En effet, le travail fourni le long d'un tel trajet ne dépend que des valeurs de déformations rencontrées :

$$W(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_A \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_B) = \int_{t_A}^{t_B} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \frac{d\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}{dt}\, dt = \int_{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_A}^{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_B} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : d\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$$

[6] On fait remarquer que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^{-1}) : (\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T) = (\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^{-1} . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) : (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^T)$$

ce qui ne permet pas de définir $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ comme mesure de déformation conjuguée à $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$.

[7] Un trajet de déformation est une fonction $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, t) = 0$ donnée.

La **rigidité instantanée** d'un corps élastique est la pente de la réponse $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}$ fonction de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ définie de manière générale par

$$\Lambda_{ijkl} := \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}} \tag{6.37}$$

dans une base orthonormée $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3)$. Il s'agit donc d'un tenseur d'ordre 4 que l'on notera

$$\underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T) := \frac{\partial \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T) = \Lambda_{ijkl}(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_l \tag{6.38}$$

On l'appelle le **tenseur des modules d'élasticité instantanés**. Il est par définition tel que

$$\dot{\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}} = \underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} + \frac{\partial \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}}{\partial T}\dot{T}$$

Le tenseur des modules d'élasticité instantanés opère donc sur les tenseurs d'ordre 2 symétriques et renvoie un tenseur symétrique d'ordre 2. Il est par conséquent suffisant de se limiter aux tenseurs d'ordre 4 possédant les **symétries mineures** :

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{jikl} \tag{6.39}$$

Si le corps élastique est en outre hyperélastique, le tenseur des modules d'élasticité instantané s'exprime en fonction du potentiel d'élasticité, en combinant (6.30) et (6.37) :

$$\underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T) = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2} \tag{6.40}$$

En effet,

$$\Lambda_{ijkl} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial E_{kl}} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{ij}} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}}$$

Une conséquence fondamentale de ce résultat est le

Théorème 16 (Symétrie du tenseur des modules d'élasticité instantanés) *Le tenseur des modules d'élasticité instantanés possède les propriétés de* **symétries majeures** *suivantes :*

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klij} \tag{6.41}$$

que l'on notera

$$\underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}}^T = \underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}}$$

Preuve. La propriété découle du théorème de Schwarz d'interversion des dérivées partielles croisées :

$$\Lambda_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{kl}} \right) = \frac{\partial \Pi_{kl}}{\partial E_{ij}} = \Lambda_{klij}$$

en utilisant la définition (6.37). □

On dit souvent plus brièvement que le tenseur des modules d'élasticité instantanés est symétrique.

6.2.3 Hyperélasticité isotrope

Un corps hyperélastique est isotrope si son énergie libre $\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)$ est une fonction isotrope de ses arguments. D'après le théorème de représentation 29 (page 442) pour les fonctions scalaires isotropes d'une variable tensorielle, ψ_0 doit être une fonction des invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$:

$$\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T) \equiv \psi_0(I_1, I_2, I_3, T) \tag{6.42}$$

où les invariants principaux I_1, I_2, I_3 ont été définis par les relations (A.138) à (A.140). Dans cette partie, par commodité, on change les définitions de I_2 et I_3 en remplaçant (A.139) et (A.140) par

$$I_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) := \frac{1}{2}\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2, \quad I_3(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) := \frac{1}{3}\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^3 \tag{6.43}$$

Il est bien clair que $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ et $\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^3$ sont tous les deux des invariants qui font intervenir les produits des 3 valeurs principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$. Il ne s'agit que d'une substitution de notation qui simplifiera un peu les expressions des lois hyperélastiques isotropes.

Dès lors, les relations d'hyperélasticité (6.30) deviennent

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} \tag{6.44}$$

Calculons les dérivées des invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ par rapport à $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$. On peut vérifier composante par composante (dans une base orthonormée) que

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \frac{\partial \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{6.45}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{\partial \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{\partial E_{pq}E_{qp}}{\partial E_{ij}} = E_{ji} = E_{ij} \tag{6.46}$$

c'est–à–dire

$$\frac{\partial I_2}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \tag{6.47}$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}} &= \frac{1}{3}\frac{\partial \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^3}{\partial E_{ij}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{\partial E_{pq}E_{qr}E_{rp}}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{3}(E_{jr}E_{ri} + E_{pi}E_{jp} + E_{jq}E_{qi}) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial I_3}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = (\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2)^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2 \tag{6.48}$$

Finalement, la loi des solides hyperélastiques isotropes s'écrit

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1}\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2}\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3}\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2 \tag{6.49}$$

Ces lois d'hyperélasticité isotrope peuvent être comparées aux lois d'élasticité isotrope déjà établies au paragraphe (6.1.2). On réécrit ici la loi générale des corps élastiques isotropes (6.10) en fonction de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$, sans restriction de généralité :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1 \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} + \alpha_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2 \tag{6.50}$$

où les α_i sont des fonctions des invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$. On voit qu'un solide élastique isotrope est hyperélastique à condition qu'il existe un potentiel ψ_0 tel que

$$\alpha_0 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1}, \quad \alpha_1 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2}, \quad \alpha_2 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3}$$

Un tel potentiel existe si les fonctions α_i vérifient les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial I_2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_1}, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_3} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial I_2}, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial I_1} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial I_3}$$

Formulation eulérienne de l'hyperélasticité isotrope

Dans le cas isotrope, il est possible de trouver un potentiel élastique $\psi(\underset{\sim}{\boldsymbol{B}})$ dont dérive le tenseur des contraintes. Pour cela, on part de l'expression lagrangienne de la loi hyperélastique (6.49) en l'écrivant toutefois sous la forme équivalente

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = 2\left(\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1}\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2}\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3}\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2\right) \tag{6.51}$$

où l'on a préféré la variable $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$. Par abus de notation, on a gardé la même notation pour cette nouvelle fonction énergie libre. Les invariants I_i sont relatifs ici au tenseur de Cauchy–Green droit $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$. On calcule alors le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{J}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = 2\frac{\rho_0}{J}\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial I_1}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T + \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T + \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T\right) \\
&= 2\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1}\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^2\right).\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} \\
&= 2\rho\frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = 2\rho\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}}
\end{aligned} \tag{6.52}$$

On a utilisé le fait que les invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ sont les mêmes[8] et défini donc $\psi(\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}, T) = \psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)$ comme une fonction des invariants de $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$.

Un exemple de loi d'élasticité non hyperélastique

Nous sommes en mesure maintenant de montrer un exemple de loi d'élasticité isotrope qui ne soit pas hyperélastique. Considérons par exemple la loi d'élasticité isotrope particulière

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \frac{\alpha}{2}(\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2)\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{6.53}$$

Une telle loi n'est pas hyperélastique car

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial I_2} = \alpha \neq \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_1} = 0$$

[8] Cela vient du fait que pour 2 tenseurs d'ordre 2 quelconques $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$, on a

$$\operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}) = A_{ij}B_{ji} = B_{ji}A_{ij} = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$$

et donc :

$$\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}) = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T) = \operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$$

$$\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^2 = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}) = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T) = \operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^2$$

Une conséquence est que le travail de déformation d'un tel milieu sur un trajet $A \longrightarrow B$ dépend en fait du chemin suivi. Pour le voir, on considère par exemple deux trajets :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_1(\lambda)] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_2(\lambda)] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dans une base cartésienne orthonormée donnée. Ces deux trajets distincts permettent de partir d'un état non déformé $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_A = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_1(\lambda = 0) = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_2(\lambda = 0) = 0$ et d'atteindre le même état $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_B = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_1(\lambda = 1) = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_2(\lambda = 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en passant par les états transitoires distincts pour $0 \leq \lambda \leq 1$. On calcule la puissance pour ces états consécutifs de déformation

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \frac{\alpha}{2}(\lambda^2 + \lambda_2^2)(\dot{\lambda} + \dot{\lambda}_2)$$

avec $\lambda_2 = \lambda$ pour le premier trajet et $\lambda_2 = \lambda^2$ pour le second. En intégrant la puissance sur l'ensemble du trajet, on trouve

$$W_1 = \int_{t_A}^{t_B} 2\alpha\lambda^2\dot{\lambda}\, dt = \frac{2}{3}\alpha$$

$$W_2 = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\alpha}{2}(\lambda^2 + \lambda^4)(1 + 2\lambda)\dot{\lambda}\, dt = \frac{41}{60}\alpha$$

Le travail obtenu dépend donc du trajet[9] de déformation. Ce résultat s'oppose à l'idée que l'on se fait d'un comportement élastique, de sorte que l'on préférera toujours utiliser des lois hyperélastiques dans la modélisation et la simulation des matériaux élastiques, dans la mesure du possible. Lors de la modélisation phénoménologique de certains comportements élastiques non linéaires, il est parfois plus facile de construire des lois de type élastique que de trouver un potentiel d'élasticité.

6.2.4 Potentiel dual $\psi_0^\star$ pour les corps hyperélastiques

Il serait légitime de vouloir représenter les grandeurs physiques comme des fonctions non pas de $(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)$ mais de $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}, T)$, en particulier si les expériences permettant de déterminer les lois de comportement sont à contrainte imposée. On peut alors se demander s'il existe un potentiel dual $\psi_0^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}, T)$ tel que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0^\star}{\partial \Pi} \tag{6.54}$$

Si un tel potentiel dual existe, l'observation de la figure 6.2 indique qu'il représente **l'énergie complémentaire** au potentiel élastique pour former le travail élastique total :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \rho_0\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T) + \rho_0\psi_0^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}, T), \tag{6.55}$$

sous la contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}$. Dans le cas où le potentiel élastique est convexe, la relation précédente permet de définir $\psi_0^\star$ de manière univoque comme

$$\rho_0\psi_0^\star(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}, T) = \max_{\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} - \rho_0\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)) \tag{6.56}$$

[9] La différence est certes minime, 0.68α contre 0.66α ! Mais cumulée sur plusieurs cycles, une approche élastique de cette sorte peut s'avérer inacceptable.

$\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)$	potentiel d'élasticité (énergie libre massique)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}$	contraintes de Piola–Kirchhoff II
$\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} := \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}\, \partial \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}}$	tenseur des modules d'élasticité instantanés
$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk}$	symétries mineures des modules d'élasticité
$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klij}$	symétries majeures des modules d'élasticité
$s_0 = -\dfrac{\partial \psi_0}{\partial T}$	entropie massique
$D = -\dfrac{1}{T} \underline{\boldsymbol{Q}} . \dfrac{\underline{\boldsymbol{G}}}{T} = -\dfrac{1}{T} \dfrac{\rho_0}{\rho} \underline{\boldsymbol{q}} . \underline{\boldsymbol{g}} \geq 0$	dissipation thermique
$\underline{\boldsymbol{Q}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}(\underline{\boldsymbol{E}}, T) . \underline{\boldsymbol{G}}$	loi de Fourier
Cas des matériaux hyperélastiques isotropes :	
	$\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T) \equiv \psi_0(I_1, I_2, I_3, T)$
	$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \rho_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} + \rho_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2$

TAB. 6.1 – Récapitulatif : Lois de comportement des corps thermo–hyperélastiques.

Pour montrer l'équivalence entre les définitions (6.55) et (6.56)[10], on s'appuie sur la convexité supposée du potentiel $\rho_0\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}})$. On voit sur la figure 6.3 que, pour un Π donné, l'écart entre $\Pi.E$ et $\rho_0\psi_0$ est maximal pour la déformation E telle que la tangente à la courbe $\rho_0\psi_0$ en E est parallèle à la droite $\sigma.\varepsilon$. Cette situation correspond donc bien à $\Pi = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial E}(E)$. La démonstration esquissée ici par un schéma uni–dimensionnel s'étend au cas tridimensionnel. En outre, le potentiel dual est convexe par rapport à ses arguments dès que le potentiel élastique l'est. On verra, au moins dans le cas linéaire, que la convexité du potentiel élastique est synonyme de stabilité du corps considéré.

La seconde relation d'hyperélasticité (6.31) s'écrit aussi à l'aide du potentiel dual en dérivant (6.56) par rapport à la température

$$s = \frac{\partial \psi_0^\star}{\partial T} \tag{6.57}$$

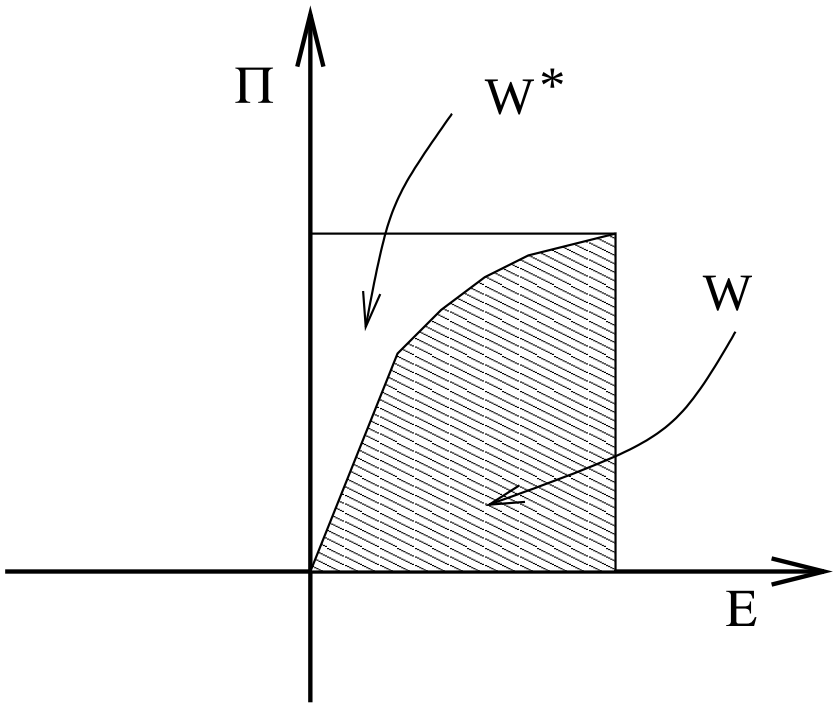


FIG. 6.2 – Réponse non linéaire du matériau dans le cas uniaxial et définition du potentiel élastique et de l'énergie complémentaire : $W(E) = \int_0^E W'(E)dE, W^\star(\Pi) = \int_0^\Pi W'^\star(\Pi)d\Pi$. On en déduit que W est l'aire sous la courbe et $W^\star$ l'aire complémentaire. Les fonctions $W(E)$ et $W^\star(\Pi)$ sont respectivement égales au potentiel élastique et au potentiel dual pour une température fixée.

6.3 Liaisons internes dans les corps élastiques

Dans les analyses précédentes, on a supposé que les corps étaient capables d'accommoder tous les états de déformation possibles. Ce n'est pas toujours le cas en pratique. Le mouvement de certains corps est parfois entravé par une **liaison interne**. L'exemple le plus important est sans doute la liaison interne d'**incompressibilité**. Le milieu incompressible n'est pas capable de changer de volume. La prise en compte des liaisons internes a des conséquences sur la forme de la loi de comportement. C'est l'objet de ce paragraphe.

[10] Le potentiel dual s'appelle transformée de Legendre–Fenchel du potentiel élastique.

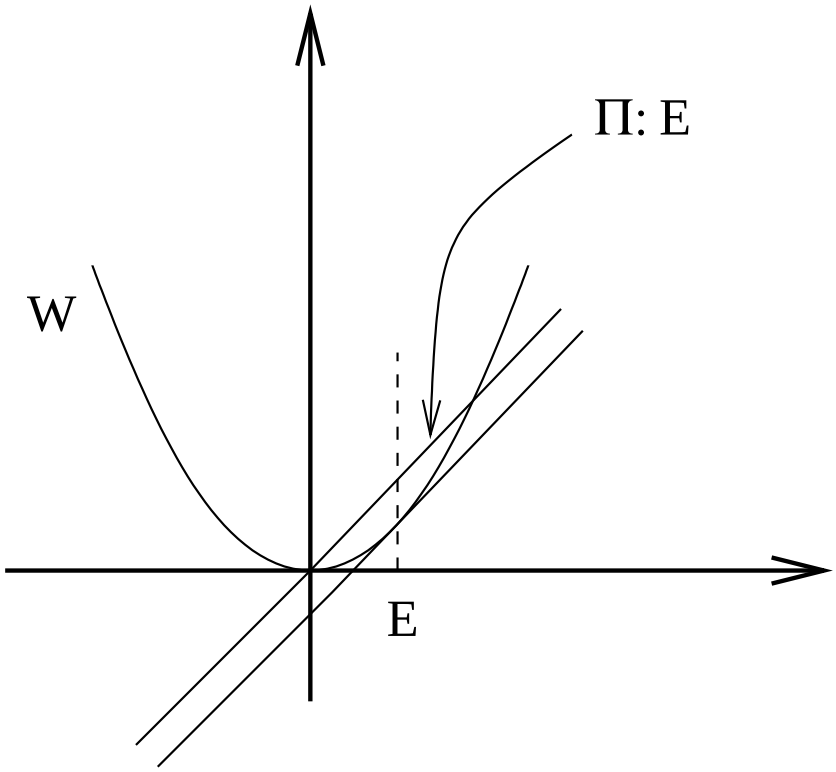


FIG. 6.3 – Construction géométrique du potentiel d'élasticité dual. W est égal au potentiel élastique à une température donnée. Le travail $\Pi.E$ est représenté par la droite passant par l'origine. Le potentiel dual $W^\star(\Pi)$ est la différence entre le travail élastique total et la valeur du potentiel W au point où sa tangente est parallèle à Π.

6.3.1 Prise en compte de la liaison interne lors de l'exploitation du second principe

Une liaison interne s'exprime de façon générale sous la forme d'une relation liant les composantes d'un tenseur de déformation. On choisit ici $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et on note g la fonction décrivant la liaison interne qui se met sous la forme

$$g(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}) = 0$$

On définit alors l'ensemble $\mathcal{L}$ des déformations satisfaisant la liaison interne

$$\mathcal{L} := \{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} \in GL(E), \text{symétriques} \quad | \quad g(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}) = 0\} \tag{6.58}$$

On reprend l'exploitation du second principe pour un corps élastique en remplaçant simplement $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ par $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ dans (6.29) :

$$D = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}) : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} - \rho_0 (\frac{\partial \psi_0}{\partial T} + s_0)\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\boldsymbol{G}}} : \dot{\underline{\boldsymbol{G}}} - \underline{\boldsymbol{Q}}.\frac{\underline{\boldsymbol{G}}}{T} \geq 0 \tag{6.59}$$

A T et $\underline{\boldsymbol{G}}$ fixés, cette inégalité doit être valable pour toutes les valeurs de $\dot{T}$ et $\dot{\underline{\boldsymbol{G}}}$. Les relations d'hyperélasticité (6.31) et (6.32) sont donc toujours valables. Il reste

$$D = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}) : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} \geq 0 \tag{6.60}$$

où $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}$ ne peut pas prendre toutes les valeurs puisque $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ doit rester dans $\mathcal{L}$. Les tenseurs admissibles $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ sont donc tels que

$$\dot{g}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}) = \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = 0 \tag{6.61}$$

L'exploitation de (6.60) n'implique donc pas la nullité du terme en facteur de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}$ mais plutôt qu'il existe λ tel que

$$(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} \tag{6.62}$$

On note

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^R = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} \tag{6.63}$$

et on l'appelle contrainte de **réaction** à la liaison interne g. La loi d'hyperélasticité s'écrit donc

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^R + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} \tag{6.64}$$

Cette formulation très générale prend tout son sens quand on l'applique à des liaisons internes particulières. Elle montre que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}$ n'est soumis à aucune restriction alors même que la cinématique du solide est contrainte. Les contraintes de réaction restent indéterminées et ne peuvent être précisées qu'en utilisant les équations de bilan et les conditions aux limites du problème de structure à résoudre.

Les contraintes de réaction ne fournissent aucun travail dans un mouvement compatible avec la liaison interne puisque

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^R : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = 0$$

d'après (6.61).

6.3.2 Incompressibilité

La liaison interne d'incompressibilité s'écrit $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = 1$ mais aussi

$$g(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}) = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - 1 = 0 \tag{6.65}$$

La dérivée de g par rapport à $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ se calcule en utilisant le résultat (A.144) du chapitre A :

$$\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}) \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1} \tag{6.66}$$

On en déduit la loi de comportement d'un **corps hyperélastique incompressible** sous la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \lambda \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}^{-1} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} \tag{6.67}$$

Elle est plus facile à reconnaître si on exprime le tenseur des contraintes de Cauchy et si l'on écrit $\lambda = -p$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\boldsymbol{1}} + 2\rho \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \frac{\partial \psi_0}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T \tag{6.68}$$

L'incompressibilité ajoute donc une réaction de pression à l'état de contrainte. En conséquence la pression que subit le corps reste indéterminée par la loi de comportement. Il faudra calculer cette réaction par ailleurs grâce aux conditions d'équilibre.

En particulier si le corps est un fluide élastique au sens des lois de comportement (6.17) ou (6.18), on voit que son état de contrainte est un état de réaction pure.

6.3.3 Rigidité

La condition de rigidité d'un solide est une liaison interne qui impose des liaisons sur toutes les composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}} = 0$$

Par conséquent la dérivée de $\underset{\sim}{\boldsymbol{g}}$ par rapport à $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ est l'identité $\underset{\approx}{\mathbf{1}}_S$ d'ordre 4 opérant sur les tenseurs symétriques. Le multiplicateur de Lagrange $\underset{\sim}{\boldsymbol{\lambda}}$ associé est donc un tenseur d'ordre 2 symétrique arbitraire. Les contraintes de réaction d'un solide rigide sont donc un tenseur de contraintes symétrique quelconque. Les solides rigides accommodent donc n'importe quelle contrainte imposée sans fournir de travail de déformation correspondant.

6.3.4 Inextensibilité dans une direction

Certains matériaux sont incapables de se déformer selon une direction $\underline{\boldsymbol{e}}$ particulière, vecteur unitaire de la configuration de référence. C'est le cas par exemple d'un matériau composite à fibres unidirectionnelles en SiC (carbure de silicium, très rigide), toutes parallèles entre elles et entourées d'une matrice résine époxy significativement plus souple (utilisation dans l'aéronautique). Dans ce cas la liaison interne d'inextensibilité s'écrit avec

$$g(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}) = \underline{\boldsymbol{e}} \,.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\underline{\boldsymbol{e}} \, - \underline{\boldsymbol{e}} \,.\underline{\boldsymbol{e}} \, = 0$$

Les contraintes de réaction associées à cette liaison interne sont donc de la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^R = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}} = \lambda \underline{\boldsymbol{e}} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}$$

Il s'agit donc d'une contrainte de traction arbitraire dans la direction des fibres. Il est instructif de calculer les contraintes de réaction sur la configuration actuelle :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^R = J^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^R . \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \sigma^R (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \underline{\boldsymbol{e}} \,) \otimes (\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} . \underline{\boldsymbol{e}} \,)$$

c'est–à–dire une traction simple selon la direction actuelle des fibres, en supposant qu'elles se déforment comme des lignes matérielles.

Chapitre 7

Thermoélasticité linéarisée

7.1 Linéarisation de la loi des corps thermoélastiques

Lors de l'examen de l'intégrité et de la fiabilité des structures, il est bien souvent suffisant de considérer la réponse de la structure à de faibles déformations. Dans ce cadre infinitésimal, les lois de comportement prennent des formes plus simples à manipuler et à identifier expérimentalement. Il est toutefois important de bien préciser le type d'approximation qui est faite. On considère ici deux types d'approximation :

- **Hypothèse des déformations infinitésimales.** On suppose alors que les déformations de Green–Lagrange par rapport à une configuration de référence donnée restent faibles :

$$\|\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}\| \ll 1 \tag{7.1}$$

  Cette hypothèse ne concerne que les déformations. On n'exclut donc pas la possibilité de rotations finies (non infinitésimales). La situation de corps faiblement déformés mais subissant des rotations importantes a déjà été envisagée au paragraphe 2.3.3 (page 47). On a mentionné le cas des structures élancées dans une ou deux directions de l'espace, dont chacun de nous fait l'expérience quotidienne. Pour des structures réellement tridimensionnelles, si les déformations sont petites, les rotations le sont aussi (à une mouvement de corps rigide près).
- **Hypothèse des transformations infinitésimales.** De telles transformations ont déjà été décrites au paragraphe 2.3.3 et sont caractérisées par la condition (2.106) :

$$\|\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{u}} \otimes \boldsymbol{\nabla}\| \ll 1 \Longleftrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \mathcal{O}(\underset{\sim}{\mathbf{1}}) \tag{7.2}$$

  qui implique que les déformations $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et les rotations $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$, définies respectivement comme les parties symétrique et antisymétrique de $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$, restent limitées.

La linéarisation sera faite aussi par rapport à la température et les lois linéarisées ne seront donc valables que pour des **variations de température** suffisamment faibles :

$$\frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1 \tag{7.3}$$

7.1.1 Cas des déformations infinitésimales

Les lois d'hyperélasticité (6.30) et (6.31) sont linéarisées autour d'un état initial $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = 0$ et une température $T = T_0$ en un point matériel $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$. Cela signifie que le potentiel d'élasticité

énergie libre $\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T)$ est approché par une fonction quadratique de ses arguments $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ et $T - T_0$. La forme générale d'une telle fonction quadratique est

$$\rho_0\psi_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}, T) := -\rho_0(T-T_0)\hat{s}^0 + \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 : \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{2}\frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0}(T-T_0)^2 - (T-T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \quad (7.4)$$

à une constante additive près dont le choix est sans conséquence dans la suite puisque le potentiel est dérivé pour obtenir les lois d'état linéarisées :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0\frac{\partial\psi_0}{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}(T-T_0) \quad (7.5)$$

$$\rho_0 s_0 = -\rho_0\frac{\partial\psi_0}{\partial T} = \rho_0\hat{s}^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0}(T-T_0) + \underset{\sim}{\boldsymbol{P}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \quad (7.6)$$

Le tenseur d'ordre 4 $\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}$ est le **tenseur des modules d'élasticité**, déjà introduit au chapitre précédent. La **chaleur massique** (à déformation constante[1]) est C_ε et on peut vérifier que

$$C_\varepsilon := T\frac{\partial s_0}{\partial T} = \frac{\partial e}{\partial T} \quad (7.7)$$

On introduit le **tenseur des dilatations thermiques** $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ tel que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} =: \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \quad (7.8)$$

de sorte que la loi d'élasticité linéaire (7.5) prend la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} - (T-T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (7.9)$$

Le terme constant $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$ s'interprète comme un état de contrainte initial existant au point $\underline{\boldsymbol{X}}$ à déformation nulle. C'est souvent le cas de matériaux prédéformés, ou bien lors de l'étude de structures chargées dont on étudie la tenue en service à partir de cet état initial (génie civil, assemblages frettés). Le tenseur des modules d'élasticité sera supposé inversible pour des raisons qui seront exposées au chapitre 8 de sorte que le tenseur des dilatations thermiques peut être défini sans ambiguïté par (7.8). On appelle **déformation (d'origine) thermique** linéarisée le tenseur

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^{th} = (T-T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \quad (7.10)$$

si bien que la loi d'élasticité linéarisée (7.9) peut aussi s'écrire

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : (\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^{th}) \quad (7.11)$$

Le tenseur des dilatations thermiques $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ peut être pris symétrique car seule la partie symétrique de $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ travaille avec $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ dans l'énergie (7.4).

Pour éviter toute ambiguïté, nous réécrivons les relations (7.4) et (7.9) sous forme indicielle dans une base cartésienne orthonormée :

$$\rho_0\psi_0(E_{ij}, T) := -\rho_0(T-T_0)\hat{s}^0 + \Pi^0_{ij}E_{ij} - \frac{1}{2}\frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0}(T-T_0)^2 - (T-T_0)P_{ij}E_{ij} + \frac{1}{2}E_{ij}\Lambda_{ijkl}E_{kl} \quad (7.12)$$

$$\Pi_{ij} = \Pi^0_{ij} + \Lambda_{ijkl}(E_{kl} - (T-T_0)\alpha_{kl}) \quad (7.13)$$

[1] Pour les gaz et les liquides, on parle de la chaleur massique à volume constant, notée C_V.

On rappelle les propriétés de symétrie du tenseur des modules d'élasticité :

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klij} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk}$$

et celle du tenseur des dilatations thermiques

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Le tenseur des modules d'élasticité $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}$, le tenseur des dilatations thermiques $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$, la chaleur massique C_ε sont des propriétés intrinsèques du matériau. Elles ont été déterminées expérimentalement pour un grand nombre de solides anisotropes sur un large domaine de températures. Ces grandeurs sont rassemblées dans des tables de physique–chimie (Martienssen and Warlimont, 2005). On recommande la référence (Ashby and Jones, 1991) pour un premier accès aux ordres de grandeurs des propriétés physiques, ou sa version anglaise originale (Ashby and Jones, 1980).

Concrètement, pour de nombreux matériaux, le domaine de la thermoélasticité linéaire concerne des déformations ne dépassant pas 10^{-3} voire 10^{-2}, au–delà desquelles des déformations **irréversibles, permanentes** risquent de se produire.

Linéarisation de la loi des corps élastiques anisotropes

Pour obtenir la loi d'élasticité linéaire isotrope, on peut chercher la forme d'un tenseur $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}$ d'ordre 4 isotrope. C'est ce qui sera fait au paragraphe 7.2 (page 176). On peut aussi linéariser directement la relation d'hyperélasticité isotrope (6.50) obtenue au chapitre précédent, en ne gardant que les termes linéaires en $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$. En particulier le terme en $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}^2$ peut être négligé et il reste :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \lambda(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{E}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} - P(T - T_0)\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{7.14}$$

où l'on a tenu compte du fait que les fonctions α_i dans (6.50) peuvent dépendre de T. Il ne reste que trois constantes indépendantes : les **coefficients de Lamé** λ, μ, et le coefficient de couplage thermomécanique P que l'on précisera au paragraphe 7.2.6. Il peut exister une contrainte initiale $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$. Pour que la configuration initiale correspondante soit isotrope, elle doit prendre la forme d'une pression pure :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 = -\Pi^0\,\underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

7.1.2 Cas des transformations infinitésimales

Dans le cas des transformations infinitésimales, la loi d'élasticité linéarisée prend la même forme que (7.5) en remplaçant le tenseur de Green–Lagrange $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ par le tenseur des déformations infinitésimales $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ car, d'après (2.106) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$$

Cela donne

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - (T - T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \tag{7.15}$$

On cherche dans ce contexte des transformations infinitésimales à exprimer la relation linéarisée entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T = \frac{\rho}{\rho_0}(\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}).(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - (T - T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}).(\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T) \tag{7.16}$$

Il faut développer la relation précédente en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$. En particulier, remarquer que

$$\frac{\rho}{\rho_0} = J^{-1} \simeq 1 - \text{trace}\,\underset{\sim}{\varepsilon}$$

Ce développement limité donne

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon} - (T - T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 - (\text{trace}\,\underset{\sim}{\varepsilon})\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0.\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T \tag{7.17}$$

On voit le rôle important que joue l'état de contraintes initial $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$ qui intervient comme terme constant mais aussi en facteur de $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}$. Lorsque $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 = 0$, on parle d'**état naturel** (cette dénomination a déjà été introduite au paragraphe 6.1.2). Il est possible de réduire encore la relation (7.17) même dans le cas où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$ est non nul. Il faut pour cela comparer les termes

$$\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\varepsilon}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$$

et remarquer que, pour la plupart des matériaux, les modules d'élasticité sont systématiquement plus grands que tout état de contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$ accessible dans le domaine d'élasticité du matériau[2]. En pratique, le terme $\underset{\sim}{\varepsilon}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$ peut donc être négligé devant $\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon}$,

$$\|\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0\| \ll \|\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}\| \tag{7.18}$$

La relation (7.17) se réduit maintenant à

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon} - (T - T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 - \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0.\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} \tag{7.19}$$

où subsistent les produits entre la contrainte initiale et les tenseur des rotations infinitésimales qui ne peuvent éliminés dans le cas général. En effet, rien ne dit *a priori* que les déformations et les rotations infinitésimales soient du même ordre de grandeur. On a déjà évoqué le cas de structures élancées pour lesquelles les déformations sont beaucoup plus faibles que les valeurs des rotations (cf. figure 2.12). Il n'est alors pas possible d'enlever les termes de rotation dans la loi d'élasticité linéarisée. Ces termes peuvent d'ailleurs jouer un rôle essentiel pour prévoir de possibles instabilités de certaines structures précontraintes (flambage par exemple). Dans le cas des solides tridimensionnels toutefois, on peut conjecturer que déformations et rotations infinitésimales sont du même ordre de grandeur.

On introduit alors la notion d'**état quasi–naturel** pour lequel les rotations infinitésimales sont suffisamment faibles pour que

$$\|\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0\| \ll \|\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon}\| \tag{7.20}$$

Si la configuration par rapport à laquelle on effectue la linéarisation correspond à un état quasi–naturel, on peut négliger les produits entre $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0$ et le tenseur des déformations infinitésimales devant $\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon}$. On s'en tient alors à la loi d'élasticité linéarisée :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon} - (T - T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \tag{7.21}$$

qui est identique à (7.15) en remplaçant le tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff II par le tenseur des contraintes de Cauchy. Dans le contexte des transformations infinitésimales et pour un état quasi–naturel, on ne fera plus la distinction entre ces tenseurs.

[2] Pour un acier, le module d'Young est de 200 GPa et la limite d'élasticité ne dépasse que très rarement 2GPa (c'est déjà un acier à haute résistance !). Pour un polymère, modules et limite d'élasticité sont 100 à 1000 fois plus petits que pour un métal. On voit donc qu'en général : $\sigma_0 \ll E$.

Elasticité linéaire isotrope

Le cas isotrope s'obtient directement à partir de la relation (7.14) dans le contexte des transformations infinitésimales pour un état initial quasi–naturel. On peut écrire la loi sous la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0 + \lambda(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - P(T - T_0)\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{7.22}$$

Il peut exister une contrainte initiale $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0$. Pour que la configuration initiale correspondante soit isotrope, celle–ci doit prendre la forme d'une pression pure :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0 = -\sigma^0\,\underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

7.2 Etude du tenseur d'élasticité anisotrope

On étudie ici la forme du tenseur des modules d'élasticité dans les différents cas de symétrie rencontrés dans les solides. Cela consiste à déterminer dans chaque cas le nombre de constantes d'élasticité indépendantes permettant de calculer toutes les composantes Λ_{ijkl} dans une base donnée. On introduit au passage une représentation matricielle pour les tenseurs d'ordre 4 symétriques.

7.2.1 Changement de base pour les tenseurs des propriétés thermoélastiques

Les composantes du tenseur des modules d'élasticité sont en général connues dans un repère particulier lié aux axes d'anisotropie du matériau étudié (on parle de **repère matériau** $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,2,3}$). Selon le groupe des symétries matérielles du corps étudié, le nombre de composantes non nulles est souvent plus faible dans ce repère non nécessairement orthonormé. Par contre, pour l'utilisation du matériau, il est utile de se placer dans le **repère de la structure** $(\underline{\boldsymbol{e}}'_i)_{i=1,2,3}$. Les vecteurs des deux bases sont reliés par une matrice de passage

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i = P_i^k \underline{\boldsymbol{e}}'_k$$

Le tenseur des modules d'élasticité peut se décomposer selon les deux bases

$$\begin{aligned}
\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} &:= \Lambda^{ijkl}\,\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_l \\
&= \Lambda^{ijkl}\,(P_i^m \underline{\boldsymbol{e}}'_m) \otimes (P_j^n \underline{\boldsymbol{e}}'_n) \otimes (P_k^p \underline{\boldsymbol{e}}'_p) \otimes (P_l^q \underline{\boldsymbol{e}}'_q) \\
&= P_i^m P_j^n P_k^p P_l^q \Lambda^{ijkl}\,\underline{\boldsymbol{e}}'_m \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_n \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_p \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_q
\end{aligned} \tag{7.23}$$

ce qui conduit à l'identification des composantes de $\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}$ dans la base des $(\underline{\boldsymbol{e}}'_i)$:

$$\Lambda'^{mnpq} = P_i^m P_j^n P_k^p P_l^q \Lambda^{ijkl} \tag{7.24}$$

Si les bases sont orthonormées, la matrice P_i^k est une matrice de rotation et on ne distinguera pas les composantes contravariantes des composantes covariantes du tenseur des modules d'élasticité.

Le tenseur des dilatations thermiques se transforme quant à lui comme un tenseur d'ordre deux :

$$\alpha'^{mn} = P_i^m P_j^n \alpha^{ij}$$

7.2.2 Rigidités et souplesses ; notation de Voigt pour les modules d'élasticité

La loi de Hooke concerne le cas de déformations purement élastiques d'un corps dans l'état naturel :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.25}$$

Le tenseur des modules d'élasticité $\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}$ s'appelle aussi **tenseur des rigidités** élastiques du corps élastique étudié (*stiffness* en anglais). On peut aussi exprimer le tenseur des déformation infinitésimales en fonction du tenseur des contraintes, ce qui est utile lorsque les efforts sont imposés pendant un essai mécanique. Il faut pour cela inverser la relation (7.25) en supposant que le tenseur de Hooke soit inversible, propriété déjà mentionnée et sur laquelle nous reviendrons au prochain chapitre. Le tenseur d'ordre 4 inverse s'appelle **tenseur des souplesses** $\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{S}}$ (*compliance* en anglais, d'où l'anglicisme *complaisance* parfois abusivement utilisé) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{S}} := \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} \tag{7.26}$$

L'inverse d'un tenseur d'ordre 4 est défini ici de la manière suivante

$$\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{S}} = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{I}} \tag{7.27}$$

où $\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{I}}$ désigne le tenseur identité d'ordre 4 opérant sur les tenseurs symétriques d'ordre 2. Il est défini par

$$\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}, \quad \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{I}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{I}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}, \quad \text{et} \quad I_{ijkl} := \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{7.28}$$

Les tenseurs d'ordre 4 posent un problème de représentation en raison de leurs quatre indices et nombreuses composantes. En même temps qu'il baptisait toute une variété d'objets mathématiques du nom de *tenseur*, à la fin du siècle dernier, le grand physicien et mécanicien allemand Woldemar Voigt proposa une représentation matricielle des tenseurs d'ordre 4. L'objet de ses travaux était la détermination des propriétés physiques et mécaniques des cristaux (Voigt, 1898)[3]. Il faut d'abord réduire le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Hooke (et, de manière équivalente, du tenseur des souplesses) en tenant compte des propriétés de symétries mineures et majeures. On part *a priori* de

$$3\text{x}3\text{x}3\text{x}3 = 81$$

composantes Λ_{ijkl}. En tenant compte du fait que $\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk}$, on remarque que chaque couple (ij) ne donne lieu en fait qu'à 6 composantes indépendantes, les 6 composantes d'un tenseur d'ordre 2 symétrique (au lieu de 9). Cela fait donc

$$6\text{x}6 = 36$$

composantes à prendre en compte. Enfin, les symétries majeures des coefficients font que seulement 21 parmi ces 36 composantes restent *a priori* indépendantes. Les 36 composantes

[3] On mentionnera aussi l'excellente école de mécanique et de cristallographique berlinoise de la deuxième moitié du XIXème siècle qui contribua de manière essentielle, par une rigueur absolue, à l'étude de l'anisotropie des propriétés physiques (optiques, penser à la biréfringence) et mécaniques des matériaux cristallins, en particulier en la personne de Franz Neumann (1798–1895). C'est de ces études que l'algèbre et l'analyse tensorielles sont nées et se sont développées. Les propriétés physiques et mécaniques des cristaux sont liées entre elles en particulier par les symétries matérielles. On peut classer les propriétés physiques selon leur caractère tensoriel : scalaires pour la masse et la capacité calorifique, tenseurs d'ordre deux pour la conductivité thermique par exemple et les propriétés électromagnétiques, tenseurs d'ordre 3 pour la piézo-électricité, et enfin tenseurs d'ordre 4 pour l'élasticité qui représente indéniablement l'une des propriétés physiques faisant appel à la plus grande complexité mathématique de représentation. Cela donne à la mécanique des milieux continus une richesse et un attrait indiscutables !

peuvent être rangées dans une matrice C_{IJ} à 6x6 composantes, avec la convention suivante d'équivalence entre un super–indice I et une paire d'indices associée ij :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longleftrightarrow & 11 \\ 2 & \longleftrightarrow & 22 \\ 3 & \longleftrightarrow & 33 \\ 4 & \longleftrightarrow & 23 \\ 5 & \longleftrightarrow & 31 \\ 6 & \longleftrightarrow & 12 \end{array}$$

Ainsi on notera[4]

$$\begin{array}{rcl} C_{11} & = & \Lambda_{1111} \\ C_{22} & = & \Lambda_{2222} \\ C_{12} & = & \Lambda_{1122} = \Lambda_{2211} = C_{21} \\ C_{13} & = & \Lambda_{1133} = \Lambda_{3311} = C_{31} \\ C_{23} & = & \Lambda_{2233} = \Lambda_{3322} = C_{32} \\ C_{44} & = & \Lambda_{2323} = \Lambda_{3223} = \Lambda_{2332} = \Lambda_{3232} \\ C_{66} & = & \Lambda_{1212} = \Lambda_{2112} = \Lambda_{1221} = \Lambda_{2121} \\ C_{46} & = & \Lambda_{2312} = \Lambda_{3212} = \Lambda_{2321} = \Lambda_{3221} = \Lambda_{1223} = \Lambda_{2123} = \Lambda_{1232} = \Lambda_{2132} = C_{64} \end{array}$$

La matrice symétrique C_{IJ} a 21 composantes indépendantes, on le vérifiera aisément, et permet donc de coder l'ensemble des composantes du tenseur de Hooke dans une base quelconque donnée. Ecrivons maintenant explicitement quelques–unes des relations d'élasticité à l'aide de cette matrice :

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{11} & = & \Lambda_{1111}\varepsilon_{11} + \Lambda_{1122}\varepsilon_{22} + \Lambda_{1133}\varepsilon_{33} \\ & + & \Lambda_{1123}\varepsilon_{23} + \Lambda_{1132}\varepsilon_{32} + \Lambda_{1131}\varepsilon_{31} + \Lambda_{1113}\varepsilon_{13} + \Lambda_{1112}\varepsilon_{12} + \Lambda_{1121}\varepsilon_{21} \\ & = & C_{11}\sigma_{11} + C_{22}\sigma_{22} + C_{33}\sigma_{33} + 2C_{14}\sigma_{23} + 2C_{15}\sigma_{31} + 2C_{16}\sigma_{12} \end{array} \tag{7.29}$$

De même,

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{12} & = & \Lambda_{1211}\varepsilon_{11} + \Lambda_{1222}\varepsilon_{22} + \Lambda_{1233}\varepsilon_{33} \\ & + & \Lambda_{1223}\varepsilon_{23} + \Lambda_{1232}\varepsilon_{32} + \Lambda_{1231}\varepsilon_{31} + \Lambda_{1213}\varepsilon_{13} + \Lambda_{1212}\varepsilon_{12} + \Lambda_{1221}\varepsilon_{21} \\ & = & C_{61}\varepsilon_{11} + C_{62}\varepsilon_{22} + C_{63}\varepsilon_{33} + 2C_{64}\varepsilon_{23} + 2C_{65}\varepsilon_{31} + 2C_{66}\varepsilon_{12} \end{array} \tag{7.30}$$

On voit qu'on peut ranger les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations en 2 vecteurs–colonnes reliés par la matrice 6x6 des modules d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{7.31}$$

[4] Pour se souvenir de l'équivalence pour les super–indices 4,5,6, on peut remarquer que la somme $I+i+j = 9$ si ij est associé à I.

La notation dite du **cisaillement de l'ingénieur** a été introduite dans le vecteur–colonne des déformations :

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} &= 2\varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

On vérifiera que le produit matrice-vecteur (7.31) est bien en accord avec les calculs directs (7.29) et (7.30). La notation de Voigt constitue un véritable isomorphisme entre les tenseurs d'ordre 4 symétriques et les matrices 6x6 symétriques.

En inversant la matrice des C_{IJ}, on obtient la matrice des souplesses

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

Pour voir le lien entre les composantes S_{IJ} et les S_{ijkl}, on écrit

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33} \\ &+ S_{1123}\sigma_{23} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1131}\sigma_{31} + S_{1113}\sigma_{13} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1121}\sigma_{21} \\ &= S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33} \\ &+ S_{14}\sigma_{23} + S_{15}\sigma_{31} + S_{16}\sigma_{12} \end{aligned} \tag{7.33}$$

d'où l'identification

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{1111} \\ S_{14} &= 2S_{1123} = 2S_{1132} = 2S_{2311} = 2S_{3211} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = 2S_{1211}\sigma_{11} + 2S_{1222}\sigma_{22} + 2S_{1233}\sigma_{33} \\ &+ 2S_{1223}\sigma_{23} + 2S_{1232}\sigma_{32} + 2S_{1231}\sigma_{31} + 2S_{1213}\sigma_{13} + 2S_{1212}\sigma_{12} + 2S_{1221}\sigma_{21} \\ &= S_{61}\sigma_{11} + S_{62}\sigma_{22} + S_{63}\sigma_{33} \\ &+ S_{64}\sigma_{23} + S_{65}\sigma_{31} + S_{66}\sigma_{12} \end{aligned} \tag{7.34}$$

d'où l'identification

$$\begin{aligned} S_{61} &= 2S_{1211} = 2S_{2111} = 2S_{1112} = 2S_{1121} = S_{16} \\ S_{64} &= 4S_{1223} = 4S_{1232} = 4S_{2123} = 4S_{2132} = 4S_{2312} = 4S_{3212} = 4S_{3221} = S_{46} \end{aligned}$$

On voit que des facteurs 2 et 4 se sont glissés dans les relations entre les coefficients S_{IJ} et les composantes S_{ijkl}. Cela est dû à l'utilisation de cisaillement de l'ingénieur γ_{ij} et il faudra donc faire très attention lors du passage du tenseur d'ordre 4 à la matrice des souplesses[5]. Il s'agit d'un inconvénient de la notation de Voigt qui peut être levé en utilisant une variante de cette notation, véritable algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques présentée au paragraphe 7.2.7.

Les composantes C_{IJ} sont tabulées pour de nombreux monocristaux métalliques ou céramiques dans (Simmons and Wang, 1971).

[5] Si $I \leq 3$ et $J \leq 3$, alors $S_{IJ} = S_{ijkl}$.
Si $I \leq 3$ et $4 \leq J$, alors $S_{IJ} = 2S_{ijkl}$.
Si $4 \leq I$ et $J \leq 3$, alors $S_{IJ} = 2S_{ijkl}$.
Si $4 \leq I$ et $4 \leq J$, alors $S_{IJ} = 4S_{ijkl}$.

7.2.3 Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des modules d'élasticité

Il est possible de tirer parti des symétries particulières du solide étudié pour simplifier la forme de la matrice générale d'élasticité (7.31). Cette classification des solides selon leurs éléments de symétrie est très utile en particulier lorsqu'on utilise des **matériaux composites** dans les structures aéronautiques ou dans les réservoirs sous pression (penser aux réservoir GPL en composites à fibres de carbone, cf. le cours (Cailletaud, 2003)). On renvoie à l'ouvrage (Berthelot, 1999) pour l'étude de l'élasticité des composites.

On rappelle un énoncé issu de la cristallographie, appelé principe de Curie : le groupe des symétries géométriques d'un solide (cristallin ou composite) est un sous–groupe du groupe des symétries matérielles $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ pour une propriété physique donnée (loi de comportement). Si l'on connaît la nature physique du matériau étudié (monocristal métallique par exemple ou composite stratifié), on a de sérieux indices sur la nature de $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$. Celle–ci dépend aussi de l'ordre tensoriel de la propriété physique étudiée. On connaît maintenant des propriétés physiques d'ordre 4, l'élasticité, et deux propriétés d'ordre 2, la dilatation et la conductivité thermiques. On précise ci–dessous le nombre de paramètres d'élasticité indépendants nécessaires et le cas thermique est abordé au paragraphe 7.2.6. Le nombre de constantes indépendantes selon les classes de symétrie est aussi rappelé dans le tableau 5.2.

Elasticité triclinique

Un solide qui ne possède aucun autre élément de symétrie que l'identité et la symétrie centrale est dit **triclinique**. La forme générale de sa matrice de rigidité est donnée par (7.31).

Elasticité monoclinique

Un matériau **monoclinique** possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) se simplifie lorsque le plan de symétrie est le plan (1,2) du système de coordonnées. En effet la matrice doit rester inchangée si on effectue une symétrie du solide par rapport au plan (1,2). Pour le voir, les relations de symétries (6.8) satisfaites par la loi de comportement sont reprises ici dans le contexte des transformations infinitésimales et pour une transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ orthogonale :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T), \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{C}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.35}$$

La symétrie matérielle $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ pour le cas monoclinique est :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

Comme $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ est en outre symétrique, on obtient :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La relation de symétrie (7.35) implique alors en particulier

$$-(C_{41}\varepsilon_{11}+C_{42}\varepsilon_{22}+C_{43}\varepsilon_{33}+C_{44}\varepsilon_{23}+C_{45}\varepsilon_{31}+C_{46}\varepsilon_{12}) = C_{41}\varepsilon_{11}+C_{42}\varepsilon_{22}+C_{43}\varepsilon_{33}-C_{44}\varepsilon_{23}-C_{45}\varepsilon_{31}+C_{46}\varepsilon_{12}$$

$$-(C_{51}\varepsilon_{11}+C_{52}\varepsilon_{22}+C_{53}\varepsilon_{33}+C_{54}\varepsilon_{23}+C_{55}\varepsilon_{31}+C_{56}\varepsilon_{12}) = C_{51}\varepsilon_{11}+C_{52}\varepsilon_{22}+C_{53}\varepsilon_{33}-C_{54}\varepsilon_{23}-C_{55}\varepsilon_{31}+C_{56}\varepsilon_{12}$$

Ces conditions doivent être remplies quelles que soient les composantes de déformation. Cela implique que

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$$

La matrice des C_{IJ} est donc nécessairement de la forme

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

Sur les 21 paramètres initiaux, il ne reste donc plus que 13 modules indépendants. Pour passer d'une base à une autre, on utilise les formules de changements de base (7.24) pour lesquelles une notation matricielle équivalente peut aussi être construite (Berthelot, 1999; Cailletaud, 2003).

Elasticité orthotrope

Un solide orthotrope admet 3 plans de symétrie deux à deux orthogonaux. La démarche précédente conduit à la forme suivante de la matrice de rigidité dans les bases orthogonales pour lesquelles (1,2), (2,3) et (3,1) sont les plans de symétrie

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

ce qui fait 9 constantes indépendantes. Les méthodes d'élaboration des matériaux composites (stratifiés...) conduisent fréquemment à des propriétés d'emploi orthotropes.

Elasticité quadratique

Un matériau quadratique est un matériau orthotrope dont l'axe 3 est aussi un axe de rotation d'angle $\pi/2$ laissant le solide invariant[6]. Par conséquent, les axes 1 et 2 sont indiscernables, ce qui veut dire que

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{44} = C_{55}$$

La matrice d'élasticité quadratique a donc la forme

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

ce qui ne fait plus que 6 constantes indépendantes.

[6] Un résultat essentiel de la cristallographie est que les seules rotations laissant les solides périodiques invariants sont d'angles $\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ et π, ou bien alors tous les angles possibles (isotropie transverse). Sinon, un pavage périodique de l'espace est impossible...

Elasticité isotrope transverse/unidirectionnelle

Les composites à fibres unidirectionnelles sont des solides orthotropes possédant un axe de révolution (toute rotation autour de cet axe laisse le solide invariant). Par rapport à la structure quadratique cette condition implique la relation supplémentaire suivante, si l'axe 3 est l'axe de révolution[7]

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

La matrice devient

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \tag{7.40}$$

i.e. 5 constantes indépendantes.

La matrice des souplesses, quant à elle, s'écrit

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \tag{7.41}$$

Les monocristaux à structure hexagonale (le zinc par exemple) sont orthotropes et possèdent en outre un axe de rotation d'angles $\pi/3$ et $2\pi/3$. Leur comportement élastique est alors isotrope transverse.

Elasticité cubique

Un solide cubique est un corps orthotrope dont les trois axes sont indiscernables. Cela donne

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \tag{7.42}$$

et donc 3 modules indépendants.

La matrice des souplesses a la même forme et s'obtient en inversant la matrice des C_{IJ}

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{44} = \frac{1}{C_{44}}$$

[7] Pour le voir il faut effectuer sur la matrice de rigidité une rotation d'axe 3 et d'angle θ quelconque et écrire l'invariance correspondante.

A titre d'exemple, on donne ci–dessous la matrice de rigidité du cuivre monocristallin à température ambiante, les valeurs étant données en MPa

$$\begin{bmatrix} 168400 & 121400 & 121400 & 0 & 0 & 0 \\ 121400 & 168400 & 121400 & 0 & 0 & 0 \\ 121400 & 121400 & 168400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75390 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75390 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75390 \end{bmatrix} \tag{7.43}$$

On définit un **coefficient d'anisotropie**

$$a = 2C_{44}/(C_{11} - C_{12})$$

Ce coefficient vaut 1 pour un matériau isotrope. Il vaut 3.2 pour le cuivre monocristallin.

Elasticité isotrope

On connaît déjà les relations d'élasticité isotrope et on a déjà établi le fait qu'elles ne mettent en jeu que deux constantes indépendantes, les coefficients de Lamé λ et μ :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\underline{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{7.44}$$

Ecrite sous forme matricielle, cela donne

$$\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

On remarque que si $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est purement déviatorique (i.e. à trace nulle), alors $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est lui–aussi déviatorique et est directement proportionnel à $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ avec le facteur 2μ. Plus généralement, dans le cas isotrope, les parties déviatoriques des contraintes et des déformations sont liées par

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} = 2\mu\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}} \tag{7.46}$$

En particulier, si $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est un cisaillement simple dont la seule composante non nulle est γ_{12} alors la seule composante non nulle du tenseur des contraintes est

$$\sigma_{12} = \mu\gamma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

C'est pourquoi, le coefficient μ s'appelle **module de cisaillement**. De même, dans le cas isotrope, les traces des déformations et des contraintes sont reliées par

$$\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = (3\lambda + 2\mu)\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = 3\kappa(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad \text{avec} \quad \kappa := \frac{3\lambda+2\mu}{3} \tag{7.47}$$

Le coefficient κ s'appelle le **module de compressibilité** du solide isotrope. En effet si l'on applique une pression pure, alors la déformation correspondante est sphérique et donnée par

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underline{\mathbf{1}} \Longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{p}{3\kappa}\underline{\mathbf{1}} \tag{7.48}$$

7.2.4 Inversion de la relation d'élasticité isotrope : module de Young et coefficient de Poisson

La loi d'élasticité directe (7.44) permet d'extraire successivement la trace et le déviateur des déformations, à l'aide des calculs précédents :

$$\operatorname{trace} \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{\operatorname{trace} \underset{\sim}{\sigma}}{3\kappa} = \frac{\operatorname{trace} \underset{\sim}{\sigma}}{3\lambda + 2\mu} \tag{7.49}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^{\text{dev}} = \frac{\underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}}}{2\mu}$$

On en déduit la loi d'élasticité isotrope inverse

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\varepsilon} &= \frac{\operatorname{trace} \underset{\sim}{\varepsilon}}{3} \underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{\varepsilon}^{\text{dev}} \\ &= \frac{\operatorname{trace} \underset{\sim}{\sigma}}{9\kappa} \underset{\sim}{1} + \frac{\underset{\sim}{\sigma}^{\text{dev}}}{2\mu} \\ &= \frac{\operatorname{trace} \underset{\sim}{\sigma}}{3(3\lambda + 2\mu)} \underset{\sim}{1} + \frac{1}{2\mu}(\underset{\sim}{\sigma} - \frac{1}{3}\operatorname{trace} \underset{\sim}{\sigma}\, \underset{\sim}{1}) \\ &= \frac{1}{2\mu}\underset{\sim}{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\sigma})\, \underset{\sim}{1} \end{aligned} \tag{7.50}$$

Cette dernière relation est réécrite sous la forme suivante faisant intervenir le **module de Young** E et le **coefficient de Poisson** ν :

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\,\underset{\sim}{\sigma} - \frac{\nu}{E}\,(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\sigma})\,\underset{\sim}{1} \tag{7.51}$$

Les relations entre le module de Young, le coefficient de Poisson et les coefficients de Lamé s'obtiennent par identification de (7.50) et (7.51) :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \tag{7.52}$$

d'où l'on tire

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \tag{7.53}$$

L'introduction de ces nouvelles constantes s'explique par le fait que E et ν sont directement accessibles par l'expérience en réalisant un essai de traction. En effet,

$$[\underset{\sim}{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\underset{\sim}{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\frac{\sigma}{E} \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

Le module de Young est donc simplement le rapport entre la contrainte axiale de traction et la déformation dans la direction de traction. Le coefficient de Poisson est égal à l'opposé du rapport entre les déformations latérales et la déformation axiale. L'essai de traction simple est étudié en détail pour les solides élastiques linéaires au paragraphe 8.2.1. La variation de volume lors d'un essai de traction vaut donc

$$\operatorname{trace} \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\nu) \tag{7.55}$$

Le coefficient $(1-2\nu)$ est associé à la variation de volume pour toutes les sollicitations puisque le module de compressibilité κ vaut :

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \Longrightarrow \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1-2\nu}{E} \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7.56}$$

Sous forme matricielle, la loi d'élasticité inverse (7.50) s'écrit de la manière suivante en faisant intervenir la matrice des souplesses S_{IJ}^{iso} :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{7.57}$$

Les relations principales de la thermoélasticité linéaire sont rassemblées dans les tables 7.1 et 7.3.

Tenseurs $\boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{K}$

L'effet de l'élasticité isotrope sur les parties déviatorique et sphérique des tenseurs de contraintes et de déformations incite à introduiee les opérateurs $\underset{\approx}{\boldsymbol{K}}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{J}}$ qui, à tout tenseur d'ordre 2 symétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$, associent respectivement :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{K}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} := \frac{\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}{3} \underset{\sim}{\mathbf{1}}, \quad \underset{\approx}{\boldsymbol{J}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\text{dev}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - \underset{\approx}{\boldsymbol{K}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \tag{7.58}$$

Il s'agit de **projecteurs** respectivement sur l'ensemble des tenseurs sphériques et sur l'ensemble des déviateurs. La dernière relation s'écrit aussi

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{I}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{J}} + \underset{\approx}{\boldsymbol{K}}$$

On définit là les opérateurs linéaires qui décomposent les tenseurs d'ordre 2 symétriques en leurs partie déviatorique et sphérique. Comme ils opèrent sur des tenseurs d'ordre 2, il s'agit donc bien de tenseurs d'ordre 4. Le tenseur identité $\underset{\approx}{\boldsymbol{I}}$ a déjà été défini par (7.28). On donne ici les composantes de $\underset{\approx}{\boldsymbol{K}}$ dans une base orthonormée :

$$K_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{7.59}$$

Les tenseurs $\underset{\approx}{\boldsymbol{J}}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{K}}$ sont idempotents et orthogonaux :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{J}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{J}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{J}}, \quad \underset{\approx}{\boldsymbol{K}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{K}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{K}}, \quad \underset{\approx}{\boldsymbol{J}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{K}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{K}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{J}} = 0 \tag{7.60}$$

Les tenseurs d'ordre 4 inversibles s'exprimant uniquement en fonction de $\underset{\approx}{\boldsymbol{J}}$ et $\underset{\approx}{\boldsymbol{K}}$ possèdent la propriété remarquable que leur inverse se décompose aussi selon ces deux tenseurs :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{A}} = a\underset{\approx}{\boldsymbol{J}} + b\underset{\approx}{\boldsymbol{K}} \Longrightarrow \underset{\approx}{\boldsymbol{A}}^{-1} = \frac{1}{a}\underset{\approx}{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{b}\underset{\approx}{\boldsymbol{K}} \tag{7.61}$$

ce qui est une conséquence des propriétés (7.60).

Le tenseur d'élasticité isotrope s'exprime directement en fonction de $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}}$ et $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}}$:

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}^{iso} = 3\kappa \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}} + 2\mu \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}} \tag{7.62}$$

ce que le lecteur vérifiera aisément en faisant opérer l'expression précédente sur un tenseur $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. Son inverse, le tenseur des souplesses est donc facile à déterminer :

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}}^{iso} = \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}^{-1} = \frac{1}{3\kappa} \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}} + \frac{1}{2\mu} \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}} \tag{7.63}$$

On pourra vérifier que cette expression conduit bien à la loi d'élasticité isotrope (7.50).

7.2.5 Caractère défini positif du tenseur d'élasticité

Le tenseur des modules d'élasticité est un endomorphisme sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques qui est de dimension 6. Il est auto–adjoint (symétries majeures) et possède donc a priori 6 valeurs propres réelles. Ces valeurs propres peuvent être obtenues à partir de la matrice C_{IJ}. Les "vecteurs" propres associés sont les tenseurs d'ordre 2 symétriques propres pour le tenseur d'ordre 4 $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}$. Les tenseurs des modules d'élasticité que l'on rencontre dans les matériaux naturels ou industriels sont définis positifs. Cela signifie que leurs valeurs propres sont strictement positives. Le fait même que l'on puisse mesurer de manière reproductible ces modules indique que les corps étudiés sont stables. Le lien direct entre la **stabilité** et le caractère défini positif du tenseur des modules d'élasticité sera établi au chapitre suivant (paragraphe 8.1.5). Le caractère défini positif du tenseur représenté par la matrice des C_{IJ} se traduit par le fait que tous les déterminants des sous–matrices carrées de tous ordres centrées sur la diagonale sont positifs.

Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, les valeurs propres du tenseur des modules s'obtiennent en diagonalisant la matrice (7.45). On peut aussi remarquer simplement que pour tout tenseur déviatorique

$$\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{dev}}, \quad \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}^{\mathrm{iso}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{dev}} = 2\mu \, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{dev}}$$

ce qui montre que 2μ est une valeur propre et que l'ensemble des tenseurs propres correspondants est le sous–espace vectoriel des tenseurs symétriques déviatoriques, qui est de dimension 5. On remarque de même que pour tout tenseur sphérique

$$\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{sph}}, \quad \underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}^{\mathrm{iso}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{sph}} = 3\kappa \, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{sph}}$$

ce qui montre que 3κ est une valeur propre de $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}^{\mathrm{iso}}$, l'ensemble des tenseurs propres correspondants étant le sous–espace vectoriel des tenseurs sphériques, qui est de dimension 1. Comme les tenseurs sphériques et déviatoriques engendrent l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 symétriques, l'analyse spectrale de $\underset{\sim}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}}^{\mathrm{iso}}$ est terminée. La condition de stabilité implique que ses valeurs propres sont positives :

$$\mu > 0, \quad \kappa > 0 \tag{7.64}$$

En terme de module de Young et de coefficient de Poisson, cette condition s'écrit

$$\frac{E}{1+\nu} > 0, \quad \frac{E}{1-2\nu} > 0$$

ce qui est équivalent à

$$E > 0, \quad -1 < \nu < 0.5 \tag{7.65}$$

Le module de Young est donc positif, ce qui correspond à l'observation courante : lorsqu'on applique un effort de traction, le matériau s'allonge. La condition sur le coefficient de Poisson implique qu'un essai de traction s'accompagne nécessairement d'une variation positive de volume, i.e. d'un gonflement, ce qui n'a rien d'intuitif. Pour le voir, il suffit d'appliquer la condition (7.65) à la relation (7.55). Le cas limite $\nu \longrightarrow 0.5$ conduit systématiquement à une transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ isochore, et traduit donc un comportement de matériau incompressible.

Dans la pratique, on observe que, lors d'un essai de traction sur un matériau isotrope, les déformations latérales sont systématiquement négatives : le matériau s'allonge axialement et se contracte latéralement. Ce fait indique que $\nu > 0$ en général. On a longtemps cru que l'on pouvait encore réduire l'intervalle (7.65) en écrivant

$$0 < \nu < 0.5$$

Le liège par exemple a un coefficient de Poisson quasi–nul de sorte qu'un bouchon comprimé axialement n'augmente quasiment pas de section. En 1987, Roderic Lakes a montré que les matériaux à coefficients de Poisson négatif existent bel et bien (Lakes, 1987). De tels matériaux sont dits **auxétiques**. L'exemple exhibé par Lakes est une mousse polymérique dont on voit une image de la microstructure sur la figure 7.1 comparée à une mousse classique à $\nu > 0$. La difficulté principale pour mettre en évidence de tels matériaux est de s'assurer de leur caractère isotrope souvent difficile à garantir à l'issue du procédé complexe d'élaboration (Chan and Evans, 1997). Depuis lors, d'autres matériaux auxétiques ont été découverts notamment en jouant sur la structure moléculaire du matériau (Yang et al., 2004). Leur utilisation pratique reste encore toutefois anecdotique.

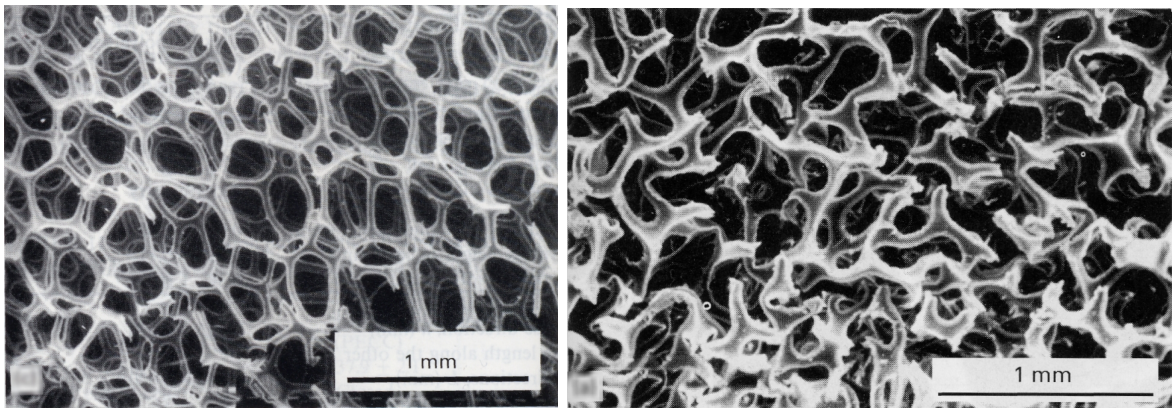


FIG. 7.1 – Microstructure d'une mousse de polyuréthanne conventionnelle (à gauche) et d'une mousse auxétique (à droite). La seconde est obtenue à partir de la première par l'application d'un pression de confinement lors de l'élaboration (d'après (Chan and Evans, 1997)). Les mousses de polyuréthanne conventionnelles sont traditionnellement utilisées dans les sièges automobiles.

7.2.6 Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des dilatations thermiques

La déformation d'origine thermique est une fonction tensorielle d'ordre 2 symétrique de la variable scalaire T :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} := (T - T_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \tag{7.66}$$

Le nombre de composantes indépendantes du tenseur des dilatations thermiques $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ dépend des propriétés de symétrie du milieu. Il est donc nécessaire, tout comme dans le cas du tenseur des modules d'élasticité, d'identifier la forme de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ pour chaque groupe cristallographique. On se contente ici d'étudier les cas isotrope et cubique. Dans ces deux cas en effet, le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ est purement sphérique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} := (T - T_0)\alpha\, \underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{7.67}$$

Le coefficient α s'appelle **coefficient de dilatation thermique** du matériau. Pour justifier cette forme sphérique dans le cas cubique, il suffit de remarquer que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$, symétrique, est diagonalisable et possède 3 valeurs propres réelles. Les directions propres étant deux à deux orthogonales, elles coïncident avec les axes de symétrie d'ordre 4 du cristal cubique. Or ces trois directions sont équivalentes par définition de la symétrie cubique. Les trois valeurs propres sont donc identiques, ce qui implique que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ soit sphérique.

On remarque que, par la simple observation de la dilatation thermique, il n'est pas possible de distinguer une cristal cubique d'un cristal isotrope. Il en va de même de la conductivité thermique $\underset{\sim}{\boldsymbol{k}}$ qui ne fait intervenir qu'un **coefficient de conductivité thermique** k. Ce n'est pas le cas en élasticité puisqu'on distingue 2 modules indépendants dans le cas isotrope contre 3 dans le cas cubique. L'origine de cette différence est clairement l'ordre tensoriel de la propriété physique étudiée, 2 pour les propriétés thermiques, et 4 pour l'élasticité.

On trouvera dans les tables 7.4 et 7.5 des exemples de valeurs de quelques propriétés thermomécaniques pour plusieurs classes de matériaux solides et fluides. Les fluides en effet dont le module de cisaillement est souvent quasi–nul, possèdent par contre une module de compressibilité relativement élevé.

7.2.7 Notation alternative : algèbre des tenseurs d'ordre deux symétriques

La notation de Voigt, introduite précédemment et largement utilisée dans les ouvrages et les banques de données, fait jouer un rôle dissymétrique aux "vecteurs" des contraintes et des déformations, puisque les composantes de déformation de cisaillement sont affublées d'un coefficient 2 tandis que les composantes de contraintes de cisaillement sont inchangées. On a vu les conséquences de ce fait sur la construction des matrices de rigidité et de souplesse. On peut rétablir cette symétrie en travaillant sur l'algèbre des tenseurs symétriques, à savoir l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 symétriques (dimension 6) muni de l'addition et de la multiplication (non commutative !) et du produit scalaire : (double contraction). Un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est alors représenté par le vecteur de ses composantes dans une base orthonormée :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \equiv [\underline{\boldsymbol{A}}] = \left[A_{11}\ A_{22}\ A_{33}\ \sqrt{2}A_{23}\ \sqrt{2}A_{31}\ \sqrt{2}A_{12}\right]^T \tag{7.68}$$

Le produit scalaire de deux tenseurs d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ s'écrit

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = [\underline{\boldsymbol{A}}].[\underline{\boldsymbol{B}}] = [\underline{\boldsymbol{A}}]^T\,[\underline{\boldsymbol{B}}]$$

où le point désigne le produit scalaire canonique sur les espaces euclidiens de dimension 6. Cette identification entre la double contraction et le produit scalaire sur un espace vectoriel euclidien est la raison de l'introduction du facteur $\sqrt{2}$ dans (7.68). En effet les termes $A_{12}B_{12}$ interviennent deux fois dans $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ en raison de la symétrie des tenseurs.

Les relations d'élasticité s'écrivent dès lors

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \sqrt{2}C_{14} & \sqrt{2}C_{15} & \sqrt{2}C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & \sqrt{2}C_{24} & \sqrt{2}C_{25} & \sqrt{2}C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & \sqrt{2}C_{34} & \sqrt{2}C_{35} & \sqrt{2}C_{36} \\ \sqrt{2}C_{14} & \sqrt{2}C_{24} & \sqrt{2}C_{34} & 2C_{44} & 2C_{45} & 2C_{46} \\ \sqrt{2}C_{15} & \sqrt{2}C_{25} & \sqrt{2}C_{35} & 2C_{45} & 2C_{55} & 2C_{56} \\ \sqrt{2}C_{16} & \sqrt{2}C_{26} & \sqrt{2}C_{36} & 2C_{46} & 2C_{56} & 2C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{7.69}$$

où les coefficients C_{IJ} sont ceux de la notation de Voigt (7.31) (c'est important car ces valeurs sont tabulées dans de nombreuses bases de données matériaux).

Ce formalisme est très employé lors de la programmation numérique des lois de comportement dans les codes de calcul, car il permet de traiter contraintes et déformations à l'aide d'une même structure (en langage C) ou d'une même classe (en C++). On renvoie à l'ouvrage ((Besson et al., 2001)) pour l'utilisation de ce formalisme en mécanique numérique des matériaux.

7.3 Couplages thermoélastiques

On étudie le couplage thermomécanique dans le cas isotrope et dans le contexte infinitésimal.

7.3.1 Contraintes d'origine thermique

Les lois de comportement thermoélastique linéaire dans une configuration quasi–naturelle sont récapitulées dans le tableau 7.2. On a introduit au passage le coefficient β relié à la chaleur massique par

$$\beta := \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{2T_0} \tag{7.70}$$

En pratique les couplages thermomécaniques se manifestent de trois façons principales. Dans l'ordre décroissant de leur importance en pratique, ce sont :

- **Contraintes d'origine thermique.** Imaginons d'abord une barre cylindrique empêchée de se déformer selon son axe et que l'on chauffe de manière homogène à partir d'une température T_0. Aucun effort n'est appliqué le long de la barre et l'on suppose qu'elle est suffisamment lubrifiée à ses extrémités pour qu'elle puisse se dilater à volonté selon les directions normales à l'axe du cylindre. L'état de contrainte et de déformation de la barre peut alors être considéré comme homogène. La seule contrainte active est la contrainte axiale. Ecrivons alors que la déformation axiale selon 3 est nulle

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} + \alpha(T - T_0) = 0$$

Une contrainte axiale de compression se développe donc

$$\sigma_{33} = -E\alpha(T - T_0)$$

que l'on appelle **contrainte d'origine thermique**. Les contraintes d'origine thermique jouent un rôle considérable dans les composants industriels travaillant en conditions anisothermes et dans les ouvrages de génie civil (barrages, ponts...) soumis aux régimes jour–nuit, été–hiver. Elles sont responsables de nombreuses ruptures en service à cause de la fatigue induite par les cycles thermiques. Pour calculer les contraintes d'origine thermique dans une pièce, il faut connaître le champ de température qui y règne. La température est

Coefficients de Lamé

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0 + \lambda(\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Module de Young et coefficient de Poisson

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 + \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

Un festival de relations utiles...

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Module de compressibilité

$$\kappa = \frac{3\lambda+2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Mais aussi...

$$\lambda+2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \lambda+\mu = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad 2\lambda+3\mu = \frac{E(3-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$1+\nu = \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}, \quad 1-\nu = \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}, \quad 1+2\nu = \frac{2\lambda+\mu}{\lambda+\mu}, \quad 1-2\nu = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu}$$

Stabilité du solide élastique

$$\kappa > 0, \quad \mu > 0$$
$$E > 0, \quad -1 < \nu < 0.5$$

TAB. 7.1 – Récapitulatif : élasticité linéarisée isotrope (état initial quasi–naturel).

Décomposition de la déformation totale

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^e + \underset{\sim}{\varepsilon}^{th} \text{ avec } \underset{\sim}{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0)\,\underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

Loi de comportement thermoélastique

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \rho\frac{\partial \psi}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0 + \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^e)\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\,\underset{\sim}{\varepsilon}^e$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0 + \lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\varepsilon})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu\,\underset{\sim}{\varepsilon} - 3\kappa\alpha(T - T_0)\underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^e = \underset{\sim}{\varepsilon}^0 + \frac{1+\nu}{E}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \alpha(T - T_0)\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \underset{\sim}{\varepsilon}^0 + \frac{1+\nu}{E}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}}$$

Le potentiel élastique

$$\rho\psi(\underset{\sim}{\varepsilon}, T) = -\rho(T - T_0)\hat{s}^0 + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0 : \underset{\sim}{\varepsilon} - \beta(T - T_0)^2 - 3\kappa\alpha(T - T_0)(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\lambda(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\varepsilon})^2 + 2\mu\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\varepsilon})$$

La densité volumique d'entropie

$$\rho s = -\rho\frac{\partial \psi}{\partial T} = \rho\hat{s}^0 + 2\beta(T - T_0) + 3\kappa\alpha(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\varepsilon})$$

$$\beta = \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{2T_0}$$

TAB. 7.2 – Récapitulatif : thermoélasticité linéaire isotrope (état initial quasi–naturel).

	$\kappa =$	$\mu =$	$E =$	$\nu =$
κ, μ			$\dfrac{9\kappa\mu}{3\kappa+\mu}$	$\dfrac{3\kappa-2\mu}{2(3\kappa+\mu)}$
κ, ν		$\dfrac{3\kappa E}{9\kappa-E}$		$\dfrac{3\kappa-E}{6\kappa}$
κ, ν		$\dfrac{3\kappa(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3\kappa(1-2\nu)$	
μ, E	$\dfrac{\mu E}{3(3\mu-E)}$			$\dfrac{E-2\mu}{2\mu}$
μ, ν	$\dfrac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$		$2\mu(1+\nu)$	
E, ν	$\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$	$\dfrac{E}{2(1+\nu)}$		

TAB. 7.3 – Relations entre les différents modules d'élasticité isotrope.

connue expérimentalement à certains endroits si on dispose de thermocouples. On peut même mesurer des champs de température en surface des composants grâce à des caméras infra–rouge (thermographie infra–rouge). Il faut confronter ces mesures au calcul du champ de température qui est possible en résolvant l'équation de la chaleur.

- **Dépendance des propriétés physiques en fonction de la température.** Les modules d'élasticité, le coefficient de dilatation thermique, la chaleur massique etc. dépendent de la température. Lorsque le domaine de température exploré autour de la position d'équilibre reste limité (une dizaine de degré par exemple), cette dépendance est négligée et les coefficients matériau sont considérés comme constants. La dépendance vis–à–vis de la température des propriétés physiques des matériaux et des fluides est tabulée dans de nombreuses banques de données. De manière générale, le module de Young diminue lorsque la température augmente.
- **Couplage thermoélastique dans l'équation de la chaleur**. Les grandeurs mécaniques interviennent explicitement dans l'équation de la chaleur, c'est l'objet de la section suivante. Les déformations mécaniques peuvent donc entraîner des variations de température.

7.3.2 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur est une forme particulière de l'équation de l'énergie (3.89) (premier principe de la thermodynamique). Dans le contexte infinitésimal, le bilan local d'énergie s'écrit

$$\rho\dot{e} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \rho r \tag{7.71}$$

En introduisant l'énergie libre (5.61) et les lois d'état hyperélastiques, on obtient l'équation de la chaleur

$$\rho T\dot{s} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} = \rho r \tag{7.72}$$

matériau	ρ ($\mathrm{kg.m^{-3}}$)	E (GPa)	ν	λ (GPa)	μ (GPa)	κ (GPa)	α ($\times 10^{-6}\mathrm{K^{-1}}$)	k ($\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$)	C_ε ($\mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$)
acier	7800	200	0.27 à 0.3	115	77	165	10 à 18	60	500
aluminium	2700	70	0.33	51	26	69	23	237	900
cuivre	8900	120	0.33	88	45	118	17	410	400
magnésium	1700	41	0.35	35	15	46	25	156	
nickel	8900	210	0.31	131	80	184	13	91	450
titane	4500	116	0.33	85	44	114	9	22	550
uranium	18900	170	0.23	59	69	105	14		
zinc	7200	100	0.25	40	40	67	30	116	400
alumine	3900	390	0.22	126	160	232	8	26	800
béton	2500	20 à 50	0.2	6	8	11	10	2	
diamant	3500	1000	0.2	278	417	555	1.2	70	500
SiC	3000	450	0.2	125	188	250	4	84	
verre	2500	90	0.22	29	37	54	5	1	900
bois	500	1						0.15	2000
caoutchouc	900	0.1	0.45 à 0.5				130	0.15	2500
polyuréthanne	1200	1 à 5	0.4	1.4	0.4	1.7	100	0.2	
glace	920	91	0.33	66	34	88	51	2	

TAB. 7.4 – Propriétés thermomécaniques de quelques matériaux solides (sous une atmosphère et à 25°C).

liquide	ρ (kg.m^{-3})	viscosité η (Pa.s)	compressibilité κ (GPa)	α ($\times 10^{-6}$K^{-1})	k (W.m^{-1}.K^{-1})
éthanol	790	0.002	0.8		0.17
eau distillée	997	0.001	2	200	0.6
huile d'olive	920	0.08			
mercure	13600	0.002	25	180	8
miel		2			
pétrole	820	1			

TAB. 7.5 – Propriétés thermomécaniques de quelques fluides (sous une atmosphère et à 25°C).

Dans le contexte infinitésimal, c'est tout aussi bien ρ_0 qui intervient dans l'équation précédente. Dans le cas de la thermoélasticité linéaire et isotrope, on introduit les lois de comportement du tableau 7.2 ainsi que la loi de conduction thermique de Fourier :

$$\underline{\boldsymbol{q}} = -k\,\nabla T \tag{7.73}$$

L'équation de la chaleur devient alors

$$\rho C_\varepsilon \dot{T} + \underbrace{3\kappa\alpha T_0(\operatorname{trace}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}})}_{\text{couplage thermomécanique}} - k\Delta T = \rho r \tag{7.74}$$

Plusieurs situations peuvent être distinguées (en l'absence de sources r) :

- En **régime permanent**, l'équation de la chaleur se réduit à

  $$\Delta T = 0$$

  qui indique que la température est une fonction harmonique de la position. Le problème aux limites thermique correspondant (avec ses conditions aux limites) peut dont être résolu indépendamment du problème d'équilibre mécanique. Les champs de température trouvés permettent alors de calculer les contraintes d'origine thermique dans la pièce.
- Le cas de la **thermoélasticité découplée** s'obtient en négligeant le terme de couplage dans l'équation (7.74)

  $$\rho C_\varepsilon \dot{T} = k\Delta T$$

  C'est l'équation de la chaleur proprement dite qui peut être résolue indépendamment du problème mécanique.
- En **régime adiabatique** (ou dans le cas homogène où $\operatorname{grad} T = 0$), on peut mettre en évidence de manière simple le couplage thermoélastique sous la forme de l'équation différentielle :

  $$\rho C_\varepsilon \dot{T} + 3\kappa\alpha T_0(\operatorname{trace}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = 0$$

  i.e.

  $$\dot{T} = -\frac{3\kappa\alpha T_0}{\rho C_\varepsilon}(\operatorname{trace}\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \tag{7.75}$$

  Lors d'un essai à déformation imposée, cette équation montre que la température varie. Un résultat pas intuitif du tout qui est une conséquence de (7.75) est que lorsqu'un matériau est sollicité en traction simple, sa température diminue ! Un calcul d'ordre de grandeur, en

traction simple à $T_0 = 300$ K, pour un acier avec les coefficients du tableau 7.4 montre que ce refroidissement est très faible :

$$T - T_0 = -\frac{3\kappa\alpha T_0}{\rho C_\varepsilon}(1-2\nu)\varepsilon = -\frac{E\alpha T_0}{\rho C_\varepsilon}(1-2\nu)\varepsilon = -\frac{200.10^9 \times 10^{-5} \times 300}{7800 \times 500} \times 0.001 \simeq -0.15\text{K} \tag{7.76}$$

pour une déformation axiale $\varepsilon = 0.1\%$ (effectivement purement élastique en général pour un acier). On comprend que le couplage thermoélastique soit négligé dans la plupart des cas, à moins qu'il s'agisse de concevoir des systèmes mécaniques de précision. Le couplage thermomécanique est par contre important dans le cas de matériaux élastiques non–linéaires ou viscoplastiques mais le terme de couplage doit être établi à nouveau à l'aide de ces lois de comportement spécifiques.
Un processus adiabatique est aussi à entropie constante (isentropique) d'après (7.72) en l'absence de sources r. Par conséquent on retrouve l'équation (7.75) en écrivant que la variation d'entropie est nulle (voir l'expression de l'entropie dans le tableau 7.2).

7.3.3 Quelques conséquences du couplage thermoélastique

Chaleur massique à contrainte constante C_σ

La chaleur massique des corps est souvent déterminée à pression imposée plutôt qu'à déformation imposée. La grandeur mesurée est alors

$$C_\sigma = T\frac{\partial s}{\partial T}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, T) \tag{7.77}$$

Il faut exprimer l'entropie comme une fonction de la température et des contraintes. Dans le cas thermoélastique linéaire et isotrope, cela devient :

$$\rho s = \rho\hat{s}^0 + 2\beta(T - T_0) + 3\kappa\alpha(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \rho\hat{s}^0 + 2\beta(T - T_0) + 3\kappa\alpha(3\alpha(T - T_0) + \frac{\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{3\kappa})$$

d'où

$$C_\sigma = C_\varepsilon + \frac{9\kappa\alpha^2 T_0}{\rho_0} \tag{7.78}$$

La correction de C_σ s'avère négligeable pour les solides en prenant les ordres de grandeur du tableau 7.4. Des notations plus classiques en thermodynamique pour C_σ et C_ε sont respectivement C_p et C_v.

Modules d'élasticité adiabatiques ou isentropiques

Les constantes de Lamé, module de Young et coefficient de Poisson introduits jusqu'ici sont des modules d'élasticité dits isothermes car ils sont définis à partir de la dérivée partielle seconde de l'énergie libre par rapport à la déformation, à température constante. En conditions adiabatiques ou, de manière équivalente, isentropiques, on a vu que la température est liée directement à la déformation par

$$2\beta(T - T_0) = -3\kappa\alpha(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

d'après (7.75). En substituant cette expression de la variation de température dans l'expression de l'énergie libre (donnée dans le tableau 7.2) et en factorisant les termes en $(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^2$ et en $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, on fait apparaître les coefficient de Lamé adiabatiques :

$$\lambda_{adiabatic} = \lambda + \frac{9\kappa^2\alpha^2}{2\beta} = \lambda + \kappa(\frac{C_\sigma}{C_\varepsilon} - 1), \quad \mu_{adiabatic} = \mu \tag{7.79}$$

ou de manière équivalente

$$\kappa_{adiabatic} C_\varepsilon = \kappa C_\sigma, \quad \mu_{adiabatic} = \mu$$

Les modules déterminés par des essais dans ces conditions (essais rapides, voire en dynamique) sont en fait peu différents, pour la plupart des solides, des modules déterminés dans des conditions isothermes (cas statique). Des différences importantes entre ces "modules dynamiques" et ces "modules statiques" se font sentir dans le cas de matériaux granulaires tels que les sables, en raison des vibrations propres des constituants.

Les modules d'élasticité isentropiques apparaissent naturellement lorsque le comportement du matériau est exprimé au travers de l'énergie interne spécifique $e(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, s)$, fonction de la déformation et de l'entropie, au lieu de l'énergie libre utilisée jusqu'ici, qui est une fonction de la déformation et de la température. Pour le voir, on reprend les deux principes de la thermodynamique des milieux continus exprimés ici dans le contexte infinitésimal :

$$\rho \dot{e} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} + \rho r, \quad \rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T} - \rho \frac{r}{T} \geq 0 \tag{7.80}$$

La combinaison de ces deux principes conduit à l'inégalité de Clausius–Duhem sous la forme :

$$\rho T \dot{s} - \rho \dot{e} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T}.\operatorname{grad} T \geq 0 \tag{7.81}$$

Lorsque les fonctions d'état en présence dépendent du jeu de variables $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, s)$, cette inégalité devient :

$$\rho(T - \frac{\partial e}{\partial s})\dot{s} + (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \rho \frac{\partial e}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}) : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{\underline{\boldsymbol{q}}}{T}.\operatorname{grad} T \geq 0 \tag{7.82}$$

L'expression précédente est linéaire en $\dot{s}$ et $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. La positivité de la dissipation ne peut être garantie pour tout processus thermodynamique local que si les coefficients correspondants sont nuls. Les relations ainsi obtenues sont les lois d'état thermoélastique sous la forme :

$$T = \frac{\partial e}{\partial s}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial e}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{7.83}$$

Dans le cas de la thermoélasticité linéarisée, l'expression de l'énergie interne s'obtient par exemple à partir de celle de l'énergie libre (7.4) pour un état initial naturel :

$$\begin{aligned} \rho e &= \rho\psi + T\,\rho s \\ &= \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + T_0 \rho s + \frac{(\rho s - \rho s^0 - \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^2}{4\beta} \end{aligned} \tag{7.84}$$

Les modules d'élasticité isentropiques sont donnés par la dérivée seconde de l'énergie interne par rapport à la déformation. On calcule successivement :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\rho s - \rho s^0 - \alpha : \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}{2\beta} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \tag{7.85}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}^{isen} = \frac{\partial^2 \rho e}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} + \frac{1}{2\beta}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}) \otimes (\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}) \tag{7.86}$$

Dans la notation précédente, un produit tensoriel entre tenseurs d'ordre 2 a été introduit avec la signification suivante :

$$\Lambda^{isen}_{ijkl} = \Lambda_{ijkl} + \frac{\rho^2}{2\beta} \alpha_{mn} \Lambda_{mnij} \Lambda_{klpq} \alpha_{pq}$$

Dans le cas de l'élasticité isotrope, les modules d'élasticité isothermes sont caractérisés par κ et μ. Les modules isentropiques correspondants s'en déduisent :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial e}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (\kappa \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{dev} + \frac{9\kappa^2\alpha^2}{2\beta}(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} \\
&= (\kappa + \frac{9\kappa^2\alpha^2}{2\beta} - \frac{2\mu}{3})(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (7.87) \\
&= (\lambda + \frac{9\kappa^2\alpha^2}{2\beta})(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (7.88)
\end{aligned}$$

Les expressions des modules isentropiques sont bien celles trouvées en (7.79).

Chapitre 8

Formulation du problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

On quitte ici l'échelle du point matériel pour lequel des lois de comportement ont été formulées pour passer à celle de la structure soumise à des conditions aux limites particulières et à des efforts volumiques. Il s'agit donc de résoudre les équations aux dérivées partielles que sont les équations de bilan (ici limitées à l'équilibre statique), en se restreignant ici au contexte infinitésimal en thermoélasticité linéaire.

8.1 Formulation et résolution du problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

8.1.1 Linéarisation des équations d'équilibre

La loi de comportement thermoélastique a d'ores–et–déjà été linéarisée et c'est la formulation (7.21) qui est prise ici. Il reste encore à linéariser les équations d'équilibre en contraintes. A l'équilibre, l'accélération est nulle et la forme locale de l'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}) + \rho \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = 0 \tag{8.1}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. On procède à la linéarisation en supposant la norme du gradient du déplacement suffisamment petite (cf. paragraphe 2.3.3),

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} + \rho f_i(\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{u}}) \simeq \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(\delta_{kj} - u_{k,j}) + \rho_0 f_i(\underline{\boldsymbol{X}}) + \rho_0 \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\underline{\boldsymbol{X}})u_k$$

Dans le cas d'un état initial naturel, on peut négliger les termes proportionnels à $\|\operatorname{Grad} \underline{\boldsymbol{u}}\|$. Le dernier terme peut être ramené à l'ordre $\mathcal{O}(\|\operatorname{Grad} \underline{\boldsymbol{u}}\|)$ par une translation adéquate et peut donc être négligé. En conséquence, l'équation d'équilibre se réduit à

$$\operatorname{Div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho_0 \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{X}}) = 0 \tag{8.2}$$

On a donc transformé l'équation d'équilibre qui était écrite sur la configuration actuelle inconnue en un problème sur la configuration de départ. Tout se passe *in fine* dans les équations comme si $\underline{\boldsymbol{x}}$ et $\underline{\boldsymbol{X}}$ coïncidaient.

Qu'en est-il des conditions aux limites ? Si on impose un déplacement $\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{u}}^d$, aucune modification n'est nécessaire. Si le vecteur–traction $\underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \underline{\boldsymbol{t}}^d(\underline{\boldsymbol{x}})$ est donné sur une partie de

la frontière, il faut remarquer que, en vertu de la relation (2.42) reliant le vecteur normal à la facette courante à sa direction initiale,

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}.\underline{\boldsymbol{N}}\,\frac{ds}{dS} \simeq \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{N}} \tag{8.3}$$

puisque $J = 1 + \mathcal{O}(\|\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\|)$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \mathcal{O}(\|\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\|)$ et $ds \simeq dS + \mathcal{O}(\|\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\|)$. De même

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \underline{\boldsymbol{t}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{u}}) \simeq \underline{\boldsymbol{t}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{X}}) + \operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{t}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{X}}).\underline{\boldsymbol{u}}$$

la correction pouvant être rendue aussi petite que nécessaire par une translation adéquate. Il est donc suffisant d'imposer le même effort en utilisant le vecteur normal sur la configuration de référence.

Les hypothèses qui président à l'écriture du problème aux limites de thermoélasticité linéarisé sont les suivantes :

- Contexte infinitésimal : petites transformations = petites rotations + petites déformations. Il est suffisant, on le voit, de travailler sur la configuration de référence. La configuration actuelle s'obtient grâce au champ de déplacement qui est l'inconnue première du problème. Ce déplacement n'est pas nécessairement petit car il peut comporter une translation d'ensemble arbitraire (les rotations étant supposées infinitésimales).
- Variations limitées de température, puisque la loi de comportement élastique a aussi été linéarisée par rapport à la température. Dans la suite, le champ de température est supposé donné car on n'étudie pas ici le problème thermomécanique couplé.
- Etat initial naturel : $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}}^0 = 0$ dans (7.21). En partant d'un état quasi–naturel (7.20), on pourra travailler de la même façon qu'à partir d'un état initial naturel en remplaçant la contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ par l'écart $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^0$. Dans un état précontraint initial quelconque, on peut procéder de la même façon mais on risque de passer à côté de possibles instabilités ou bifurcations[1].
- Le solide est considéré comme homogène et isotrope. Le cas d'un solide hétérogène par morceaux s'en déduit immédiatement en ajoutant les conditions de continuité aux interfaces[2]. L'hypothèse d'isotropie ne joue qu'un rôle d'illustration et ne sera utilisée qu'après coup, le problème aux limites étant formulé initialement dans le cas général.

Les trois premières hypothèses constituent ce qu'on appelle traditionnellement l'**hypothèse des petites perturbations** (cadre **HPP**). Lorsqu'on aura établi une solution du problème aux limites étudié, il faudra vérifier *a posteriori* que toutes ces hypothèses sont bien vérifiées, en particulier le caractère infinitésimal de la transformation.

8.1.2 Formulation du problème aux limites

Il est temps de définir les conditions imposées au solide Ω étudié. Il s'agit d'abord des efforts de champ $\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ supposés connus en tout point. Il s'agit ensuite des conditions imposées à la frontière $\partial\Omega$. On distinguera trois types de conditions aux limites principaux :

[1] Danger ! l'étude de matériaux ou structures limitée au contexte linéarisé ne garantit aucunement la stabilité des situations étudiées et ne permet pas d'envisager toutes les catastrophes possibles, même si la structure n'est effectivement qu'apparemment peu sollicitée. Pour prévoir des accidents tels que le flambage des structures par exemple, il faut sortir du cadre des transformations infinitésimales. Le cadre des déformations infinitésimales peut être suffisant pour prévoir certaines bifurcations (voir le problème *Torsion d'un barreau précontraint* dans le recueil de problèmes (Amestoy, 2004)).

[2] En fait, les équations sont valables pour un matériau à gradient de propriété (variation continue des propriétés thermoélastiques), à conditions de laisser les constantes d'élasticité sous la divergence !

- **Conditions aux limites en déplacement.** Le déplacement est donné sur tout le contour :

$$\underline{\boldsymbol{u}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = \underline{\boldsymbol{u}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{x}}\,), \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega \tag{8.4}$$

  Ces conditions aux limites sont dites de type Dirichlet.
- **Conditions aux limites en efforts.** Le vecteur–traction est imposé sur toute la frontière de Ω :

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,).\underline{\boldsymbol{n}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = \underline{\boldsymbol{t}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{x}}\,), \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega \tag{8.5}$$

  Ces conditions aux limites sont dites de type Neumann.
- **Conditions aux limites mixtes.** On partage la frontière Ω en deux parties telles que

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{td} = \partial\Omega, \quad \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_{td} = \emptyset$$

  comme sur la figure 8.1. Le déplacement est imposé sur Ω_u tandis que le vecteur–traction est donné sur $\partial\Omega_{td}$:

$$\underline{\boldsymbol{u}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = \underline{\boldsymbol{u}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{x}}\,), \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_u \tag{8.6}$$

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,).\underline{\boldsymbol{n}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = \underline{\boldsymbol{t}}^{\,d}(\underline{\boldsymbol{x}}\,), \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_{td} \tag{8.7}$$

On peut en fait définir des conditions mixtes plus générales encore en considérant trois découpages de $\partial\Omega$ en $(\partial\Omega_u^i, \partial\Omega_{td}^i)_{i=1,2,3}$ tels que

$$\partial\Omega_u^i \cup \partial\Omega_{td}^i = \partial\Omega, \quad \partial\Omega_u^i \cap \partial\Omega_{td}^i = \emptyset$$

Pour chaque i successivement, on impose les composantes

$$u_i(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = u_i^d(\underline{\boldsymbol{x}}\,), \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_u^i \tag{8.8}$$

$$t_i(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = \sigma_{ij}(\underline{\boldsymbol{x}}\,)n_j(\underline{\boldsymbol{x}}\,) = t_i^d(\underline{\boldsymbol{x}}\,), \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_{td}^i \tag{8.9}$$

Par conséquent, en chaque point du contour $\partial\Omega$, on impose 3 conditions et 3 seulement, chacune pouvant être une composante déplacement ou (exclusif) une composante d'effort. Le repère considéré doit être au moins orthogonal (non nécessairement cartésien). En d'autres termes, il n'est pas possible d'imposer en un point donné à la fois u_1 et t_1. Il faut imposer l'un ou l'autre.

Le problème aux limites $(\mathcal{P})$ de thermoélasticité linéarisé consiste donc à chercher les champs $(\underline{\boldsymbol{u}}\,, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})$ sur le solide Ω vérifiant

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dfrac{1}{2}(\operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{u}} + (\operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{u}})^T),\ \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega & \text{compatibilité} \\ \operatorname{div}\sigma + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = 0,\ \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega & \text{équilibre} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} - (T - T_0)\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}},\ \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega & \text{loi de comportement} \\ u_i = u_i^d, \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_u^i & \text{conditions aux limites} \\ t_i = \sigma_{ij}n_j = t_i^d, \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_{td}^i & \end{cases}$$

Cela fait 9 inconnues scalaires pour neuf équations scalaires. Le cas particulier de l'élasticité isotrope est donné dans le tableau 8.1.

Les conditions aux limites les plus générales envisagées ici sont données par (8.9) et supposent que les partitions $\partial\Omega_u^i$ et $\partial\Omega_{td}^i$ sont connues a priori. Il existe d'autres conditions aux limites possibles pour lesquelles cette partition est une inconnue du problème. On mentionne le cas de la **liaison unilatérale**, très employée pour les problèmes de contact entre solides, qui stipule

qu'une composante u_3 de déplacement est bloquée tant que $t_3 < 0$ (compression), elle est libre sinon. En effet le solide rentre alors en contact avec un autre solide. Une telle condition exige de tester la solution du problème au fur et à mesure du calcul. Elle est non linéaire. De même le problème de Hertz de l'indentation d'une bille sur une surface plane est un exemple de condition aux limites non linéaire : la zone de contact entre la bille et le substrat est une inconnue du problème (Amestoy, 2004).

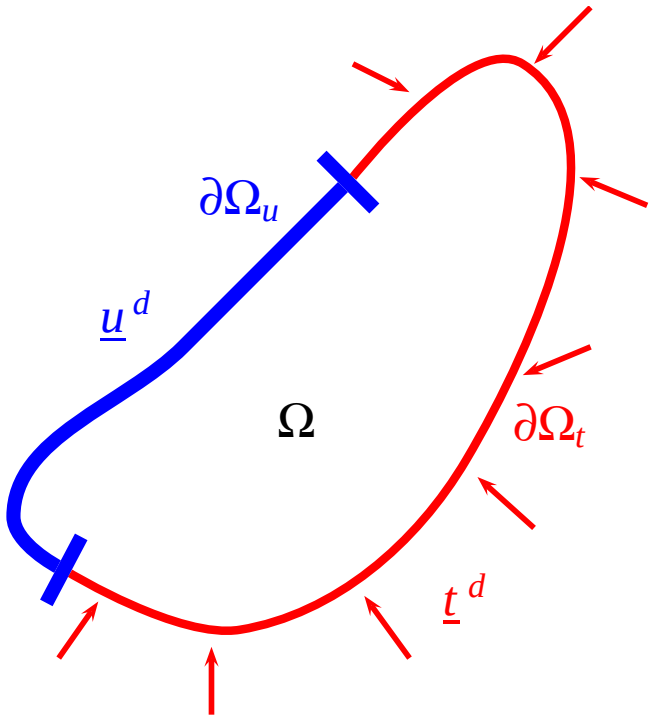


FIG. 8.1 – Conditions aux limites mixtes sur un solide Ω : la frontière du solide $\partial\Omega$ est partagée en $\partial\Omega_u$ où un déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ est imposé et en $\partial\Omega_{td}$ où le vecteur–traction $\underline{\boldsymbol{t}}^d$ est imposé.

8.1.3 Schémas de résolution

Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ revient à trouver un champ de déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ solution sur Ω, ou bien un champ de contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ solution sur Ω. En effet, si l'on connaît $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{x}})$, le champ de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ se calcule en appliquant à $\underline{\boldsymbol{u}}$ l'opérateur gradient symétrisé. Le champ des contraintes s'en déduit alors par application de la loi d'élasticité. Inversement, si le champ des contraintes est connu, le champ des déformations s'en déduit par les relations d'élasticité faisant intervenir le tenseur des souplesses. Si la solution du problème $(\mathcal{P})$ existe, le champ de déformation correspondant doit être compatible et l'on sait construire le champ de déplacement associé, à un mouvement de corps rigide près, en suivant la démarche décrite au paragraphe 2.3.5. Le mouvement de corps rigide à ajouter sera fixé par les conditions aux limites en déplacement.

Il existe donc deux stratégies de résolution du problème $(\mathcal{P})$, celle qui consiste à formuler le problème en déplacements et celle qui privilégie les contraintes[3]. Dans le cas isotrope, il est possible de formuler plus explicitement les équations qui régissent le déplacement d'une part et celles qui gouvernent les contraintes d'autre part. Par commodité, on ne considère ici que le cas isotherme $T = T_0$.

[3] On doit parfois recourir à des méthodes mixtes.

Trouver les champs $(\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{x}}), \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}))$ sur Ω tels que

Compatibilité

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{u}} + (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{u}})^T), \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega$$

Equations d'équilibre

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega$$

Loi de comportement thermoélastique linéaire

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + 2\mu \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - 3\kappa\alpha(T - T_0)\underset{\sim}{\mathbf{1}}, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega$$

Conditions aux limites

$$u_i = u_i^d, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_u^i$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = t_i^d, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega_{td}^i$$

TAB. 8.1 – Récapitulatif : le problème aux limites de l'équilibre thermoélastique linéarisé.

Méthode des déplacements

On part de la loi d'élasticité écrite dans une base cartésienne orthonormée, et on remplace la déformation par son expression (2.108) en fonction du déplacement :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ &= \lambda u_{k,k}\, \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned}$$

On calcule la divergence du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \lambda u_{k,kj}\, \delta_{ij} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) \\ &= \lambda u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{k,ik} \\ &= (\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} \end{aligned}$$

On reconnaît dans le dernier terme le laplacien de la composante u_i. Quant au vecteur $u_{k,ki}$, il faut y reconnaître le gradient de la divergence du vecteur $\underline{\boldsymbol{u}}$. La formule en composantes précédentes est donc équivalente à la formulation intrinsèque suivante

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{u}}) + \mu \Delta \underline{\boldsymbol{u}} \tag{8.10}$$

où le laplacien d'un vecteur est défini comme le vecteur dont les composantes cartésiennes sont le laplacien des composantes. On a donc le

Théorème 17 (Equations de Navier) *Le champ de déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ d'un solide Ω thermoélastique isotrope à l'équilibre est solution des équations de champs suivantes*

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{u}}) + \mu \Delta \underline{\boldsymbol{u}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0 \tag{8.11}$$

Il s'agit d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 en les composantes u_i du vecteur déplacement.

Une conséquence des équations de Navier est l'équation dite de la dilatation, qui s'obtient en appliquant l'opérateur gradient puis l'opérateur trace aux équations de Navier. Cela donne successivement

$$(\lambda + \mu) \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})) + \mu \Delta(\boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{u}}) + \rho \boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{f}} = 0$$

Le premier terme s'écrit $u_{k,kij}$ en composantes. En passant à la trace, cela donne

$$(\lambda + 2\mu) \Delta(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \rho \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{f}} = 0 \tag{8.12}$$

ce qui exprime que le laplacien de la dilatation volumique $(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})$ est directement relié aux forces volumiques.

Méthode des contraintes

Théorème 18 (Equations de Beltrami) *Un champ de contraintes est solution d'un problème d'équilibre en élasticité linéaire si et seulement si il vérifie les équations d'équilibre, les conditions aux limites en effort et les équations suivantes*

$$\Delta \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \operatorname{grad}(\operatorname{grad}(\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})) + \frac{\nu}{1-\nu} \rho (\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{f}}) \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \rho (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{f}} + (\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{f}})^T) = 0 \tag{8.13}$$

Preuve. Les inconnues principales sont cette fois–ci les contraintes. La loi de comportement inverse permet de calculer les déformations

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{8.14}$$

Ce champ de déformation doit vérifier les équations de compatibilité (2.143) pour que le problème d'élasticité admette une solution. On va utiliser la variante suivante des équations de compatibilité

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} = \varepsilon_{ik,jk} + \varepsilon_{jk,ik} \tag{8.15}$$

qui s'obtient simplement en écrivant (2.143) pour $k = l$ et en sommant ces équations pour les trois valeurs de k. On y introduit alors la relation d'élasticité pour obtenir une équation en contraintes

$$(1+\nu)\sigma_{ij,kk} - \nu(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_{,kk}\delta_{ij} + (\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_{,ij} + (1+\nu)\rho(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \tag{8.16}$$

Le terme en laplacien de la trace de la contrainte peut être éliminé en utilisant les équations (7.49) et l'équation de la dilatation (8.12). On obtient finalement

$$(1+\nu)\sigma_{ij,kk} + (\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_{,ij} + \frac{\nu}{1-\nu}\rho f_{k,k}\delta_{ij} + (1+\nu)\rho(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \tag{8.17}$$

où l'on a en outre utilisé l'identité

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

Les équations (8.17) sont bien les expressions indicielles des équations de Beltrami cherchées (8.13). □

Une formulation équivalente du théorème 18 consiste à vérifier les équations (8.13) sur le domaine considéré et à vérifier que les équations d'équilibre sont vérifiées sur le bord du domaine[4].

Les deux démarches sont résumées sur le schéma de résolution de la figure 8.2. On ne conseille pas dans la pratique commençante de la MMC d'appliquer directement les équations de Navier ou Beltrami mais de refaire, dans le cas particulier du problème aux limites étudié, l'itinéraire qui conduit des déplacements aux contraintes ou des contraintes aux déplacements.

Quitte à décevoir le lecteur, il faut bien dire qu'il n'existe pas de méthode systématique permettant d'exhiber la solution d'un problème d'élasticité. On part en général de formes de solutions trouvées de manière intuitive à partir du problème posé, forme que l'on précise grâce aux équations de champ du problème et aux conditions aux limites. Suivant le type de problème

[4]En effet, en prenant la divergence des équations de Beltrami (8.13), on trouve

$$\Delta(\text{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}}) = 0$$

(Germain, 1986). L'équilibre est donc vérifié en tout point dès qu'il l'est au bord en vertu du fait qu'une fonction harmonique nulle au bord, l'est dans tout le domaine. Quelques propriétés des fonctions harmoniques sont rappelées en particulier dans l'application du chapitre 13 consacré à la torsion des barres. Le décompte des équations confirme la nécessité de ces conditions au bord supplémentaires. Les équations de Beltrami sont au nombre de 6. On dispose de 3 conditions à la frontière en effort (problème de Neumann). Trois conditions supplémentaires sont *a priori* nécessaires et l'on peut prendre :

$$\text{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega$$

posé, l'approche en déplacements ou en contraintes pourra être plus aisée. Il faut attendre les résultats sur l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P})$ pour finir de justifier cette démarche (paragraphe 8.1.5). C'est en ce sens qu'on pourra dire qu'il existe des problèmes plus "beaux" que d'autres, à savoir ceux où il faut déployer le plus de technique, d'astuce ou d'intuition pour les résoudre !

La démarche de résolution par la méthode des déplacements consiste donc à

1. proposer une forme de champ de déplacement vérifiant les conditions aux limites en déplacement ;
2. calculer le champ de déformation associé ;
3. calculer les contraintes grâce à la loi de thermoélasticité linéaire ;
4. les substituer dans les équations d'équilibre ;
5. intégrer ces équations pour trouver la forme exacte du champ de déplacement solution
6. vérifier les conditions aux limites en effort.

La démarche de résolution par la méthode des contraintes consiste à

1. proposer une forme de solution en contraintes vérifiant les conditions aux limites en effort et les équations d'équilibre ;
2. calculer le champ de déformation grâce à la loi de comportement élastique ;
3. écrire les équations de compatibilité ou les équations de Beltrami ;
4. intégrer les équations obtenues pour finir de préciser la forme de la solution en contraintes ;
5. intégrer le champ de déformation pour obtenir le champ de déplacement.
6. vérifier les conditions aux limites en déplacement.

Des variantes de cette démarche permettront éventuellement d'accéder plus rapidement à la solution.

Il existe par contre des méthodes numériques systématiques permettant d'approcher aussi près qu'on le souhaite la solution d'un problème d'équilibre thermoélastique linéarisé (on renvoie au cours sur la méthode des éléments finis (Tijani, 2004; Cailletaud et al., 2004)).

8.1.4 Superposition

Le problème $(\mathcal{P})$ (isotherme) ainsi posé est linéaire. On entend par là que si

- $(\underline{\boldsymbol{u}}^A, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^A)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$ pour les données $(\underline{\boldsymbol{f}}^A, u_i^{dA}, t_i^{dA})$;
- et si $(\underline{\boldsymbol{u}}^B, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^B)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$ pour les données $(\underline{\boldsymbol{f}}^B, u_i^{dB}, t_i^{dB})$;

alors, pour tous les réels λ_A et λ_B,

- $(\lambda_A \underline{\boldsymbol{u}}^A + \lambda_B \underline{\boldsymbol{u}}^B, \lambda_A \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^A + \lambda_B \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^B)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$ pour les données $(\lambda_A \underline{\boldsymbol{f}}^A + \lambda_B \underline{\boldsymbol{f}}^B, \lambda_A u_i^{dA} + \lambda_B u_i^{dB}, \lambda_A t_i^{dA} + \lambda_B t_i^{dB})$.

Cette propriété est parfois appelée **principe de superposition**. Elle permet de calculer l'état de contrainte et de déformation d'un solide pour plusieurs chargement successifs. C'est tout à fait licite à condition toutefois de veiller à chaque étape à la validité du cadre HPP (transformation infinitésimale et états successifs quasi–naturels).

Pour l'appliquer, il faut que les domaines $\partial\Omega_u^i$ et $\partial\Omega_d^i$ soient identiques pour les deux chargements A et B.

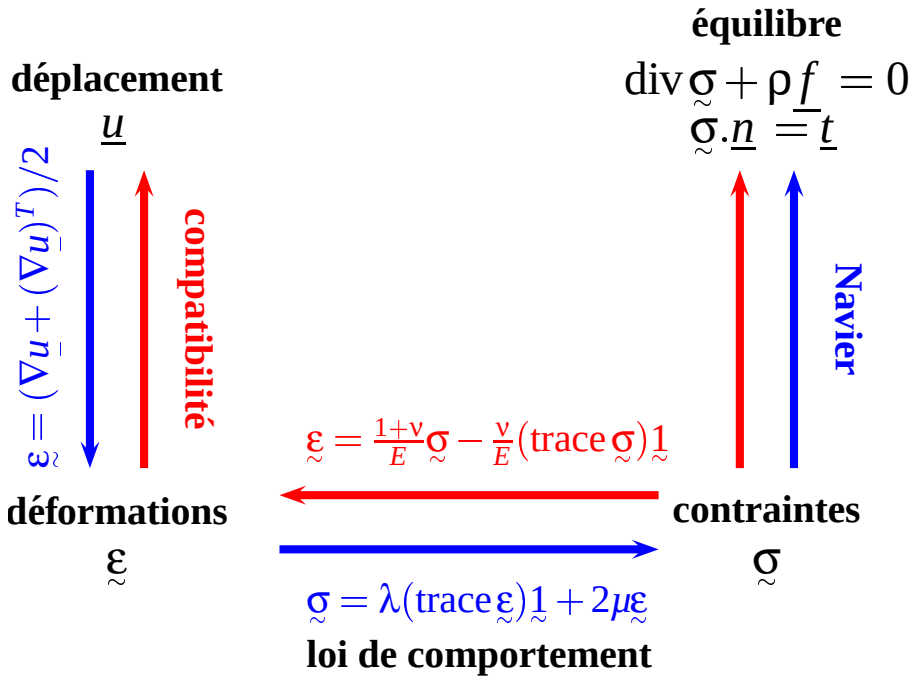


FIG. 8.2 – Les schémas de résolution d'un problème aux limites d'équilibre d'un solide thermoélastique linéaire. La méthode des déplacements est en bleu, la méthode des contraintes en rouge.

8.1.5 Existence et unicité des solutions

On va commencer par établir l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant le théorème 11 des travaux virtuels, qui représente la version globale (variationnelle) des équations d'équilibre. La technique utilisée est intéressante car très classique pour établir l'unicité des solutions de problèmes aux dérivées partielles. On formule ici le théorème des travaux virtuels dans le cas statique et pour les conditions aux limites (8.7) :

Théorème 19 (Théorème des travaux virtuels (cas statique)) *Le champ de contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, supposé ici régulier, sur un corps matériel Ω soumis aux conditions $\underline{\boldsymbol{f}}, \underline{\boldsymbol{t}}^d$ et $\underline{\boldsymbol{u}}^d$ vérifient les équations d'équilibre* $\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}+\rho\underline{\boldsymbol{f}}=0$ *en tout point si et seulement si, pour tout champ de déplacement virtuel $\underline{\boldsymbol{u}}^\star$ régulier*[5]*, on a*

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^\star \, dV = \int_\Omega \rho\underline{\boldsymbol{f}}.\underline{\boldsymbol{u}}^\star \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d.\underline{\boldsymbol{u}}^\star \, dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}).\underline{\boldsymbol{u}}^d \, dS \tag{8.18}$$

pour tout champ $\underline{\boldsymbol{u}}^\star$ tel que $\underline{\boldsymbol{u}}^\star = \underline{\boldsymbol{u}}^d$ sur $\partial\Omega_u$.

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 11 en l'absence de terme d'accélération et tenant compte des conditions aux limites particulières introduites. □

Soient maintenant $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_A)$ et $(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_B, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_B)$ deux solutions sur Ω du problème aux limites $(\mathcal{P})$. Les champs de déplacements correspondants $\underline{\boldsymbol{u}}_A$ et $\underline{\boldsymbol{u}}_B$ vérifient les conditions aux limites sur Ω_u et sont donc des champs virtuels admissibles pour l'application du théorème des travaux

[5] Il est suffisant de considérer le cas de fonctions–tests de classe C^∞. Dans une description plus précise mettant en œuvre la notion de distributions, ces fonctions–tests ne sont autres que les fonctions C^∞ à support compact.

virtuels (8.18). On applique donc (8.18) d'abord à $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A$ pour $\underline{\boldsymbol{u}}^\star = \underline{\boldsymbol{u}}_A$ et $\underline{\boldsymbol{u}}^\star = \underline{\boldsymbol{u}}_B$:

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_A \, dV = \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} . \underline{\boldsymbol{u}}_A \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d . \underline{\boldsymbol{u}}_A \, dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A . \underline{\boldsymbol{n}}) . \underline{\boldsymbol{u}}^d \, dS \tag{8.19}$$

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_B \, dV = \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} . \underline{\boldsymbol{u}}_B \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d . \underline{\boldsymbol{u}}_B \, dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A . \underline{\boldsymbol{n}}) . \underline{\boldsymbol{u}}^d \, dS \tag{8.20}$$

La différence des équations précédentes donne donc

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A : \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} . \Delta\underline{\boldsymbol{u}} \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d . \Delta\underline{\boldsymbol{u}} \, dS \tag{8.21}$$

où l'on a noté $\Delta\underline{\boldsymbol{u}} = \underline{\boldsymbol{u}}_A - \underline{\boldsymbol{u}}_B$. Le même raisonnement peut être mené pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_B$ de sorte que

$$\int_\Omega \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_B : \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = \int_\Omega \rho \underline{\boldsymbol{f}} . \Delta\underline{\boldsymbol{u}} \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{\boldsymbol{t}}^d . \Delta\underline{\boldsymbol{u}} \, dS \tag{8.22}$$

La différence (8.21) - (8.22) conduit donc à

$$\int_\Omega \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = 0 \tag{8.23}$$

où l'on a noté

$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_B, \quad \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_A - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_B$$

Or, pour les deux solutions A et B, le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par le même tenseur des modules d'élasticité :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_A = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_A, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_B = \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_B \tag{8.24}$$

En conséquence, une condition nécessaire pour que deux solutions du problème $(\mathcal{P})$ puissent coexister est que

$$\int_\Omega \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = 0 \tag{8.25}$$

On en déduit que le caractère défini positif du tenseur des modules d'élasticité est une **condition suffisante d'unicité** de la solution du problème d'équilibre thermoélastique. En effet, si $\underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}$ est défini positif, on a

$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underset{\sim\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} : \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0, \quad \forall \Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$$

Si ce n'est pas le cas, on montre que, dans certains cas, des solutions multiples peuvent être construites. Cela justifie que les tenseurs des modules d'élasticité des solides soient définis positifs et qu'alors, conformément à l'expérience courante, pour les conditions aux limites (8.9), il y a une relation univoque entre la réponse d'une pièce et la sollicitation.

L'existence de la solution du problème $(\mathcal{P})$, pour les conditions aux limites linéaires envisagées, est admise dans ce cours. Elle résulte d'un théorème fort de mathématiques (dit de Lax-Milgram) sur les équations aux dérivées partielles d'ordre 2 linéaires elliptiques (Maisonneuve, 2003). Le caractère elliptique des équations aux dérivées partielles est directement lié au caractère défini positif du tenseur des modules d'élasticité.

Le problème d'équilibre thermoélastique linéarisé est donc un **problème bien posé** ou **régulier** car il possède, pour les conditions aux limites envisagées ici, une solution et une seule en termes de contraintes et de déformations. Ce résultat justifie la démarche classique de résolution de tels problèmes, qui consiste à proposer une forme de solution, et à la préciser grâce aux équations de compatibilité ou d'équilibre ainsi qu'aux conditions aux limites. Si cette forme proposée s'avère possible, on conclut que c'est nécessairement la solution cherchée, en vertu du théorème d'unicité.

8.2 Exemples : traction et flexion simples

Deux problèmes aux limites simples d'élasticité linéaire sont présentés ici. L'un concerne un état de déformation homogène (traction simple) l'autre un état de déformation hétérogène (la flexion simple). Les deux problèmes sont résolus ici par la méthode des contraintes, i.e. la forme du champ de contraintes est proposée.

8.2.1 Essai de traction/compression simple

L'essai de traction/compression est l'essai de caractérisation par excellence adapté à quasiment tous les matériaux (métaux, polymères, céramiques). L'objectif est de soumettre un échantillon à un champ de contraintes homogène et uni–axial afin de mesurer sa réponse en déformation. L'homogénéité n'est souvent acquise que dans une zone limitée de l'éprouvette appelée **zone utile**. La difficulté majeure de l'essai est de trouver le moyen d'accrocher l'éprouvette à une machine de traction et de transmettre à la zone utile une charge aussi uni–axiale que possible (pas de flexion parasite ni de concentration de contraintes). Comme l'état de contrainte souhaité est homogène, la géométrie de la zone utile est assez libre mais de section invariante par translation le long de l'axe de traction (par exemple cylindrique de révolution ou parallélépipédique comme sur la figure 8.3) La forme des têtes d'éprouvette dépend par contre du type de matériau (éprouvette en os de chien, tête filetée, etc.). En compression simple, la géométrie de l'éprouvette est en général plus simple (cylindrique de révolution) mais la difficulté consiste alors à trouver le bon lubrifiant permettant de limiter le frottement entre les faces supérieure et inférieure et les plateaux de la machine, faute de quoi l'état de contrainte ne pourra pas être purement uni-axial.

Le problème de traction/compression d'un solide élastique peut être formulé à l'aide de conditions aux limites en efforts. La figure 8.3 indique qu'un effort axial est appliqué sur les faces horizontales de l'éprouvette tandis que les surfaces latérales sont libres de tout effort. Les efforts volumiques sont négligés. L'état initial est supposé naturel. L'effort surfacique axial appliqué sur la face supérieure vaut

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{\,d} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_{\,3} = T\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,3} \tag{8.26}$$

Noter que le signe de la charge appliquée T est intrinsèque (il ne dépend pas du choix d'orientation de l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_{\,3}$) :

- si $T > 0$, il s'agit d'un essai de **traction** ;
- si $T < 0$, il s'agit d'un essai de **compression**.

On vérifiera que les efforts indiqués sur la figure 8.3 conduisent à une force résultante et à un moment résultant nuls, sans quoi il ne pourrait s'agir d'un problème de statique.

Contraintes

Le champ de contraintes uni-axial et homogène suivant est recherché

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma \underline{\boldsymbol{e}}_{\,3} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,3}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} = \sigma \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

Le tenseur σ est uniforme (indépendant de la position $\underline{\boldsymbol{x}}$) et vérifie par conséquent identiquement les équations locales de la statique ($\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ en l'absence d'efforts volumiques).

Les conditions aux limites en $x_3 = 0$ et $x_3 = L$ où L est la longueur de la zone utile de l'éprouvette considérée, impliquent que

$$\sigma = T$$

La résultante des forces sur la section supérieure est selon $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ et vaut $F = TS$ où S est la section de l'éprouvette. La contrainte axiale de traction/compression est donc égale à la force totale appliquée divisée par la section de l'éprouvette :

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{8.28}$$

Déformations

Les déformations engendrées par les contraintes sont uniformes et se calculent grâce à la loi d'élasticité inverse

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{8.29}$$

où le matériau est supposé isotrope. En utilisant l'expression (8.27) du tenseur des contraintes, on obtient

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E}(\underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 - \nu(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2)), \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} -\nu\dfrac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\dfrac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma}{E} \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

La déformation axiale est donc égale au rapport σ/E où E est le module de Young. Les contractions latérales sont caractérisées par le coefficient de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \tag{8.31}$$

ce qui fournit une interprétation physique claire du coefficient de Poisson.

Suivons l'évolution d'une section normale à la direction de traction. Pour cela on peut considérer un élément de surface $\underline{\boldsymbol{ds}} = \underline{\boldsymbol{dx}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{dx}}_2$ engendré par deux fibres matérielles orthogonales à l'axe de traction. Chaque vecteur matériel actuel $\underline{\boldsymbol{dx}}$ est relié à la fibre matérielle initiale $\underline{\boldsymbol{dX}}$ par

$$\underline{\boldsymbol{dx}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}} = (\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \text{grad}\,\underline{\boldsymbol{u}}).\underline{\boldsymbol{dX}}$$

Lorsque la fibre $\underline{\boldsymbol{dX}}$ est choisie orthogonale à l'axe de traction, la relation précédente devient :

$$\underline{\boldsymbol{dx}} = (1+\varepsilon_{11})\underline{\boldsymbol{dX}}$$

puisque $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$. Ainsi,

$$\underline{\boldsymbol{ds}} = \underline{\boldsymbol{dx}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{dx}}_2 = (1+\varepsilon_{11})^2\underline{\boldsymbol{dX}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{dX}}_2 \simeq (1+2\varepsilon_{11})\underline{\boldsymbol{dX}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{dX}}_2 = (1+2\varepsilon_{11})\underline{\boldsymbol{dS}}$$

La norme des vecteurs précédents fournit

$$ds \simeq (1-2\nu\varepsilon_{33})dS$$

Comme le champ de déformation est homogène sur la section, on en déduit que la section initiale S_0 de l'éprouvette se transforme en S telle que

$$\frac{S-S_0}{S_0} = -2\nu\varepsilon_{33} \tag{8.32}$$

dans le contexte infinitésimal. Pour les matériaux à $\nu > 0$, la section diminue donc en traction et augmente en compression, ce qui correspond bien à l'expérience courante. Pour établir ce résultat, on aurait pu aussi utiliser directement la formule (2.42).

On rappelle que la variation de volume de l'éprouvette est donnée par (7.55). Elle est positive en traction et négative en compression, quel que soit $-1 < \nu < 0.5$.

Déplacements

Le champ de déformation précédent est homogène. Il vérifie donc trivialement les conditions de compatibilité. Pour calculer le champ de déplacement associé au champ de déformation précédent, on conseille fortement la démarche systématique proposée au paragraphe 2.3.5 (voir page 54), même si cette intégration est particulièrement simple dans le cas de la traction. Cette démarche commence par le calcul du gradient (2.146) de la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} = 0 \tag{8.33}$$

qui est nul dans le cas de la traction simple puisque le champ de déformation est homogène. L'intégration de l'équation précédente a déjà été effectuée à la page 49 et donne

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}] = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \tag{8.34}$$

où les petits angles p, q, r sont uniformes. Le champ de déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$ est tel que

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{lll} u_{1,1} = -\nu\dfrac{\sigma}{E}, & u_{2,1} = r, & u_{3,1} = -q \\ u_{1,2} = -r, & u_{2,2} = -\nu\dfrac{\sigma}{E}, & u_{3,2} = p \\ u_{1,3} = q, & u_{2,3} = -p, & u_{3,3} = \dfrac{\sigma}{E} \end{array}$$

L'intégration de chacune des colonnes précédentes fournit, une à une, les composantes u_i :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\sigma}{E} x_3 \underline{\boldsymbol{e}}_3 - \nu\frac{\sigma}{E}(x_1\underline{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\underline{\boldsymbol{e}}_2) + \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{c}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\nu\dfrac{\sigma}{E}x_1 - rx_2 + qx_3 + c_1 \\ u_2 = -\nu\dfrac{\sigma}{E}x_2 + rx_1 - px_3 + c_2 \\ u_3 = \dfrac{\sigma}{E}x_3 - qX_1 + pX_2 + c_3 \end{array} \right. \tag{8.35}$$

Le vecteur $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$ a pour composantes $[p\,q\,r]^T$ et $\underline{\boldsymbol{c}}$ est un champ uniforme de translation. Le déplacement est donc déterminé à un mouvement infinitésimal de corps rigide près.

Validation du contexte infinitésimal

La transformation ainsi déterminée est effectivement infinitésimale à condition que les composantes des déformations ε_{ij} et des rotations ω_{ij} restent modestes :

$$\left|\frac{\sigma}{E}\right| \ll 1, \quad \left|\nu\frac{\sigma}{E}\right| \ll 1, \quad |p|, |q|, |r| \ll 1 \tag{8.36}$$

La condition critique est donc $|\sigma/E| \ll 1$. Pour les métaux, la limite d'élasticité σ_0 est en général largement inférieure au module de Young. Si l'on travaille avec des structures métalliques dans le régime élastique, l'essai de traction reste clairement dans le contexte infinitésimal. Pour être complètement rassuré sur la pertinence du modèle linéarisé, il reste à vérifier que chaque état de sollicitation en cours d'essai reste quasi–naturel. On va voir plus loin que pour certaines géométries d'éprouvettes, ce n'est pas toujours le cas en compression (condition de flambage)[6].

[6] On insiste sur le fait qu'une analyse du problème linéarisé ne peut en aucun cas nous prémunir du risque d'instabilité de la structure.

Autres conditions aux limites pour la traction

Le problème aux limites de traction simple a été formulé à l'aide de conditions aux limites en effort. Il est possible d'avoir recours à des conditions aux limites mixtes. On impose pour cela un déplacement $u_3 = 0$ sur la face inférieure de l'éprouvette et $u_3 = \delta$ uniforme sur la face supérieure. Le vecteur–contrainte reste nul sur les faces latérales. Il reste a préciser des conditions dans les directions 1 et 2 sur les faces supérieure et inférieure de l'éprouvette. L'application du tenseur des contraintes (8.27) à ces surfaces indique que l'on doit avoir $t_1 = t_2 = 0$. Avec ces conditions aux limites mixtes, on peut essayer la solution linéaire

$$u_3 = \frac{\delta}{L_0} X_3$$

où L_0 est la longueur initiale de l'éprouvette. Les champs de contraintes et de déformations (8.27) et (8.30) sont toujours les solutions du problème avec

$$\varepsilon_{33} = \frac{\delta}{L_0}$$

La force F appliquée à l'éprouvette est reliée à l'allongement de la zone utile de longueur L par

$$\frac{F}{S} = E \frac{\delta}{L} \tag{8.37}$$

On vérifiera que, dans le contexte infinitésimal, on peut écrire indifféremment L ou L_0, S ou S_0 dans la formule précédente qui est à la base de la pratique des essais de traction.

Dans la pratique il n'est pas facile d'imposer $t_1 = t_2 = 0$ sur les faces supérieures et inférieures d'une éprouvette. Dans le cas de polymères ou d'élastomères, on est parfois obligé de coller ces faces à des plateaux rigides pour réaliser l'essai. Dans ce cas, on impose en fait $u_1 = u_2 = 0$, c'est–à–dire que l'on empêche ces faces de rétrécir en traction et de grandir en compression. Il en résulte des efforts importants qui font que la déformation n'est plus homogène dans l'éprouvette. Pour de nombreux matériaux cependant, et selon la géométrie de l'éprouvette, il existe encore une zone utile où les champs (8.27) et (8.30) règnent effectivement, de sorte que de tels essais sont exploitables. Différents effets de bord sont illustrés sur la figure 8.5.

Condition de flambage élastique

L'expérience courante nous apprend que lorsqu'on essaie de comprimer un corps élancé dans le sens de sa longueur, une instabilité risque de se produire. La poutre se fléchit tout à coup ou prend la forme d'un arc de cercle ou d'un S au–delà d'une certaine charge. Il n'est alors plus possible de déformer la poutre de manière homogène comme on le souhaite en compression. Cette instabilité qui existe aussi pour les plaques s'appelle **flambage** ou **flambement**. Prédire le flambage n'est pas possible dans le contexte infinitésimal. L'analyse se fait alors en considérant explicitement les configurations "flambées", i.e. fléchies ou en S. Dans le cadre de la théorie des poutres, on peut évaluer la charge critique à partir de laquelle une colonne élastique (non encastrée à ses extrémitées) risque de flamber, c'est la **charge d'Euler** :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{8.38}$$

où $I = \int_S X_1^2 dX_1 dX_2$ est le moment quadratique de la section ($I = t^2/12$ pour une section de poutre carrée de côté t). Dans le cas des métaux, la formule précédente s'avère trop optimiste

car un flambage plastique peut se produire de manière plus précoce. Les conditions de flambage plastique sont délicates à déterminer (théoriquement et expérimentalement). Pour éviter ces instabilités, il faut diminuer l'élancement L/t de la poutre. Ce critère fait partie des conditions de dimensionnement des essais de compression.

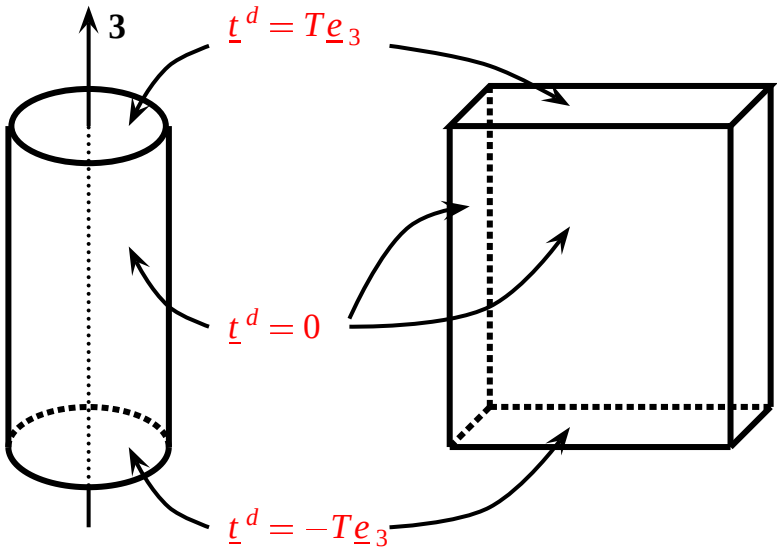


FIG. 8.3 – Conditions aux limites de type traction/compression sur un barre cylindrique à gauche ou sur un parallélépipède à droite.

8.2.2 Flexion

On considère une barre cylindrique Ω de section S de forme quelconque, de longueur L et de génératrice parallèle à l'axe $\underline{e}_1$. Les sections extrémités sont notées S_0 et S_L. L'origine O du repère cartésien orthonormé est choisie au centre d'inertie de la section S_0. Les axes $(O, \underline{e}_1)$, $(O, \underline{e}_2)$ et $(O, \underline{e}_3)$ coïncident avec les axes principaux d'inertie du cylindre. Ce choix est tel que

$$\int_S X_2\, dS = \int_S X_3\, dS = \int_S X_2 X_3\, dS = 0 \tag{8.39}$$

On note

$$I_2 = \int_S X_3^2\, dS, \quad I_3 = \int_S X_2^2\, dS \tag{8.40}$$

les moments d'inertie principaux de la section courante S.

On impose les conditions aux limites suivantes à la barre Ω :

- La surface latérale de la barre, i.e. $\partial\Omega - S_0 - S_L$, est libre : $\underline{\boldsymbol{t}}^d = 0$.
- Les données sont incomplètes sur les faces S_0 et S_L. On se contente d'indiquer le torseur des efforts appliqués sur la section S_L :

$$\{O, \quad \underline{\boldsymbol{R}} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{M}} = M_3\, \underline{e}_3\} \tag{8.41}$$

  Le couple opposé est appliqué à la section S_0. Le couple de flexion est donc appliqué ici par rapport à un axe principal d'inertie des sections de la barre. On parle de **flexion normale**.
- Les efforts volumiques sont négligés.

Le problème est donc mal posé puisqu'on n'a pas donné d'information point par point sur les face S_0 et S_L. Une approche en contraintes est proposée ici et on acceptera la forme obtenue du vecteur–contrainte sur S_0 et S_L à condition que le torseur des efforts appliqués corresponde bien aux données (8.41).

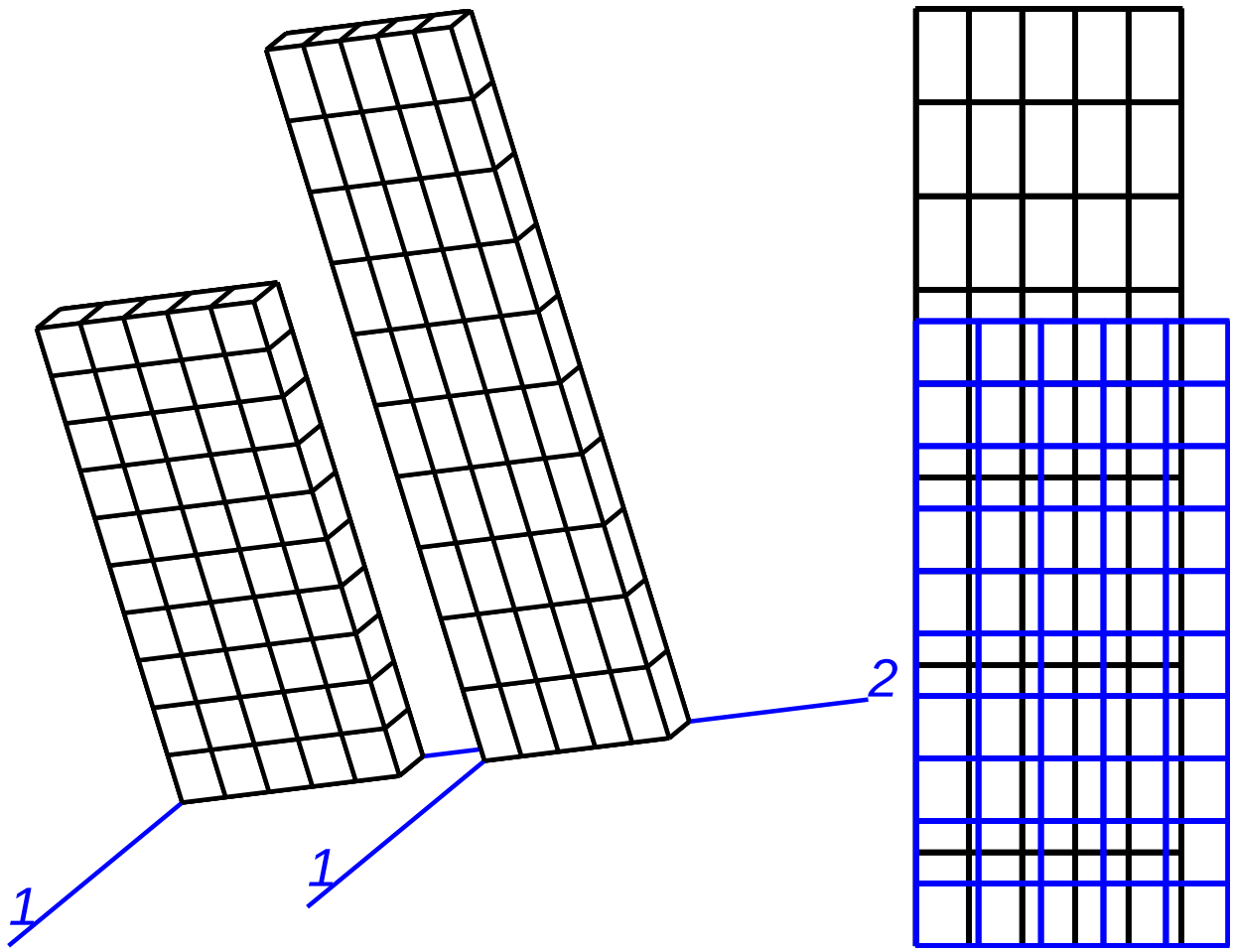


FIG. 8.4 – Traction simple d'une plaque parallélépipédique munie d'une grille : états initial et final en perspective (à gauche) et de face (à droite, les deux états étant superposés). Le matériau étant isotrope, quel est son coefficient de Poisson d'après la figure de droite ?

Contraintes

La forme de la déformée attendue pour une barre en flexion est donnée sur la figure 8.6. Les fibres matérielles parallèles à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ sont étirées en haut et comprimées en bas (sur la figure $M_3 < 0$). Cela incite à penser que les contraintes σ_{11} sont de traction en haut et de compression en bas. Une forme simple de tenseur des contraintes compatible avec cette intuition est la suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = kX_2\, \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.42}$$

où k est une constante à déterminer[7]. On suppose donc que chaque élément de matière subit un état de traction ou compression simple dont l'intensité dépend de la position X_2 seulement. On peut vérifier que les équations d'équilibre locales sont bien vérifiées par un tel champ de contraintes[8]. Un tel champ conduit effectivement à un vecteur–contrainte nul sur la surface

[7] Plus généralement, on peut chercher une fonction $\sigma_{11} = f(X_2)$. Ce champ de contraintes conduit à des déformations $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} = -\nu f(X_2)/E$. La condition de compatibilité (2.154) indique alors que $f'' = 0$, ce qui implique la forme linéaire proposée.

[8] En effet, seule la dérivée partielle $\sigma_{11,2}$ est non nulle lorsque l'on part de (8.42) mais cette dérivée n'intervient pas dans la divergence de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$.

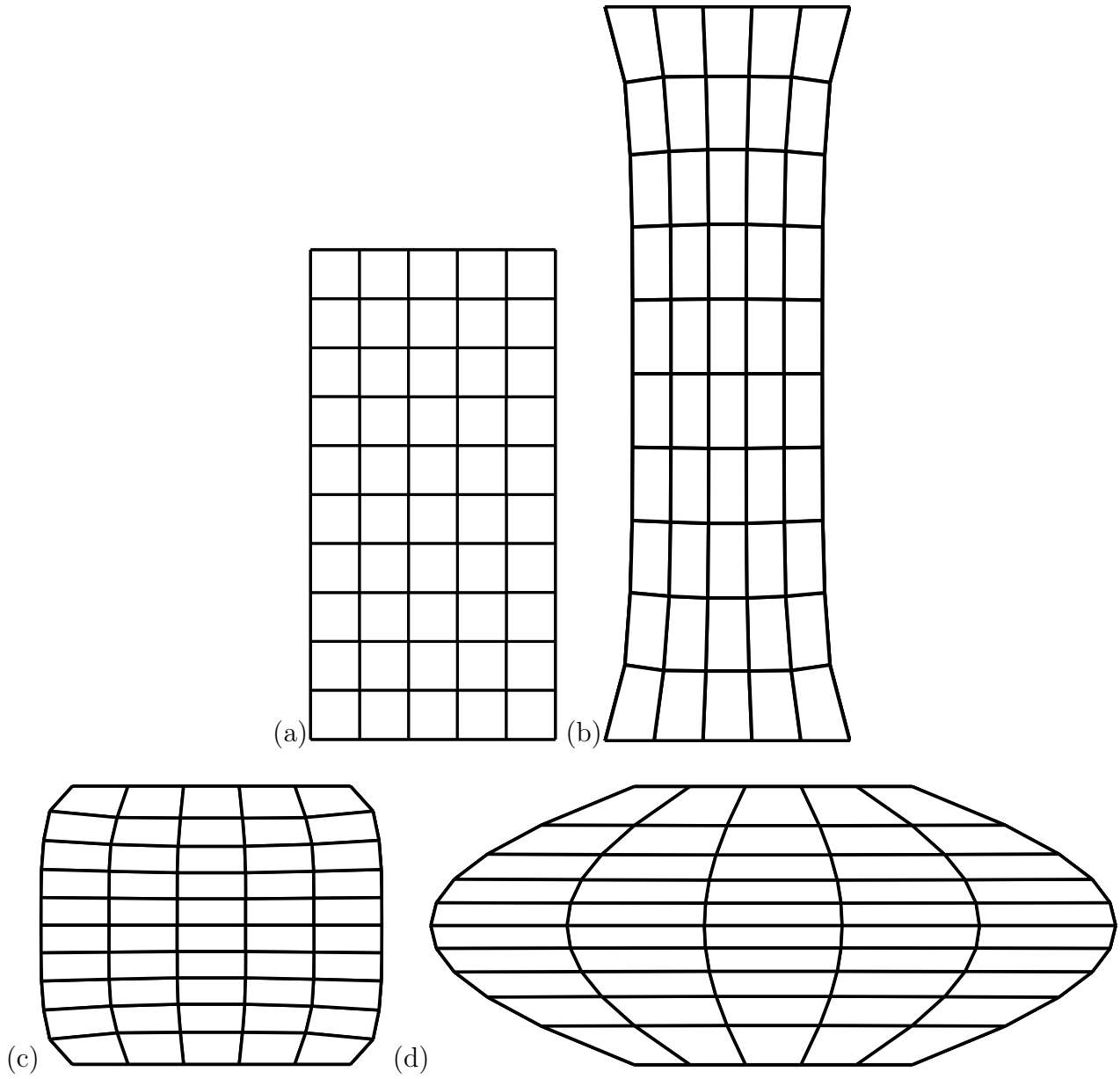


FIG. 8.5 – Essais de traction et compression avec encastrement sur les faces supérieure et inférieure : (a) état initial, (b) déformée en traction en élasticité linéaire, (c) compression d'un métal, (d) compression d'un élastomère. Les effets de bord liés à l'encastrement sont clairement visibles. Les déformations sont volontairement amplifiées pour l'illustration. On distingue clairement l'existence d'une zone utile où la déformation est quasi–homogène dans les cas (b) et (c).

latérale de la barre. Il reste à calculer le torseur des efforts induits par ce champ de contraintes sur la face S_L par exemple :

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \int_{S_L} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1 \, dS = \int_{S_L} kX_2 \underline{\boldsymbol{e}}_1 \, dS = 0 \tag{8.43}$$

$$\underline{\boldsymbol{M}} \;=\; \int_{S_L} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge \underline{\boldsymbol{t}} \, dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} kX_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} 0 \\ kX_2X_3 \\ -kX_2^2 \end{bmatrix} dX_2 dX_3$$

$$= \quad -kI_3\,\underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{8.44}$$

La barre est donc en équilibre global si

$$k = -\frac{M_3}{I_3} \tag{8.45}$$

ce qui détermine de manière unique la constante k. Le champ de contraintes σ_{11} est illustré pour une barre de section carrée sur la figure 8.7(c).

Déformations

Le champ de déformation se déduit du champ de contrainte (8.42) par la loi de comportement élastique linéaire isotrope (8.29) :

$$\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{M_3}{EI_3}X_2(\underline{\boldsymbol{e}}_1\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_1 - \nu(\underline{\boldsymbol{e}}_2\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_3\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_3)), \quad [\underset{\approx}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = -\frac{M_3}{EI_3}X_2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\nu&0\\0&0&-\nu\end{bmatrix} \tag{8.46}$$

Le champ de déformations ε_{33} est illustré pour une barre de section carrée sur la figure 8.7(d).

Déplacements

La méthode systématique pour construire le champ de déplacements à partir du champ de déformations précédent consiste à calculer le gradient de la rotation $\underset{\approx}{\boldsymbol{\omega}}$ par la formule (2.146). Cela donne

$$\begin{array}{lll}\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} = -\dfrac{M_3}{EI_3}, & \omega_{23,1} = 0, & \omega_{31,1} = 0,\\ \omega_{12,2} = 0, & \omega_{23,2} = 0, & \omega_{31,2} = 0,\\ \omega_{12,3} = 0, & \omega_{23,3} = \varepsilon_{23,3} - \varepsilon_{33,2} = -\nu\dfrac{M_3}{EI_3} & \omega_{31,3} = 0\end{array}$$

L'intégration de ces équations fournit

$$\omega_{12} = -\frac{M_3}{EI_3}X_1 - r, \quad \omega_{23} = -\nu\frac{M_3}{EI_3}X_3 - p, \quad \omega_{31} = -q$$

Le gradient du déplacement s'écrit donc

$$\begin{array}{lll}u_{1,1} = \varepsilon_{11} = -\dfrac{M_3}{EI_3}X_2, & u_{2,1} = -\omega_{12} = \dfrac{M_3}{EI_3}X_1 + r, & u_{3,1} = -q\\ u_{1,2} = \omega_{12} = -\dfrac{M_3}{EI_3}X_1 - r, & u_{2,2} = \varepsilon_{22} = \nu\dfrac{M_3}{EI_3}X_2, & u_{3,2} = p + \nu\frac{M_3}{EI_3}X_3\\ u_{1,3} = q, & u_{2,3} = \omega_{23} = -\nu\dfrac{M_3}{EI_3}X_3 - p, & u_{3,3} = \varepsilon_{33} = \nu\dfrac{M_3}{EI_3}X_2\end{array}$$

L'intégration des équations précédentes conduit aux expressions suivantes des composantes du déplacement

$$u_1 = -\frac{M_3}{EI_3}X_1X_2, \quad u_2 = \frac{M_3}{EI_3}\left(\frac{X_1^2}{2} + \nu\frac{X_2^2 - X_3^2}{2}\right), \quad u_3 = \nu\frac{M_3}{EI_3}X_2X_3 \tag{8.47}$$

auquel s'ajoute le mouvement de corps rigide $\{(p,q,r),\underline{\boldsymbol{c}}\}$. La déformée d'une barre de section carrée correspondant à ce champ de déplacement est illustrée sur la figure 8.7(b).

Validation du contexte infinitésimal

On a construit au passage le gradient du champ de déplacement

$$\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{M_3}{EI_3}X_2 & -\dfrac{M_3}{EI_3}X_1 & 0 \\ \dfrac{M_3}{EI_3}X_1 & \nu\dfrac{M_3}{EI_3}X_2 & -\nu\dfrac{M_3}{EI_3}X_3 \\ 0 & \nu\dfrac{M_3}{EI_3}X_3 & \nu\dfrac{M_3}{EI_3}X_2 \end{bmatrix} \tag{8.48}$$

ce qui permet d'énoncer les conditions de validité de la solution précédente :

$$\left|\frac{M_3}{EI_3}X_1\right| \ll 1 \implies \left|\frac{M_3}{EI_3}L\right| \ll 1 \tag{8.49}$$

$$\left|\frac{M_3}{EI_3}X_2\right| \ll 1 \implies \left|\frac{M_3}{EI_3}t\right| \ll 1 \tag{8.50}$$

où t est la plus grande largeur de la section de la barre.

Les sections droites restent droites

Pour étudier en détail la déformée de la barre, on rappelle la relation entre les positions initiales et actuelles des points matériels :

$$x_i = X_i + u_i$$

Suivons par exemple une section de la barre de cote $X_1 = X_0$. D'après (8.47), les déplacements des points de cette section valent

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{M_3}{EI_3}\, X_0 X_2 \\ u_2 = \dfrac{M_3}{EI_3}\left(\dfrac{X_0^2}{2} + \nu\dfrac{X_2^2 - X_3^2}{2}\right) \\ u_3 = \dfrac{M_3}{EI_3}X_2 X_3 \end{cases} \tag{8.51}$$

La position x_1 actuelle vaut donc

$$x_1 = X_0 + u_1 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3}X_0X_2 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3}X_0x_2 + \left(\frac{M_3}{EI_3}\right)^2\left(\frac{X_0^2}{2} + \nu\frac{X_2^2 - X_3^2}{2}\right)X_0$$

où l'on a remplacé X_2 par $x_2 - u_2$. Le facteur de X_0 dans le dernier terme de l'expression précédente est d'un ordre inférieur à M_3x_2/EI en vertu des conditions (8.50). Il peut donc être négligé devant les deux premiers termes. En conséquence on a la relation suivante entre les coordonnées actuelles des points de la section :

$$x_1 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3}X_0x_2 \tag{8.52}$$

Il s'agit d'une relation linéaire entre x_1 et x_2, indépendante de x_3. On reconnaît l'équation d'un plan contenant l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$. Les points matériels initialement dans la section $X_1 = X_0$ restent donc dans un plan qui a en fait tourné de $\dfrac{M_3}{EI_3}X_0 = -\omega_{12}$ par rapport à l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$. Le fait que les sections courantes restent droites se voit sur la figure 8.6.

Par contre, la section ne garde pas sa forme initiale dans le plan. La figure 8.7(f) montre qu'une section initialement carrée ne le reste pas. Cela est dû au fait que les fibres matérielles en traction se contractent latéralement tandis que celles en compression se dilatent latéralement. La figure 8.7(e) montre le champ de déplacement u_3 illustrant ce phénomène. Ce fait est bien connu intuitivement, il suffit de fléchir une gomme et d'observer que la surface perpendiculaire à $\underline{\boldsymbol{e}}_2$, initialement plane, s'incurve au cours de la déformation.

Identification de la fibre neutre avec un arc de cercle

Dans une barre en flexion pure, le plan normal à $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ passant par les centres d'inertie des sections ne subit aucune contrainte, d'après (8.42). On appelle fibre neutre ou fibre moyenne, la ligne matérielle $X_2 = X_3 = 0$ et l'on étudie ici sa déformée. D'après les déplacements (8.47), les coordonnées actuelles des points de la fibre neutre vérifient

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2R}, \quad \text{avec} \quad R = \frac{EI_3}{M_3} \tag{8.53}$$

Il s'agit d'une parabole (que l'on voit sur la figure 8.6). Au passage, la formule $(8.53)_2$ fait apparaître la **rigidité de flexion** EI_3 qui relie le moment imposé M_3 à la courbure $1/R$ de la parabole en son sommet. Le rapport

$$\frac{x_2}{R} = \frac{x_1^2}{2R^2} \sim \left(\frac{M_3}{EI_3} x_1\right)^2$$

est un infiniment petit d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$ d'après (8.48). L'équation de la déformée de la fibre moyenne est donc tout aussi bien

$$\frac{x_2}{R} = \frac{x_1^2}{2R^2} + \frac{x_2^2}{2R^2}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{x_1^2}{R^2} + \left(\frac{x_2 - R}{R}\right)^2 = 1 \tag{8.54}$$

puisque la correction x_2^2/R^2, ajoutée au second membre de (8.53), est d'ordre $\mathcal{O}(h^4)$. Dans le contexte infinitésimal, les termes $x_1^2/2R^2$ et $x_1^2/2R^2 + x_2^2/2R^2$ sont **indiscernables**. La relation (8.54) est l'équation d'un cercle de rayon R. Il s'agit du cercle osculateur en $x_1 = 0$ à la parabole précédemment définie. Dans le contexte infinitésimal, la parabole et son cercle osculateur sont indiscernables. Quel est l'intérêt de considérer la forme circulaire tout autant que la forme parabolique mise en évidence ? Simplement parce que l'indépendance des champs de déformations et de contraintes vis–à–vis de la variable X_1 fait que toutes les sections sont équivalentes et qu'il n'y a en fait pas de raison de privilégier la section à $x_1 = 0$ où se situe le sommet de la parabole (8.53). On parle de **flexion circulaire**.

Les sections restent normales à la fibre neutre

La déformée de la section $X_1 = X_0$ est contenue, on l'a vu, dans le plan d'équation (8.52). Le vecteur normal à ce plan à pour coordonnées

$$[1 \quad \frac{X_0}{R} \quad 0]^T$$

La fibre moyenne quand à elle devient la parabole (8.53) dont une représentation paramétrique est $[x_1 \quad \frac{x_1^2}{2R} \quad 0]^T$. Le vecteur tangent à la fibre moyenne est donc

$$[1 \quad \frac{x_1}{R} \quad 0]^T$$

qui coïncide donc avec le vecteur normal à la section déformée, à des termes en $\mathcal{O}(h^2)$ près. Les sections droites restent donc normales à la fibre moyenne au cours de la déformation, c'est une propriété importante de la flexion circulaire. Elle se voit aussi sur la figure 8.6.

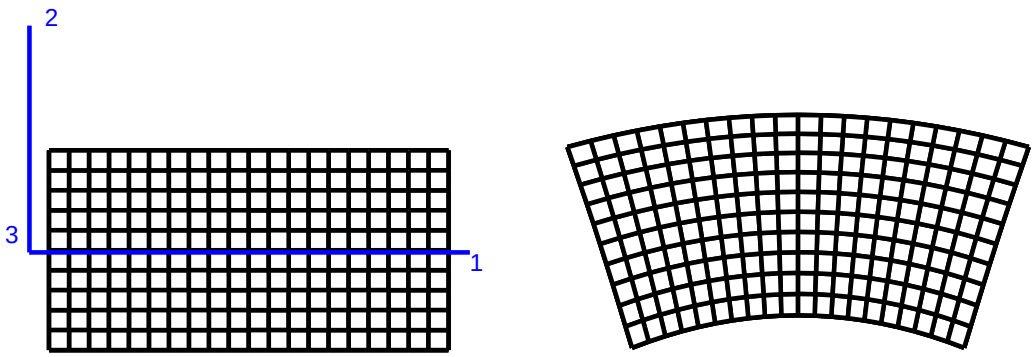


FIG. 8.6 – Flexion d'une barre cylindrique : vue selon $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ de l'état initial et de l'état déformé. La face observée est munie d'une grille.

8.2.3 Principe de Saint–Venant

Il n'est pas aisé en général d'imposer les conditions aux limites les mieux adaptées au type de sollicitation recherché pour une éprouvette ou une pièce. En traction, par exemple, il est difficile de garantir l'absence d'effort t_1 ou t_2 sur les faces supérieure et inférieure des structures de la figure 8.3. Il est plus simple d'encastrer purement et simplement ces faces et d'appliquer ensuite l'effort axial. La figure 8.5 montre qu'il est malgré tout possible, dans certains cas, de garantir l'existence d'une zone utile au sein de laquelle règne le champ uniforme de traction simple souhaité. Le non respect des conditions aux limites idéales induit des **effets de bord** notables dont on souhaite qu'ils ne viendront pas trop perturber le champ dans la zone utile. De même en flexion, il est difficile d'imposer une rotation aux faces S_0 et S_L de la figure 8.7 et de garantir des efforts t_2 et t_3 nuls. Si l'on encastre à nouveau ces faces, on obtiendra des effets de bord, qui cependant s'estompent assez rapidement pour laisser la place à une zone utile où règne le champ de flexion simple calculé. C'est une situation que l'on rencontre fréquemment : il n'est pas essentiel de connaître les conditions aux limites précises appliquées à certaines parties (limitées) de la structure étudiée, il suffit de garantir que le torseur des efforts correspond bien à la consigne. L'expérience montre que les efforts de bord induits par la façon d'appliquer ce torseur sont en général à courte portée et ne perturbent pas la solution attendue suffisamment loin des bords. Ce constat a été en fait érigé en véritable

Principe de Saint–Venant. *Si l'on remplace une première distribution d'efforts agissant sur une partie de la frontière $\partial\Omega_{SV} \subset \partial\Omega$, par une seconde distribution agissant sur la même surface, ces deux distributions formant des torseurs égaux, les autres conditions aux limites sur la partie complémentaire de $\partial\Omega$ restant inchangées, alors, dans toute partie de Ω suffisamment éloignée de $\partial\Omega_{SV}$, les champs de contraintes et de déplacements sont pratiquement inchangés.*

Restriction importante, le principe n'est valide que si la surface $\partial\Omega_{SV}$ possède deux longueurs caractéristiques petites devant la longueur caractéristiques. Le principe de Saint–Venant est souvent invoqué en mécanique des structures pour bien poser le problème alors même que les conditions aux limites exactes sont inconnues ou difficiles à décrire. Il s'agit en fait d'un théorème dont la démonstration n'est disponible aujourd'hui que pour certains types

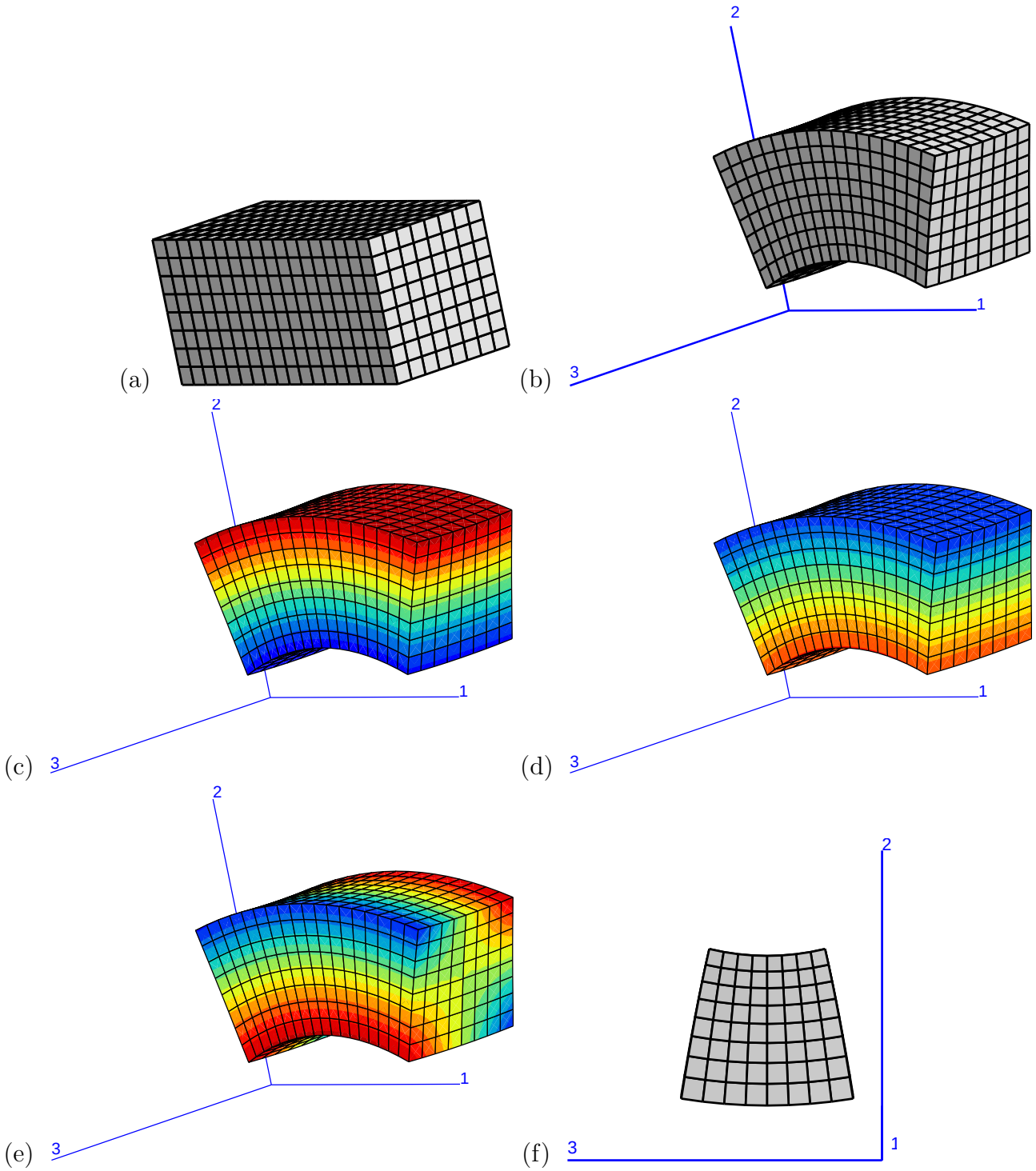


FIG. 8.7 – Flexion d'une barre à section carrée munie d'une grille sur ses faces extérieures : (a) état initial, (b) état fléchi par rapport à l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$, (c) champ de contrainte σ_{11} d'après la théorie linéarisée, (d) champ de déformation ε_{33} d'après la théorie linéarisée, (e) champ de déplacement u_3, (f) vue de la déformée d'une section courante (effet "gomme"). La couleur rouge correspond à des valeurs positives, la couleur bleue à des valeurs négatives.

de structures (poutres, plaques...). Cet énoncé reste une conjecture dans le cas général tridimensionnel. C'est pourquoi le terme principe est utilisé. On trouvera d'ailleurs une formulation mathématiquement plus précise et une démonstration de ce "principe" pour quelques situations dans la référence (Ladevèze, 1983). La clef consiste à établir le caractère

localisé des perturbations induites par certains types de changements de conditions aux limites à torseur constant. Le principe de Saint–Venant doit permettre de déconnecter l'effet intérieur à grande longueur d'onde, des effets locaux à petite longueur d'onde tels que les effets de bord ou d'extrémité. De façon précise, c'est un théorème qui devrait décrire la nature des conditions aux limites assurant la localisation du champ de contrainte ou de déplacement. Il existe en fait un principe de Saint–Venant pour les conditions en efforts imposés et un autre pour les conditions en déplacement. En effet la localisation des contraintes n'entraîne pas en général la localisation des déplacements. On peut mentionner aussi un théorème important, dit de Toupin, qui montre la décroissance exponentielle de la partie localisée de certaines solutions (Toupin, 1965).

La restriction mentionnée plus haut quant aux dimensions de la surface $\partial\Omega_{SV}$ est essentielle. On peut l'illustrer par un paradoxe qui découlerait d'une utilisation abusive du principe. On considère un cylindre de hauteur H et de section circulaire de rayon R. Une pression uniforme est appliquée sur la surface latérale du cylindre tandis que les faces supérieure et inférieure sont libres d'effort. Il est clair que la résultante des forces sur la surface latérale est nulle. Pour autant, on ne peut en conclure que ce problème a une solution proche de celle correspondant au même cylindre libre de tout effort appliqué, ce qu'une lecture hâtive du principe pourrait suggérer... La raison vient du fait que la surface $\partial\Omega_{SV}$ considérée est d'aire $2\pi RH$ à comparer aux faces πR^2. Que le disque soit mince $H \ll R$ ou qu'il s'agisse d'une tige $R \ll H$, la surface $\partial\Omega_{SV}$ ne possède qu'une seule longueur caractéristique petite devant R ou H, respectivement, ce qui exclut toute application du principe. Le principe de Saint–Venant est appliqué à un disque en rotation, de manière correcte cette fois-ci, au chapitre 14, page 332. Le principe s'applique sans ambiguïté à une barre de section carrée H^2 et de longueur L lorsque la surface $\partial\Omega_{SV}$ est composée des faces latérales, dès que $H \ll L$.

En pratique, on invoque fréquemment ce principe pour justifier la validité de solutions de nombreux problèmes aux limites tels que la flexion, la torsion, et les chargements combinées, notamment dans certaines structures industrielles. La validité de la solution proposée sera d'autant meilleure qu'on se situe loin des bords où les conditions aux limites sont mal connues.

Adhémar Jean–Claude Barré de Saint–Venant fut un grand mécanicien français professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées dont on a fêté en 1997 les 200 ans de la naissance. En même temps qu'il établissait pour la première fois la solution du problème de torsion des barres prismatiques, il a énoncé la nécessité d'un tel principe dans la référence historique (Saint-Venant, 1853).

8.3 Problèmes bidimensionnels

Dans la résolution pratique des problèmes d'équilibre linéarisés, on cherche à limiter au maximum le nombre d'inconnues à l'aide d'hypothèses simplificatrices qui peuvent être strictement vérifiées pour la situation étudiée ou bien constituer une approximation du problème réel. L'une d'entre elle consiste à considérer que les phénomènes pertinents se passent dans un plan et à écrire des conditions simplifiées pour ce qui se passe dans la troisième direction. On analyse successivement les simplifications apportées par quelques–unes de ces hypothèses. D'autres simplifications sont aussi mentionnées. La démarche de simplification passe par l'analyse des symétries du problème.

8.3.1 Déformations planes

On s'intéresse aux champs de déplacements de la forme

$$[\underline{\boldsymbol{u}}] = [u_1(X_1, X_2), \quad u_2(X_1, X_2), \quad u_3(X_1, X_2) = 0]^T$$

Le champ de déformation correspondant est dit plan et revêt la forme

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(X_1, X_2) & \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & \varepsilon_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.55}$$

En élasticité isotrope, le tenseur des contraintes prend alors la forme suivante

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X_1, X_2) & \sigma_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \sigma_{12}(X_1, X_2) & \sigma_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(X_1, X_2) \end{bmatrix} \tag{8.56}$$

Il existe donc bel et bien une composante de contrainte suivant la troisième direction mais elle s'exprime directement en fonction des contraintes planes. Pour le voir il faut écrire $\varepsilon_{33} = 0$ en fonction des contraintes grâce à la loi d'élasticité inverse (8.14) et on obtient

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{8.57}$$

On peut alors donner une forme purement bidimensionnelle à la loi d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{8.58}$$

qui remplace (7.57). Les solutions en déformations planes sont donc des cas particuliers du problème général 3D.

8.3.2 Contraintes planes

L'état de contraintes planes correspond à la forme suivante du tenseur des contraintes dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X_1, X_2) & \sigma_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \sigma_{12}(X_1, X_2) & \sigma_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.59}$$

Les composantes $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ sont nulles et les autres composantes ne dépendent que des deux variables (x_1, x_2) du plan de l'étude. En élasticité isotrope, le tenseur des déformations correspondant prend la forme

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(X_1, X_2) & \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & \varepsilon_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(X_1, X_2) \end{bmatrix} \tag{8.60}$$

Il existe donc bel et bien une composante de déformation suivant la troisième direction. Elle doit être telle que la contrainte σ_{33} s'annule ce qui implique que

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \tag{8.61}$$

Les équations de compatibilité (2.154) à (2.159) appliquées à (8.60) se réduisent à

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \tag{8.62}$$

mais aussi

$$\varepsilon_{33,11} = \varepsilon_{33,22} = \varepsilon_{33,12} = 0 \tag{8.63}$$

Les équations (8.63) impliquent que la déformation ε_{33} est une fonction affine de (x_1, x_2) :

$$\varepsilon_{33} = aX_1 + bX_2 + c \tag{8.64}$$

où a, b, c, d sont des constantes. L'expression (8.61) indique qu'il en va de même de la trace du tenseur des contraintes. En toute rigueur, il faut tenir compte de cette condition pour résoudre le problème de contraintes planes, via (8.61). La structure du problème aux dérivées partielles posé devient alors très différente de celle du problème 3D ou en déformations planes.

La procédure systématique d'intégration du champ de déformation précédent permet d'accéder à la forme du champ de déplacement. On établit d'abord que le tenseur des rotations infinitésimales revêt la forme suivante :

$$\omega_{12}(x_1, x_2), \quad \omega_{23} = \omega_{31} = 0$$

à une rotation infinitésimale d'ensemble près. Dès lors, le champ de déplacement peut être bâti :

$$u_1(X_1, X_2), \quad u_2(X_1, X_2), \quad u_3 = (aX_1 + bX_2 + c)X_3 + d$$

où d est une constante d'intégration. La déformée du plan $X_3 = h$ a pour équation :

$$x_3 = h + (aX_1 + bX_2 + c)h + d \simeq h + (ax_1 + bx_2 + c)h + d$$

dans le contexte HPP. La surface plane reste donc plane.

On se contente très souvent du contexte des contraintes planes approchées pour lesquelles le solide est traité comme purement bidimensionnel c'est–à–dire qu'aucune dépendance en X_3 n'est envisagée. On s'en tient alors à (8.62) et on oublie (8.63). La solution exacte du problème aux limites posé admet certes en général une dépendance en X_3 mais la solution en contraintes planes s'avère pertinente au moins en $X_3 = 0$. L'hypothèse des contraintes planes est en général bien adaptée pour les structures minces pour lesquelles les incompatibilités dans la troisième direction sont limitées. Dans ce cas, la solution obtenue sous l'hypothèse des contraintes planes est exacte en $X_3 = 0$.

Le caractère mince de la structure n'est toutefois ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante pour l'établissement de contraintes planes. Un cylindre sous pression interne/externe, libre à ses extrémités, de longueur quelconque est dans un état de contraintes planes. Au contraire, une plaque mince en flexion n'est pas en contraintes planes puisque la contrainte dépend de X_3...

On peut donner une forme purement bidimensionnelle à la loi d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{8.65}$$

qui remplace la forme (7.45).

Le fait qu'une solution en contraintes planes puisse, sous certaines conditions, représenter une bonne approximation de la solution complète est illustré de manière exhaustive dans le cas d'une géométrie et d'un chargement axisymétriques dans le chapitre 14 consacrée aux machines tournantes. En particulier, on y montre que l'existence de forces de volume à divergence non nulle n'est pas compatible avec l'hypothèse des contraintes planes. Toutefois, l'étude d'un disque en rotation illustre la pertinence de la solution approchée obtenue sous l'hypothèse de contraintes planes. L'exploitation des équations de Beltrami indique en fait que l'hypothèse des contraintes planes est associée à des restrictions sur la forme des efforts volumiques admissibles.

Cette discussion montre que le statut des conditions de contraintes planes est plus délicat que celui des déformations planes.

8.3.3 Fonctions de contraintes

Lorsque $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$ et que les autres composantes ne sont que des fonctions de (x_1, x_2), les deux premières équations d'équilibre en l'absence de forces volumiques[9] s'écrivent

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \tag{8.66}$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 \tag{8.67}$$

D'après le théorème 24, dit de Poincaré (page 436), la première équation implique qu'il existe une fonction $f_1(x_1, x_2)$ telle que[10]

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

De même, l'équation (8.67) implique qu'il existe une fonction $f_2(x_1, x_2)$ telle que

$$\sigma_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \sigma_{21} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

La deuxième loi de Cauchy $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ indique que l'on doit avoir

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

L'utilisation à nouveau du théorème de Poincaré montre alors qu'il existe une fonction $\chi(x_1, x_2)$ telle que

$$f_1 = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \quad f_2 = \frac{\partial \chi}{\partial x_1}$$

et, en conséquence, les contraintes planes s'expriment à l'aide d'une seule fonction χ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{8.68}$$

Le problème se simplifie donc considérablement puisqu'on remplace la recherche de 3 fonctions par la recherche d'une seule fonction $\chi(x_1, x_2)$, appelée **fonction de contrainte** ou **fonction**

[9] Une extension est possible lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel.

[10] En effet, considérons la forme linéaire $\omega = -\sigma_{12} dx_1 + \sigma_{11} dx_2$. L'équation (8.66) indique que cette forme est exacte puisqu'elle vérifie les conditions de dérivées croisées $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}$. Il existe donc une fonction $f_1(x_1, x_2)$ dont dérivent les composantes de ω : $\omega = df_1$.

d'Airy. Le champ de contraintes précédent doit donner accès à un champ de déformation compatible. L'utilisation de l'équation de compatibilité (8.62) et des lois d'élasticité isotrope

$$E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu\sigma_{22}, \quad E\varepsilon_{22} = \sigma_{22} - \nu\sigma_{11}, \quad E\varepsilon_{12} = (1+\nu)\varepsilon_{12}$$

en contraintes planes, et

$$E\varepsilon_{11} = (1+\nu)((1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad E\varepsilon_{22} = (1+\nu)((1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad E\varepsilon_{12} = (1+\nu)\varepsilon_{12}$$

en déformations planes, conduit à la relation suivante, qui n'est autre que l'une des équations de Beltrami,

$$\sigma_{11,22} - \nu\sigma_{22,22} + \sigma_{22,11} - \nu\sigma_{11,11} - 2(1+\nu)\sigma_{12,12} = 0$$

en contraintes planes, et

$$(1-\nu)\sigma_{11,22} - \nu\sigma_{22,22} + (1-\nu)\sigma_{22,11} - \nu\sigma_{11,11} - 2\sigma_{12,12} = 0$$

en déformations planes. L'équation aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction de contraintes s'en déduit :

$$\chi_{,1111} + \chi_{,2222} + 2\chi_{,1122} = \Delta\Delta\chi = \boldsymbol{\nabla}^2(\boldsymbol{\nabla}^2\chi) = \boldsymbol{\nabla}^4\chi = 0 \tag{8.69}$$

où plusieurs notations ont été introduites pour l'opérateur laplacien Δ. L'équation est la même en contraintes planes qu'en déformations planes. Les fonctions recherchées sont donc à bi–laplacien nul et sont appelées **biharmoniques**[11].

On montre en fait que la notion de fonction de contraintes ne se limite pas au cas bidimensionnel. Il existe 3 fonctions de contraintes dans le cas général tridimensionnel (Rekatch, 1980).

8.3.4 Le cas 2D et demi...

Dans le cas des problèmes de thermoélasticité, l'hypothèse des déformations planes est trop contraignante puisqu'elle gêne la dilatation thermique selon la troisième direction, ce qui engendre des contraintes colossales irréalistes en pratique. C'est pourquoi on a recours à une hypothèse plus souple, appelée souvent 2D1/2. Elle consiste à considérer que la déformation reste plane mais que ce plan peut se translater, voire tourner, par rapport au plan de référence. Cela correspond à la cinématique suivante :

$$\underline{\boldsymbol{u}}\,(x_1,x_2,x_3) = u_1(x_1,x_2)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + u_2(x_1,x_2)\underline{\boldsymbol{e}}_2 + (x_3 - x_3^0)\underline{\boldsymbol{U}} + \underline{\boldsymbol{W}} \wedge (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}^0) \tag{8.70}$$

Ce champ contient les degrés de liberté dans le plan u_1, u_2 pour chaque point matériel, mais aussi des degrés de liberté globaux (translation constante $\underline{\boldsymbol{U}}$ et rotation constante $\underline{\boldsymbol{W}}$). On vérifiera que cette cinématique implique que des points situés dans une section de cote x_3 donnée restent dans un plan (en général distinct de la section initiale) après déformation.

[11] Un exemple simple de fonction de contrainte est obtenu dans le cas particulier des coordonnées cylindriques avec une hypothèse d'indépendance de la fonction de contrainte vis–à–vis de l'angle θ. Une fonction $\chi(r)$ est recherchée. En utilisant l'expression (C.6) du laplacien en coordonnées cyclindriques, on obtient l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 \chi = 0$$

dont les solutions sont de la forme

$$\chi = A\log r + Br^2\log r + Cr^2 + D$$

8.3.5 Cas axisymétrique

Lorsque la géométrie de la pièce, la répartition des matériaux et les sollicitations présentent une symétrie de révolution autour d'un axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$, les grandeurs sont des fonctions des seules variables (r, z) en coordonnées cylindriques :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_r(r,z)\underline{\boldsymbol{e}}_r + u_z(r,z)\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{8.71}$$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}) \\ 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}) & 0 & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{8.72}$$

En élasticité isotrope, le tenseur des contraintes prend la forme simple

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{8.73}$$

Le problème d'élasticité reste donc 3D mais il suffit de le résoudre dans une section plane $\theta = Cste$.

8.3.6 Cas antiplan

Une situation très simple permettant de résoudre analytiquement de nombreux problèmes est le cas antiplan pour lequel

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_3(x_1,x_2)\underline{\boldsymbol{e}}_3, \quad \text{ou} \quad \underline{\boldsymbol{u}} = u_z(r,\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{8.74}$$

Les seules composantes non nulles des déformations sont alors

$$\varepsilon_{31}, \varepsilon_{23}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}$$

En élasticité isotrope, les composantes des contraintes non nulles sont les mêmes que pour la déformation.

Cette situation est rencontrée pour une fissure située dans le plan normal à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$, dont le front rectiligne est selon $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ et que l'on cisaille selon $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ (mode III en mécanique de la rupture, cf. (Cailletaud, 2003)), ainsi que pour la dislocation–vis étudiée au chapitre 16.

Deuxième partie

APPLICATIONS

Chapitre 9

Quelques transformations finies

Ce chapitre est consacrée à l'étude géométrique de quelques grandes transformations du milieu continu. Il n'y est question que de cinématique. On essaie d'aller aussi loin que possible dans la description de la transformation du milieu sans recourir au calcul des efforts ni à la loi de comportement. Les deux premières sections concernent des transformations homogènes avec une large place à l'étude approfondie du glissement simple, cette école de la cinématique, tandis que les deux dernières sections abordent des transformations hétérogènes.

9.1 Distorsion simple

La distorsion simple est la transformation plane suivante dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = X_1 + \dfrac{\gamma}{2} X_2 \\ x_2 = X_2 + \dfrac{\gamma}{2} X_1 \\ x_3 = X_3 \end{array}\right. \tag{9.1}$$

dont l'intensité est γ. La transformation est illustrée sur la figure 9.1 pour deux valeurs de γ dans un corps de forme initiale carrée sur lequel une grille a été déposée. La forme finale est un losange. Le gradient de la transformation et le tenseur de Cauchy–Green droit sont :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\gamma}{2} & 0 \\ \dfrac{\gamma}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}] = [\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\gamma^2}{4} & \gamma & 0 \\ \gamma & 1+\dfrac{\gamma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

Le gradient de la transformation est symétrique. C'est donc une déformation pure : $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. La distorsion s'accompagne d'une diminution de volume :

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = 1 - \frac{\gamma^2}{4} \tag{9.3}$$

Le gradient de la transformation distorsion s'identifie au tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ défini par (2.108) :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = [\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} - \underset{\sim}{\mathbf{1}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\gamma}{2} & 0 \\ \dfrac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

Dans le contexte infinitésimal, le résultat (2.136) indique que la distorsion simple ne peut pas être distinguée du glissement simple. Cela peut étonner dans la mesure où le glissement simple est une transformation isochore contrairement à la distorsion. Dans le contexte infinitésimal toutefois, la variation de volume (9.3) qui est en γ^2 est effectivement négligeable.

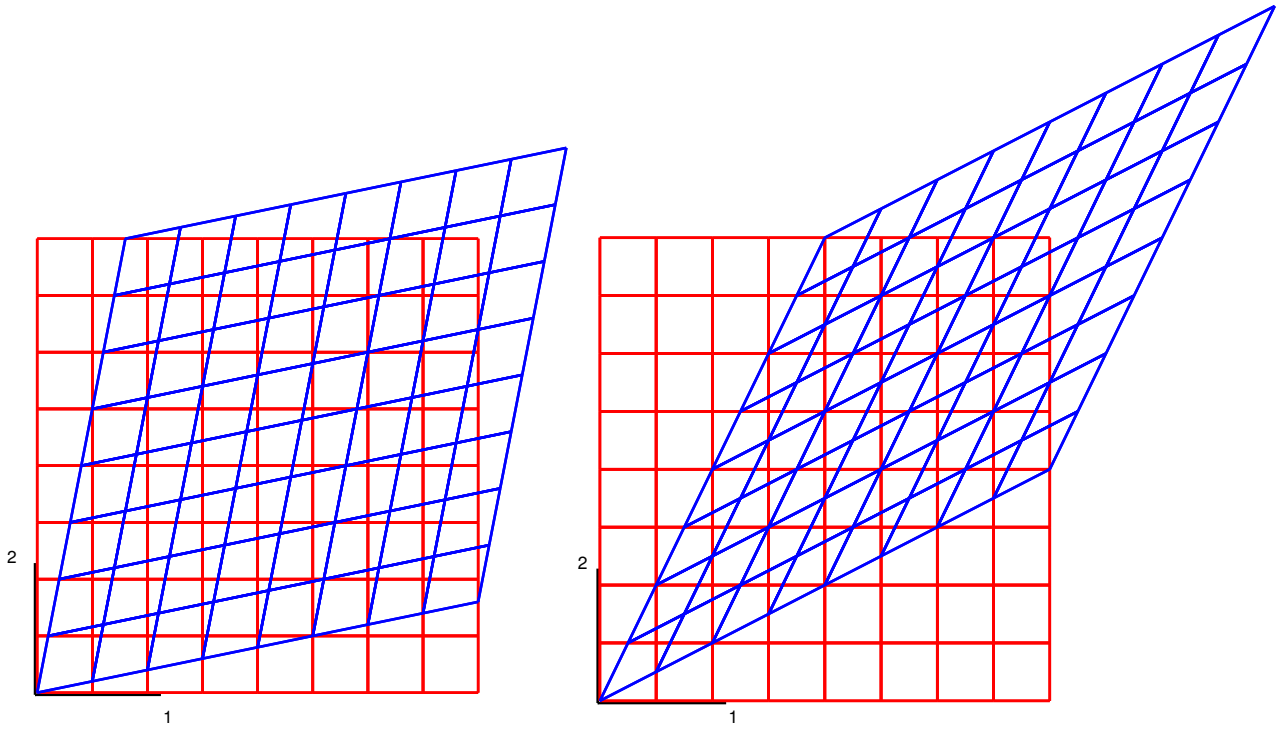


FIG. 9.1 – Distorsion simple d'un carré muni d'une grille : $\gamma = 0.2$ à gauche, $\gamma = 0.4$, à droite. La configuration initiale carrée et la configuration finale losange sont superposées.

9.2 Le glissement simple

Le glissement simple est une transformation fascinante, apparemment simple mais d'une insondable richesse. Elle est difficile à réaliser expérimentalement mais nous l'envisageons ici du point de vue théorique. Les principales caractéristiques du glissement simple ont été présentées aux paragraphes 2.2.7 et 2.4.6. Des approfondissements sont proposés dans ce paragraphe. On rappelle la cinématique du glissement, illustrée sur la figure 2.8 :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où γ est la valeur du glissement. Le gradient de la transformation vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \gamma \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie que $J = 1$ et que, par conséquent, la transformation est isochore. Les éléments de la décomposition polaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ sont donnés par les expressions (2.64) et (2.65).

9.2.1 Directions propres des déformations de Cauchy–Green

On considère un milieu continu soumis à une transformation homogène de glissement simple. Deux configurations sont privilégiées : la configuration initiale et la configuration après un glissement γ fixé. Construire le losange $OBCA$ à partir des points de coordonnées initiales $O(0,0)$, $B(-\gamma/2,1)$ et A sur l'axe 1. Ce losange est défini sur la configuration initiale. Montrer qu'il se transforme en un losange $OB'C'A$ par glissement simple de valeur γ. Remarquer que ce n'est pas le cas à tout autre instant intermédiaire. Identifier alors deux directions orthogonales sur la configuration de référence qui se transforment en deux directions orthogonales. En déduire les directions principales du tenseur de déformation pure $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ et de la déformation de Cauchy–Green droit. Cette construction géométrique présentée par J. Mandel dans (Mandel, 1994), est illustrée sur la figure 9.2.

Le losange a pour côté OB dont la longueur est $\sqrt{1+\gamma^2/4}$. Les coordonnées des points A et C s'en déduisent :

$$A(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}},0) \quad C(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}},1)$$

Les points O et A sont inchangés dans le glissement considéré. Comme la transformation est homogène, les points B' et C' images de B et C après glissement s'obtiennent par exemple de la manière suivante :

$$\underline{\boldsymbol{OB'}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{OB}}, \quad [\underline{\boldsymbol{OB'}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{OC'}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{OC}}, \quad [\underline{\boldsymbol{OC'}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2}+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On constate que les vecteurs $\underline{\boldsymbol{OC}}$ et $\underline{\boldsymbol{AB}}$ sont orthogonaux :

$$\underline{\boldsymbol{OC}}.\underline{\boldsymbol{AB}} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2}+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2}-\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Le parallélogramme $OACB$ est donc un losange.
On trouve aussi que les vecteurs $\underline{\boldsymbol{OC'}}$ et $\underline{\boldsymbol{AB'}}$ sont orthogonaux :

$$\underline{\boldsymbol{OC'}}.\underline{\boldsymbol{AB'}} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}+\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2}-\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Le parallélogramme $OAC'B'$, transformé de $OACB$ par glissement de valeur γ est donc aussi un losange. On vient donc de trouver deux directions matérielles orthogonales à $t = t_0$ et qui se transforment en directions à nouveau orthogonales à t. Ces directions sont les couples de diagonales des losanges étudiés. En ajoutant à ces deux vecteurs $\underline{\boldsymbol{OC}}$ et $\underline{\boldsymbol{AB}}$ la direction $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ orthogonale au plan de glissement, on obtient un trièdre vérifiant les hypothèses du théorème 2. Ce théorème permet de conclure que $\underline{\boldsymbol{OC}}$ et $\underline{\boldsymbol{AB}}$ sont des directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ et de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$. On peut vérifier que les transformés de $\underline{\boldsymbol{OC}}$ et $\underline{\boldsymbol{AB}}$ par un glissement $\gamma_0 \neq 0$ différent de γ fixé ne sont pas deux à deux orthogonaux.
Ainsi, les diagonales OC et AB sont les directions propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ dans le plan de glissement tandis que les diagonales OC' et AB' sont celles de $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$.

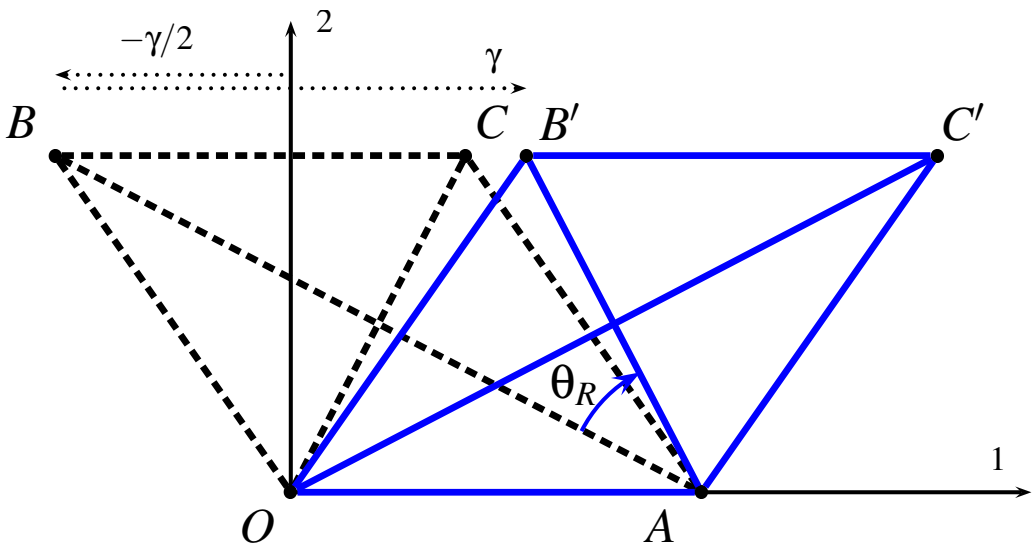


FIG. 9.2 – Construction géométrique des directions principales du tenseur des déformations pures pour un glissement simple dans la direction horizontale d'amplitude $\gamma = F_{12}$.

9.2.2 Fibres matérielles allongées et raccourcies lors du glissement

Pour un glissement γ donné, déterminer les orientations des fibres matérielles de Ω_0 qui se sont raccourcies ainsi que de celles qui se sont allongées.

Soit

$$\underline{\boldsymbol{A}} = -\sin\Theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \cos\Theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_2 \tag{9.5}$$

une direction matérielle de Ω_0 caractérisée par l'angle Θ qu'elle fait avec l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_2$. Par glissement, elle se transforme en

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{A}}\,, \quad [\underline{\boldsymbol{a}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\Theta + \gamma\cos\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'élongation relative est le rapport des normes de $\underline{\boldsymbol{a}}$ et $\underline{\boldsymbol{A}}$ d'après (2.73) :

$$\lambda = \frac{|\underline{\boldsymbol{a}}|}{|\underline{\boldsymbol{A}}|} = |\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{A}}| = \sqrt{1 - 2\gamma\sin\Theta\cos\Theta + \gamma^2\cos^2\Theta} \tag{9.6}$$

La fibre s'est donc allongée si

$$\lambda > 1 \Longleftrightarrow \gamma\cos\Theta(\gamma\cos\Theta - 2\sin\Theta) > 0$$

Pour un glissement γ donné, cette inéquation permet de déterminer le(s) secteur(s) angulaire(s) issu(s) de O contenant les directions matérielles qui s'allongent en glissant. Le(s) secteur(s) complémentaires contiennent les fibres qui se raccourcissent. Ces secteurs sont représentés sur la figure 9.3 pour trois valeurs du glissement. Pour les faibles glissements, les fibres du premier et du troisième quadrants s'allongent tandis que la plupart de celles du second et quatrième quadrants se raccourcissent. Les directions principales du tenseur de déformation pure, données par (2.61) et (2.62) sont représentées sur la figure. Ce sont les bissectrices des secteurs angulaires mis en évidence. Les secteurs angulaires contenant les fibres qui se raccourcissent (en gris sur la figure) tendent à s'écraser sur l'axe horizontal lorsque la valeur du glissement augmente.

La direction $\underline{\boldsymbol{V}}_1$ (resp. $\underline{\boldsymbol{V}}_2$) est celle qui s'allonge le plus (resp. le moins). Pour le voir, calculons la dérivée de $\lambda(\Theta)$:

$$-2\lambda\frac{d\lambda}{d\Theta} = \sin 2\Theta\,\gamma^2 + 2\gamma\cos 2\Theta \tag{9.7}$$

qui s'annule en

$$\tan 2\Theta = -\frac{2}{\gamma} \Longleftrightarrow \Theta = -\frac{1}{2}\mathrm{atan}\,\frac{2}{\gamma} + k\frac{\pi}{2} \tag{9.8}$$

Ces angles caractérisent effectivement les directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ données par (2.61) et (2.62). D'après ces expressions, on doit trouver

$$\tan\Theta_1 = \frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2+4}), \quad \tan\Theta_2 = \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2+4})$$

La formule de trigonométrie $\tan 2\Theta = 2\tan\Theta/(1-\tan^2\Theta)$ permet effectivement de constater l'équivalence entre les expressions précédentes et (9.8).

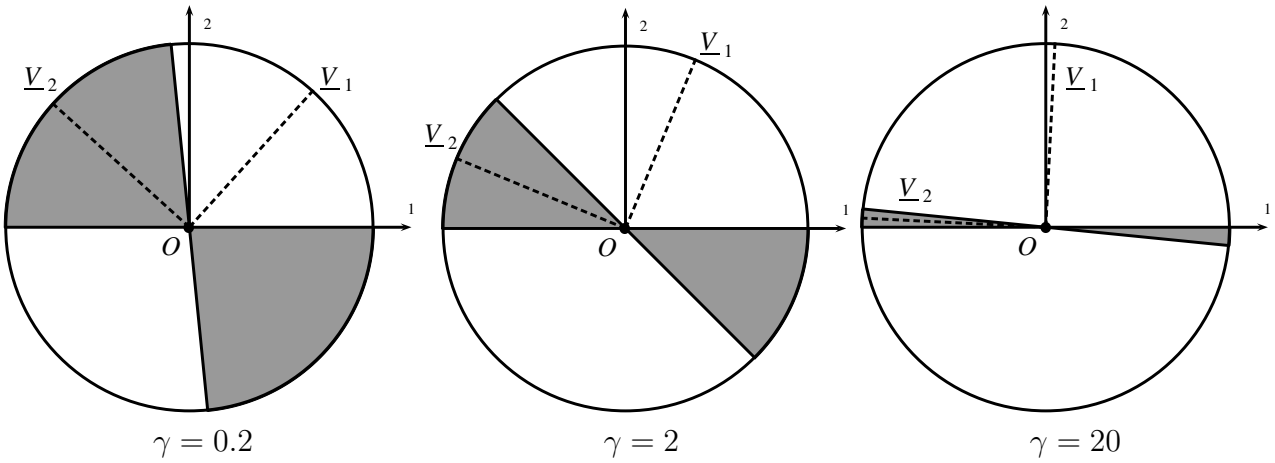


FIG. 9.3 – Pour un milieu continu soumis à un glissement simple $\gamma = F_{12}$ dans le plan $(1,2)$ selon la direction $\underline{\boldsymbol{e}}_1$, sont représentés en grisé les secteurs angulaires contenant les directions matérielles sur la configuration initiale qui se raccourcissent lors du glissement, pour trois valeurs différentes du glissement γ. Les secteurs complémentaires en blanc contiennent les directions qui s'allongent. Les directions principales du tenseur des déformations pures sont superposées sur le schéma.

Ellipsoïde des dilatations

Calculons la déformée par glissement simple du cercle unité :

$$X_1^2 + X_2^2 - 1. = 0 \tag{9.9}$$

$$(x_1 - \gamma x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$x_1^2 - 2\gamma x_1 x_2 + (1+\gamma^2)x_2^2 - 1 = 0 \tag{9.10}$$

Les points matériels transformés sont situés sur l'ellipse dont les axes principaux sont les transformées par glissement des directions principales unitaires de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$, $\underline{\boldsymbol{V}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{V}}_2$. Le cercle initial, l'ellipse (dite des dilatations), les directions $\underline{\boldsymbol{V}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{V}}_2$ et leurs transformées sont représentées sur la figure 9.4 pour $\gamma = 1$. Noter que pour toute autre valeur du glissement, les transformées de $\underline{\boldsymbol{V}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{V}}_2$ fixées initialement ne sont pas orthogonales.

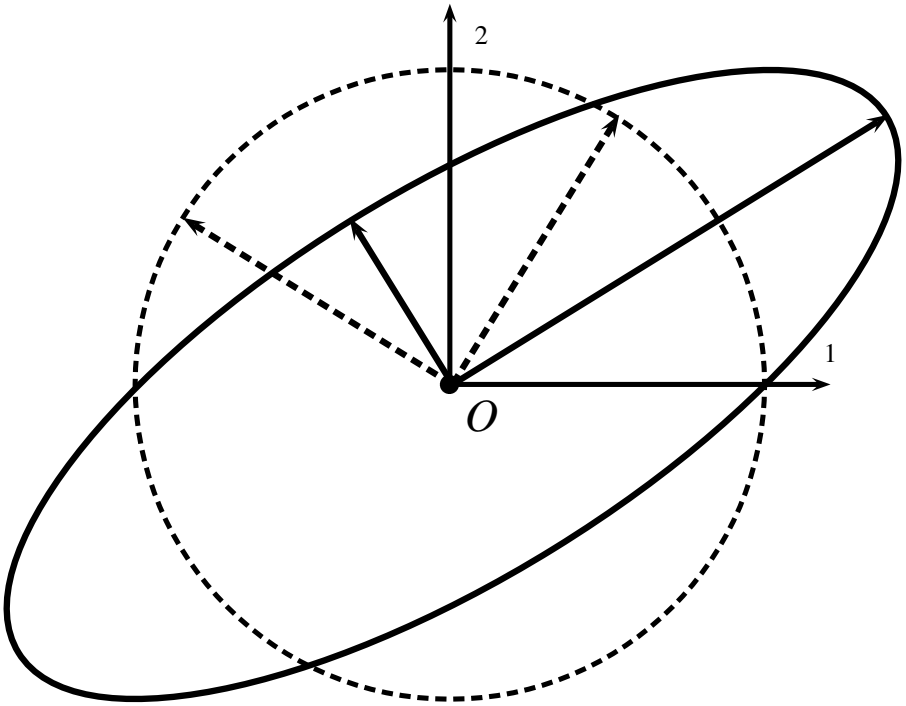


FIG. 9.4 – Ellipse des dilatations (en trait plein) pour un glissement $\gamma = F_{12} = 1$. L'ellipse est la transformée du cercle unité tracé en pointillé. Les directions principales $\underline{\boldsymbol{V}}_1, \underline{\boldsymbol{V}}_2$ et leurs transformées $\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2$ sont respectivement les lignes pointillées et en trait plein.

9.2.3 Un festival de rotations

Rotation propre

La rotation propre intervient dans la décomposition polaire du gradient de la transformation :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$$

C'est la rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ qui permet de passer des directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ à celles de $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ d'après (2.93). En glissement simple, $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est une rotation d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ et d'angle θ_R. Elle transforme la direction AB en AB' et la direction OC en OC'. Il est donc possible de lire θ_R sur la figure 9.2 en calculant le produit scalaire :

$$\cos\theta_R = \frac{\underline{\boldsymbol{AB}}.\underline{\boldsymbol{AB'}}}{|\underline{\boldsymbol{AB}}|\,|\underline{\boldsymbol{AB'}}|} = \frac{2}{\left(2(1+\frac{\gamma^2}{4}) + \gamma\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}\right)^{1/2}\left(2(1+\frac{\gamma^2}{4}) - \gamma\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{4}}}$$

ou

$$\tan^2\theta_R = \frac{\gamma^2}{4}$$

La figure 9.2 pour $\gamma > 0$ permet de conclure sur le signe de l'angle :

$$\tan\theta_R = -\frac{\gamma}{2}$$

ce qui est conforme au résultat (2.66) trouvé de manière purement analytique dans le cours.

Vitesses de rotation

La vitesse de rotation propre en glissement simple s'obtient à partir de (2.66) :

$$\dot{\theta}_R = -\frac{\frac{\dot{\gamma}}{2}}{1+\frac{\gamma^2}{4}} \tag{9.11}$$

Il est important de remarquer que la vitesse de rotation propre ne coïncide pas avec celle du taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ calculé au paragraphe 2.4.6, équations (2.245) et (2.247) :

$$\dot{\theta}_W = -\frac{\gamma}{2} \tag{9.12}$$

L'angle θ_W grandit donc indéfiniment proportionnellement à γ. C'est un comportement bien différent de θ_R qui tend vers $-\pi/2$ lorsque le glissement tend vers l'infini. Ce fait illustre les significations tout à fait différentes de ces deux rotations : le taux de rotation a une signification instantanée donnée par le théorème 9, tandis que la rotation propre mesure une rotation par rapport à configuration de référence donnée. Ces différences sont illustrées à nouveau dans la suite.

Une autre vitesse de rotation importante est la vitesse de rotation des directions principales de $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Cette vitesse de rotation est en générale distincte de $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$, malgré ce qu'une lecture erronée du théorème 9 pourrait laisser croire. En glissement simple, le tenseur vitesse de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est donné par (2.245). A chaque instant ses directions principales sont à $\pm\pi/4$ de l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_2$. La vitesse de rotation de ces directions est donc nulle, contrairement à θ_R et θ_W...

Vitesses de rotations moyennes

On considère à nouveau une fibre matérielle $\underline{\boldsymbol{A}}$ dans la configuration initiale, faisant un angle Θ avec $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ et qui se transforme en $\underline{\boldsymbol{a}}$ par glissement simple. Soit θ l'angle que fait alors $\underline{\boldsymbol{a}}$ avec $\underline{\boldsymbol{e}}_2$:

$$-\tan\theta = \frac{-\sin\Theta+\gamma\cos\Theta}{\cos\Theta} = -\tan\Theta+\gamma \tag{9.13}$$

La vitesse de rotation de la fibre matérielle est donc :

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\gamma}}{1+\tan^2\theta} = -\frac{\dot{\gamma}}{1+(\gamma-\tan\Theta)^2} \tag{9.14}$$

Calculons la vitesse de rotation moyenne des fibres matérielles du milieu sur l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$:

$$\dot{\theta}_L := \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\theta}\, d\Theta = -\frac{1}{\pi}\dot{\gamma}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{1+(\gamma-\tan\Theta)^2} \tag{9.15}$$

où l'indice L (pour lagrangien) a été introduit dans la notation pour indiquer qu'il s'agit d'une moyenne sur la configuration de référence. Le calcul de l'intégrale précédente peut se faire grâce au changement de variable

$$u = \tan\Theta, \quad du = (1+u^2)\, d\Theta$$

De la sorte,

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\Theta}{1+(\gamma-\tan\Theta)^2} &= \int \frac{du}{(1+(\gamma-u)^2)(1+u^2)} \\
&= \frac{1}{\gamma^2+4}\int\left(-\frac{1}{\gamma}\frac{2u-2\gamma}{1+(\gamma-u)^2}+\frac{1}{1+(\gamma-u)^2}+\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{2u}{1+u^2}\right)du \\
&= \frac{1}{\gamma^2+4}\left(\frac{1}{\gamma}\log\frac{1+u^2}{1+(\gamma-u)^2}-\operatorname{atan}(\gamma-u)+\operatorname{atan}u\right)
\end{aligned} \tag{9.16}$$

Finalement,

$$\dot\theta_L = -\frac{\dot\gamma}{2}\frac{1}{1+\dfrac{\gamma^2}{4}} \tag{9.17}$$

expression identique à (9.11). La vitesse moyenne des fibres matérielles dessinées sur la configuration de référence est donc exactement égale à la vitesse de rotation propre, ce qui fournit une interprétation supplémentaire de la rotation propre dans le cas du glissement simple.

On peut aussi considérer les directions matérielles $\underline{\boldsymbol{a}}$ tracées à l'instant t faisant un angle θ avec $\underline{\boldsymbol{e}}_2$. Leur vitesse instantanée est obtenue en prenant la configuration actuelle comme configuration de référence ($\Theta = \theta$) dans (9.14) :

$$\dot\theta = -\frac{\dot\gamma}{1+\tan^2\theta} = -\frac{1}{\pi}\dot\gamma\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\tan^2\theta} \tag{9.18}$$

La vitesse moyenne de rotation instantanée des fibres matérielles à t est

$$\dot\theta_c := \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dot\theta\,d\theta = -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\tan^2\theta} \tag{9.19}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^2} = \left[\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{atan} u\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= -\frac{\dot\gamma}{2} \tag{9.20}$$

qui n'est autre que la vitesse angulaire associée au taux de rotation du milieu $\dot\theta_W$ (cf. (9.12). Il s'agit là d'une interprétation supplémentaire du taux de rotation en glissement simple comme vitesse de rotation moyenne.

9.2.4 Rotation relative dans le glissement de deux lignes matérielles initialement orthogonales

On se demande comment varie l'angle que font deux directions matérielles données initialement au cours du glissement simple. Dans quel cas, ces directions se rapprochent–elles (l'angle diminue–t–il ?) ? Dans quel cas ces directions s'éloignent–elles l'une de l'autre (l'angle augmente–t–il ?) ? La réponse n'est pas complètement intuitive et on demande de la donner pour deux directions $(\underline{\boldsymbol{M}}_1, \underline{\boldsymbol{M}}_2)$ initialement orthogonales, le vecteur $\underline{\boldsymbol{M}}_1$ faisant un angle α avec la direction de glissement $\underline{\boldsymbol{e}}_1$. L'étude du cas $\gamma > 0$ est suffisante.

Les directions matérielles initiales $\underline{\boldsymbol{M}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{M}}_2$ sont définies par

$$\underline{\boldsymbol{M}}_1 = \cos\alpha\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\alpha\,\underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad \underline{\boldsymbol{M}}_2 = -\sin\alpha\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \cos\alpha\,\underline{\boldsymbol{e}}_2$$

Elles se transforment respectivement en $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{m}}_2$ par glissement. Elles font alors un angle φ qui, d'après (2.78), est donné par

$$\cos\varphi = \frac{\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underline{\boldsymbol{m}}_2}{|\underline{\boldsymbol{m}}_1|\,|\underline{\boldsymbol{m}}_2|} = \frac{\underline{\boldsymbol{M}}_1.\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}.\underline{\boldsymbol{M}}_2}{\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}_1)\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}_2)} \tag{9.21}$$

faisant intervenir le tenseur de Cauchy–Green droit (2.57). Le calcul donne alors

$$\cos\varphi = \frac{\gamma\cos 2\alpha + \dfrac{\gamma^2}{2}\sin 2\alpha}{\sqrt{1+\gamma\sin 2\alpha+\gamma^2\sin^2\alpha}\,\sqrt{1-\gamma\sin 2\alpha+\gamma^2\cos^2\alpha}} \tag{9.22}$$

On vérifie que les deux vecteurs sont orthogonaux ($\varphi = \pi/2$) pour $\gamma = 0$. Pour $\alpha = 0$, c'est–à–dire lorsque les directions initiales coïncident respectivement avec $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_2$, l'angle φ évolue de la façon suivante

$$\cos\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \Longrightarrow \tan\varphi = \frac{1}{\gamma} \tag{9.23}$$

Il tend vers 0 pour de forts glissements, c'est–à–dire que les directions se referment progressivement. Dans le cas général, l'angle φ que font les deux directions au cours du glissement tend vers la limite suivante lorsque le glissement augmente :

$$\lim_{\gamma\to+\infty} \cos\varphi = \frac{\sin 2\alpha}{2|\sin\alpha|\,|\cos\alpha|} = signe(\sin 2\alpha) \tag{9.24}$$

Ainsi,

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \lim_{\gamma\to+\infty} \cos\varphi = 1 \Longrightarrow \lim_{\gamma\to+\infty} \varphi = 0 \tag{9.25}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha < 0 \Longrightarrow \lim_{\gamma\to+\infty} \cos\varphi = -1 \Longrightarrow \lim_{\gamma\to+\infty} \varphi = \pi \tag{9.26}$$

Lorsque $\underline{\boldsymbol{M}}_1$ est dans le premier quadrant, les directions ont donc tendance à se refermer et font finalement un angle nul. Au contraire, lorsque $\underline{\boldsymbol{M}}_1$ est dans le quatrième quadrant, les directions tendent à s'ouvrir et font finalement un angle plat. Ces évolutions sont illustrées pour différents angles α par les courbes de la figure 9.5. Les exemples donnés montrent que la décroissance de l'angle φ pour des angles α positif est monotone. L'évolution est plus complexe pour les angles $-\pi/8 < \alpha < 0$ puisque les directions commencent par se rapprocher pour finalement se séparer et former l'angle plat prévu. Pour confirmer ce comportement qui n'a rien d'évident de prime abord, on étudie les cas

- $\varphi = \varepsilon$ où $\varepsilon \ll 1$. Le développement limité de (9.22) donne

$$\cos\varphi \simeq \frac{\gamma + \varepsilon\gamma^2}{\sqrt{1+\gamma^2+2\varepsilon\gamma^3+\varepsilon^2\gamma^4}} \tag{9.27}$$

  La dérivée de cette fonction par rapport à γ est positive pour $\gamma > 0$, i.e. $\cos\varphi$ est monotone croissant. L'angle φ décroît donc de manière monotone de $\pi/2$ à 0 lorsque la valeur du glissement augmente.
- $\varphi = -\varepsilon$ où $\varepsilon \ll 1$. Le développement limité de (9.22) donne

$$\cos\varphi \simeq \frac{\gamma - \varepsilon\gamma^2}{\sqrt{1+\gamma^2-2\varepsilon\gamma^3+\varepsilon^2\gamma^4}} \tag{9.28}$$

  Le tableau de variation de cette fonction constitue la table 9.1. L'angle φ diminue d'abord jusqu'à une valeur d'autant plus faible que ε est petit puis grandit à nouveau pour atteindre l'angle plat prévu.

Ce mouvement relatif des lignes matérielles est illustré sur les figures 9.6 à 9.8. Les cas $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$ sont représentés à diverses étapes sur les figures 9.6 et 9.7 respectivement. La figure 9.8 correspondant à $\alpha < 0$ montre clairement que les directions matérielles ont d'abord tendance à se rapprocher pour finalement s'écarter et former un angle plat.

γ	0		$1/2\varepsilon$		$+\infty$
φ	$\pi/2$	$\searrow$	4ε	$\nearrow$	π

TAB. 9.1 – Tableau de variation de la fonction $\varphi(\gamma)$ donnant l'évolution de l'angle entre deux directions matérielles initialement orthogonales et dont le premier fait un angle $\alpha = -\varepsilon$ faible avec la direction de glissement $\underline{\boldsymbol{e}}_1$.

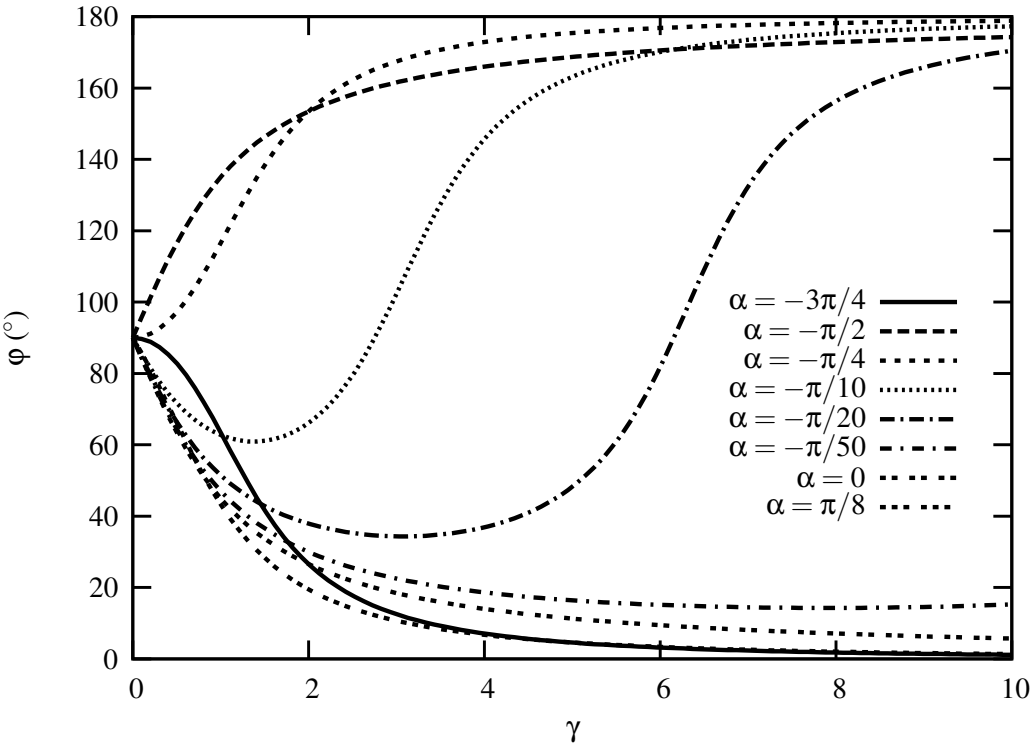


FIG. 9.5 – Rotation relative de deux directions matérielles initialement orthogonales lors du glissement, en fonction de leur orientation initiale α.

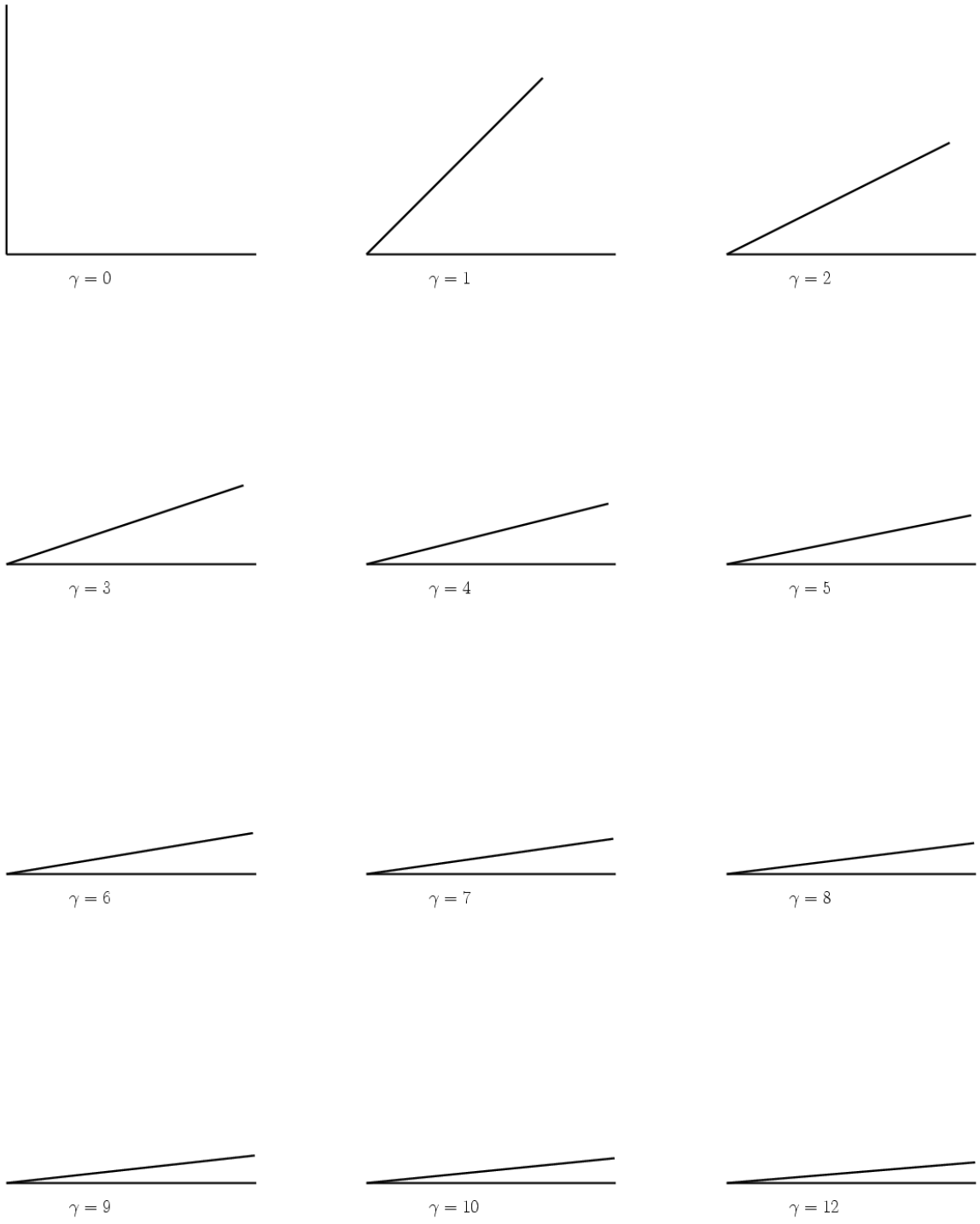


FIG. 9.6 – Mouvement de deux vecteurs unitaires initialement orthogonaux au cours du glissement simple dans la direction horizontale ($\gamma = F_{12}$). Les deux vecteurs coïncident initialement avec $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ respectivement.

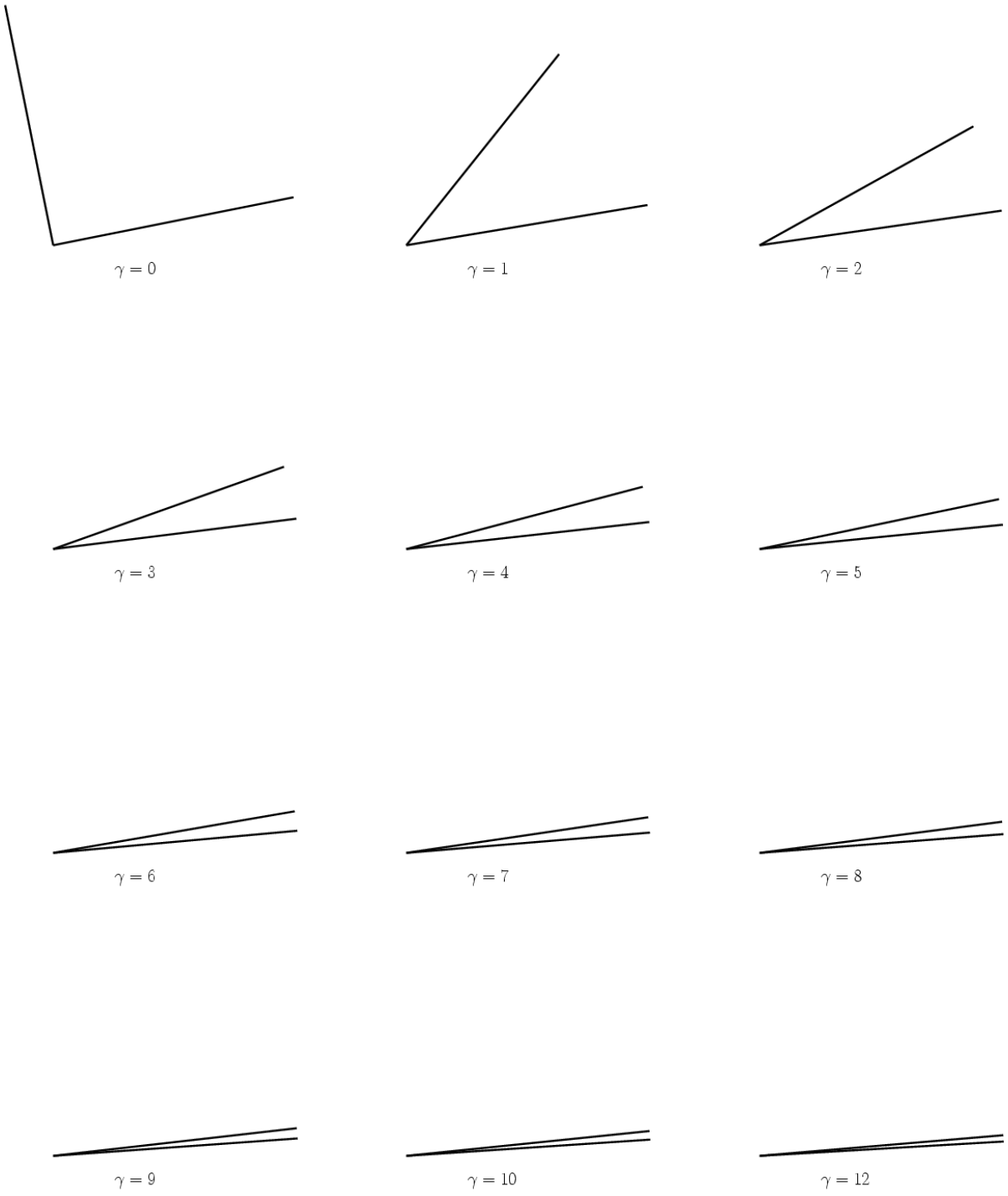


FIG. 9.7 – Mouvement de deux vecteurs unitaires initialement orthogonaux au cours du glissement simple dans la direction horizontale ($\gamma = F_{12}$). Les deux vecteurs font initialement un angle $\tan\theta = 0.2$ avec $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ respectivement.

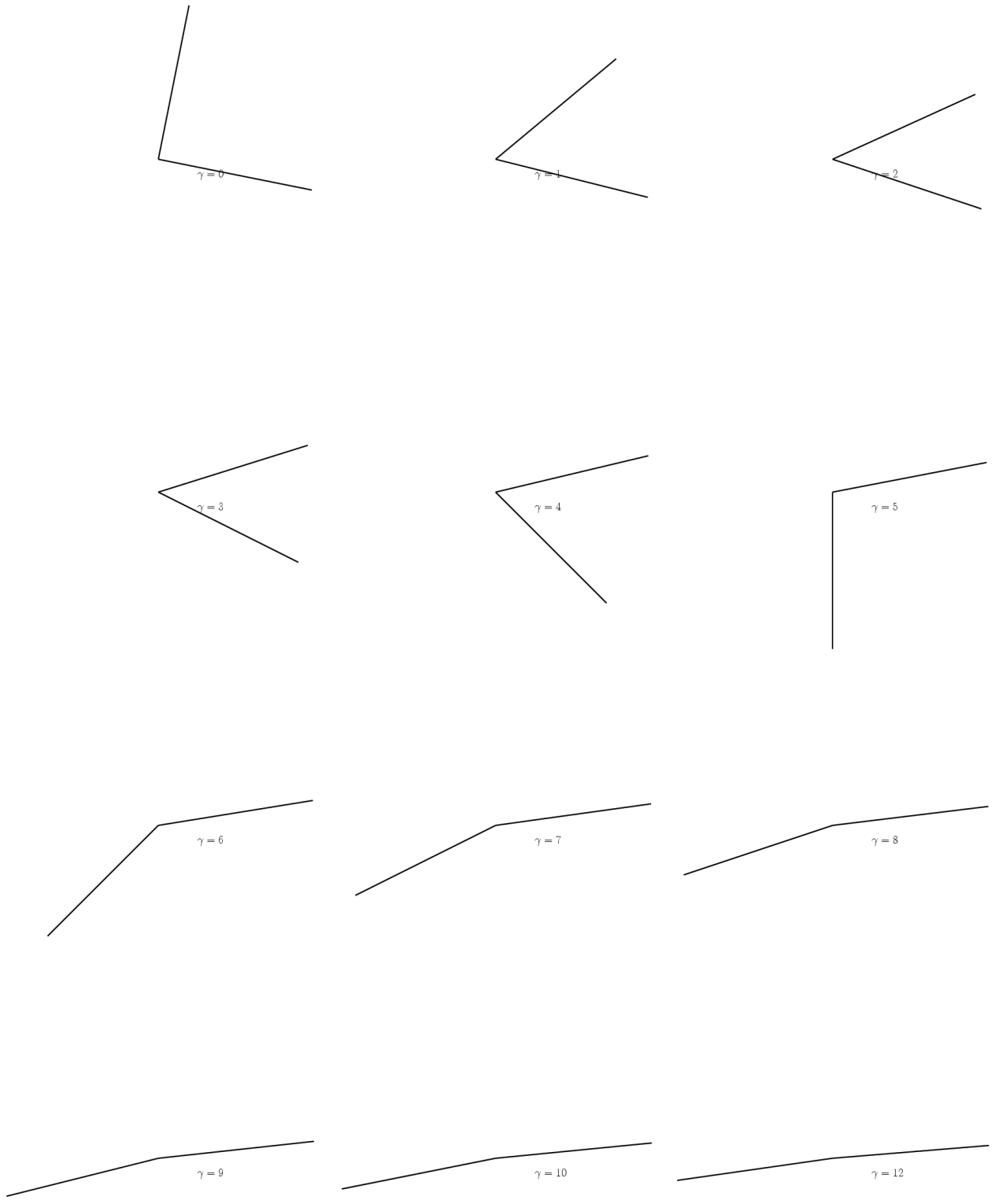


FIG. 9.8 – Mouvement de deux vecteurs unitaires initialement orthogonaux au cours du glissement simple dans la direction horizontale ($\gamma = F_{12}$). Les deux vecteurs font initialement un angle $\tan\theta = -0.2$ avec $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ respectivement.

9.3 La flexion circulaire

La flexion circulaire consiste à transformer un bloc rectangulaire en un tube cylindrique circulaire comme sur la figure 9.9. C'est une transformation hétérogène pouvant mettre en jeu des déformations et des rotations importantes.

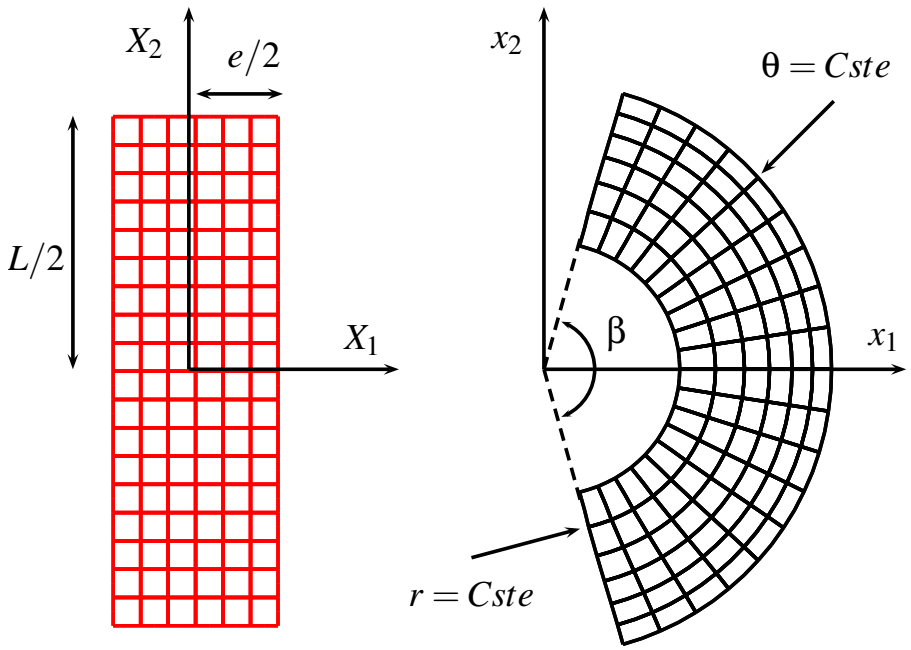


FIG. 9.9 – Cinématique de la flexion circulaire : configuration de référence à gauche munie d'un repérage cartésien, et configuration actuelle à droite, munie d'un repérage cartésien et d'un repérage cylindrique.

9.3.1 Déformations et rotations par flexion circulaire

Pour représenter la transformation de manière aussi concise que possible, on utilise des repères différents sur la configuration de référence et sur la configuration finale :

- un repère cartésien orthonormé sur la configuration de référence avec la base $(\underline{\boldsymbol{E}}_1, \underline{\boldsymbol{E}}_2, \underline{\boldsymbol{E}}_3)$ et les coordonnées (X_1, X_2, X_3) désignant la position initiale du point matériel ;
- un système de coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) pour indiquer la position actuel du point matériel ; l'origine est le centre de courbure du barreau fléchi ; les vecteurs de base sont $(\underline{\boldsymbol{e}}_r, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \underline{\boldsymbol{e}}_z)$.

La transformation du bloc rectangulaire de longueur L et d'épaisseur e en un tube de courbure β, comme sur la figure 9.9, est la suivante :

$$r = f(X_1), \quad \theta = g(X_2), \quad z = X_3 \tag{9.29}$$

dans le cas des déformations planes. La position actuelle de chaque point matériel est repérée par

$$\underline{\boldsymbol{x}}\,(X_1, X_2, X_3) = f(X_1)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r(X_2) + X_3\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{9.30}$$

Le gradient de la transformation doit être calculé en utilisant des bases distinctes au départ et à l'arrivée. On revient pour cela à la définition intrinsèque (A.92) de l'opérateur gradient :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial X_1} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^{*1} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial X_2} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^{*2} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial X_3} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^{*3}$$

$$= \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{x}}}{\partial X_1} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{x}}}{\partial X_2} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{x}}}{\partial X_3} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3 \tag{9.31}$$

$$= \frac{\partial r}{\partial X_1} \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + r \frac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial X_2} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \frac{\partial z}{\partial X_3} \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3$$

$$= \frac{\partial f}{\partial X_1} \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + f \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3$$

$$= f' \, \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + f g' \, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3 \tag{9.32}$$

La matrice correspondante de l'application linéaire $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ s'écrit

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & fg' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.33}$$

par rapport aux bases $(\underline{\boldsymbol{E}}_1, \underline{\boldsymbol{E}}_2, \underline{\boldsymbol{E}}_3)$ et $(\underline{\boldsymbol{e}}_r, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \underline{\boldsymbol{e}}_z)$. La transformation (9.32) peut se mettre sous la forme de la composition de deux transformations successives, ce qui permet de mieux l'interpréter :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underbrace{(\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3)}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}} \cdot \underbrace{(f' \, \underline{\boldsymbol{E}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + f g' \, \underline{\boldsymbol{E}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \underline{\boldsymbol{E}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3)}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}} \tag{9.34}$$

La transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est effectivement une rotation puisqu'elle transforme $\underline{\boldsymbol{E}}_1$ en $\underline{\boldsymbol{e}}_r$, $\underline{\boldsymbol{E}}_2$ en $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ et laisse $\underline{\boldsymbol{E}}_3$ invariant. Cette application linéaire est donc la rotation d'angle $-\beta/2 \leq \theta \leq \beta/2$ et d'axe $\underline{\boldsymbol{E}}_3$. Quant à $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$, il s'agit d'un tenseur symétrique. La composée de transformation (9.34) représente donc la décomposition polaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. La flexion circulaire implique en chaque point matériel une déformation pure selon les axes (X_1, X_2) et une rotation dépendant de la cote X_2 uniquement, comme l'indique la figure 9.9.

Une autre décomposition possible de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ est

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underbrace{(f' \, \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + f g' \, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z)}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}} \cdot \underbrace{(\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3)}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}} \tag{9.35}$$

c'est–à–dire une rotation (la même que précédemment !, comme il se doit dans la décomposition polaire) suivie d'une déformation pure. On calcule les tenseurs des déformations de Cauchy–Green droit et gauche

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^2 = f'^2 \, \underline{\boldsymbol{E}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_1 + g'^2 f^2 \, \underline{\boldsymbol{E}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \underline{\boldsymbol{E}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3 \tag{9.36}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}^2 = f'^2 \, \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + g'^2 f^2 \, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{9.37}$$

définis respectivement, comme on le lit sur les formules, sur la configuration initiale et sur la configuration actuelle.

9.3.2 Cas d'une transformation isochore

La transformation (9.34) conduit à une variation de volume

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = f f' g' \tag{9.38}$$

La transformation est isochore lorsque f et g sont solutions de l'équation différentielle

$$f(X_1) f'(X_1) g'(X_2) = 1$$

qui se décline en deux autres équations différentielles

$$g'(X_2) = A, \quad f'(X_1)f(X_1) = B, \quad \text{avec} \quad AB = 1$$

La première équation différentielle donne

$$g(X_2) = AX_2 + D$$

Les conditions cinématiques suivantes sont imposées :

$$g(0) = 0, \quad g(\frac{L}{2}) = \frac{\beta}{2}$$

Ainsi,

$$\theta = g(X_2) = \frac{\beta}{L}X_2$$

Cette première intégration donne $B = 1/A = L/\beta$. L'intégration de la seconde équation différentielle conduit alors à

$$f = \sqrt{\frac{2L}{\beta}X_1 + C}$$

où C est une constante d'intégration que l'on va remplacer par une autre grandeur liée à la notion de

Fibre neutre

La fibre neutre est constituée des fibres matérielles qui ne subissent pas d'allongement au cours de la flexion circulaire. L'observation de la figure 9.9 suggère l'existence d'une telle fibre neutre séparant la région du bloc rectangulaire où les lignes $X_1 = Cste$ se sont allongées pour devenir les lignes $r = Cste$, de la région où ces lignes se sont raccourcies. Elle correspond donc à la fibre de cote $X_1 = \delta$ telle que

$$f'(\delta) = 1 = \frac{2L}{\beta}\frac{1}{2\sqrt{C + 2L\delta/\beta}} \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{L}{\beta}(\frac{L}{\beta} - 2\delta)$$

L'angle de courbure β imposé au bloc est relié au

Rayon de courbure de la fibre neutre

La fibre neutre, initialement la droite $X_1 = \delta$, est un arc de cercle de rayon R et de longueur $R\beta$. La fibre neutre n'étant ni allongée, ni raccourcie, on a

$$R = \frac{L}{\beta} \tag{9.39}$$

La fonction f s'écrit alors de la manière suivante :

$$f(X_1) = R\sqrt{1 + \frac{2}{R}(X_1 - \delta)} \tag{9.40}$$

Encore faut–il que

$$\delta < \frac{R - e}{2}$$

Typiquement, δ est proche de 0 ou du moins[1] $\delta = \mathcal{O}(e)$, voire $\delta = o(e)$. En fait, on a $\delta = \mathcal{O}(e^2/L)$.

[1]Pour que la fibre neutre soit excentrée, il faudrait imposer un effort extérieur résultant.

9.3.3 Cas d'une plaque mince

Selon ses dimensions caractéristiques par rapport à l'angle de courbure imposé β, le bloc rectangulaire subit des déformations et rotations plus ou moins grandes. Voici les situations importantes :

- **cas des petites déformations.** Cette situation correspond à

$$|\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}| \ll 1 \Longleftrightarrow \frac{e\beta}{L} = \frac{e}{R} \ll 1 \tag{9.41}$$

  Petite déformation n'est pas synonyme de "petite rotation". En effet si la plaque est suffisamment mince, le rapport e/L peut être suffisamment petit pour que des rotations β non infinitésimales soient acceptables tout en remplissant la condition des petites déformations précédente. Cette situation caractéristique des plaque mince est illustrée sur la figure 2.12(a).
- **cas des petites rotations.** Les rotations sont petites lorsque

$$\beta \ll 1 \tag{9.42}$$

  Les rotations peuvent être petites et les déformations importantes. C'est le cas des blocs épais pour lesquels la moindre flexion entraîne des déformations importantes loin de la fibre neutre.
- **cas des petites transformations.** La transformation est infinitésimale lorsque les conditions (9.41) et (9.42) sont remplies simultanément.

Le cas limite des plaques infiniment minces est obtenu en prenant $e = 0$. La transformation se réduit à

$$r = R, \quad \theta = \frac{X_2}{R}$$

dont le gradient est

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_3$$

Il s'agit d'une rotation pure et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}}$, autrement dit la déformation est "nulle". C'est le cas par exemple des feuilles de papier d'aluminium utilisées dans l'emballage qui sont si minces qu'elles adoptent toutes les formes imposées sans effort.

9.4 Gonflement et cavitation

On considère dans ce paragraphe les transformations isochores à symétrie sphérique que peuvent subir une boule ou une sphère creuse de centre O. Le repérage des points matériels M dans la configuration de référence est

$$\underline{\boldsymbol{OM}} = R\,\underline{\boldsymbol{E}}_R$$

L'image de M par la transformation à symétrie sphérique est

$$r(R)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad \text{avec} \quad \underline{\boldsymbol{e}}_r = \underline{\boldsymbol{E}}_R$$

Le gradient de la transformation, en coordonnées sphériques, vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \frac{dr}{dR}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{r}{R}\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{r}{R}\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{9.43}$$

La transformation est isochore si

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \frac{dr}{dR}\,\frac{r^2}{R^2} = 1$$

Il s'agit d'une équation différentielle pour la fonction $r(R)$ dont la famille de solution est

$$r = \sqrt[3]{R^3 + C} \tag{9.44}$$

où C est une constante d'intégration. La résolution plus avant du problème commande de préciser la géométrie initiale :

- **Sphère creuse** de rayon intérieur initial R_0. Si le rayon intérieur final est R_1, la transformation complète est
$$r = \sqrt[3]{R^3 + R_1^3 - R_0^3}$$
Une telle transformation caractérise par exemple un sphère en caoutchouc soumise à une pression interne et/ou externe.
- **Boule.** La constante C caractérise l'apparition d'un trou dans la boule :
$$r(R=0) = C^{1/3} = R_0$$
$$r = \sqrt[3]{R^3 + R_0^3} \tag{9.45}$$
Le centre de la boule s'est transformé en une sphère de rayon R_0 ! Un tel phénomène existe, c'est la cavitation qui peut se produire aussi bien dans les fluides que dans les solides (où elle correspond à un endommagement). La transformation présente un point de "fission" ! La transformation inverse de la cavitation est l'implosion pour laquelle on assiste à la "fusion" de la sphère intérieure d'une cavité en un point central.

Dans le cas de la cavitation, le gradient de la transformation isochore

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{(R^3+R_0^3)^{2/3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(R^3+R_0^3)^{1/3}}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(R^3+R_0^3)^{1/3}}{R} \end{bmatrix} \tag{9.46}$$

présente une singularité en $R = 0$:

$$F_{rr}(R=0) = 0, \quad F_{\theta\theta} = \infty, \quad F_{\varphi\varphi} = \infty$$

Pourtant, la transformation (9.45) est continue ! Il ne s'agit que d'une singularité de son gradient... La mécanique des milieux continus intègre l'existence de telles singularités en des points, lignes ou surfaces isolés. L'exemple ci–dessus en est une illustration très simple. Ces singularités ont en général une signification mécanique forte : cavitation, endommagement...

Chapitre 10

Quelques tourbillons

10.1 Le vorticimètre

Le vorticimètre est un montage élémentaire permettant de mesurer le taux rotation local à la surface d'un fluide dans un écoulement plan.

Il s'agit un assemblage rigide formé de deux tiges orthogonales. Soit $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ la direction orthogonale au plan du croisillon. On dépose l'assemblage à la surface d'un fluide en mouvement dans ce plan et on observe la rotation et la translation du montage. Les directions unitaires parallèles à chaque élément du croisillon sont appelées $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{m}}_2$. La vitesse instantanée de chaque vecteur coïncide avec celle de la ligne de fluide sous–jacente. Or l'évolution de la direction d'une fibre matérielle a été calculée au paragraphe 2.4.3. Elle est caractérisée par l'équation (2.212) qui, appliquée aux directions $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{m}}_2$, donne

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1 - (\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1)\underline{\boldsymbol{m}}_1$$

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}}_2 = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2 - (\underline{\boldsymbol{m}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2)\underline{\boldsymbol{m}}_2$$

Suivons l'évolution de l'angle entre un axe du croisillon et une direction fixe de l'espace $\underline{\boldsymbol{a}}$:

$$\cos\varphi_1 = \underline{\boldsymbol{m}}_1.\underline{\boldsymbol{a}}$$

$$\frac{d}{dt}\cos\varphi_1 = -\sin\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 = \dot{\underline{\boldsymbol{m}}}_1.\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{a}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1 - (\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1)\,\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underline{\boldsymbol{a}} \tag{10.1}$$

Le choix de $\underline{\boldsymbol{a}}$ n'importe pas si l'on s'intéresse à $\dot{\varphi}$ seulement. A un instant donné, on choisit judicieusement $\underline{\boldsymbol{a}}$ pour calculer la vitesse angulaire de chaque branche du croisillon :

$$\varphi_1 = angle(\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{m}}_2, \underline{\boldsymbol{m}}_1) = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \dot{\varphi}_1 = \underline{\boldsymbol{m}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1$$

$$\varphi_2 = angle(\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{m}}_1, \underline{\boldsymbol{m}}_2) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \dot{\varphi}_2 = -\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}}_2$$

L'assemblage est rigide ($\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underline{\boldsymbol{m}}_2 = 0$ à chaque instant). En conséquence, la fibre matérielle de fluide avec laquelle une branche donnée de l'assemblage coïncide diffère en général d'un instant à l'autre. La vitesse de rotation du solide rigide se calcule selon les règles usuelles en mécanique des solides indéformables. Pour un assemblage constitué de deux branches géométriques identiques, cette vitesse est la moyenne des vitesses instantanées précédentes :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} = \underline{\boldsymbol{m}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1 \\ &= \underline{\boldsymbol{m}}_2.(\overset{\times}{\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}} \wedge \underline{\boldsymbol{m}}_1) = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}.(\underline{\boldsymbol{m}}_1 \wedge \underline{\boldsymbol{m}}_2) = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}.\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

La vitesse de rotation du croisillon rigide est exactement donnée par le taux de rotation du fluide $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$. C'est ainsi que le vorticimètre permet de mesurer le taux de rotation du milieu. Un disque de liège marqué d'une croix peut jouer le même rôle. En effet, le taux de rotation est alors la moyenne de la vitesse de rotation moyenne de tous les couples de lignes orthogonales que l'on peut dessiner sur le disque, chacun de ces couples ayant une vitesse moyenne égale au taux de rotation.

Nous utilisons dans la suite le vorticimètre pour mesurer expérimentalement le taux de rotation d'un tourbillon.

10.2 Le tourbillon ponctuel

10.2.1 Le vorticimètre et le tourbillon ponctuel

Le montage expérimental de la figure 10.1 est rudimentaire mais suffisant pour étudier la cinématique d'un tourbillon. Le tourbillon est obtenu à l'aide d'un récipient axisymétrique rempli d'eau et percé au fond d'un trou central. Le trou doit être suffisamment petit pour que la variation de volume d'eau soit imperceptible le temps de l'expérience et suffisamment gros pour qu'un tourbillon se forme... Le tourbillon central est visible sur la figure 10.1(a).

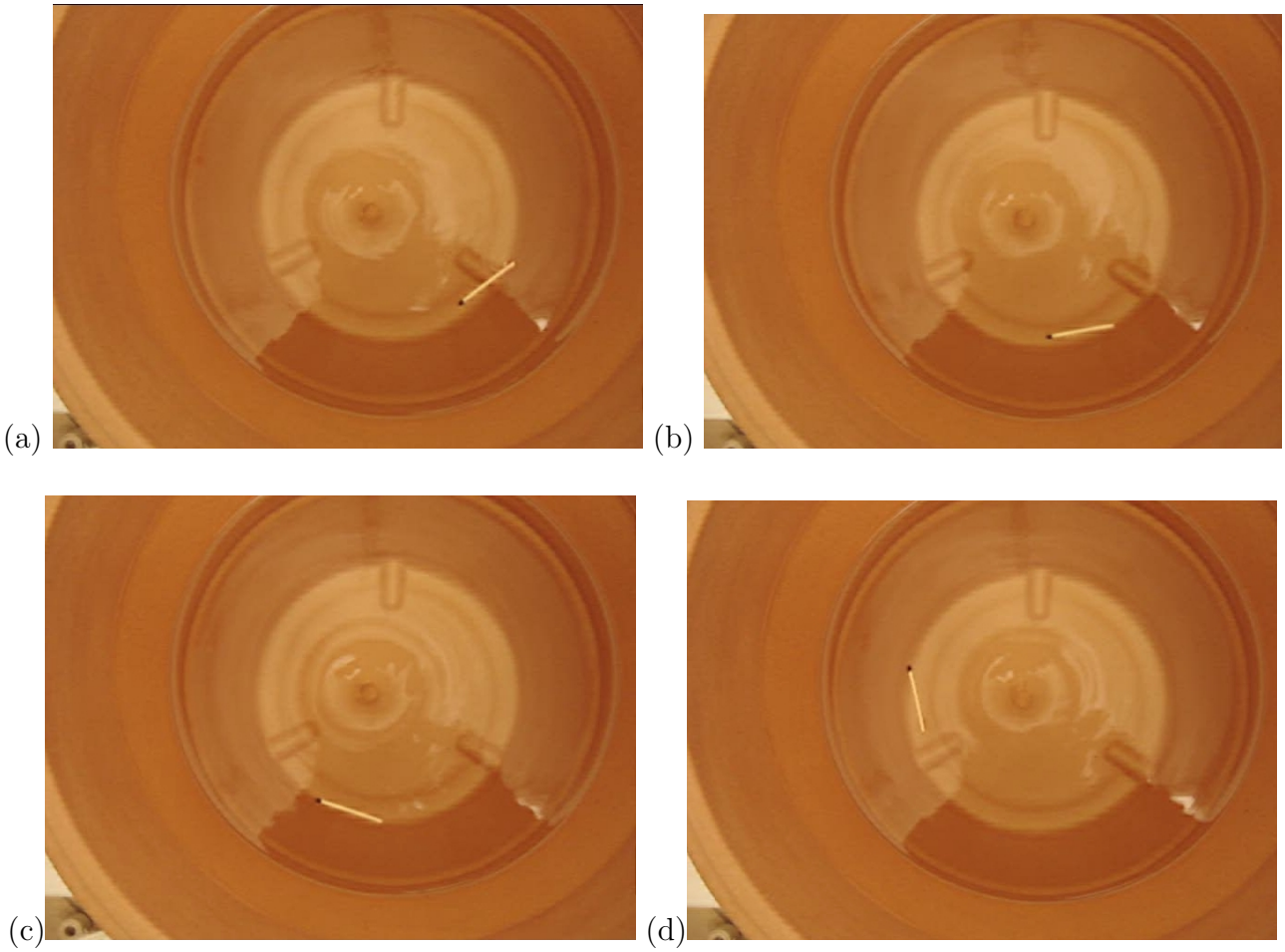


FIG. 10.1 – Mouvement d'une allumette dans un tourbillon simple central : quatre instantanés successifs (a), (b), (c) et (d).

La trajectoire d'une allumette posée à la surface de l'eau est illustrée par quatre positions

successives qui montrent qu'elle décrit un cercle autour du tourbillon. Ces observations permettent de proposer la forme du champ de vitesses régnant dans le fluide :

$$\underline{\boldsymbol{v}}\,(r,\theta,z,t) = f(r)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{10.2}$$

dans le repère cylindrique d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ coïncidant avec le tourbillon. Le champ de vitesses est axisymétrique (indépendant de θ) et, en première approximation, ne dépend pas de la cote z non plus. Sa direction tangentielle est clairement indiquée par l'allumette de la figure 10.1. La fonction $f(r)$ reste à déterminer, ce que l'expérience suivante va permettre de faire. L'observation indique que $f(r)$ est une fonction décroissante de r.

Lorsque le vorticimètre est placé près du tourbillon, nous observons sur la figure 10.3 que le croisillon ne tourne pas par rapport à une direction fixe de l'image. Les directions du croisillon restent toujours parallèles à elles–mêmes. Il ne subit qu'une translation d'ensemble, sauf toutefois au centre du tourbillon. On déduit de l'étude du paragraphe 10.1 que le taux de rotation associé au tourbillon simple est nul en $r \neq 0$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{W}} = 0 \Longrightarrow \operatorname{rot}\underline{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{10.3}$$

L'écoulement associé au tourbillon simple est donc irrotationnel !

Exploitons cette observation pour préciser le champ des vitesses proposé. Le gradient des vitesses eulérien en coordonnées cylindriques est donné par (C.7) issu du formulaire.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = -\frac{v_\theta}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{10.4}$$

Remarquer que la transformation est localement isochore

$$\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}} = 0$$

Le taux de rotation est la partie antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$:

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{v_\theta}{r} - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 \\ \dfrac{v_\theta}{r} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation

$$\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{f}{r} + \frac{df}{dr} = 0$$

permet de déterminer $f = \alpha/r$. On met le champ de vitesses sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{v}}\,(r,\theta,z,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{10.5}$$

où Γ est la circulation de $\underline{\boldsymbol{v}}$ le long d'un cercle dont le centre est le centre du tourbillon

$$\Gamma = \oint \underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\, r d\theta \tag{10.6}$$

La circulation Γ caractérise l'intensité du tourbillon. Le champ des vitesses du tourbillon présente une singularité en $r = 0$ où la vitesse devient infinie.

Le gradient des vitesses (10.4) se réduit à

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r) = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$$

Il est effectivement symétrique.

La suite de cette partie consiste à étudier plus en détail la cinématique du tourbillon simple ainsi identifiée.

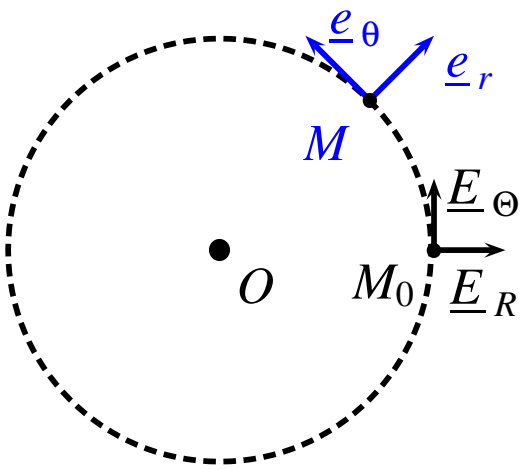


FIG. 10.2 – Trajectoire d'un point M_0 dans une mouvement de tourbillon de centre O et définition des bases locales de coordonnées cylindriques pour la configuration initiale et la configuration actuelle.

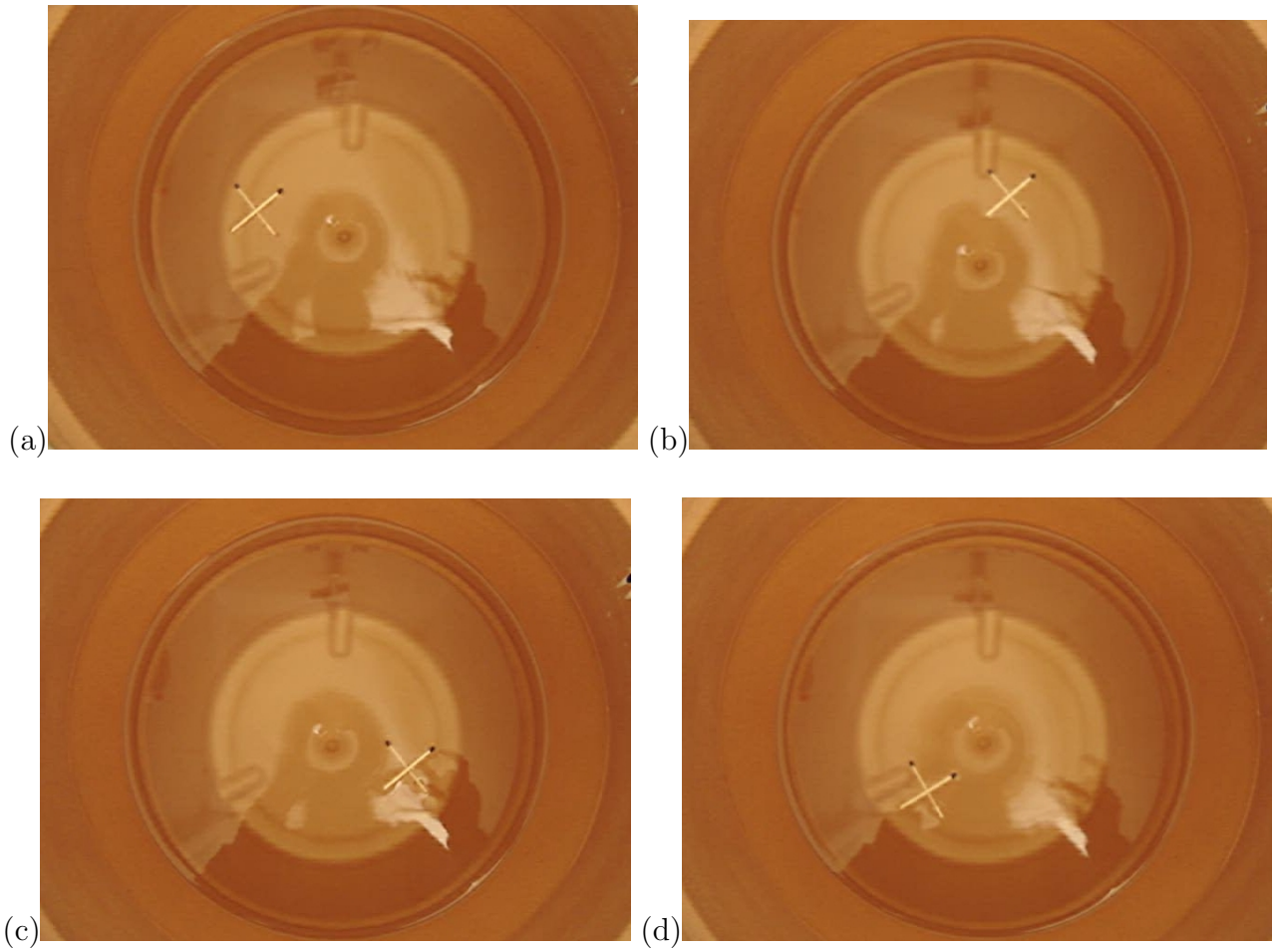


FIG. 10.3 – Mouvement d'un vorticimètre dans un tourbillon simple central : quatre instantanés successifs (a), (b), (c) et (d).

10.2.2 Cinématique du tourbillon simple

Quelle type de transformation subit chaque point du fluide dans un tourbillon ?

Commençons par étudier les **lignes du courant** du milieu, c'est–à–dire les lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse en ce point à un instant donné. Autrement dit, il s'agit des courbes enveloppes du champ des vitesses (10.5). Une telle courbe est décrite par la pointe du vecteur $\underline{\varkappa}(s)$ avec le paramétrage s. Le vecteur tangent à cette courbe est sa dérivée par rapport à s et doit être parallèle au vecteur vitesse du fluide en ce point, ce que traduit l'équation

$$\frac{d\underline{\varkappa}}{ds}(s) = \lambda(s)\underline{\boldsymbol{v}}\left(\underline{\varkappa}(s), t\right) \tag{10.7}$$

Le paramétrage peut être choisi pour que $\lambda(s) = 1$. Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) des points de la ligne de courant étudiée sont paramétrées par s. L'équation (10.7) s'écrit donc

$$\frac{dr}{ds}\underline{\boldsymbol{e}}_r + r\frac{d\theta}{ds}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{dz}{ds}\underline{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\Gamma}{2\pi r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{10.8}$$

qui s'intègre en

$$\left(r = Cste, \quad \theta = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}s + Cste, \quad z = Cste\right)$$

représentation paramétrique d'un cercle dont le centre est celui du tourbillon. Les lignes de courant sont donc les cercles autour du tourbillon.

Continuons en déterminant les **trajectoires** des éléments de fluide. Cela revient à passer de la représentation eulérienne (10.5) du mouvement à sa représentation lagrangienne. Pour un point matériel donné $\underline{\boldsymbol{X}}_0$, on intègre le champ de vitesse

$$\frac{d\underline{\boldsymbol{x}}(t)}{dt} = \underline{\boldsymbol{v}}\left(\underline{\boldsymbol{x}}(t), t\right)$$

ce qui conduit ici à la même équation (10.8) qui s'intègre en

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi R^2}t \\ z = Z \end{cases} \tag{10.9}$$

Le point $M_0(R, \theta, Z)$ représente la position du point matériel considéré dans la configuration de référence, tandis que $M(r, \theta, z)$ est sa position actuelle.
On note $(\underline{\boldsymbol{E}}_R, \underline{\boldsymbol{E}}_\Theta, \underline{\boldsymbol{E}}_Z)$ la base locale cylindrique pour la configuration de référence.
On note $(\underline{\boldsymbol{e}}_r, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \underline{\boldsymbol{e}}_z)$ la base locale cylindrique pour la configuration actuelle.
Ces bases sont représentées sur la figure 10.2. Il s'agit bien en général de bases distinctes puisque $\underline{\boldsymbol{E}}_r$ parallèle à OM_0 ne pointe pas dans la même direction que $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ qui est, quant à lui, parallèle à OM. Elles ne coïncident que périodiquement. Le système (10.9) constitue la représentation lagrangienne du tourbillon simple.

Les trajectoires sont donc les cercles de rayon R autour de O. Trajectoires et lignes de courant sont des notions distinctes mais lorsque le champ des vitesses ne dépend pas explicitement du temps t (régime stationnaire), elles se confondent.

Gradient de la transformation tourbillon

La transformation tourbillon est donnée par

$$\underline{\boldsymbol{x}}(R, \Theta, Z, t) = R\underline{\boldsymbol{e}}_r + Z\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{10.10}$$

d'après (10.9). Le repérage de la particule initiale est R, Θ, Z et la base associée à ce repérage est

$$(\underline{\boldsymbol{E}}_1 = \underline{\boldsymbol{E}}_R, \underline{\boldsymbol{E}}_2 = R\underline{\boldsymbol{E}}_\Theta, \underline{\boldsymbol{E}}_3 = \underline{\boldsymbol{E}}_Z)$$

D'après la définition (A.92) de l'opérateur gradient selon des bases mobiles,

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} &= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial R} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^{*1} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial \Theta} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^{*2} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial Z} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}^{*3} \\ &= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial R} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_R + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial \Theta} \otimes \frac{\underline{\boldsymbol{E}}_\Theta}{R} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial Z} \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_Z \end{aligned} \tag{10.11}$$

Le calcul du premier terme mérite attention :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial R} &= \underline{\boldsymbol{e}}_r + R\frac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial R} \\ &= \underline{\boldsymbol{e}}_r + R\frac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial R} \\ &= \underline{\boldsymbol{e}}_r - \frac{\Gamma t}{\pi R^2}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \end{aligned} \tag{10.12}$$

De même,

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial \Theta} = R\frac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} = R\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$$

Finalement,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_R + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_\Theta + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_Z - \frac{\Gamma t}{\pi R^2}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_R \tag{10.13}$$

La matrice de l'application linéaire $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ s'écrit donc

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\Gamma t}{\pi R^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.14}$$

par rapport aux bases $((\underline{\boldsymbol{E}}_i)_{i=1,3}, (\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,3})$ respectivement de départ et d'arrivée. Cette transformation peut être décomposée de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} \tag{10.15}$$

$$\text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_R + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_\Theta + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_Z \tag{10.16}$$

$$\text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{P}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} - 2\alpha(R)t\,\underline{\boldsymbol{E}}_\Theta \otimes \underline{\boldsymbol{E}}_R \tag{10.17}$$

La cinématique du tourbillon est donc la composition d'un glissement simple égal à

$$\alpha(R)t := \frac{\Gamma t}{2\pi R^2} \tag{10.18}$$

et d'une rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$. Le glissement s'effectue dans le plan de l'écoulement suivant la direction $\underline{\boldsymbol{E}}_\Theta$. Les cercles concentriques en O glissent les uns par rapport aux autres d'une quantité décroissante avec R. Il n'est pas évident de reconnaître à première vue dans $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ une rotation. Pour le voir, il faut remarquer qu'elle transforme $\underline{\boldsymbol{E}}_R$ en $\underline{\boldsymbol{e}}_r$, $\underline{\boldsymbol{E}}_\Theta$ en $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$. Seul $\underline{\boldsymbol{E}}_Z = \underline{\boldsymbol{e}}_z$ est invariant par $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$. Il s'agit donc de la rotation d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ et d'angle $\theta - \Theta = \alpha t$.

Le glissement simple a été abondamment analysé aux paragraphes 2.2.7, 2.4.6 et 9.2. La décomposition polaire du glissement simple est connue et permet donc d'accéder à celle de la transformation tourbillon :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{gliss}, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{P}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{gliss}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{gliss} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{gliss} \tag{10.19}$$

La rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{gliss}$ et le tenseur symétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{gliss}$ issus de la décomposition polaire du glissement sont données par les expressions (2.65) et (2.64) au prix toutefois d'une transposition car la direction de glissement est ici le deuxième axe. L'angle de rotation propre du glissement a aussi été déterminé et vaut $-\text{atan}(\alpha t)$ La rotation propre totale en chaque point dans le mouvement tourbillonnaire est donc $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$, la composée de deux rotations de même axe. L'angle de rotation total est donc

$$\alpha t - \text{atan}(\alpha t)$$

La transformation tourbillon est caractérisée par un taux de rotation nul mais par une rotation propre non nul ! Il n'y a rien là de paradoxal car on a vu à plusieurs reprises que la signification de ces deux types de rotation est différente et le résultat présent en est une illustration supplémentaire.

10.2.3 Cas d'un assemblage rigide faisant un angle donné

Que se passe–t–il lorsque l'assemblage rigide est constitué de deux tiges faisant un angle donné φ_0 ? Le cas $\varphi_0 = \pi/2$ correspond au vorticimètre. Quel est le mouvement de l'assemblage dans les autres cas ? Les directions de l'assemblage sont à nouveau caractérisées par les vecteurs unitaires $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{m}}_2$ tels que

$$\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underline{\boldsymbol{m}}_2 = \cos\varphi_0$$

avec $0 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$. On suit la variation de l'angle φ_1 entre la branche $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ et une direction fixe de l'espace, ici $\underline{\boldsymbol{e}}_1$. On définit aussi l'angle ψ_1 que fait $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ avec $\underline{\boldsymbol{e}}_r$:

$$\varphi_1 = angle(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{m}}_1), \quad \psi_1 = angle(\underline{\boldsymbol{e}}_r, \underline{\boldsymbol{m}}_1) = \varphi_1 - \theta$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \cos\theta\underline{\boldsymbol{e}}_r - \sin\theta\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \underline{\boldsymbol{m}}_1 = \cos\psi_1\underline{\boldsymbol{e}}_r + \sin\psi_1\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$$

Des définitions similaires sont introduites pour φ_2 et ψ_2, concernant la branche $\underline{\boldsymbol{m}}_2$. La vitesse de rotation de $\underline{\boldsymbol{m}}_1$ par rapport à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ est donnée par (10.1) qui s'écrit ici :

$$\begin{aligned}
-\sin\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 &= \underline{\boldsymbol{e}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1 - (\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underline{\boldsymbol{m}}_1)\,\underline{\boldsymbol{m}}_1.\underline{\boldsymbol{e}}_1 \\
&= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}\,(\underline{\boldsymbol{e}}_1.(\sin\psi_1\underline{\boldsymbol{e}}_r + \cos\psi_1\underline{\boldsymbol{e}}_\theta) - \cos\varphi_1\underline{\boldsymbol{m}}_1.(\sin\psi_1\underline{\boldsymbol{e}}_r + \cos\psi_1\underline{\boldsymbol{e}}_\theta)) \\
&= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(\underbrace{\cos\theta\sin\psi_1 - \sin\theta\cos\psi_1}_{=\sin(\psi_1-\theta)=\sin(\varphi_1-2\theta)} - 2\cos\psi_1\sin\psi_1\cos\varphi_1) \\
&= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(\sin(\varphi_1 - 2\theta) - \cos\varphi_1\sin 2\psi_1) \qquad (10.20)
\end{aligned}$$

Or $\sin(\varphi_1 - 2\theta) = \sin(2\psi_1 - \varphi_1) = \sin 2\psi_1\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos 2\psi_1$, ce qui permet de factoriser le terme $\sin\varphi_1$ dans le membre de droite de (10.20). Finalement,

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}\cos 2\psi_1 \qquad (10.21)$$

La même expression relie $\dot{\varphi}_2$ et ψ_2. On va utiliser la vitesse de rotation de $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ par rapport à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ qui, d'après (10.9), vaut

$$\dot{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}$$

L'assemblage rigide constitué des branches 1 et 2 supposées géométriquement identiques tourne à la vitesse moyenne $\dot{\varphi} := (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)/2$ par rapport à la direction fixe $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et à la vitesse angulaire

$\dot\psi$ par rapport à la direction mobile $\underline{\boldsymbol{e}}_r$:

$$\begin{aligned}\dot\psi &:= \frac{\dot\varphi_1+\dot\varphi_2}{2}-\dot\theta \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(1+\frac{1}{2}(\cos 2\psi_1+\cos 2\psi_2)) = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(1+\cos(\psi_1+\psi_2)\cos(\psi_1-\psi_2))\end{aligned}$$

c'est–à–dire

$$\dot\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(1+\cos 2\psi\cos\varphi_0) \tag{10.22}$$

Lorsque les branches sont orthogonales ($\varphi_0=\pi/2$), on retrouve le fait que $\dot\varphi=\dot\psi+\dot\theta=0$, c'est–à–dire que le montage n'effectue qu'un mouvement de translation.

L'équation différentielle (10.22) est à variables séparables :

$$\frac{d\psi}{1+\cos 2\psi\cos\varphi_0} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}\,dt$$

Une primitive du membre de gauche est

$$\int\frac{d\psi}{1+\cos 2\psi\cos\varphi_0} = \frac{2}{2\sqrt{(1-\cos^2\varphi_0)}}\operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos\varphi_0}{1+\varphi_0}}\tan\psi\right) = \frac{1}{\sin\varphi_0}\operatorname{atan}\left(\tan\frac{\varphi_0}{2}\tan\psi\right)$$

L'équation différentielle s'intègre donc en

$$\operatorname{atan}\left(\tan\frac{\varphi_0}{2}\tan\psi\right) = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(\sin\varphi_0)t+\pi E(\frac{\Gamma\sin\varphi_0}{2\pi^2r^2}t-\frac{1}{2})$$

où $E()$ désigne la fonction partie entière. Ce terme correspond à la constante d'intégration ramenant le membre de gauche dans l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$ de sorte que l'équation admette une solution ψ à chaque instant t, la fonction atan ne prenant que des valeurs dans $]-\pi/2,\pi/2[$. De l'équation précédente, on déduit, par passage à la tangente des deux membres que

$$\tan\psi = -\frac{\tan(\frac{\Gamma\sin\varphi_0}{2\pi r^2}t)}{\tan\frac{\varphi_0}{2}} \tag{10.23}$$

d'où

$$\psi = -\operatorname{atan}\frac{\tan(\frac{\Gamma\sin\varphi_0}{2\pi r^2}t)}{\tan\frac{\varphi_0}{2}} - \pi E(\frac{\Gamma\sin\varphi_0}{2\pi^2r^2}t+\frac{1}{2}) \tag{10.24}$$

le multiple de π garantissant que la fonction est définie et continue pour tous les instants t et nulle en $t=0$.

A chaque instant, l'angle de rotation de l'assemblage avec la direction fixe $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ vaut donc

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}t - \operatorname{atan}\frac{\tan(\frac{\Gamma\sin\varphi_0}{2\pi r^2}t)}{\tan\frac{\varphi_0}{2}} - \pi E(\frac{\Gamma}{2\pi^2r^2}+\frac{1}{2}) \tag{10.25}$$

Ainsi, lorsque $\varphi_0=0$, le comportement de l'assemblage est le même que celui de l'allumette seule de la figure 10.1, ainsi que le montre un passage à la limite $\varphi_0\to 0$. Il tourne en suivant la base mobile dont la vitesse est $\dot\theta$. Lorsque $\varphi_0=\pi/2$, le croisillon a un mouvement de pure translation comme sur la figure 10.3. Pour des valeurs intermédiaires, on observe une dérive d'ensemble de l'assemblage par rapport à une direction fixe, agrémentée d'oscillations comme sur la figure 10.4.

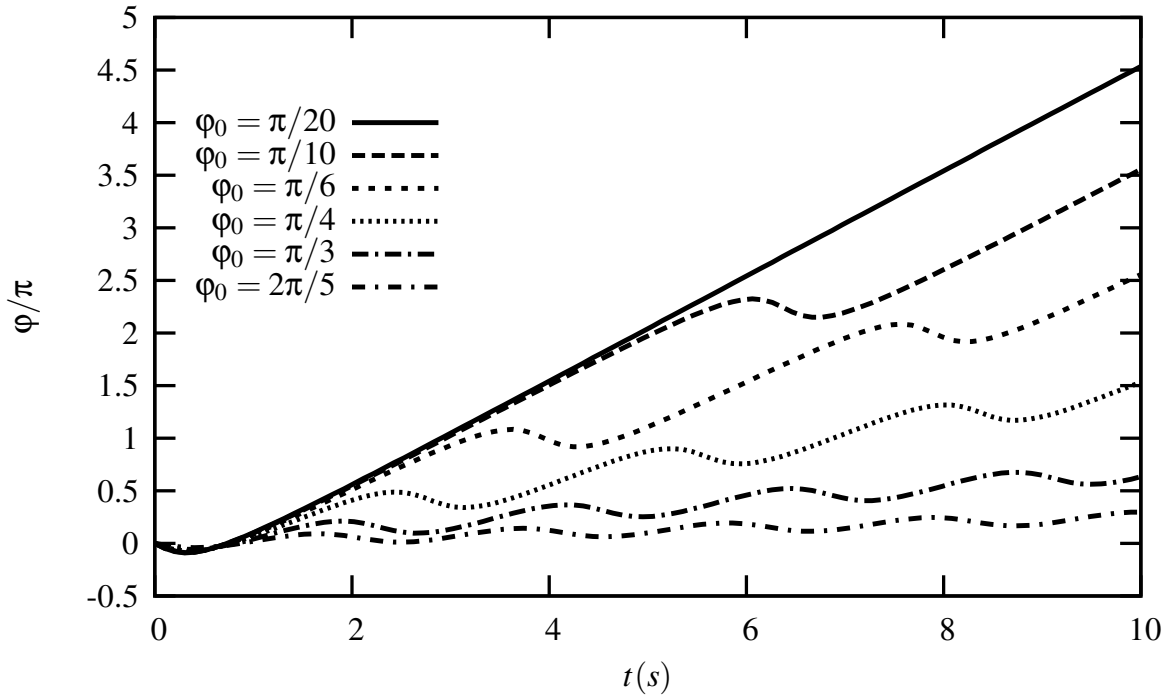


FIG. 10.4 – Angle de rotation φ par rapport à une direction fixe de l'espace d'un assemblage rigide constitué de deux tiges faisant un angle de φ_0 dans un mouvement de tourbillon simple, en fonction du temps en secondes, pour différentes valeurs de φ_0. Les paramètres utilisés sont $r = 0.1$ m, $\Gamma = 0.1$ m^2.s^{-1} dans l'expression (10.25).

10.2.4 Cas d'un assemblage articulé

Imaginons que la croix formée par les deux tiges rigides étudiées soit articulée de sorte que l'angle formé puisse évoluer dans le mouvement. Décrire cette évolution dans le cas où les tiges sont initialement orthogonales.

L'étude du glissement simple au chapitre 9 nous permet de conclure assez rapidement. En effet la cinématique du tourbillon combine à chaque instant un glissement simple et une rotation. En se plaçant dans le repère mobile emmené par cette rotation, on peut donc observer un mouvement de type glissement simple. Le mouvement relatif des tiges est donc le même que celui illustré sur les figures 9.6 à 9.8. Suivant la position relative de la première tige avec $\underline{\boldsymbol{E}}_R$, les tiges vont donc se refermer définitivement ou s'ouvrir pour former un angle plat.

Chapitre 11

Déformations libres

On appelle déformation libre un champ de déformations susceptible d'exister en l'absence de toute contrainte : déformation d'origine thermique, de transformation de phases, déformation plastique, d'origine électromagnétique (déformation piézoélectrique, magnétostriction...), etc. Il s'agit alors de champs de déformations compatibles. Ces champs peuvent être homogènes ou hétérogènes comme on va le voir au paragraphe 11.1. Si toutefois les conditions aux limites ou d'interface ne sont pas compatibles avec le développement du champ de déformation libre, des contraintes souvent considérables peuvent apparaître. Un champ de déformation d'origine élastique vient s'y superposer afin de restaurer la compatibilité du champ de déformations totales.

11.1 Compatibilité des déformations d'origine thermique

11.1.1 Déformations infinitésimales d'origine thermique

Dans le contexte infinitésimal, un point matériel élevé à la température T par rapport à l'état de référence T_0 subit une dilatation thermique de la forme :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = (T - T_0)\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}} \tag{11.1}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ est le tenseur des dilatations thermiques linéarisées autour de T_0, propriété intrinsèque du matériau. Dans le cas d'un matériau isotrope[1], ce tenseur d'ordre 2 est purement sphérique et ne fait intervenir qu'un seul coefficient de dilatation α :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T - T_0)\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{11.2}$$

La figure 11.1 illustre le champ de déplacement dans le cas où le champ de température T est homogène. On envisage plus généralement dans ce paragraphe des champs de température $T(\underline{\boldsymbol{x}})$ non nécessairement homogènes.

A quelle condition, le champ de déformation d'origine thermique (11.2) est–il compatible ? Autrement dit, quel champ de température peut se développer dans un corps matériel supposé homogène et par ailleurs libre d'effort à sa frontière, sans y engendrer de contraintes ?

[1] Reconsidérer l'exercice dans le cas général anisotrope.

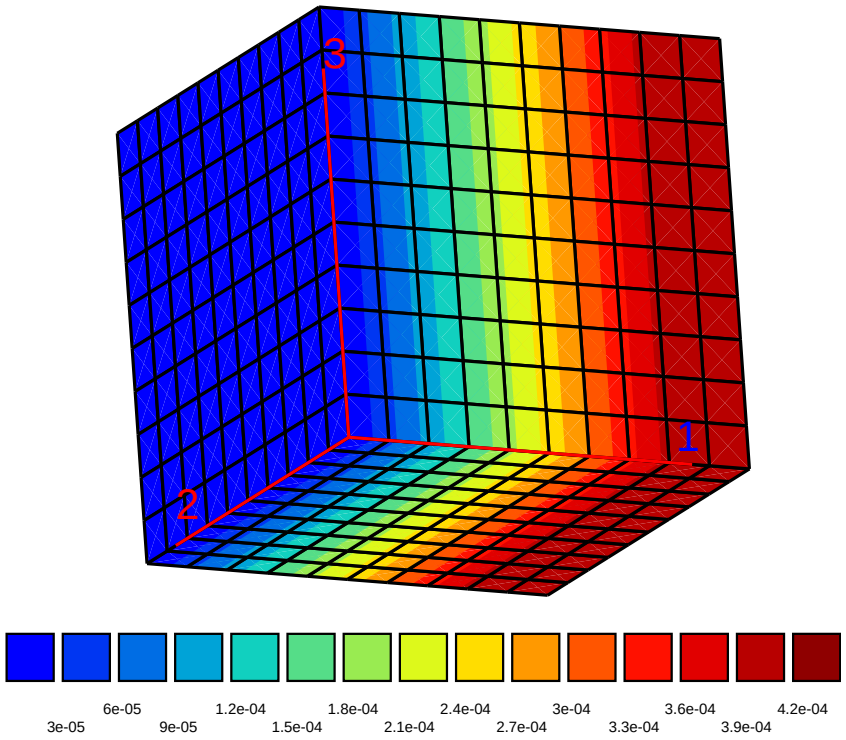


FIG. 11.1 – Champ de déplacement u_1 dû à une variation de température de 50°C dans un cube d'acier de 1 mm de côté ($\alpha = 10^{-5}$ K^{-1}). Les conditions aux limites en déplacement sont telles que la face $x_1 = 0$ ne peut pas se déplacer selon l'axe 1, tandis que le point matériel coïncidant avec l'origine des axes est fixé. De plus, le point de coordonnées $(0, 1, 0)$ ne peut pas se déplacer dans la direction 3. Les faces du cube sont libres d'effort.

Le champ (11.2) où $T(\underline{\boldsymbol{X}})$ est supposé pouvoir varier dans le corps matériel tandis que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\alpha}}$ est considéré comme homogène. On lui applique les conditions de compatibilité (2.143). Elles conduisent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} T_{,11} + T_{,22} = 0 \\ T_{,22} + T_{,33} = 0 \\ T_{,33} + T_{,11} = 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} T_{,12} = 0 \\ T_{,23} = 0 \\ T_{,31} = 0 \end{array}\right. \tag{11.3}$$

La notation $T_{,1}$ désigne la dérivée partielle de T par rapport à la coordonnée X_1. La combinaison des équations $(11.3)_4$ et $(11.3)_6$, $(11.3)_4$ et $(11.3)_5$, puis $(11.3)_5$ et $(11.3)_6$ conduit à la dépendance spatiale suivante du champ de température :

$$T_{,1} = a(X_1), \quad T_{,2} = b(X_2), \quad T_{,3} = c(X_3) \tag{11.4}$$

où a, b et c sont trois fonctions à préciser. En substituant ces expressions dans les équations $(11.3)_1$ à $(11.3)_3$, on obtient le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{,1} + b_{,2} = 0 \\ b_{,2} + c_{,3} = 0 \\ c_{,3} + a_{,1} = 0 \end{array}\right. \tag{11.5}$$

La première équation $(11.5)_1$ signifie que $a_{,1}(X_1) = -b_{,2}(X_2)$ est une constante. Il en va de même pour $c_{,3}$. Le système (11.5) est par conséquent un système linéaire homogène d'inconnues $a_{,1}, b_{,2}, c_{,3}$. Il s'ensuit que :

$$a_{,1} = b_{,2} = c_{,3} = 0 \tag{11.6}$$

La forme du champ de températures conduisant à un champ de dilatation thermique compatible en découle :

$$T = AX_1 + BX_2 + CX_3 + D \tag{11.7}$$

où A, B, C, D sont quatre constantes. Le champ de température est donc affine. Pour un tel champ de température, la déformation d'origine thermique est compatible de sorte que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{total} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \tag{11.8}$$

Si les conditions à la frontière du corps matériel ne s'opposent pas aux déplacements qui s'ensuivent, un tel champ existe donc sans contraintes, i.e. sans contribution élastique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$.
Plus généralement, on montre que tout champ de déformation affine

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \,.\, \underline{\boldsymbol{X}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \tag{11.9}$$

avec $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ tenseur d'ordre 3 constant, est compatible.

11.1.2 Déformée d'un corps soumis à un gradient de température

On étudie en détail la forme que prend un corps matériel soumis à un champ de température affine de la forme (11.7). Le système de coordonnées cartésiennes selon une base orthonormée est choisi de telle sorte que le gradient de température soit selon la direction 3 :

$$\alpha(T - T_0) = A\, X_3, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} AX_3 & 0 & 0 \\ 0 & AX_3 & 0 \\ 0 & 0 & AX_3 \end{bmatrix} \tag{11.10}$$

Si T_1 est la température à l'altitude $X_3 = 0$, et T_2 la température à l'altitude $X_3 = H$, alors le coefficient A n'est autre que

$$A = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{H} \tag{11.11}$$

Quel est (sont) le(s) champ(s) de déplacements associé(s) au champ de déformation (11.10) ?

On met en œuvre ici la démarche systématique qui, à partir d'un champ de déformation donné, permet de trouver la famille des déplacements correspondants. La méthode peut sembler fastidieuse mais elle a le mérite de conduire immanquablement à la famille de solutions cherchée. Toute tentative pour la court–circuiter en "intégrant à vue" peut se solder par une suite de calculs inextricables... La difficulté vient du fait que l'on cherche une famille de champs de vecteur $\underline{\boldsymbol{u}}$ dont le gradient *symétrisé* est égal au champ de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ donné. La tâche serait plus aisée si la donnée du problème était le champ de gradient $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ complet.
Le point de départ est le gradient de la rotation infinitésimale qui s'exprime en fonction du gradient de la déformation selon l'expression (2.146) :

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \tag{11.12}$$

A partir du champ de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ donné (11.10), on calcule :

$$\begin{array}{lll} \omega_{12,1} = 0, & \omega_{23,1} = 0, & \omega_{31,1} = -\varepsilon_{11,3} = -A, \\ \omega_{12,2} = 0, & \omega_{23,2} = \varepsilon_{22,3} = A, & \omega_{31,2} = 0, \\ \omega_{12,3} = 0, & \omega_{23,3} = 0, & \omega_{31,3} = 0 \end{array}$$

On en déduit que

$$\omega_{12} = -r, \quad \omega_{23} = AX_2 - p, \quad \omega_{31} = -AX_3 - q \tag{11.13}$$

où p, q, r sont trois constantes d'intégration.
Le gradient du champ de déplacement est la somme de la déformation infinitésimale $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et de la rotation infinitésimale $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$:

$$[u_{i,j}] = [\varepsilon_{ij}] + [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} AX_3 & -r & AX_1+q \\ r & AX_3 & AX_2-p \\ -AX_1-q & p-AX_2 & AX_3 \end{bmatrix} \tag{11.14}$$

$$= \begin{bmatrix} AX_3 & 0 & AX_1 \\ 0 & AX_3 & AX_2 \\ -AX_1 & -AX_2 & AX_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \tag{11.15}$$

où l'on a isolé la rotation infinitésimale arbitraire dont le vecteur rotation est $[p, q, r]$. Dans la suite, cette rotation n'est pas écrite par commodité et sera réintroduite dans le résultat final.
Il s'agit maintenant d'intégrer le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} &u_{1,1} = AX_3, && u_{2,1} = 0, && u_{3,1} = -AX_1 \\ &u_{1,2} = 0, && u_{2,2} = AX_3, && u_{3,2} = -AX_2 \\ &u_{1,3} = AX_1, && u_{2,3} = AX_2, && u_{3,3} = AX_3 \end{aligned}$$

L'intégration du système précédent conduit au champ de déplacement :

$$u_1 = AX_1X_3 + c_1, \quad u_2 = AX_2X_3 + c_2, \quad u_3 = \frac{A}{2}(-X_1^2 - X_2^2 + X_3^2) + c_3 \tag{11.16}$$

Les constantes c_1, c_2, c_3 désignent une translation arbitraire. Il faut ajouter au champ précédent la rotation infinitésimale arbitraire :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

Seules des conditions aux limites précises en déplacement permettent de fixer la translation $[c_1, c_2, c_3]^T$ et la rotation $[p, q, r]^T$.
Les champs de températures, de déformations et de déplacements sont illustrés pour un cube d'acier sur la figure 11.3.

Contexte infinitésimal

Préciser les conditions de validité de la solution précédente dans le contexte infinitésimal. Donner en particulier les gradients de température licites dans le cas d'une barre cylindrique de rayon R et de hauteur H.

Les composantes des tenseurs de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$ doivent rester suffisamment petites. Dans le cas d'une barre cylindrique de rayon R et de hauteur H par exemple, les conditions s'écrivent :

$$|p|, |q|, |r| \ll 1, \quad |AX_3| \leq |AH| \ll 1, \quad |AX_1| \leq |AR| \ll 1 \tag{11.18}$$

Elles impliquent les conditions suivantes sur le gradient de température imposé vis–à–vis de la géométrie de la barre :

$$|\alpha(T_2 - T_1)| \ll 1, \quad |\alpha(T_2 - T_1)| \ll \frac{H}{R} \tag{11.19}$$

Dans le cas d'une barre ou d'une tige (i.e. $R/H \ll 1$), la condition $(11.19)_1$ est la plus restrictive. Si cette barre est en acier, $\alpha \sim 10^{-5}$ K^{-1}, et si des valeurs $|\alpha\Delta T|$ de l'ordre de 0.01 sont visées, alors les variations de température licites peuvent aller jusqu'à $\Delta T \sim 1000$°C, sans quitter le contexte des transformations infinitésimales.
Dans le cas d'un disque ou plus généralement d'une plaque (i.e. $H/R \ll 1$), la condition $(11.19)_2$ est la plus restrictive. Prenons par exemple $H/R \sim 0.01$. En tenant compte de $(11.19)_2$, on doit donc viser des valeurs $|\alpha\Delta T|$ de l'ordre de 0.0001. Si la plaque est en acier, les variations de température licites ne pourront dépasser $\Delta T \sim 10$°C. Cette situation est beaucoup plus restrictive que le cas de la barre. Cela est dû au fait que, dans le cas d'une plaque mince, des déformations très faibles peuvent s'accompagner de rotations significatives conduisant à de grands déplacements. Le contexte infinitésimal cesse donc d'être valide de manière précoce, comme on l'a déjà fait remarquer à la page 48.
On rappelle toutefois que, même si les conditions (11.19) sont remplies, ce qui garantit que la solution (11.16) est licite, on n'est pas à l'abri d'instabilités que seules des analyses sortant du contexte infinitésimal permettent de prévoir.

Déformée d'un plan

Que devient le plan $X_3 = 0$ dans le champ de déformation précédent ?

La position actuelle $\underline{\boldsymbol{x}}$ d'un point matériel s'exprime en fonction de sa position initiale et de son déplacement selon :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + u_1 = X_1 + AX_1X_3 \\ x_2 = X_2 + u_2 = X_2 + AX_2X_3 \\ x_3 = X_3 + u_3 = X_3 + \dfrac{A}{2}(X_3^2 - X_1^2 - X_1^2) \end{cases} \tag{11.20}$$

Les points situés initialement sur le plan d'équation $X_3 = 0$ se transforment donc en

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = -\dfrac{A}{2}(X_1^2 + X_2^2) \end{cases} \tag{11.21}$$

Ils se trouvent donc sur la surface d'équation

$$x_3 + \frac{A}{2}(x_1^2 + x_2^2) = 0 \tag{11.22}$$

Il s'agit de l'équation d'un **paraboloïde de révolution** d'axe 3. Une coupe de ce paraboloïde par le plan $X_2 = 0$ est visible sur la figure 11.2.
Dans le contexte infinitésimal, les termes $|AX_1|$ et $|AX_2|$, ou de manière équivalente $|Ax_1|$ et

$|Ax_2|$, sont des infiniment petits d'ordre $\mathcal{O}(h)$ (cf. équation (11.18)). En réécrivant l'équation (11.22) sous la forme

$$Ax_3 + \frac{1}{2}((Ax_1)^2 + (Ax_2)^2) = 0$$

on voit que le terme $|Ax_3|$ est de l'ordre $\mathcal{O}(h^2)$. Par conséquent, l'équation de la déformée du plan initial $X_3 = 0$ est tout aussi bien

$$Ax_3 + \frac{1}{2}((Ax_1)^2 + (Ax_2)^2 + (Ax_3)^2) = 0 \tag{11.23}$$

puisque la correction ajoutée $(Ax_3)^2$ est d'ordre $\mathcal{O}(h^4)$, i.e. de deux ordres inférieure aux termes de l'expression initiale. Dans le contexte infinitésimal, le paraboloïde est alors **indiscernable** de sa sphère osculatrice d'équation Le rayon de la sphère et, de manière équivalente, le rayon de courbure minimal du paraboloïde est $1/A$. Son centre a pour coordonnées $[0, 0, -1/A]$. Remarquer que le contexte infinitésimal via la condition (11.18) exige que le rayon de courbure de la déformée soit significativement plus grand que R :

$$R \ll \frac{1}{|A|}$$

Des conclusions similaires peuvent être tirées pour des plans de cote initiale $X_3 \neq 0$. La transformée de ces plans est visible sur la figure 11.2.

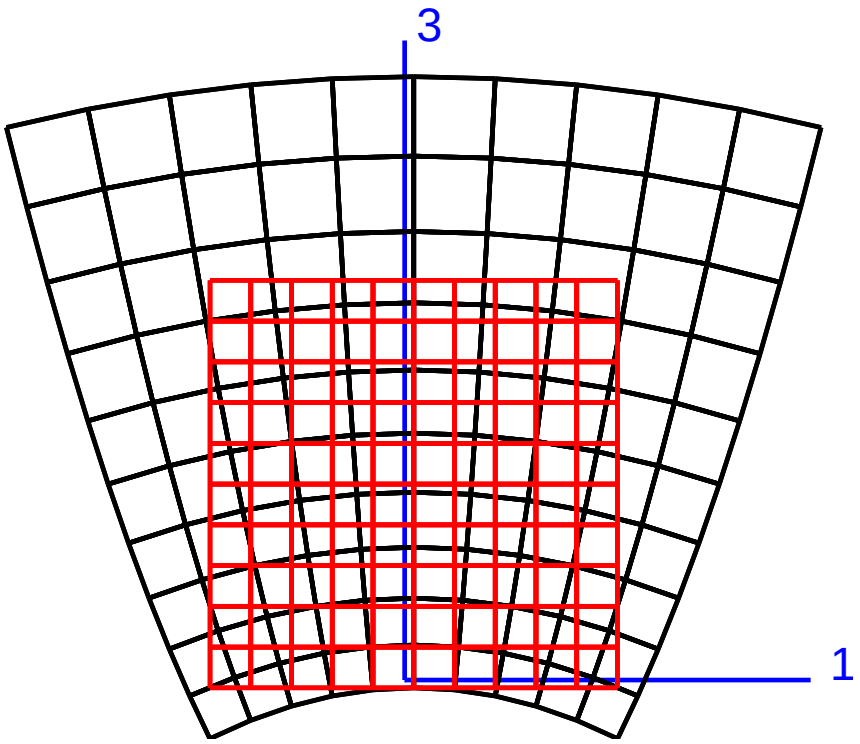


FIG. 11.2 – Déformée d'un carré d'acier de côté 1 mm soumis à un gradient constant de température de 100°C : $T = 0$°C sur la face $X_3 = 0$ et $T = 100$°C sur la face $X_3 = 1$. Le coefficient de dilatation est $\alpha = 10^{-5}$ K^{-1}. Les déplacements sont amplifiés d'un facteur 1000 pour l'illustration. Le carré rouge représente l'état initial. Le carré déformé est en noir. Les axes sont en bleu. Cette figure s'obtient en considérant la coupe $X_2 = 0$ du cube de la figure 11.3.

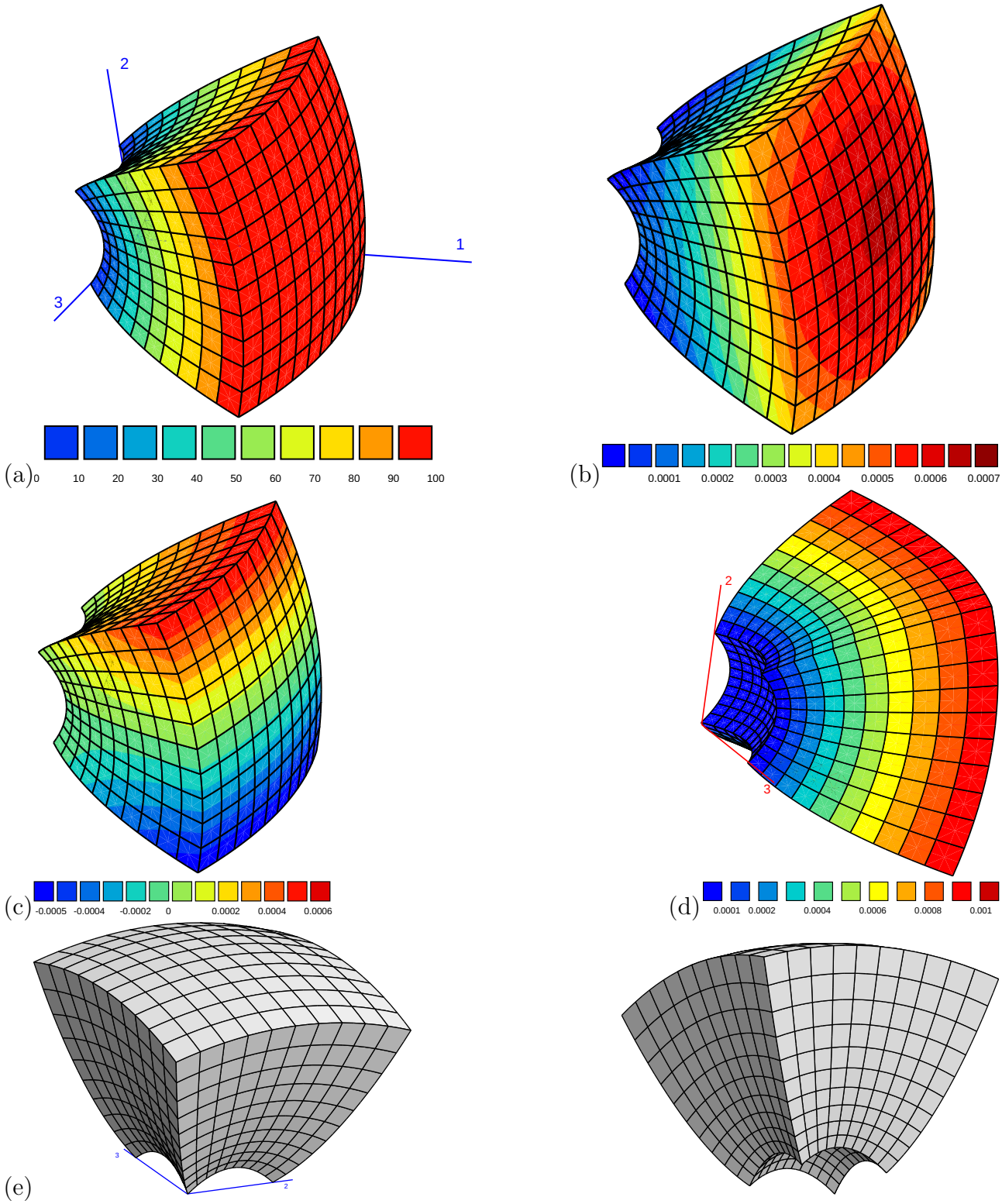


FIG. 11.3 – Cube d'acier de côté 1 mm soumis à un gradient constant de température de 100°C : $T = 0$°C sur la face $x_1 = 0$ et $T = 100$°C sur la face $x_1 = 1$. Le coefficient de dilatation est $\alpha = 10^{-5}$ K^{-1}. Les déplacements sont amplifiés d'un facteur 2000 pour l'illustration. Les faces du cube sont libres d'effort. Les champs représentés sont : (a) le champ de température, (b) le champ de déplacement u_1, (c) le champ de déplacement u_2, (d) le champ de déformation ε_{11}, (e) deux vues de la déformée.

11.2 Effet bilame

Les composants constitués de plusieurs couches de matériaux différents sont très fréquents dans les systèmes électromécaniques ou microélectroniques. La connaissance de leurs propriétés mécaniques est essentielle afin de leur garantir une durée de vie suffisante et d'éviter l'apparition de défauts. Ces composants sont souvent le siège de contraintes d'origine thermique dues à la différence de propriétés thermoélastiques des matériaux utilisés. On envisage ici le cas élémentaire du bilame constitué de deux couches possédant des coefficients de dilatation distincts. L'objet des sections 11.2 et 11.3 est de mettre en évidence l'effet bilame de manière quantitative et d'en déduire ensuite quelques conséquences dans le domaine des composants électroniques (microprocesseurs, etc.).

On considère une plaque composée de deux couches de matériaux différents. La géométrie de la plaque est engendrée par translation le long d'un axe $0X_3$ à partir d'une surface plane S dont le contour extérieur est de forme quelconque. L'épaisseur de la plaque obtenue est supposée significativement plus petite que les deux autres dimensions caractéristiques.
Le repérage est cartésien orthonormé. Une vue en perspective et une section $0X_10X_3$ du bicouche font l'objet de la figure 11.4. La couche inférieure constitue le substrat, d'épaisseur h_s. Il est recouvert d'une couche ou film d'épaisseur h_f. L'épaisseur totale de la plaque est $h = h_s + h_f$. Conformément au système de coordonnées cartésiennes indiqué sur la figure 11.4, l'interface entre les deux matériaux est à la cote $X_3 = 0$. L'origine O du repère est un point de l'interface situé loin des bords de la plaque. La surface inférieure S, la surface supérieure et l'interface ont pour équations respectives $X_3 = -h_s, X_3 = h_f$ et $X_3 = 0$. Le domaine d'espace occupé par la plaque peut donc être noté $S\times]-h_s, h_f[$. On notera ∂S la ligne du bord de S et $\partial S\times]-h_s, h_f[$ la surface latérale de la plaque.
L'interface est supposée parfaite[2], c'est–à–dire que, dans les conditions de chargement du problème, aucune décohésion ni fissure ne peuvent apparaître à l'interface.

Le substrat est constitué d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young E_s, coefficient de Poisson ν_s, coefficient de dilatation thermique α_s). La couche supérieure est constituée d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young E_f, coefficient de Poisson ν_f, coefficient de dilatation thermique α_f). Chaque matériau est supposé dans son état naturel lorsqu'il est à la température de référence T_0.

L'objectif du problème est de déterminer la forme que prend le bicouche lorsqu'on le porte à la température T, supposée telle que l'on reste dans le contexte infinitésimal. Dans tout le problème, on se place délibérément dans l'hypothèse des petites perturbations.

On adopte l'approche en contraintes et l'on recherche si un champ de contraintes internes biaxiales de la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^s = \sigma^s_{11}(X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sigma^s_{22}(X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 \quad \text{pour} \quad -h_s < X_3 < 0 \tag{11.24}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^f = \sigma^f_{11}(X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sigma^f_{22}(X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 \quad \text{pour} \quad 0 < X_3 < h_f \tag{11.25}$$

peut s'établir dans le bicouche lorsqu'il est porté à la température T. Seules deux composantes non nulles des contraintes sont donc recherchées, avec en outre une dépendance par rapport à la seule variable X_3.

Les contraintes revêtent la même forme dans le substrat et le film mais sont représentées *a priori* par des fonctions différentes caractérisées par les exposants ^{s} et ^{f}, respectivement. L'isotropie du problème dans le plan OX_1OX_2 incite à penser que ces contraintes sont équi–biaxiales. Les contraintes recherchées sont donc telles que :

$$\sigma^s_{11}(X_3) = \sigma^s_{22}(X_3), \quad \sigma^f_{11}(X_3) = \sigma^f_{22}(X_3) \tag{11.26}$$

[2] Les deux couches métalliques peuvent être soudées, brasées ou colaminées.

Aucun chargement mécanique extérieur n'est appliqué au composant. Seule la température, supposée homogène dans la plaque à chaque instant, passe de la valeur initiale T_0 à la valeur actuelle T.

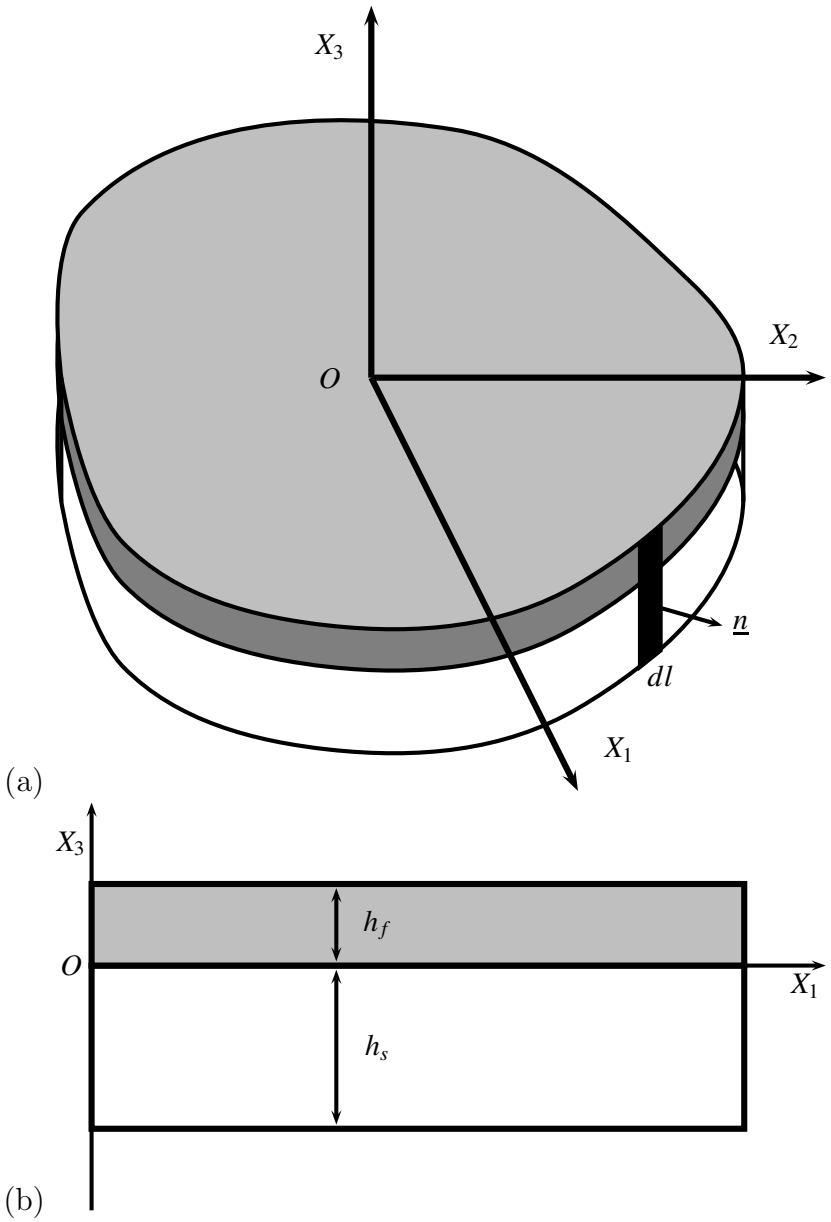


FIG. 11.4 – Vue en perspective d'une plaque bicouche dans son état initial (a), section initiale ($X_1 \geq 0, X_2 = 0$) (b).

11.2.1 Etat de contraintes équi–biaxiales

Etudier les conditions d'équilibre local du champ de contraintes proposé au sein de la plaque. Justifier en outre que l'on ait considéré que $\sigma_{33} = 0$.

Le champ de contraintes proposé est à divergence nulle. En effet, les dérivées partielles $\sigma_{11,3}$ et $\sigma_{22,3}$ sont les seules qui soient susceptibles d'être non nulles. Elles n'interviennent pas dans l'expression de la divergence des contraintes. Un tel champ est donc admissible du point de vue

des équations d'équilibre. Le choix $\sigma_{33} = 0$ est compatible avec l'existence des surfaces libres $X_3 = -h_s, X_3 = h_f$ et avec la troisième équation d'équilibre impliquant la dérivée de σ_{33} par rapport à X_3. Il faut en outre vérifier la condition d'interface :

$$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = [\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{e}}_3 = 0$$

11.2.2 Déformations des couches

Calculer indépendamment dans chaque couche les déformations élastiques puis totales en fonction des contraintes introduites précédemment et de l'écart de température $T - T_0$.
La notation suivante pour le module d'élasticité biaxiale sera adoptée :

$$M_s := \frac{E_s}{1-\nu_s}, \quad M_f := \frac{E_f}{1-\nu_f} \tag{11.27}$$

La loi d'élasticité isotrope linéarisée fournit, indépendamment dans chaque couche, l'expression des déformations élastiques en fonction des contraintes :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E}(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{11.28}$$

On en déduit que

$$\varepsilon^e_{11} = \varepsilon^e_{22} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{11}, \quad \varepsilon^e_{33} = -\frac{2\nu}{E}\sigma_{11} \tag{11.29}$$

Par souci de concision, on n'a pas mis l'exposant s ou f caractéristique de chaque couche mais il y a bien deux jeux d'équations du type précédent. La déformation totale s'obtient en ajoutant la déformation thermique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T-T_0)\underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{11.30}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha(T-T_0), \quad \varepsilon_{33} = -\frac{2\nu}{E}\sigma_{11} + \alpha(T-T_0) \tag{11.31}$$

Ces relations font intervenir les modules d'élasticité biaxiale M_s et M_f.

11.2.3 Equations de compatibilité

En utilisant les conditions de compatibilité pour le champ de déformations établi précédemment, montrer que, dans chaque couche, les contraintes recherchées sont des fonctions affines. Donner ensuite l'expression des déformations totales à l'aide de ces fonctions affines et de la température.

Les équations de compatibilité fournissent les relations suivantes :

$$\varepsilon_{11,33} = 0, \quad \varepsilon_{22,33} = 0 \tag{11.32}$$

En substituant les relations (11.31) dans les équations de compatibilité, on trouve

$$\sigma_{11,33} = 0 \Longrightarrow \sigma_{11} = aX_3 + b \tag{11.33}$$

où a et b sont des constantes par couche, à déterminer. On a tenu compte du fait que la température est supposée homogène. Les déformations aussi sont affines :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1}{M}(aX_3+b) + \alpha(T-T_0), \quad \varepsilon_{33} = -\frac{2\nu}{E}(aX_3+b) + \alpha(T-T_0) \tag{11.34}$$

11.2.4 Déplacements

Trouver, indépendamment dans chaque couche, la forme précise du champ de déplacements, à un mouvement de corps rigide infinitésimal près, à savoir les trois composantes :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_1(X_1, X_2, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + u_2(X_1, X_2, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_2 + u_3(X_1, X_2, X_3)\underline{\boldsymbol{e}}_3 \tag{11.35}$$

On ne cherchera pas, pour l'instant, à identifier les constantes apparues lors du processus d'intégration.

La méthode systématique pour construire le champ de déplacements à partir du champ de déformations précédent consiste à calculer le gradient de la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$ par la formule (2.146). Cela donne

$$\begin{array}{lll} \omega_{12,1} = 0, & \omega_{23,1} = 0, & \omega_{31,1} = -\varepsilon_{11,3} = -\dfrac{a}{M}, \\ \omega_{12,2} = 0, & \omega_{23,2} = \varepsilon_{22,3} = \dfrac{a}{M}, & \omega_{31,2} = 0, \\ \omega_{12,3} = 0, & \omega_{23,3} = 0 & \omega_{31,3} = 0 \end{array}$$

L'intégration de ces équations fournit

$$\omega_{12} = 0, \quad \omega_{23} = \frac{a}{M}X_2, \quad \omega_{31} = -\frac{a}{M}X_1$$

sans mentionner les termes constants p, q, r associés à une rotation infinitésimale que l'on ajoutera à la fin. Le gradient du déplacement s'écrit donc

$$\begin{array}{lll} u_{1,1} = \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{M}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) & u_{2,1} = 0 & u_{3,1} = -\dfrac{a}{M}X_1 \\ u_{1,2} = 0 & u_{2,2} = \dfrac{1}{M}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) & u_{3,2} = -\dfrac{a}{M}X_2 \\ u_{1,3} = \dfrac{a}{M}X_1 & u_{2,3} = \omega_{23} = \dfrac{a}{M}X_2 & u_{3,3} = -\dfrac{2\nu}{E}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) \end{array}$$

L'intégration des équations précédentes conduit aux expressions suivantes des composantes du déplacement

$$u_1 = \frac{1}{M}(aX_3 + b)X_1 + \alpha(T - T_0)X_1 \tag{11.36}$$

$$u_2 = \frac{1}{M}(aX_3 + b)X_2 + \alpha(T - T_0)X_2 \tag{11.37}$$

$$u_3 = -\frac{a}{M}\left(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}\right) - \frac{2\nu}{E}\left(a\frac{X_3^2}{2} + bX_3\right) + \alpha(T - T_0)X_3 \tag{11.38}$$

auquel s'ajoute le mouvement de corps rigide infinitésimal $\{(p, q, r), \underline{\boldsymbol{c}}\}$.
On a omis de mettre l'indication s ou f sur les coefficients E, ν, M, α et les constantes d'intégration a, c. Les champs de déplacements trouvés ont la même forme dans chaque couche mais des coefficients et constantes *a priori* distinctes.

11.2.5 Contraintes dans chaque couche

Montrer que les contraintes se mettent sous la forme suivante :

$$\sigma_{11}^s = M_s 1 - \nu_s(AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0)), \quad \sigma_{11}^f = M_f 1 - \nu_f(AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0)) \tag{11.39}$$

où A et C sont deux constantes à déterminer plus tard. Il faudra en particulier établir que ces constantes sont les mêmes dans les deux couches.

Calculer alors le saut des contraintes à la traversée de l'interface entre les deux matériaux. Une telle discontinuité est–elle acceptable pour la solution du problème posé ?

Les déplacements ont été établis dans chaque couche. Il faut maintenant se préoccuper de ce qui se passe à l'interface. Celle–ci étant supposée parfaite, les déplacements y sont continus :

$$u_1^s(X_1,X_2,0)=u_1^f(X_1,X_2,0),\quad u_2^s(X_1,X_2,0)=u_2^f(X_1,X_2,0),\quad u_3^s(X_1,X_2,0)=u_3^f(X_1,X_2,0) \tag{11.40}$$

Examinons d'abord la condition sur u_3. Pour $X_3=0$, la composante u_3 comporte le terme quadratique :

$$-\frac{a^{s,f}}{M_{s,f}}(\frac{X_1^2}{2}+\frac{X_2^2}{2})$$

Pour que les fonctions u_3^s et u_3^f coïncident à l'interface, pour toute valeur de X_1, il faut que les coefficients de ces monomes soient identiques :

$$\frac{a^s}{M_s}=\frac{a^f}{M_f}=A \tag{11.41}$$

où l'on introduit le coefficient unique A. A l'interface $X_3=0$, les composantes u_1 et u_2 prennent la forme :

$$u_1^{s,f}=\frac{b^{s,f}}{M_{s,f}}X_1+\alpha_{s,f}(T-T_0)X_1,\quad u_2^{s,f}=\frac{b^{s,f}}{M_{s,f}}X_2+\alpha_{s,f}(T-T_0)X_2$$

à un mouvement de corps rigide près. Ces déplacements ne peuvent coïncider que si

$$\frac{b^s}{M_s}+\alpha_s(T-T_0)=\frac{b^f}{M_f}+\alpha_f(T-T_0)=C \tag{11.42}$$

où l'on introduit la constante unique C. Muni de ces constantes identiques dans les deux couches, on est en mesure d'évaluer à nouveau les contraintes. On a vu que, dans chaque couche :

$$\sigma_{11}^s=a^sX_3+b^s=M^s(AX_3+C-\alpha^s(T-T_0)),\quad \sigma_{11}^f=a^fX_3+b^f=M^f(AX_3+C-\alpha^f(T-T_0)) \tag{11.43}$$

C'est la forme annoncée dans l'énoncé.
La discontinuité des contraintes à l'interface s'écrit :

$$[\![\sigma_{11}]\!]=[\![\sigma_{22}]\!]=(M_s-M_f)C-(M_s\alpha_s-M_f\alpha_f)(T-T_0) \tag{11.44}$$

Une discontinuité de σ_{11} et σ_{22} est tout à fait licite puisque seules les composantes du vecteur–contrainte doivent être continues à la traversée de toute surface de normale $\underline{\boldsymbol{e}}_3$, à savoir les composantes $\sigma_{13},\sigma_{23},\sigma_{33}$ qui sont nulles dans les deux couches. Achever la détermination des déplacements en fonction de A et C. On utilisera les conditions aux limites suivantes :

$$u_1(X_1=0,X_2=0,X_3=0)=u_2(X_1=0,X_2=0,X_3=0)=u_3(0,0,0)=0$$

$$u_1(0,0,X_3=h_f)=u_2(0,0,X_3=h_f)=0$$

$$u_2(X_1=L,0,0)=0$$

où le point de coordonnées $(L,0,0)$ est un point donné supposé appartenir à la plaque.

Les déplacements (11.38) vérifient les conditions aux limites proposées. Il reste donc à fixer le mouvement de corps rigide adapté à ces conditions de Dirichlet. Un tel mouvement infinitésimal est de la forme :

$$\begin{aligned} u_1 &= -rX_2 + qX_3 + c_1 \\ u_2 &= rX_1 - pX_3 + c_2 \\ u_3 &= -qX_1 + pX_2 + c_3 \end{aligned}$$

La première condition exige que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
La deuxième condition exige alors que $p = q = 0$.
La troisième condition exige que $r = 0$.
Les conditions aux limites proposées sont donc nécessaires et suffisantes pour fixer le mouvement de corps rigide du solide, laissé indéterminé lors de l'intégration.
On exprime maintenant les déplacements en fonction de A et C :

$$u_1 = AX_1X_3 + CX_1 \tag{11.45}$$

$$u_2 = AX_2X_3 + CX_2 \tag{11.46}$$

$$u_3 = -A(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}) - \frac{2\nu}{1-\nu}(A\frac{X_3^2}{2} + CX_3) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0)X_3 \tag{11.47}$$

11.2.6 Torseur des efforts résultant

Calculer le torseur des efforts résultant sur un élément de la surface latérale $\partial S \times]-h_s, h_f[$, engendré par le segment du bord $X_1 = Constante1, X_2 = Constante2$, d'épaisseur h et de largeur infinitésimale dl comme sur la figure 11.4(a). Le vecteur normal en chaque point du bord a pour composantes $(n_1, n_2, 0)$. Comme on ne préjuge pas de la forme du bord de la plaque, ces composantes n_1, n_2 peuvent être quelconques. On exprimera le torseur résultant en fonction de $A, C, T - T_0$ et des caractéristiques du bicouche.
Etablir alors le système linéaire permettant de déterminer finalement A et C.
La détermination explicite de A et C est repoussée à la partie suivante du problème.
Indiquer enfin dans quelles circonstances la démarche adoptée jusqu'ici conduit effectivement à une solution satisfaisante du problème posé.

On calcule la résultante (linéique) des efforts sur une surface d'équation $X_1 = Cste, X_2 = Cste$ et d'épaisseur infinitésimale. La troisième composante de cette résultante est nulle. Les deux premières composantes d'intérêt sont :

$$R_1 = \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} n_1 dX_3 = \left(\int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 \right) n_1 \tag{11.48}$$

$$R_2 = \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{22} n_2 dX_3 = \left(\int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{22} dX_3 \right) n_2 \tag{11.49}$$

puisque le vecteur normal est constant le long de l'élément de surface cylindrique considéré.
Le moment (linéique) résultant, quant à lui, s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \int_{-h_s}^{h_f} \begin{bmatrix} -\sigma_{22} X_3 n_2 \\ \sigma_{11} X_3 n_1 \\ \sigma_{11}(X_1 n_2 - X_2 n_1) \end{bmatrix} dX_3 \tag{11.50}$$

Par conséquent,

$$M_1 = \left(\int_{-h_s}^{h_f} -\sigma_{11} X_3 dX_3 \right) n_2, \quad M_2 = \left(\int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} X_3 dX_3 \right) n_1 \tag{11.51}$$

$$M_3 = n_2 X_1 \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 - n_1 X_2 \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 \tag{11.52}$$

On est donc amené à calculer deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 &= \int_{-h_s}^{0} M_s(AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0)) dX_3 + \int_{0}^{h_f} M_f(AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0)) dX_3 \\ &= -M_s A \frac{h_s^2}{2} + M_s(C - \alpha_s(T - T_0))h_s + M_f A \frac{h_f^2}{2} + M_f(C - \alpha_f(T - T_0))h_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} X_3 dX_3 &= \int_{-h_s}^{0} M_s(AX_3^2 + CX_3 - \alpha_s(T - T_0)X_3) dX_3 \\ &+ \int_{0}^{h_f} M_f(AX_3^2 + CX_3 - \alpha_f(T - T_0)X_3) dX_3 \\ &= M_s A \frac{h_s^3}{3} - M_s(C - \alpha_s(T - T_0)) \frac{h_s^2}{2} + M_f A \frac{h_f^3}{3} + M_f(C - \alpha_f(T - T_0)) \frac{h_f^2}{2} \end{aligned}$$

Comme aucun effort extérieur n'est appliqué au composant, ces deux résultantes s'annulent. Comme l'une au moins des composantes n_1 ou n_2 est non nulle, le torseur résultant est nul si et seulement si les deux intégrales sont nulles :

$$\int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 = 0, \quad \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} X_3 dX_3 = 0$$

On en déduit un système de deux équations d'inconnues A et C :

$$\left(M_f h_f^2 - M_s h_s^2\right) \frac{A}{2} + \left(M_s h_s + M_f h_f\right) C = \left(M_s h_s \alpha_s + M_f h_f \alpha_f\right) (T - T_0) \tag{11.53}$$

$$\left(M_s h_s^3 + M_f h_f^3\right) \frac{A}{3} + \left(M_f h_f^2 - M_s h_s^2\right) \frac{C}{2} = \left(M_f h_f^2 \alpha_f - M_s h_s^2 \alpha_s\right) \frac{T - T_0}{2} \tag{11.54}$$

On vérifiera que les épaisseurs h_s et h_f jouent un rôle symétrique dans ce système, comme il se doit puisque l'origine du repère est sur l'interface. Pour le voir, changer h_s en $-h_s$, c'est–à–dire prendre h_s algébrique, les épaisseurs sont alors interchangeables.
La démarche proposée a permis de déterminer un champ de contraintes et un champ de déplacements satisfaisant les équations de champs et remplissant les conditions aux limites au moins au sens de Saint–Venant. En effet, la solution en contrainte ne permet pas de garantir que le vecteur–contrainte soit nul point par point sur le bord de la plaque mais assure la nullité du torseur résultant sur chaque élément du bord. Le principe de Saint–Venant indique alors que la solution trouvée est satisfaisante assez loin du bord, ce qui est assuré dans presque toute la pièce dans le cas d'un disque aplati tel que

$$\frac{h}{L} \ll 1$$

où L est la plus petite des deux dimensions caractéristiques de la base de la plaque.

11.2.7 Comparaison avec un modèle numérique

Le problème peut aussi être résolu de manière numérique pour des valeurs particulières des caractéristiques du composant, par exemple grâce à la méthode des éléments finis. La déformée et le champ de contraintes obtenus numériquement pour une plaque à bord circulaire sont donnés sur la figure 11.5 dans le cas d'un disque bilame constitué d'une couche d'invar (alliage de fer et de nickel) et d'une couche de laiton d'épaisseur identique. Le bilame a été chauffé de 100°C part rapport à la température ambiante, température à laquelle le bilame est un disque parfait sans contraintes internes.
Commenter la qualité de la solution trouvée précédemment.

Le champ de contraintes observé semble effectivement indépendant de X_1, sauf près du bord libre $X_1 = L$. Les profils semblent linéaires dans chaque couche.
La méthode proposée ne permet pas de préciser l'effet de bord visible sur la simulation numérique. On voit que, près du bord, l'invariance des contraintes vis–à–vis de r n'est plus de mise. On montre en fait que les contraintes σ_{33} et σ_{13} se développent et présentent une singularité au point où l'interface rencontre le bord (Freund and Suresh, 2003).

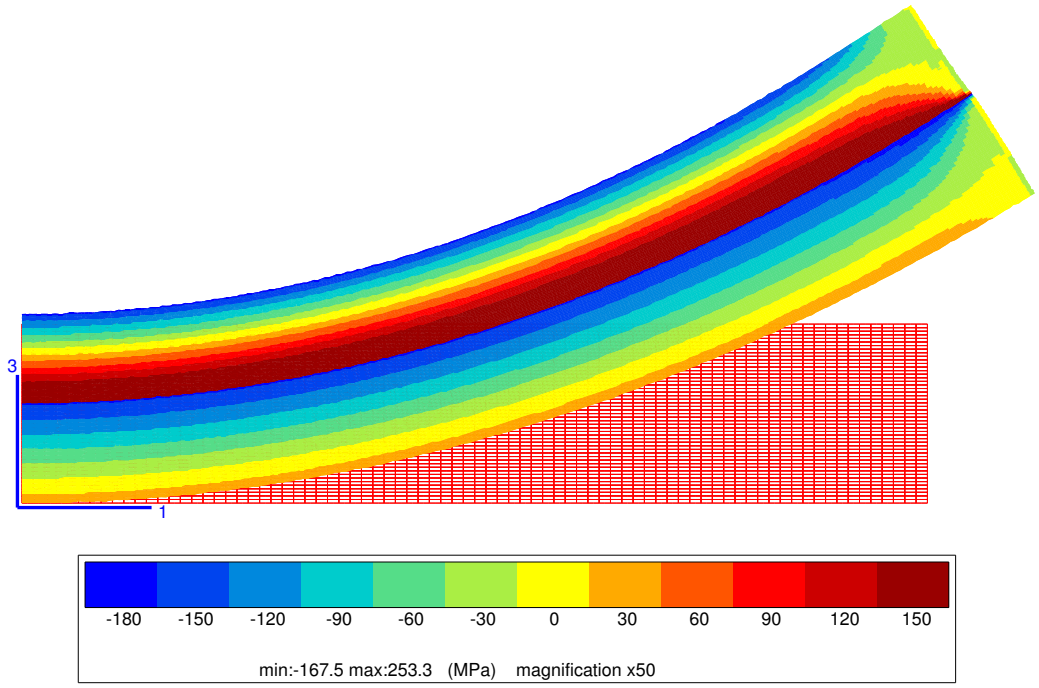


FIG. 11.5 – Etats initial et déformé (fortement amplifié) d'une section $X_1 \geq 0, X_3$ d'un bilame constitué d'une couche d'invar (haut) et d'une couche de laiton (bas) de même épaisseur. Le champ de contrainte σ_{11} dans le bilame est donné sous forme d'isovaleurs dont le code de couleur est fourni.

11.2.8 Résolution du système

La solution établie dans la partie précédente ne dépend plus que de deux paramètres, solutions du système linéaire mis en évidence au paragraphe 11.2.6. La solution de ce système est donnée ici explicitement :

$$A = 6\frac{M_f h_f}{M_s h_s^2}(\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0)(1 + \frac{h_f}{h_s})\Delta^{-1} \tag{11.55}$$

$$\Delta = 1 + 4\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s} + 6\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f^2}{h_s^2} + 4\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f^3}{h_s^3} + \frac{M_f^2}{M_s^2}\frac{h_f^4}{h_s^4} \tag{11.56}$$

$$C = \left(\alpha_s + 4\alpha_f\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s} + 3(\alpha_s+\alpha_f)\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f^2}{h_s^2} + 4\alpha_s\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f^3}{h_s^3} + \alpha_f\frac{M_f^2}{M_s^2}\frac{h_f^4}{h_s^4}\right)(T-T_0)\Delta^{-1} \tag{11.57}$$

On ne demande pas d'établir ces résultats.
Plusieurs applications sont envisagées dans la suite concernant les bilames et les couches minces sur un substrat, configuration fréquente en microélectronique.

11.2.9 Bilame de laiton et d'invar

On considère, comme au paragraphe 11.2.7, un bicouche constitué d'une couche inférieure en laiton et d'une couche supérieure en invar. L'invar est un alliage de fer et de nickel aux propriétés remarquables élaboré par le métallurgiste Guillaume en 1897 (35–38% de nickel en poids, cf. (Béranger et al., 1996)). Il possède le coefficient de dilatation le plus faible parmi les métaux et alliages industriels, près de 20 fois plus faible que le fer et 10 fois plus faible que le nickel purs, à température ambiante. En outre, son coefficient de dilatation varie peu sur une large gamme de température (jusqu'à 100 à 200°C selon les compositions). Pour ces raisons, l'invar est utilisé comme matériau de structure des méthaniers géants qui sillonnent les mers avec leur cargaison de gaz cryogénique. Il est aussi utilisé dans les bilames métalliques souvent en association avec le laiton. Pour construire un bilame, on associe un métal à faible coefficient de dilatation avec un métal à fort coefficient de dilatation.
On considère ici un tel bilame de laiton et d'invar dont les caractéristiques thermoélastiques sont données dans le tableau 11.1 et supposées ne pas varier avec la température dans le domaine de température considéré. La géométrie étudiée est telle que $h_s = h_f = h/2$. Comme les résultats en contraintes et déformations ne dépendent pas explicitement des valeurs de h_f et h_s mais seulement du rapport de ces longueurs, on ne donne pas ici l'épaisseur réelle du composant. Le bilame, initialement dans son état naturel, est soumis à un écart de température $T-T_0 = 100$°C.

Vérifier que les conditions permettant de respecter le contexte infinitésimal sont remplies.
Tracer les profils de déplacements u_1/h et u_3/h de la ligne $X = 2 = X_3 = 0$ en fonction de la distance à l'origine X_1/h.
Tracer de même les profils de déformations ε_{11} et ε_{33}, d'une part, et de contrainte σ_{11}, d'autre part, le long de l'axe $X_1 = X_2 = 0$, en fonction de la cote relative X_3/h.
Pour expliciter les fonctions en jeu, on tirera profit du fait que dans le cas du laiton et de l'invar :

$$\frac{M_f}{M_s} = 2$$

Indiquer enfin l'endroit du bilame où la contrainte est la plus forte. Calculer la valeur numérique de cette contrainte maximale.
Donner l'expression de l'écart de température pour lequel la plasticité peut apparaître dans le laiton supposé obéir à un critère de plasticité de Tresca avec une limite d'élasticité σ_0 en traction. On suppose que l'invar garde un comportement purement élastique.

Dans le cas particulier du couple laiton/invar, on a

$$\Delta = 33, \quad A = \frac{8}{11}(\alpha_f - \alpha_s)\frac{T-T_0}{h_s}, \quad C = \frac{T-T_0}{11}(5\alpha_s + 6\alpha_f)$$

Remarquer que, dans le cas présent, $T - T_0 > 0 \Longrightarrow C > 0$, $A < 0$.
Pour tester la validité du contexte infinitésimal, on calcule le gradient du champ de déplacement

déterminé au paragraphe 11.2.4 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = AX_3 + C, \quad \frac{\partial u_1}{\partial X_3} = AX_1, \quad \frac{\partial u_3}{\partial X_1} = -AX_1$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial X_3} = -\frac{2\nu}{1-\nu}(AX_3 + C) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0)$$

Des conditions suffisantes pour le respect du contexte infinitésimal sont :

$$|\alpha_{s,f}(T - T_0)| \ll 1 \Longrightarrow |AX_3| \leq |Ah| \ll 1, |C| \ll 1$$

$$|(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0)|\frac{L}{h_s} \ll 1 \Longrightarrow |AX_1| \leq |AL| \ll 1$$

La première condition est remplie dans le cas du bilame laiton/invar étudié. La deuxième condition donne une limite supérieure à la plus grande dimension caractéristique du bicouche en fonction de son épaisseur.
A l'interface, i.e. en $X_3 = 0$, les déplacements valent :

$$u_1 = CX_1, \quad u_3 = -\frac{A}{2}X_1^2$$

Le déplacement radial est linéaire avec une pente positive tandis que le déplacement axial imprime au plan $X_3 = 0$ une courbure positive $-A$. Suffisamment loin du bord du disque et *a fortiori* sur l'axe $X_1 = X_2 = 0$, les déformations sont les suivantes :

$$\varepsilon_{11} = AX_3 + C, \quad \varepsilon_{33}^{f,s} = -\frac{2\nu_{f,s}}{1-\nu_{f,s}}(AX_3 + C) + \frac{1+\nu_{f,s}}{1-\nu_{f,s}}\alpha_{f,s}(T - T_0)$$

Quant aux contraintes, on trouve :

$$\frac{\sigma_{11}^f}{2M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11}(8\frac{X_3}{h_s} - 5), \quad \frac{\sigma_{11}^s}{M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11}(8\frac{X_3}{h_s} + 6)$$

Les profils de déplacements, déformations et contraintes dans le bilame laiton/invar considéré sont données sur la figure 11.6. Remarquer que la base du composant s'allonge radialement et se courbe avec la concavité tournée vers le haut. La déformation ε_{11} est linéaire sur toute l'épaisseur du composant et continue à l'interface. Au contraire, la composante ε_{33} et les contraintes présentent une discontinuité au passage de l'interface.
Le profil de contraintes étant affine par morceaux, il suffit, pour trouver la contrainte maximale, de calculer la valeur de la contrainte successivement en $X_3/h_s = -1$; $X_3/h_s = 0^-$; $X_3/h_s = 0^+$; $X_3/h_s = 1$, ce qui donne :

$$\frac{\sigma_{11}}{M_s(T - T_0)(\alpha_s - \alpha_f)} = \frac{2}{11}; \quad -\frac{6}{11}; \quad \frac{10}{11}; \quad -\frac{6}{11}$$

La contrainte est donc maximale à l'interface du côté de l'invar. Noter la valeur obtenue de 253 MPa calculée à cet endroit, qui risque fort d'outrepasser la limite d'élasticité de l'invar. Il est donc probable que, porté à cette température, le bilame sera le siège de déformations plastiques et qu'une courbure résiduelle plastique persistera après le retour à la température ambiante.

matériau	E (GPa)	ν	α ($\times 10^{-6}\mathrm{K}^{-1}$)
aluminium	70	0.33	23
invar	210	0.33	1.2
laiton	103	0.34	19
silicium	150	0.17	3

TAB. 11.1 – Propriétés thermoélastiques à 20°C de quelques matériaux.

11.3 Mécanique des microsystèmes

On revient d'abord au cas général d'un bicouche constitué de deux matériaux quelconques, avant d'aborder deux applications concernant la micromécanique des microstèmes.

11.3.1 La formule de Stoney

Donner l'expression simplifiée de la courbure c que prend le composant quand il est chauffé, dans le cas d'un film mince sur un substrat, c'est–à–dire lorsque

$$\frac{h_f}{h_s} \ll 1 \tag{11.58}$$

Pour cela, on développera les expressions (11.55) à (11.57) au premier ordre.
Indiquer quelle condition supplémentaire sur les caractéristiques du bicouche conduit à l'expression suivante donnant la courbure c qu'adopte le bicouche lorsqu'il est chauffé :

$$c = \frac{6M_f h_f}{M_s h_s^2}(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \tag{11.59}$$

C'est la formule dite de Stoney (Stoney, 1909) constamment utilisée dans la recherche/développement en microsystèmes et microélectronique (MEMS[3]) pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 11.3.4.

L'expression (11.47) du déplacement u_3 montre une dépendance en X_1^2 responsable de la courbure que prennent les surfaces d'équation $X_3 = Cste$. La courbure, par rapport à chacun des axes X_1 et X_2, est donnée par le double du coefficient de cette dépendance quadratique :

$$c = -A \tag{11.60}$$

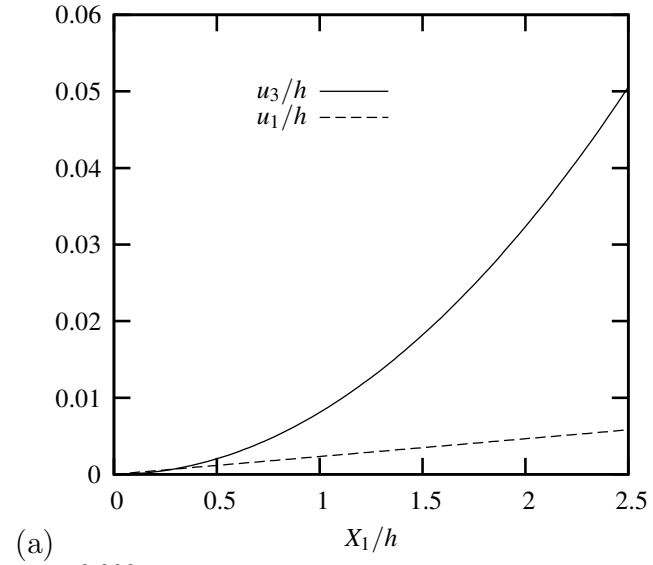
Chaque surface déformée présente une double courbure et prend donc la forme de calotte sphérique de rayon $-1/A$, dans le contexte infinitésimal.
Le développement au premier ordre en h_f/h_s de l'expression (11.55) conduit à l'état de courbure suivant :

$$c \simeq 6\frac{M_f h_f}{M_s h_s^2}(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0)(1 + \frac{h_f}{h_s})(1 + 4\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s})^{-1} \tag{11.61}$$

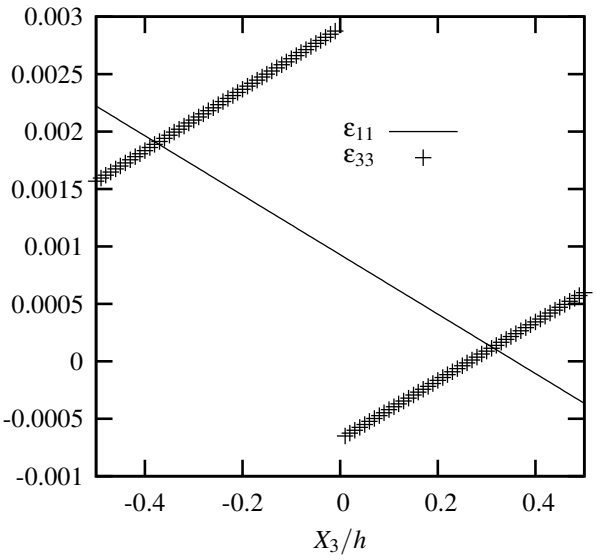
La formule de Stoney est alors obtenue lorsque

$$M_f h_f \ll M_s h_s \tag{11.62}$$

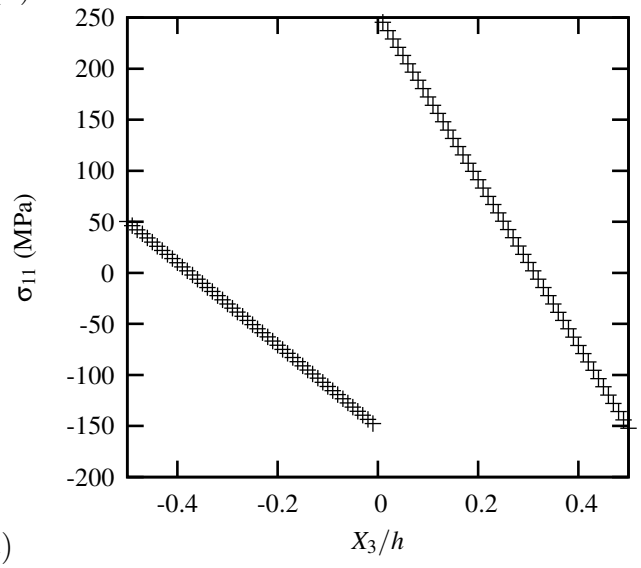
[3] Micro–Electro-Mechanical Systems



(a)



(b)



(c)

FIG. 11.6 – Bilame moitié laiton, moitié invar chauffé de 100°C : (a) déplacements de l'interface du bicouche $X_3 = 0$, (b) déformations et (c) contraintes le long de l'axe $X_1 = X_2 = 0$.

Cette condition combine les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques des couches.

11.3.2 Contraintes dans un film mince sur un substrat

En se plaçant dans les hypothèses de Stoney, i.e. lorsque la condition (11.58) et la condition supplémentaire requise au paragraphe précédent sont satisfaites, établir la forme simplifiée des contraintes dans le substrat et le film.

Calculer alors les contraintes moyennes dans le film et dans le substrat :

$$\bar{\sigma}^s_{11} = \frac{1}{h_s}\int_{-h_s}^{0} \sigma^s_{11}\, dX_3, \quad \bar{\sigma}^f_{11} = \frac{1}{h_f}\int_{0}^{h_f} \sigma^f_{11}\, dX_3 \tag{11.63}$$

Vérifier que l'équilibre requis de ces contraintes moyennes est satisfait par les expressions trouvées.

Montrer que, dans tout bicouche constitué d'un substrat et d'un film mince, le plan neutre, associé à une contrainte nulle, se situe toujours dans le substrat, à une distance à l'interface égale aux deux tiers de l'épaisseur du substrat, c'est–à–dire en

$$X_3 = -\frac{2h_s}{3} \tag{11.64}$$

Les conditions (11.58) et (11.62) étant requises, on peut adopter l'expression (11.59) pour A et la suivante pour C en développant (11.57) au premier ordre :

$$C \simeq (\alpha_s + 4\alpha_f \frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s})(1 - 4\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s})(T - T_0) \simeq (\alpha_s + 4(\alpha_f - \alpha_s)\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s})(T - T_0) \tag{11.65}$$

Les contraintes sont données par les relations (11.39) dans chaque couche. Avec les développements limités précédents, les contraintes dans le film valent :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^f_{11}}{M_f} &= AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0) \simeq (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0)(1 - 4\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s} - 6\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s^2}X_3) \\ &\simeq (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \end{aligned} \tag{11.66}$$

Le premier terme, constant, domine dans le film :

$$\bar{\sigma}^f_{11} = \bar{\sigma}^f_{22} \simeq M_f(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \tag{11.67}$$

C'est une relation remarquable puisqu'elle ne dépend que des propriétés thermoélastiques du film et du désaccord de dilatation entre le film et le substrat.

Dans le substrat, la contrainte est d'un ordre de grandeur inférieure :

$$\frac{\sigma^s_{11}}{M_s} = AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0) \simeq (\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0)\frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s}(6\frac{X_3}{h_s} + 4) \tag{11.68}$$

$$\frac{\bar{\sigma}^s_{11}}{M_s} \simeq \frac{M_f}{M_s}\frac{h_f}{h_s}(\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0) \tag{11.69}$$

La contrainte moyenne sur tout le volume du bicouche est nulle, comme il se doit, en l'absence de chargement extérieur[4] :

$$h_s\bar{\sigma}^s_{11} + h_f\bar{\sigma}^f_{11} = 0 \tag{11.70}$$

Au vu des contraintes quasi–constantes régnant dans le film mince, la fibre neutre est à rechercher dans le substrat :

$$\sigma^s_{11} = 0 \Longrightarrow X_3 \simeq -\frac{2h_s}{3} \tag{11.71}$$

d'après la relation (11.68). La fibre neutre est donc située aux deux tiers en dessous de l'interface, indépendamment des propriétés thermoélastiques du bilame, respectant toutefois les hypothèses de Stoney.

11.3.3 Contraintes résiduelles dans un dépôt d'aluminium sur un substrat de silicium

Un wafer de silicium est constitué d'un substrat monocristallin de silicium sur lequel les différentes couches métalliques ou autres sont déposées pour fabriquer des composants électroniques. On étudie ici les contraintes qui se développent dans un film d'aluminium d'1 μm d'épaisseur déposé sur un substrat de silicium de 500 μm d'épaisseur. Le dépôt s'effectue à une température de 50°C. A la fin du dépôt, le substrat et le film sont supposés être dans leur état naturel. A cette température de 50°C, le composant est un disque parfait de rayon égal à 200 mm. Il est ensuite refroidi jusqu'à la température ambiante de 20°C.
Calculer successivement la courbure résiduelle du composant, et les contraintes moyennes dans le film et le substrat. Commenter.
La contrainte trouvée dans le film est relativement proche de la limite d'élasticité de l'aluminium massif. On fait remarquer toutefois que les métaux sous forme de films minces, voire nanométriques, ont en général une limite d'élasticité significativement plus importante qu'à l'état massif.
On traitera le silicium comme un matériau isotrope avec les propriétés indiquées dans le tableau 11.1, propriétés supposées constantes dans le domaine de température concerné. On y trouvera aussi les autres caractéristiques des matériaux nécessaires au calcul, supposées indépendantes de la température.

Les hypothèses de Stoney sont remplies dans le cas du composant considéré :

$$\frac{h_f}{h_s} = 2.10^{-3}, \quad \frac{M_f h_f}{M_s h_s} = 1.1\,10^{-3} \tag{11.72}$$

de sorte que les formules établies dans ces conditions peuvent être utilisées. La courbure est donnée par la relation (11.59) :

$$c = 8.3\,10^{-3}\mathrm{m}^{-1}, \quad \frac{1}{c} = 120\mathrm{m} \tag{11.73}$$

La courbure est positive, ce qui correspond à une interface de concavité tournée vers le haut. Le rayon de courbure de 120 m est infiniment plus grand que la taille du composant. Cette courbure est toutefois tout à fait mesurable, par exemple grâce à des méthodes optiques dont la résolution est typiquement de 15 km (Freund and Suresh, 2003). La mesure de la courbure du

[4] C'est pourquoi on parle de contraintes résiduelles ou internes.

composant permet d'accéder, grâce aux calculs précédents, à une estimation de la contrainte dans le film. La formule (11.67) donne :

$$\sigma_{11}^f = \sigma_{22}^f = 63\text{MPa} \tag{11.74}$$

Il s'agit d'une contrainte de traction. En effet, le coefficient de dilatation de l'aluminium est plus élevé que celui du silicium et l'écart entre la température d'élaboration et la température ambiante est de -30°C. La contrainte moyenne dans le substrat n'est que de -0.13 MPa en raison de sa grande épaisseur. La limite d'élasticité de l'aluminium massif et de ses alliages varie de 50 à 150 MPa. Toutefois, elle est beaucoup plus élevée dans les films minces en raison de leur microstructure spécifique.

11.3.4 Contraintes d'épitaxie

Les déformations d'origine thermique ne sont pas les seules causes du développement de contraintes au sein d'un revêtement sur un substrat. En microélectronique, les couches déposées sont souvent en épitaxie avec le substrat, c'est–à–dire que les rangées d'atomes du substrat se prolongent exactement en les rangées atomiques de la couche. C'est le cas par exemple des dépôts de silicium–germanium sur un substrat de silicium monocristallin. Toutefois, le paramètre cristallin[5] $a_{SiGe} = 0.5476$ nm du silicium–germanium (pour 80% de silicium et 20% de germanium dans le composé binaire) est légèrement plus grand que le paramètre du silicium $a_{Si} = 0.5431$ nm en raison de l'implantation des atomes de germanium. Pour que les rangées atomiques se prolongent du substrat au film, il faut donc que les plans atomiques du film se rapprochent légèrement. Les contraintes naissent justement de l'écart entre la valeur du paramètre cristallin *in situ* et la valeur d'équilibre sans contrainte (à savoir a_{Si} pour le silicium et a_{SiGe} pour le silicium–germanium). Si le film n'était pas contraint de croître en épitaxie avec le substrat, il se déformerait librement de la quantité :

$$\varepsilon_{11}^{\star f} = \varepsilon_{22}^{\star f} = \varepsilon_{33}^{\star f} = \frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \tag{11.75}$$

par rapport au substrat de silicium. La déformation totale dans le film est donc la somme d'une déformation élastique et de la déformation libre d'épitaxie :

$$\varepsilon_{11}^f = \varepsilon_{11}^{ef} + \varepsilon_{11}^{\star f} \tag{11.76}$$

Le substrat de silicium, quant à lui, est tel que

$$\varepsilon_{11}^{\star s} = 0 \tag{11.77}$$

En utilisant une analogie avec le problème précédent des contraintes d'origine thermique dans un film mince sur un substrat, calculer les contraintes dans le film et la courbure du composant. Pour le silicium–germanium considéré, on prendra $M_f = 170$ GPa. Les caractéristiques géométriques du dépôt sont : $h_f = 100$ nm, $h_s = 1$ mm.

La déformation libre d'épitaxie s'apparente à la dilatation thermique et l'on a l'analogie suivante :

$$\frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \equiv \alpha_f (T - T_0), \quad \text{et} \quad 0 \equiv \alpha_s (T - T_0)$$

Ce désaccord paramétrique vaut 0.83%. L'épitaxie entre le film et le substrat oblige le film à accommoder élastiquement la déformation imposée par le substrat. Le contexte est tout à fait

[5] Le paramètre cristallin est la plus petite distance inter-réticulaire, c'est–à–dire entre plans atomiques.

semblable au cas du film mince siège de déformations thermiques sur un substrat. Les formules (11.59) et (11.67) s'appliquent de la façon suivante :

$$\bar{\sigma}^f_{11} = \bar{\sigma}^f_{\theta\theta} \simeq M_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -1403\text{MPa}$$

$$c = \frac{6M_f}{M_s h_s^2} h_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -5.6310^{-3}\text{m}^{-1}$$

ce qui donne un rayon de courbure de -177 m. Noter les contraintes considérables de compression qui règnent dans le film après élaboration, dues à des déformations élastiques proches du %. Il y a en fait si peu de défauts cristallins dans ces couches nanométriques que de telles contraintes peuvent exister sans provoquer de déformation plastique.

Chapitre 12

Réservoirs sous pression

12.1 Statique du réservoir sous pression

Un tube homogène de longueur courante l, de rayon interne r_i, de rayon externe r_e et d'épaisseur $e = r_e - r_i$ est soumis à une pression interne p_i et à une pression externe p_e (figure 12.1). Il est d'autre part soumis à une densité surfacique homogène d'effort F_S (algébrique) axial (selon z) sur la surface $z = L$, et $-F_S$ en $z = 0$. On cherche à obtenir des informations sur les contraintes qui règnent dans le tube, sans tenir compte de la nature du matériau dont il est constitué. Il s'agit donc d'une analyse purement statique du problème du réservoir sous pression.

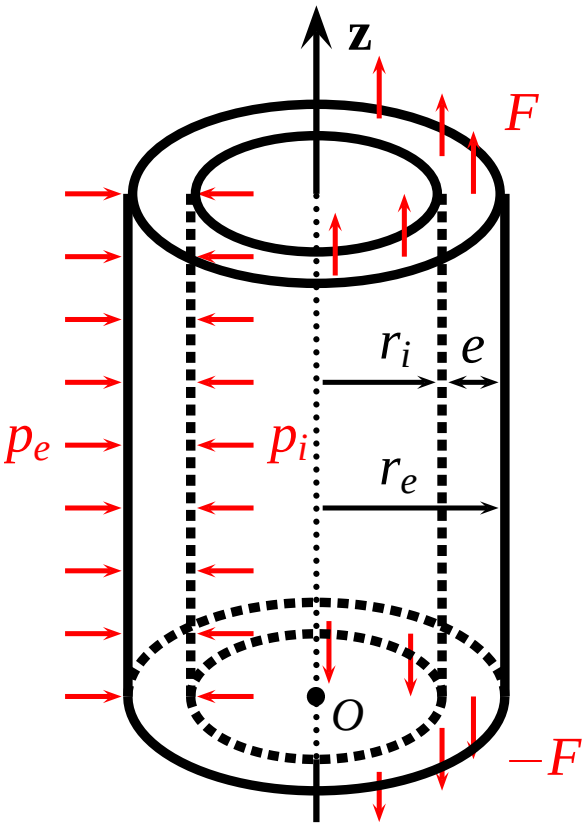


FIG. 12.1 – Tube sous pression interne p_i, externe p_e et chargement axial F_S.

12.1.1 Conditions à la frontière du tube

Définir les conditions de chargement en tout point de la frontière du tube. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$. On ne tient pas compte des forces de gravitation.

On travaille sur la configuration actuelle sur laquelle les efforts sont appliqués. Le problème est posé en effort uniquement :

- En $z = l$, le vecteur contrainte est égal à la densité d'effort imposée :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d = F_S \underline{\boldsymbol{e}}_z = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_z = \begin{bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

  On en déduit que, $\forall r, \theta$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z = l) = \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = l) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z = l) = F_S \tag{12.2}$$

- En $z = 0$, le vecteur contrainte est égal à la densité d'effort imposée :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d = -F_S \underline{\boldsymbol{e}}_z = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.(-\underline{\boldsymbol{e}}_z) = \begin{bmatrix} -\sigma_{rz} \\ -\sigma_{\theta z} \\ -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{12.3}$$

  On en déduit que, $\forall r, \theta$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z = 0) = \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z = 0) = F_S \tag{12.4}$$

  Remarquer que σ_{zz} prend la même valeur aux extrémités.

- En $r = r_e$, le vecteur normal $\underline{\boldsymbol{n}}$ sortant est $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ et l'effort appliqué est $-p_e \underline{\boldsymbol{e}}_r$:

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d = -p_e \, \underline{\boldsymbol{e}}_r = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_r = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta r} \\ \sigma_{zr} \end{bmatrix} \tag{12.5}$$

  On en déduit que, $\forall \theta, z$,

$$\sigma_{rr}(r = r_e, \theta, z) = -p_e, \quad \sigma_{\theta r}(r = r_e, \theta, z) = \sigma_{zr}(r = r_e, \theta, z) = 0 \tag{12.6}$$

  On peut aussi obtenir le résultat précédent en raisonnant de la manière suivante. La pression appliquée l'est en général à l'aide d'un fluide où règne la pression p_e. La condition d'équilibre à l'interface fluide/solide est donc une condition de saut :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{fluide} + \underline{\boldsymbol{t}}^{tube} = [\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0 = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{fluide} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{tube}).\underline{\boldsymbol{n}} = (-p_e \underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}).\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{12.7}$$

  ce qui est conforme au résultat (12.6).

- En $r = r_i$, le vecteur normal $\underline{\boldsymbol{n}}$ sortant est $-\underline{\boldsymbol{e}}_r$ et l'effort appliqué est $p_i \underline{\boldsymbol{e}}_r$:

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}^d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.(-\underline{\boldsymbol{e}}_r) = p_i \, \underline{\boldsymbol{e}}^r = \begin{bmatrix} -\sigma_{rr} \\ -\sigma_{\theta r} \\ -\sigma_{zr} \end{bmatrix} \tag{12.8}$$

  On en déduit que, $\forall \theta, z$,

$$\sigma_{rr}(r = r_i, \theta, z) = -p_i, \quad \sigma_{\theta r}(r = r_i, \theta, z) = \sigma_{zr}(r = r_i, \theta, z) = 0 \tag{12.9}$$

  On peut aussi obtenir le résultat précédent en raisonnant de la manière suivante. La pression appliquée l'est en général à l'aide d'un fluide où règne la pression p_i. La condition d'équilibre à l'interface fluide/solide est donc une condition de saut :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{fluide} + \underline{\boldsymbol{t}}^{tube} = [\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0 = (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{fluide} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{tube}).\underline{\boldsymbol{n}} = (-p_i \underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}).(-\underline{\boldsymbol{e}}_r) \tag{12.10}$$

  ce qui est conforme au résultat (12.9).

12.1.2 Equilibre des efforts appliqués

Un préalable à toute recherche de solution au problème de statique posé est de vérifier que les efforts appliqués sont compatibles avec l'équilibre du tube. Faire cette vérification.

Les efforts extérieurs sont compatibles avec l'équilibre si leur torseur est nul. Le torseur d'un système de forces est le triplet $[O, \underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{M}}]$ composé de la résultante de l'ensemble des forces appliquées $\underline{\boldsymbol{R}}$ et du moment résultant $\underline{\boldsymbol{M}}$ de ces forces calculé par rapport au point O. On comptabilise les forces ponctuelles $\underline{\boldsymbol{F}}_i$, la densité linéique de forces $\underline{\boldsymbol{F}}_L$, la densité surfacique de forces $\underline{\boldsymbol{F}}_S$ et la densité volumique de forces $\underline{\boldsymbol{F}}_V$. On évalue cette résultante dans le cas du tube pour lequel seules des densités surfaciques d'efforts ont été envisagées ($\underline{\boldsymbol{F}}_i = 0, \underline{\boldsymbol{F}}_L = 0, \underline{\boldsymbol{F}}_V = 0$) :

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \underline{\boldsymbol{F}}_i + \int_L \underline{\boldsymbol{F}}_L\, dl + \int_S \underline{\boldsymbol{F}}_S\, ds + \int_V \underline{\boldsymbol{F}}_V\, dv \tag{12.11}$$

$$= \underbrace{\int_{z=l} F_S \underline{\boldsymbol{e}}_z\, ds + \int_{z=0} (-F_S)\underline{\boldsymbol{e}}_z\, ds}_{0} + \underbrace{\int_{r=r_e} (-p_e)\underline{\boldsymbol{e}}_r\, r_e d\theta dz}_{0} + \underbrace{\int_{r=r_i} p_i \underline{\boldsymbol{e}}_r\, r_i d\theta dz}_{0} \tag{12.12}$$

$$= 0$$

Le moment résultant par rapport au point 0 vaut quant à lui :

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \underline{\boldsymbol{OM}}_i \wedge \underline{\boldsymbol{F}}_i + \int_L \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge \underline{\boldsymbol{F}}_L\, dl + \int_S \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge \underline{\boldsymbol{F}}_S\, ds + \int_V \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge \underline{\boldsymbol{F}}_V\, dv \tag{12.13}$$

$$= \int_{z=l} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge F_S \underline{\boldsymbol{e}}_z\, r dr d\theta + \int_{z=0} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge (-F_S)\underline{\boldsymbol{e}}_z\, r dr d\theta$$
$$+ \int_{r=r_e} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge (-p_e)\underline{\boldsymbol{e}}_r\, r_e d\theta dz + \int_{r=r_i} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge p_i \underline{\boldsymbol{e}}_r\, r_i d\theta dz$$
$$= \underbrace{\underbrace{\left(\int_{z=l} \underline{\boldsymbol{OM}}\, r dr d\theta\right)}_{\parallel \underline{\boldsymbol{e}}_z} \wedge F_S \underline{\boldsymbol{e}}_z + \underbrace{\left(\int_{z=0} \underline{\boldsymbol{OM}}\, r dr d\theta\right)}_{=0} \wedge (-F_S)\underline{\boldsymbol{e}}_z}_{0}$$
$$+ \left(\int z dz\right) \underbrace{\left(\int (-p_e)\underline{\boldsymbol{e}}_z \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_r\, r_e d\theta\right)}_{\propto \int \underline{\boldsymbol{e}}_\theta\, d\theta = 0} + \left(\int z dz\right)\left(\int p_i \underline{\boldsymbol{e}}_z \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_r\, r_i d\theta\right) \tag{12.14}$$

$$= 0 \tag{12.15}$$

Le résultat est toujours valable si l'on calcule le moment par rapport à un autre point O' puisque les torseurs $[O, \underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{M}}]$ et $[O', \underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{M}}']$ sont alors reliés par

$$[O, \underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{M}}] = [O', \underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{M}} + \underline{\boldsymbol{O'O}} \wedge \underline{\boldsymbol{R}}] \tag{12.16}$$

Finalement, les efforts indiqués sont bel et bien statiquement admissibles.

12.1.3 Considérations de symétrie

Est–il possible de réduire la dépendance des composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes vis–à–vis des variables (r, θ, z) ?

Des restrictions dues aux symétries en jeu dans le problème seront envisageables si les conditions de symétrie portent simultanément sur :

- **la géométrie.** Le tube présente une symétrie de révolution autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$, ainsi qu'une invariance par translation le long de $\underline{\boldsymbol{e}}_z$.
- **le chargement.** Le chargement appliqué aux surfaces extérieure et intérieure, ainsi qu'aux extrémités, présente une symétrie de révolution autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$. Le chargement appliqué aux surfaces extérieure et intérieure présente une invariance par translation le long de $\underline{\boldsymbol{e}}_z$.
- **le matériau.** Le tube est supposé homogène, c'est–à–dire constitué du même matériau en tout point. On fait par ailleurs l'hypothèse ici que les propriétés mécaniques du matériau sont invariantes par rotation autour de $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ et par symétrie par rapport à tout plan perpendiculaire à $\underline{\boldsymbol{e}}_z$. Dans le cas contraire, les simplifications qui font suivre ne sont pas licites et le problème devient sensiblement plus complexe.

Il résulte de ces considérations une invariance attendue du champ des contraintes par rapport aux variables θ et z. On cherche donc un tenseur des contraintes $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(r)$.

12.1.4 Etablissement de quelques informations sur les contraintes au sein du tube

Pousser au maximum la démarche de détermination des contraintes au sein du tube. On commencera par décompter les équations et les inconnues et à en tirer la conséquence qui s'impose. A l'aide des conditions d'équilibre et des conditions à la frontière, réduire le nombre de composantes *a priori* non nulles pour le tenseur des contraintes. Evaluer enfin la contrainte moyenne le long d'un segment $r \in [r_i, r_e]$ à θ et z donnés :

$$< \sigma_{\theta\theta} >:= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}\, dr \tag{12.17}$$

En l'absence de forces de volume, les équations d'équilibre pour un champ de contraintes ne dépendant que de la variable r se réduisent à

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{12.18}$$

$$\frac{d\sigma_{\theta r}}{dr} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} = 0 \tag{12.19}$$

$$\frac{d\sigma_{zr}}{dr} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0 \tag{12.20}$$

On cherche six composantes de contraintes satisfaisant les trois équations précédentes. On ne peut donc pas espérer *a priori* les déterminer toutes sans plus d'informations (en particulier sur le comportement du matériau). Toutefois, on va voir que de nombreuses informations peuvent être obtenues sur ces contraintes. Remarquer que les composantes σ_{zz} et $\sigma_{\theta z}$ n'apparaissent pas dans les équations (12.18) à (12.20). Voici les informations que l'on peut tirer des équations d'équilibre et des conditions aux limites :

- La composante σ_{zz} ne dépend pas de z et vaut F_S en $z = 0$ et $z = l$ d'après (12.3) et (12.2). Par conséquent, le champ de contrainte axiale est homogène dans le tube et vaut, $\forall r, \theta, z$,

$$\sigma_{zz} = F_S \tag{12.21}$$

- La composante $\sigma_{\theta z}$ ne dépend pas de z et s'annule en $z = 0$ et $z = l$ d'après (12.3) et (12.2). Par conséquent, en tout point du tube,

$$\sigma_{\theta z} = 0 \tag{12.22}$$

- Les composantes $\sigma_{r\theta}$ et σ_{rz} s'obtiennent en intégrant les équations (12.19) et (12.20) :

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \sigma_{rz} = \frac{\beta}{r} \tag{12.23}$$

  Les constantes d'intégration α et β s'obtiennent en considérant les conditions aux limites (12.6) et (12.9) en $r = r_e$ et $r = r_i$, où ces composantes s'annulent. Par conséquent, $\forall r, \theta, z$,

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \tag{12.24}$$

- La composante σ_{rr} passe de $-p_i$ en $r = r_i$ à $-p_e$ en $r = r_e$. On ne pourra pas en dire plus avant de donner des spécifications plus précises sur le comportement du matériau.

Finalement, le tenseur des contraintes a la forme suivante :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{rr}\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \sigma_{\theta\theta}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \sigma_{zz}\underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{12.25}$$

Les équations ne permettent pas de déterminer $\sigma_{\theta\theta}$ point par point dans la paroi du tube. Il est cependant possible d'évaluer sa moyenne, en se servant de l'équation d'équilibre (12.19) :

$$\begin{aligned} < \sigma_{\theta\theta} > &= \frac{1}{r_e - r_i}\int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta}\, dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i}\int_{r_i}^{r_e} \left(r\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr}\right) dr = \frac{1}{r_e - r_i}\int_{r_i}^{r_e} \frac{d}{dr}(r\sigma_{rr})\, dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i}\left(r_e\sigma_{rr}(r_e) - r_i\sigma_{rr}(r_i)\right) \end{aligned} \tag{12.26}$$

d'où le résultat remarquable[1]

$$< \sigma_{\theta\theta} >= \frac{p_i r_i - p_e r_e}{r_e - r_i} \tag{12.27}$$

12.1.5 Cas d'un tube fermé par une calotte de forme quelconque

Le réservoir cylindrique est fermé à une extrémité par une calotte de forme absolument quelconque schématisée sur la figure 12.2. La calotte est soumise aux efforts suivants :

- La surface intérieure $\mathcal{S}_i$ subit la pression p_i du fluide intérieur. Soit $\underline{\boldsymbol{n}}_i$ le champ de normales sortantes (*a priori* distinctes de $-\underline{\boldsymbol{e}}_r$).

$$\underline{\boldsymbol{t}}^d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}_i = -p_i\,\underline{\boldsymbol{n}}_i \tag{12.28}$$

- La surface extérieure $\mathcal{S}_e$ subit la pression p_e du fluide extérieur. Soit $\underline{\boldsymbol{n}}_e$ le champ de normales sortantes (*a priori* distinctes de $\underline{\boldsymbol{e}}_r$).

$$\underline{\boldsymbol{t}}^d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}_e = -p_e\,\underline{\boldsymbol{n}}_e \tag{12.29}$$

[1] Le résultat (12.27) est appelé *formule des chaudronniers*.

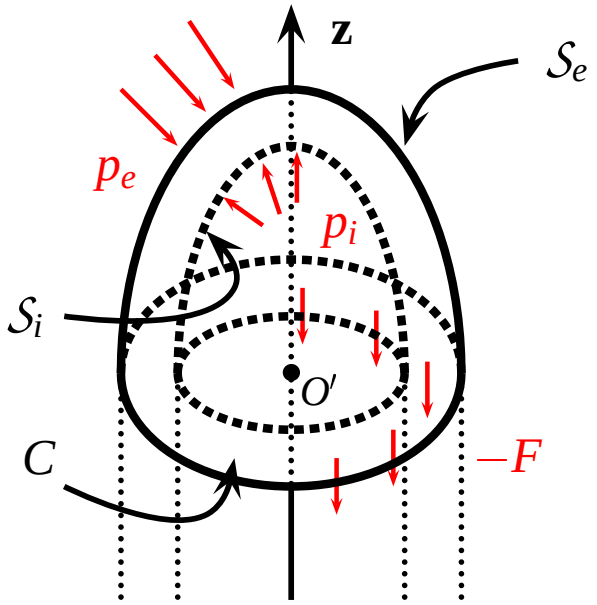


FIG. 12.2 – Calotte de forme quelconque fermant le tube sous pression interne p_i et externe p_e. La couronne C est soumise à la densité surfacique homogène d'effort axial $-F_S\underline{\boldsymbol{e}}_z$.

- La couronne C est soumise à la densité surfacique homogène d'efforts $-F_S\underline{\boldsymbol{e}}_z$:

$$\underline{\boldsymbol{t}}^d = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.(-\underline{\boldsymbol{e}}_z) = -F_S\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{12.30}$$

Etudier les conditions d'équilibre de la calotte.

On calcule d'abord l'effort résultant sur la couronne C :

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{R}}_c &= \int_C \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds = -F_S\int_C \underline{\boldsymbol{e}}_z\,ds \\ &= -F_S\pi(r_e^2 - r_i^2)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{12.31}$$

puis la résultante des efforts s'exerçant sur la surface $\mathcal{S}_i$. Pour cela, on appelle :

$$\partial\Omega_i = \mathcal{S}_i \cup D_i \tag{12.32}$$

où D_i est le disque de centre O' et de rayon r_i (cf. figure 12.2). La surface fermée $\partial\Omega_i$ délimite le volume Ω_i. On calcule alors :

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{R}}_i &= \int_{\mathcal{S}_i} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}_i\,ds = \int_{\mathcal{S}_i} (p_i\underset{\sim}{\mathbf{1}}).(-\underline{\boldsymbol{n}}_i)\,ds \\ &= \int_{\partial\Omega_i} (p_i\underset{\sim}{\mathbf{1}}).(-\underline{\boldsymbol{n}}_i)\,ds - \int_{D_i} (p_i\underset{\sim}{\mathbf{1}}).(-\underline{\boldsymbol{e}}_z)\,ds = \underbrace{\int_{\Omega_i} \mathrm{div}\,(p_i\underset{\sim}{\mathbf{1}})\,dv}_{0} + p_i\int_{D_i}\underline{\boldsymbol{e}}_z\,ds \qquad (12.33)\end{aligned}$$

$$= p_i\pi r_i^2\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{12.34}$$

On a utilisé le théorème de la divergence dans l'équation (12.33) et le fait que le champ $p_i\underset{\sim}{\mathbf{1}}$ est constant sur Ω_i. En effet, le champ de normales sortantes à la surface $\partial\Omega_i$ de Ω_i est $-\underline{\boldsymbol{n}}_i$.
De même, on introduit le volume Ω_e dont la frontière est

$$\partial\Omega_e = \mathcal{S}_e \cup D_e \tag{12.35}$$

où D_e est le disque de centre $0'$ et de rayon r_e. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{R}}_e &= \int_{\mathcal{S}_e} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}_e\, ds = -\int_{\mathcal{S}_e} (p_e \underset{\sim}{\mathbf{1}}).\underline{\boldsymbol{n}}_e\, ds \\
&= -\int_{\partial\Omega_e} (p_e \underset{\sim}{\mathbf{1}}).\underline{\boldsymbol{n}}_e\, ds + \int_{D_e} (p_e \underset{\sim}{\mathbf{1}}).(-\underline{\boldsymbol{e}}_z)\, ds \\
&= -\underbrace{\int_{\Omega_e} \operatorname{div}(p_e \underset{\sim}{\mathbf{1}})\, dv}_{0} + p_e \int_{D_e} (-\underline{\boldsymbol{e}}_z)\, ds \qquad (12.36) \\
&= -p_e \pi r_e^2\, \underline{\boldsymbol{e}}_z \qquad (12.37)
\end{aligned}$$

Le théorème de la divergence a été utilisé à la ligne (12.36).

La calotte est en équilibre si la résultante des forces est nulle :

$$\underline{\boldsymbol{R}}_c + \underline{\boldsymbol{R}}_i + \underline{\boldsymbol{R}}_e = 0 \qquad (12.38)$$

d'où

$$F_S = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \qquad (12.39)$$

L'étape suivante consiste à calculer les moments qui s'appliquent sur la calotte. On commence par le moment par rapport à O' des forces s'exerçant sur $\mathcal{S}_i$:

$$\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_{O'}^{\mathcal{S}_i} = \int_{\mathcal{S}_i} \underline{\boldsymbol{O'M}} \wedge (-p_i \underline{\boldsymbol{n}}_i)\, ds = \int_{\mathcal{S}_i} \underline{\boldsymbol{O'M}} \wedge p_i \underline{\boldsymbol{n}}'\, ds \qquad (12.40)$$

où $\underline{\boldsymbol{n}}' = -\underline{\boldsymbol{n}}_i$. On explicite ensuite le produit vectoriel précédent sous la forme :

$$\begin{aligned}
[\underline{\boldsymbol{O'M}} \wedge \underline{\boldsymbol{n}}'] &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} n_1' \\ n_2' \\ n_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yn_3' - zn_2' \\ zn_1' - xn_3' \\ xn_2' - yn_1' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1' \\ n_2' \\ n_3' \end{bmatrix} = [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{n}}'] \qquad (12.41)
\end{aligned}$$

où x, y, z et n_i', n_2', n_3' sont respectivement les coordonnées cartésiennes du point M et du vecteur $\underline{\boldsymbol{n}}'$. On a introduit le tenseur antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. On vérifiera que le champ de tenseurs antisymétriques $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ a la propriété suivante :

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = 0 \qquad (12.42)$$

En conséquence, l'équation (12.40) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_{O'}^{\mathcal{S}_i} &= p_i \int_{\mathcal{S}_i} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{n}}'\, ds \\
&= p_i \int_{\partial\Omega_i} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{n}}'\, ds - p_i \int_{D_i} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.(-\underline{\boldsymbol{e}}_z)\, ds = p_i \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\, dv + p_i \int_{D_i} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_z\, ds \qquad (12.43) \\
&= p_i \int_{D_i} \underline{\boldsymbol{O'M}} \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_z\, ds = p_i \int_{D_i} r\, \underline{\boldsymbol{e}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_z\, ds = 0 \qquad (12.44)
\end{aligned}$$

Le théorème de la divergence a été utilisé à la ligne (12.43). Un calcul tout à fait analogue montre que

$$\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_{O'}^{\mathcal{S}_e} = 0 \tag{12.45}$$

Enfin,

$$\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_{O'}^{C} = \int_C \underline{\boldsymbol{O'M}} \wedge (-F_S \underline{\boldsymbol{e}}_z)\, ds = \int_C r\, \underline{\boldsymbol{e}}_r \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_z\, ds = 0 \tag{12.46}$$

Le moment résultant est donc nul et la calotte est en équilibre si F_S est donnée par (12.39). On n'a pas eu besoin de connaître point par point les champs $\underline{\boldsymbol{n}}_i$ et $\underline{\boldsymbol{n}}_e$ de sorte que les résultats obtenus sont valables quelle que soit la forme de la calotte s'appuyant sur la couronne C.

12.1.6 Cas d'un tube mince

Indiquer la (les) composante(s) de contraintes prépondérante(s) dans le cas d'un tube mince.

On introduit le rayon R tel que

$$r_e = R + \frac{e}{2}, \quad r_i = R - \frac{e}{2} \tag{12.47}$$

Dans le cas d'un tube mince, on a

$$\frac{e}{R} \ll 1 \tag{12.48}$$

En conséquence, l'expression (12.27) devient

$$< \sigma_{\theta\theta} >= \frac{(p_i - p_e)R}{e} + \mathcal{O}(1) \tag{12.49}$$

On voit que la contrainte tangentielle moyenne devient d'autant plus grande, que e/R est petit. Il n'est pas possible d'établir ici strictement le résultat mais on peut d'ores–et–déjà l'annoncer : $\sigma_{\theta\theta}$ devient prépondérante par rapport à σ_{rr} qui reste, quant à elle, de l'ordre de $-p_e$ et $-p_i$.

Si le tube est libre d'efforts axiaux ($F_S = 0$, i.e. tube ouvert), le tube mince est essentiellement dans un état de **traction simple**. Le dimensionnement du réservoir sous pression va alors porter sur $< \sigma_{\theta\theta} >$ afin d'éviter son éclatement.
Si le tube est fermé par une calotte, la contrainte axiale vaut :

$$\sigma_{zz} = F_S = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} + \mathcal{O}(1) \simeq \frac{< \sigma_{\theta\theta} >}{2} \tag{12.50}$$

d'après le résultat (12.39). La contrainte axiale est donc deux fois moindre que la contrainte tangentielle qui reste donc prépondérante.

12.2 Elastostatique du réservoir sous pression

On considère à nouveau le problème du réservoir sous pression mais, dans cette partie, on prend explicitement en compte le comportement mécanique du matériau constitutif du tube. On considère que le comportement du matériau est convenablement décrit par l'élasticité linéarisée isotrope. La géométrie et le chargement mécanique sont indiqués sur la figure 12.1. Les composantes des déplacements, déformations et contraintes sont données dans le système de coordonnées cylindriques d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$, axe du tube.

12.2.1 Distribution des déplacements, déformations et contraintes

Les conditions aux limites du problème ont été précisées au paragraphe 12.1.1. On adopte ici la méthode des déplacements. Postuler la forme du champ de déplacements que subit le tube. Trouver l'équation différentielle qui les régit, puis l'intégrer. Déterminer enfin déformations et contraintes de manière exhaustive. Distinguer *in fine* le cas du tube ouvert (libre selon z) du cas du tube fermé.

Les propriétés de symétrie relatives à la géométrie, au chargement et au matériau ont été discutées au paragraphe 12.1.3. On en déduit en particulier que le champ de déplacement présente une symétrie de révolution. Il ne dépend *a priori* que des variables (r, z). On le cherche sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = f(r)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + g(z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{12.51}$$

où f et g sont deux fonctions inconnues à déterminer.
On calcule ensuite le gradient de la transformation proposée en utilisant l'opérateur correspondant en coordonnées cylindriques :

$$[\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & g' \end{bmatrix} = [\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}] \tag{12.52}$$

Le gradient du champ de déplacement (12.51) étant symétrique, il coïncide avec le tenseur des déformations infinitésimales $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. La dérivée de f (resp. g) par rapport à r (resp. z) est notée f' (resp. g').
L'étape suivante consiste à calculer le champ des contraintes à l'aide des relations d'élasticité linéarisée. On suppose que le tube est initialement dans un état naturel (i.e. sans contraintes initiales). La loi d'élasticité est écrite à l'aide des coefficients de Lamé :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} &= \lambda(\text{trace}\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}})\,\underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu\,\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ [\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}] &= \begin{bmatrix} \lambda(f' + \dfrac{f}{r} + g') + 2\mu f' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(f' + \dfrac{f}{r} + g') + 2\mu\dfrac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + \dfrac{f}{r} + g') + 2\mu g' \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12.53}$$

Les composantes de contraintes non nulles sont donc $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$. Ce résultat est conforme à l'analyse purement statique proposée au paragraphe 12.1.4. Il est temps d'utiliser les équations

d'équilibre établies dans ce même paragraphe. En se limitant aux composantes de contraintes *a priori* non nulles, et en l'absence de forces volumiques, ces équations se réduisent à

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \tag{12.54}$$

$$\sigma_{zz,z} = 0 \tag{12.55}$$

La seconde équation (12.55) conduit à un déplacement u_z linéaire en z :

$$\sigma_{zz} = C, \quad u_z = g = cz + d \tag{12.56}$$

où C, c sont des constantes à déterminer. En substituant les valeurs de contraintes (12.53) dans l'équation d'équilibre (12.54), on obtient l'équation différentielle[2] régissant la fonction f :

$$f'' - \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} = (f' + \frac{f}{r})' = 0 \tag{12.57}$$

L'équation précédente s'intègre en

$$f = ar + \frac{b}{r} \tag{12.58}$$

où a, b sont deux constantes d'intégration. Ceci permet d'évaluer les déformations et les contraintes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = a - \dfrac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = a + \dfrac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{zz} = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{rr} = A - \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases} \tag{12.59}$$

Les constantes introduites sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} A = (\lambda + \mu)2a + \lambda c \\ B = 2\mu b \\ C = (\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \dfrac{1-\nu}{E}A - \dfrac{\nu}{E}C \\ b = \dfrac{B}{2\mu} \\ c = \dfrac{1}{E}(C - 2\nu A) \end{cases} \tag{12.60}$$

En raison de la plus grande simplicité des expressions, on a utilisé le module de Young E et le coefficient de Poisson ν pour les formules donnant a, b, c en fonction de A, B, C. Les multiples formules de passages entre les coefficients de Lamé et la paire (E, ν) se trouvent dans la table

[2] Il est remarquable que les modules d'élasticité n'apparaissent plus dans (12.57) alors qu'ils étaient présents dans l'expression des contraintes (12.53). Cela vient du fait que les modules se factorisent et que l'équation obtenue (12.57) est en fait :

$$(\lambda + 2\mu)(f'' - \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}) = 0$$

7.1. Pour identifier les constantes, on utilise les conditions aux limites (12.6) et (12.9) qui portent sur σ_{rr} en $r = r_i$ et $r = r_e$. On résout donc le système linéaire,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r_i) = -p_i = A - \dfrac{B}{r_i^2} \\ \sigma_{rr}(r_e) = -p_e = A - \dfrac{B}{r_e^2} \end{cases} \tag{12.61}$$

et on trouve

$$A = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \qquad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} r_i^2 r_e^2 \tag{12.62}$$

Pour $p_i - p_e > 0$, la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $r = r_i$ et vaut :

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \frac{p_i(r_e^2 + r_i^2) - 2p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \tag{12.63}$$

Les profils de contrainte pour deux géométries différentes de tube sont tracés sur la figure 12.3. On observe en particulier que si le tube est mince l'état de contrainte est quasiment homogène dans l'épaisseur. Pour se rendre compte de la façon dont les éléments de matériau élastique se déforment, l'état déformé est illustré sur la figure 12.4.
Les résultats obtenus ne dépendent en fait que des rapports de longueurs r/r_i et r_e/r_i. Pour un même chargement en pression et un même rapport r_e/r_i, deux tubes de rayons intérieurs distincts présenteront des profils de contraintes et de déformations identiques, en fonction de r/r_i. En particulier, les contraintes maximales seront identiques. L'analyse s'applique donc aussi bien à une aiguille de seringue qu'à un réservoir d'hydrocarbures. Il n'y a pas d'effet d'échelles ou d'effet de taille absolue dans ces situations régulières d'élastostatique.

12.2.2 Différentes conditions aux extrémités du tube

On distingue successivement :

- Le tube est **libre** à ses extrémités. Dans ce cas, la contrainte axiale $\sigma_{zz} = F_S = 0$ de sorte que :

  $$\sigma_{zz} = 0 \Longrightarrow C = 0 \tag{12.64}$$

  En contrepartie, le tube se déforme axialement selon :

  $$\varepsilon_{zz} = c = -\frac{2\nu A}{E} \tag{12.65}$$

  où A est donné par (12.62).
- Le tube est **bloqué** à ses extrémités, ce qui signifie que tout déplacement axial est empêché. Dans ce cas,

  $$\varepsilon_{zz} = c = 0 \Longrightarrow \sigma_{zz} = C = 2\nu A \tag{12.66}$$

  où A est donné par (12.62). Si A est négatif (cela dépend du chargement en pression et des caractéristiques géométriques du tube), les contraintes axiales sont de compression. Au contraire, il s'agit de contraintes de traction si $A \geq 0$. Une telle condition à la limite n'est possible que si le tube est coincé, encastré ou collé aux extrémités.

Déplacements

$$\underline{\boldsymbol{u}} = (ar + \frac{b}{r})\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + (cz + d)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z$$

Déformations

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (a - \frac{b}{r^2})\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + (a + \frac{b}{r^2})\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + c\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

Contraintes

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = (A - \frac{B}{r^2})\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + (A + \frac{B}{r^2})\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + C\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

Chargement

$$A = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2}\, r_i^2 r_e^2$$
$$C = 0\,(\text{libre}), \quad C = 2\nu A\ \ (\text{bloqué}), \quad C = A\,(\text{calotte}), \quad C = F_S\,(\text{donné})$$
$$a = \frac{1-\nu}{E}A - \frac{\nu}{E}C, \quad b = \frac{B}{2\mu}, \quad c = \frac{1}{E}(C - 2\nu A)$$
$$A = (\lambda + \mu)2a + \lambda c, \quad B = 2\mu b, \quad C = (\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a$$

TAB. 12.1 – Récapitulatif : élastostatique du tube sous pression interne et externe avec ou sans effort axial.

- Le tube est muni d'une calotte à l'une de ses extrémités. Cette situation a été analysée du point de vue statique au paragraphe 12.1.5. On a mis en évidence l'existence d'une densité surfacique d'efforts axiaux F_S donnée par (12.39). On en déduit :

$$\sigma_{zz} = C = F_S = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_i^2 - r_e^2} = A \tag{12.67}$$

12.2.3 Cas d'un tube mince

Lorsque le tube est mince, en reprenant les notations (12.47), faire les développements limités qui s'imposent et décrire les états de contraintes tangentielle et axiale.

Dans le cas d'un tube mince de rayon R et d'épaisseur e définis par les équations (12.47) et tels que $e/R \ll 1$, les expressions précédentes se simplifient. Des développements limités par rapport à e/R fournissent :

$$A = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} + \mathcal{O}(1), \quad B = \frac{(p_i - p_e)R^3}{2e} + \mathcal{O}(1) \tag{12.68}$$

Les contraintes se réduisent alors à

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i - p_e)R}{e}, \quad \sigma_{rr} = 0 \tag{12.69}$$

Les expressions précédentes sont correctes à l'ordre $\mathcal{O}(1)$. Clairement, la composante prépondérante est la contrainte de traction ou de compression $\sigma_{\theta\theta}$. Le résultat (12.69) est d'une importance pratique considérable et mérite d'être mémorisé[3]. Le choix de l'épaisseur d'un tube pour un chargement donné est critique puisque la contrainte tend vers l'infini lorsque l'épaisseur diminue.

La valeur de la composante axiale σ_{zz} dépend des conditions aux extrémités :

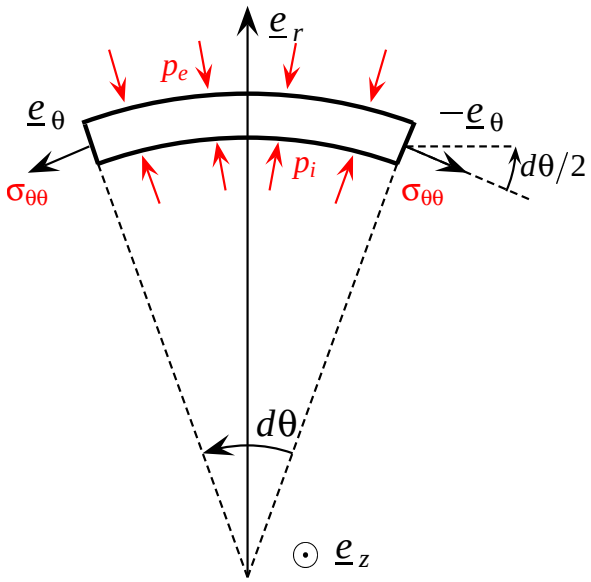
- Tube **libre**. Dans ce cas, la contrainte axiale σ_{zz} est nulle. L'état de contrainte du tube mince sous pression se réduit à un état de **traction/compression simple**, selon le signe de $p_i - p_e$. Il est important de se rappeler que l'application d'une pression interne à un tube mince (libre à ses extrémités) met le tube en traction simple selon la direction tangentielle. Comme le comportement des matériaux est très souvent caractérisé en traction simple, ces données expérimentales sont directement applicables au dimensionnement d'un tel tube sous pression.
- Tube **bloqué** selon z. La contrainte axiale engendrée vaut

$$\sigma_{zz} = \nu \frac{(p_i - p_e)R}{e} = \nu\, \sigma_{\theta\theta} \tag{12.70}$$

  au premier ordre.
- Tube terminé par une **calotte**. Le résultat (12.67) donne, dans le cas du tube mince :

$$\sigma_{zz} = A = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} \tag{12.71}$$

[3]On peut d'ailleurs retrouver rapidement ce résultat en raisonnant de la manière suivante. On considère le secteur de tube suivant d'angle $d\theta$ et de hauteur dz :



On voit que les pressions appliquées sont équilibrées par la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$. On calcule alors la résultante des efforts appliqués à cet élément de volume dans la direction $\underline{e}_r$:

$$\underbrace{(p_i - p_e)\ Rd\theta dz}_{\text{pression appliquée}} = 2 \underbrace{\sigma_{\theta\theta} \sin\frac{d\theta}{2}\, edz}_{\text{composante de la réaction du tube}}$$

Pour le petit angle $d\theta$ considéré, la fonction sinus peut être remplacé par son argument, ce qui conduit à la relation cherchée (12.69). Dans ce calcul, on suppose implicitement que $\sigma_{\theta\theta}$ est homogène dans l'épaisseur du tube, approximation licite pour le tube mince seulement.

au premier ordre. La contrainte axiale vaut donc la moitié de la contrainte tangentielle qui reste par conséquent prépondérante.
Remarquer en particulier que, dans les deux derniers cas, σ_{zz} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont du même signe.

12.2.4 Respect du contexte infinitésimal

Les résultats précédents ne sont pertinents que si la transformation reste infinitésimale. Cela suppose en particulier que les composantes de déformations $|\varepsilon_{rr}|$ et $|\varepsilon_{\theta\theta}|$ sont petites devant 1. Il en va donc de même de

$$|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}| = 2|a| \ll 1, \quad |\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}| = \frac{2|b|}{r^2} \ll 1$$

Pour un tube mince libre à ses extrémités par exemple, cela implique

$$2|a| \sim \frac{2|A|}{E} \sim \frac{|p_i - p_e|R}{Ee} \ll 1, \quad \frac{2|b|}{r^2} \sim \frac{2|B|}{R^2E} \sim \frac{|p_i - p_e|R}{Ee} \ll 1$$

où E est le module d'Young. Le contexte infinitésimal est donc respecté tant que

$$\frac{|p_i - p_e|}{E} \ll \frac{e}{R} \tag{12.72}$$

La condition concerne le chargement appliqué $p_i - p_e$ et la géométrie du tube. Pour $e/R \ll 1$, on voit que $|p_i - p_e|/E$ doit être un infiniment petit d'ordre 2. Cette condition laisse toutefois la place à un large domaine d'application puisque le module d'Young est très élevé (pour les métaux en tout cas, 200000 MPa par exemple pour un acier) et les pressions appliquées se comptent en bars (1 bar = 10^5 Pa = 0.1 MPa). On reviendra à ces ordres de grandeurs au paragraphe 12.2.5.
La condition (12.72) garantit certes la validité de l'analyse dans le contexte infinitésimal mais n'assure en rien la pertinence de la solution. En effet, une telle solution peut s'avérer instable et d'autres solutions doivent être envisagées hors du carcan infinitésimal, en particulier des modes de flambage du tube, en particulier si $p_e > p_i$. De telles instabilités deviennent d'autant plus probables que le tube est mince.

12.2.5 Dimensionnement du réservoir sous pression

Si, pour un tube de géométrie donnée, la pression appliquée est trop grande, on risque d'atteindre localement la limite d'élasticité, voire de rupture, du matériau. Il est donc essentiel d'utiliser un critère de dimensionnement du tube pour donner les limites de validité du comportement élastique de la structure. En utilisant le critère de plasticité de Tresca (cf. le paragraphe 4.4.4 et l'expression de ce critère (4.71)), indiquer, pour un tube fermé par une calotte par exemple, à quel endroit de la structure la plasticité va apparaître. Fournir un critère de dimensionnement du tube en fonction de l'écart de pression appliqué $|p_i - p_e|$ et du rapport des rayons r_i/r_e. Reprendre enfin l'analyse avec le critère de von Mises.

Le critère de Tresca consiste à comparer l'écart maximum entre les contraintes principales à une valeur critique σ_0, égale à la limite d'élasticité en traction du matériau. Le matériau se comportement de manière élastique en un point donné tant que

$$\text{Sup}\,|\sigma_i - \sigma_j| < \sigma_0 \tag{12.73}$$

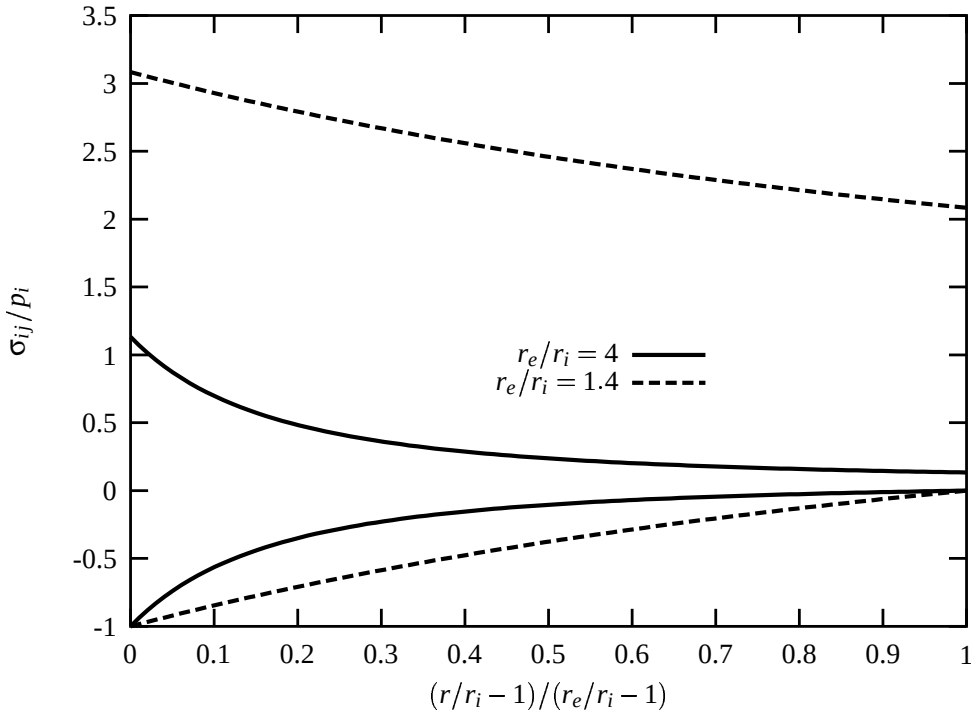


FIG. 12.3 – Profils de contraintes dans des réservoirs sous pression interne uniquement avec deux rapports de rayons distincts. La composante positive est $\sigma_{\theta\theta}$, la composante négative est σ_{rr}. Le tube est supposé libre dans la direction axiale.

où les σ_i sont les contraintes principales. Dans le cas du tube sous pression, le tenseur des contraintes est diagonal (cf. équation (12.59)) de sorte que les contraintes principales sont $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}$. Pour comparer ces contraintes principales entre elles, dans le cas du tube muni d'une calotte, on évalue les différences

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \frac{B}{r^2} \tag{12.74}$$

Les résultats (12.59) et (12.67) ont été utilisés. Il est alors aisé de ranger les contraintes principales dans l'ordre croissant :

$$\sigma_{rr} < \sigma_{zz} < \sigma_{\theta\theta} \quad \text{si} \quad p_e \leq p_i, \quad \sigma_{\theta\theta} < \sigma_{zz} < \sigma_{rr} \quad \text{si} \quad p_i \leq p_e \tag{12.75}$$

Dans tous les cas de chargement, l'écart maximal entre les contraintes principales est $|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|$. Le comportement du tube reste donc élastique au point matériel considéré tant que

$$|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}| = \frac{2|B|}{r^2} < \sigma_0 \tag{12.76}$$

En conséquence, la plasticité va apparaître entre premier lieu en $r = r_i$ où la différence $|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|$ est maximale. Par suite, la structure dans son ensemble reste dans le domaine élastique si $2|B|/r_i^2 < \sigma_0$. En tenant compte de l'expression (12.62) donnant B, on aboutit au critère suivant :

$$\Delta p := |p_i - p_e| < \Delta p_c := \frac{\sigma_0}{2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2}\right) \tag{12.77}$$

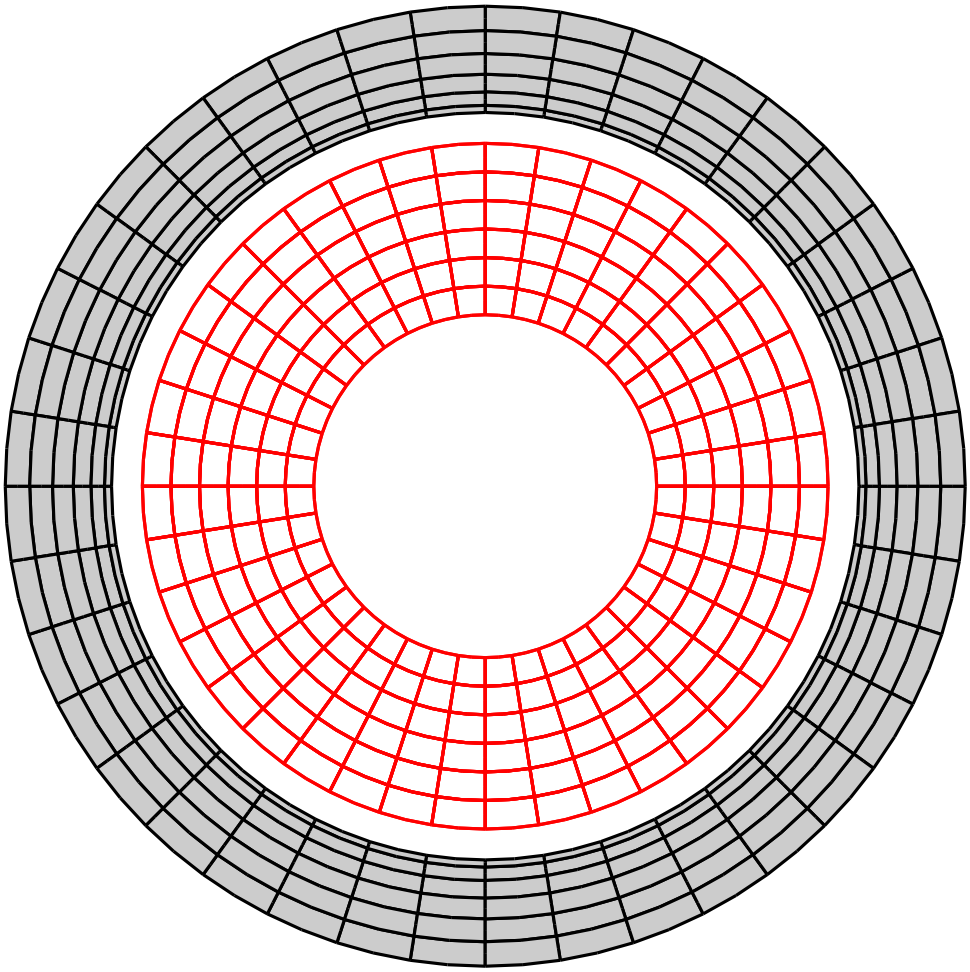


FIG. 12.4 – Déformation d'un tube sous pression interne avec $r_e/r_i = 2$. L'état initial est au centre (en rouge). L'état final déformé est grisé. La déformation a été démesurément exagérée (facteur 1000) pour l'illustration.

La courbe correspondante donnant l'écart de pression critique en fonction du rapport des rayons du tube fait l'objet de la figure 12.5. Le **choix de la géométrie** est un paramètre–clef dans le dimensionnement du réservoir. Pour un diamètre intérieur donné, le fait d'accroître le rayon extérieur, i.e. l'épaisseur, permet d'augmenter la limite de pression admissible. Mais ce bénéfice va en s'amenuisant puisque la pression critique tend vers

$$\Delta p_c^\infty = \frac{\sigma_0}{2} \tag{12.78}$$

lorsque $r_e \to \infty$. Même un tube d'épaisseur infinie, i.e. une cavité cylindrique dans un massif, peut plastifier. Ce résultat a des implications importantes notamment en mécanique des sols, pour le dimensionnement de galeries ou de tunnels par exemple. La convergence en r_e/r_i étant lente, on gagne peu sur la limite autorisée lorsqu'on augmente l'épaisseur du tube, ce qui d'ailleurs conduit à un surcroît de matière et donc de coût prohibitif. Un autre levier pour le dimensionnement du réservoir est le **choix du matériau** qui détermine la limite d'élasticité σ_0 intervenant dans le critère (12.77). On considère les deux exemples suivants pour un tube tel que $r_e/r_i = 1.01$:

- le choix d'un alliage d'aluminium pour lequel $\sigma_0 = 400$ MPa conduit un écart de pression critique $\Delta p_c \simeq 4$ MPa soit 40 bars.

- le choix d'un acier à haute résistance pour lequel $\sigma_0 = 1000$ MPa conduit un écart de pression critique $\Delta p_c \simeq 10$ MPa soit 100 bars.

Le choix entre l'aluminium et l'acier à haute résistance est aussi une affaire de coût. D'autres paramètres rentrent en ligne de compte, comme la résistance du matériau à l'apparition et à la propagation de fissure, sa résistance à la corrosion, mais aussi la plus ou moins grande facilité de mise en œuvre du matériau pour la réalisation du réservoir (soudabilité, usinage...), etc. Certains de ces points seront abordés dans le cours (Cailletaud, 2003), et les exercices correspondants, dont plusieurs prolongent l'analyse présentée dans cet exercice.

On n'introduit pas ici de coefficient de sécurité venant pondérer, dans une approche d'ingénieur plus complète, la valeur critique Δp_c prévue en raison des incertitudes et de la variabilité du matériau et de la géométrie de la structure. De tels facteurs font l'objet de normes dont on trouvera une introduction et les références nécessaires dans (Trotignon, 1997; Ashby, 2000).

Un aspect essentiel du dimensionnement du tube consiste d'autre part à étudier ses conditions de stabilité, notamment les critères d'apparition des différents modes de flambage. Une telle analyse n'est pas entreprise dans ce paragraphe.

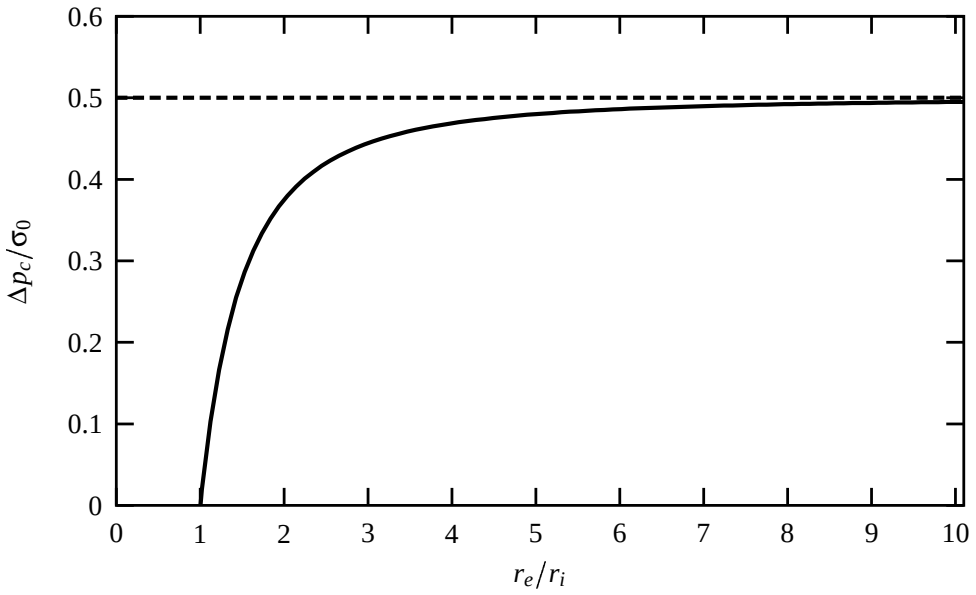


FIG. 12.5 – Dimensionnement d'un réservoir sous pression : écart de pression critique Δp_c normalisée par la limite d'élasticité σ_0 en fonction du rapport des rayons du réservoir sous pression. Au–delà de cette limite le comportement du tube cesse d'être élastique linéaire. L'asymptote $\sigma_0/2$ est aussi représentée.

12.3 Frettage

Le frettage est une méthode d'assemblage utilisée depuis l'antiquité[4] et fréquente aujourd'hui dans de nombreuses applications industrielles. L'assemblage fretté constitue un exemple simple de structure qui, bien que soumise à aucun chargement extérieur, est le siège de contraintes internes auto–équilibrées. Le calcul de ces contraintes résiduelles est possible dans le cas de deux tubes frettés à l'aide des résultats obtenus dans les sections précédentes.

On montre enfin l'avantage que présente un assemblage de deux tubes frettés, vis–à–vis d'un tube simple, en terme de limite d'élasticité de l'ensemble.

12.3.1 Opération de frettage de deux tubes

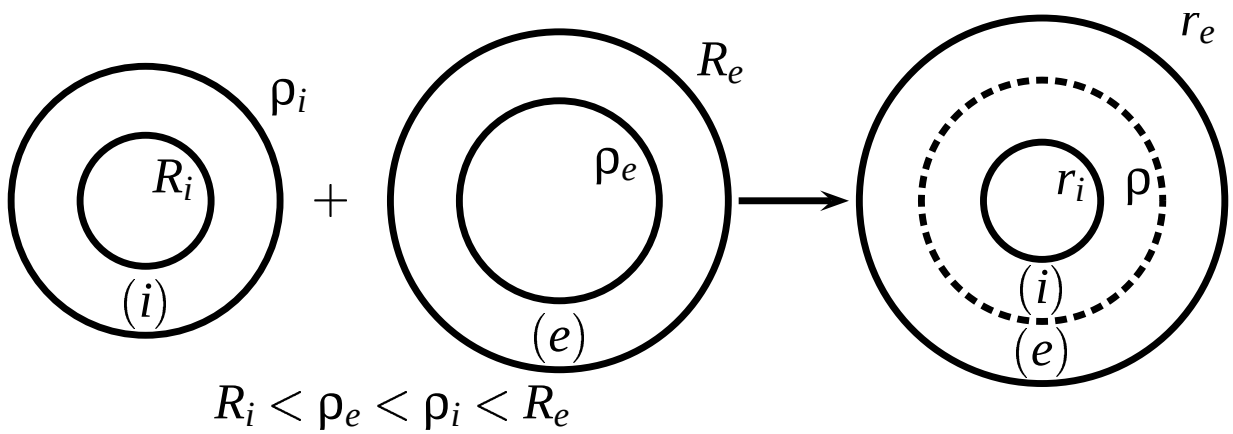


FIG. 12.6 – Frettage de deux tubes.

On considère deux tubes de rayons intérieur et extérieur initiaux R_i, ρ_i et ρ_e, R_e respectivement, tels que

$$R_i < \rho_e < \rho_i < R_e \tag{12.79}$$

Le frettage consiste à insérer le premier tube, dit *tube intérieur*, noté (i), dans le second, dit *tube extérieur*, noté (e). Comme $\rho_i \neq \rho_e$, il est nécessaire de déformer les deux tubes pour qu'un tel assemblage soit possible. A la fin de l'opération, le tube intérieur a pour rayon intérieur r_i et pour rayon extérieur ρ, tandis que le tube extérieur a pour dimensions finales ρ et r_e. Ces grandeurs sont indiquées sur la figure 12.6. Le frettage est possible en insérant en force le tube intérieur, ou bien en chauffant le tube extérieur. Dans ce dernier cas, le tube extérieur se dilate et, si la dilatation thermique est suffisante, ses dimensions sont telles que l'on peut insérer plus aisément le tube intérieur. Lorsque le tube extérieur refroidit, le frettage se réalise. On peut aussi refroidir le tube intérieur.

A l'issue de l'opération, le tube extérieur exerce une pression p_{init} sur le tube intérieur. Plus précisément, le vecteur contrainte en un point du tube intérieur tel que $r = \rho$ vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}.\underline{\boldsymbol{n}}^{(i)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}.\underline{\boldsymbol{e}}_r = \underline{\boldsymbol{t}}^{d(i)} = -p_{init}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{12.80}$$

[4]Les celtes ont utilisé ce procédé pour le cerclage des roues. Le cercle métallique extérieur était chauffé pour être fretté sur la roue en bois.

où l'exposant (i) fait référence au tube intérieur. De manière équivalente, le vecteur contrainte en point homologue du tube extérieur en $r = \rho$ vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)}.\underline{\boldsymbol{n}}^{(e)} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)}.(-\underline{\boldsymbol{e}}_r) = \underline{\boldsymbol{t}}^{d(e)} = p_{init}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{12.81}$$

où l'exposant (e) fait référence au tube extérieur. En $r = r_i, r_e$, le tube est libre d'effort. Pour chaque tube, les conditions de chargement sont du type étudié dans l'analyse des tubes sous pression interne et externe au paragraphe 12.2. On pourra donc utiliser directement les résultats obtenus pour déterminer contraintes et déformations dans les tubes de l'assemblage fretté.

Le contact entre les deux tubes est supposé parfait et collant (sans glissement), une fois l'assemblage réalisé.

A l'issue de l'opération de frettage, aucun chargement extérieur n'est appliqué à l'assemble. Le torseur des efforts appliqués est nul et, pourtant, l'assemblage fretté est le siège de contraintes et de déformations qui sont calculées au paragraphe 12.3.2. On vérifiera que ces contraintes sont à divergence nulle (on dit qu'elles sont **auto–équilibrées**) et ne conduisent à aucune force ni moment résultants. On parle aussi de **contraintes résiduelles**.

12.3.2 Caractéristiques de l'assemblage fretté

Lorsque les rayons initiaux $(R_i, \rho_i, \rho_e, R_e)$ sont donnés, les caractéristiques $(r_i, \rho, r_e, p_{init})$ de l'assemblage fretté sont inconnues et doivent être déterminées à partir des données géométriques et des matériaux.

Le tube intérieur est soumis à la pression "extérieure" $p_e = p_{init}$ en suivant les notations du paragraphe 12.2. Le tube extérieur est soumis à la pression "intérieure" $p_i = p_{init}$. Les tubes sont supposés libres à leurs extrémités (voir table 12.1). La solution en déplacement est donnée par (12.51) :

$$\underline{\boldsymbol{u}}^{(i)} = \left(\frac{1-\nu}{E}A^{(i)}r + \frac{B^{(i)}}{2\mu r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r - \frac{2\nu A^{(i)}}{E}\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{12.82}$$

$$\underline{\boldsymbol{u}}^{(e)} = \left(\frac{1-\nu}{E}A^{(e)}r + \frac{B^{(e)}}{2\mu r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r - \frac{2\nu A^{(e)}}{E}\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{12.83}$$

Les constantes $A^{(i,e)}$ et $B^{(i,e)}$ s'expriment en fonction de p_{init} :

$$A^{(i)} = \frac{p_{init}\rho_i^2}{R_i^2 - \rho_i^2}, \quad A^{(e)} = \frac{p_{init}\rho_e^2}{R_e^2 - \rho_e^2} \tag{12.84}$$

$$B^{(i)} = \frac{p_{init}}{R_i^2 - \rho_i^2}R_i^2\rho_i^2, \quad B^{(e)} = \frac{p_{init}}{R_e^2 - \rho_e^2}R_e^2\rho_e^2 \tag{12.85}$$

On en déduit les relations qui lient r_i avec R_i, et r_e avec R_e :

$$r_i = R_i + \frac{1-\nu}{E}A^{(i)}R_i + \frac{B^{(i)}}{2\mu R_i} \tag{12.86}$$

$$r_e = R_e + \frac{1-\nu}{E}A^{(e)}R_e + \frac{B^{(e)}}{2\mu R_e} \tag{12.87}$$

Les cylindres $r = \rho_i$ et $r = \rho_e$ se transforment en cylindres de rayons :

$$\rho_i' = \rho_i + \frac{1-\nu}{E}A^{(i)}\rho_i + \frac{B^{(i)}}{2\mu\rho_i} \tag{12.88}$$

$$\rho_e' = \rho_e + \frac{1-\nu}{E}A^{(e)}\rho_e + \frac{B^{(e)}}{2\mu\rho_e} \tag{12.89}$$

Les tubes (i) et (e) sont en contact si

$$\rho'_i = \rho'_e = \rho \tag{12.90}$$

En tenant compte de la condition précédente, les équations (12.86) à (12.89) constituent un système de quatre équations à quatre inconnues $(r_i, r_e, \rho, p_{init})$. Dans la pratique, on peut faire un choix judicieux de $(R_i, \rho_i, \rho_e, R_e)$ pour obtenir les caractéristiques souhaitées de l'assemblage fretté. Le paramètre–clef est la différence

$$\epsilon = \rho_e - \rho_i \tag{12.91}$$

La différence entre les équations (12.88) et (12.89) fournit

$$\begin{aligned} \epsilon + \frac{1-\nu}{E}(A^{(i)}\rho_i - A^{(e)}\rho_e) + \frac{1+\nu}{E}(\frac{B^{(i)}}{\rho_i} - \frac{B^{(e)}}{\rho_e}) &= 0 \\ \epsilon + \frac{1-\nu}{E}p_{init}(\frac{\rho_i^3}{R_i^2-\rho_i^2} + \frac{\rho_e^3}{\rho_e^2-R_e^2}) + \frac{1+\nu}{E}p_{init}(\frac{R_i^2\rho_i}{R_i^2-\rho_i^2} + \frac{R_e^2\rho_e}{\rho_e^2-R_e^2}) &= 0 \end{aligned} \tag{12.92}$$

On en déduit l'équation suivante qui fournit p_{init} :

$$\frac{E\epsilon}{p_{init}} = (1-\nu)\left(\frac{\rho_i^3}{\rho_i^2-R_i^2} + \frac{\rho_e^3}{R_e^2-\rho_e^2}\right) + (1+\nu)\left(\frac{R_i^2\rho_i}{\rho_i^2-R_i^2} + \frac{R_e^2\rho_e}{R_e^2-\rho_e^2}\right) \tag{12.93}$$

Les calculs précédents ne sont valides que pour $\epsilon > 0$, ce qui implique $p_{init} > 0$ d'après l'équation (12.93). Ces conditions garantissent la cohésion de l'assemblage.

Pour l'utilisation de l'assemblage fretté, on a plutôt besoin d'une relation entre p_{init} et les caractéristiques finales du frettage, i.e. (r_i, r_e, ρ). Une telle relation est en fait contenue dans la précédente (12.93), en faisant jouer le contexte infinitésimal. Pour le voir, on revient à la relation (12.88) sous la forme :

$$\rho = \rho_i + a^{(i)}\rho_i + \frac{b^{(i)}}{\rho_i} \tag{12.94}$$

On a vu au paragraphe 12.2.4 que, dans le contexte infinitésimal, $|a^{(i)}| \ll 1$ et $|b^{(i)}|/\rho_i^2 \ll 1$. L'équation précédente implique alors que ρ et ρ_i sont du même ordre. Des arguments similaires prouvent que R_i, r_i d'une part et R_e, r_e d'autre part sont du même ordre. Par suite, dans le contexte infinitésimal, l'équation (12.93) est indiscernable de

$$\frac{E\epsilon}{p_{init}} = (1-\nu)\rho^3\left(\frac{1}{\rho^2-r_i^2} + \frac{1}{r_e^2-\rho^2}\right) + (1+\nu)\rho\left(\frac{r_i^2}{\rho^2-r_i^2} + \frac{r_e^2}{r_e^2-\rho^2}\right) \tag{12.95}$$

et finalement

$$p_{init} = E\,\frac{\epsilon}{2\rho}\,\frac{(\rho^2-r_i^2)(r_e^2-\rho^2)}{\rho^2(r_e^2-r_i^2)} \tag{12.96}$$

12.3.3 Contraintes initiales dans l'assemblage fretté

L'assemblage fretté est le siège de contraintes résiduelles qui se calculent grâce aux résultats rassemblés dans la table 12.1. Le champ de contraintes résiduelles $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}$ est décrit successivement dans le tube intérieur et dans le tube extérieur :

$$r_i \leq r \leq \rho \begin{cases} \sigma_{rr}^{(0)} = A^{(i)} - \dfrac{B^{(i)}}{r^2} = \dfrac{p_{init}\rho^2}{r_i^2 - \rho^2}(1 - \dfrac{r_i^2}{r^2}) < 0 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = A^{(i)} + \dfrac{B^{(i)}}{r^2} = \dfrac{p_{init}\rho^2}{r_i^2 - \rho^2}(1 + \dfrac{r_i^2}{r^2}) < 0 \\ \sigma_{zz}^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{12.97}$$

$$\rho \leq r \leq r_e \begin{cases} \sigma_{rr}^{(0)} = A^{(e)} - \dfrac{B^{(e)}}{r^2} = \dfrac{p_{init}\rho^2}{r_e^2 - \rho^2}(1 - \dfrac{r_e^2}{r^2}) < 0 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = A^{(e)} + \dfrac{B^{(e)}}{r^2} = \dfrac{p_{init}\rho^2}{r_e^2 - \rho^2}(1 + \dfrac{r_e^2}{r^2}) > 0 \\ \sigma_{zz}^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{12.98}$$

Conformément à ce que suggère l'intuition, le tube intérieur est en compression selon $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ tandis que le tube extérieur est en traction. Les contraintes radiales négatives garantissent la cohésion de l'assemblage. On peut en outre vérifier que

$$\sigma_{rr}(r_i) = \sigma_{rr}(r_e) = 0$$

On peut montrer aussi que la moyenne $< \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} >$ des contraintes sur les deux tubes est nulle. Cette équation est en fait équivalente à la relation (12.95).

Pendant l'opération de frettage, on suppose que le glissement entre les deux tubes est suffisant pour que les contraintes axiales σ_{zz} restent nulles. En conséquence, les deux tubes risquent de ne pas avoir la même longueur finale (à calculer...). On les découpe en général pour ajuster les extrémités, ou bien on les soude. On suppose dans la suite qu'un tel glissement n'a plus lieu et que les deux tubes peuvent être considérés comme soudés l'un à l'autre sur toute leur longueur (on vérifiera que c'est effectivement possible dans les résultats ultérieurs). Dans les calculs qui vont suivre, l'assemblage fretté est muni d'une calotte.

12.3.4 Assemblage fretté chargé

L'assemblage fretté fermé peut être soumis à un chargement en pression interne p_i et en pression externe p_e. La pression interne s'exerce en fait sur la paroi interne du tube interne (i), tandis que la pression externe s'exerce sur la paroi externe du tube externe (e).

Il s'agit dès lors d'un problème d'élasticité linéarisée dans le cadre des petites perturbations pour un solide dans un état initial supposé quasi–naturel. Cet état initial est décrit par le champ d'auto–contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}$ déterminé dans la section précédente. La solution s'obtient à partir de celle obtenue pour les réservoirs sous pression (cf. table 12.1) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(0)} + A - \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + A + \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{cases} \tag{12.99}$$

avec

$$A = \frac{p_e r_e^2 - p_i r_i^2}{r_i^2 - r_e^2}, \quad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} r_i^2 r_e^2, \quad C = A \tag{12.100}$$

A ce stade, on peut se demander si les pressions exercées ne conduisent pas les deux tubes à se désolidariser, ce qui conduirait à la ruine de l'assemblage. Pour le savoir, on évalue la pression en $r = \rho$:

$$\begin{aligned} -p := \sigma_{rr}(\rho) &= -p_{init} + \frac{p_e r_e^2 - p_i r_i^2}{r_i^2 - r_e^2} - \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2}\frac{r_i^2 r_e^2}{\rho^2} \\ &= -p_{init} + \underbrace{\frac{p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}(1 - \frac{r_e^2}{\rho^2})}_{<0} + \underbrace{\frac{p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}(\frac{r_i^2}{\rho^2} - 1)}_{<0} \end{aligned} \tag{12.101}$$

Ce résultat montre que les tubes restent bien accolés et qu'il n'y a pas de glissement relatif.

12.3.5 Optimisation de l'assemblage fretté

On détermine maintenant la limite d'élasticité de l'assemblage fretté en utilisant le critère de Tresca invoqué au paragraphe 12.2.5. Le critère de dimensionnement (12.77) peut en fait être appliqué successivement aux tubes (i) and (e). Le point de fonctionnement de chaque composant de l'assemblage reste donc dans le domaine d'élasticité tant que

$$|p_i - p| < \frac{\sigma_0}{2}(1 - \frac{r_i^2}{\rho^2}) \quad \text{(tube intérieur)} \tag{12.102}$$

$$|p - p_e| < \frac{\sigma_0}{2}(1 - \frac{\rho^2}{r_e^2}) \quad \text{(tube extérieur)} \tag{12.103}$$

On a admis, au passage, que, dans chaque tube, les contraintes principales sont rangées dans l'ordre (12.75), ce qui reste à vérifier[5].

Optimiser l'utilisation du tube fretté signifie maximiser l'écart de pression admissible $|p_i - p_e|$. Cet écart est majoré par

$$|p_i - p_e| \leq |p_i - p| + |p - p_e| < \frac{\sigma_0}{2}(2 - \frac{r_i^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{r_e^2}) \tag{12.104}$$

La borne supérieure est maximale[6] pour

$$\rho = \sqrt{r_i r_e} \tag{12.105}$$

En substituant cette valeur dans (12.106), on trouve le domaine d'élasticité maximal de l'assemblage fretté :

$$\Delta p = |p_i - p_e| < \Delta p_c = \sigma_0(1 - \frac{r_i}{r_e}) \tag{12.106}$$

[5] La vérification indique que cet ordre est respecté dans le tube extérieur mais pas nécessairement dans le tube intérieur, auquel cas il faut reprendre l'analyse. On trouve en fait que le critère élaboré dans la suite reste le même dans ce dernier cas.

[6] Pour cela, on cherche le minimum de la fonction

$$\frac{r_i^2}{x} + \frac{x}{r_e^2}$$

pour $r_i^2 \leq x \leq r_e^2$, ce qui donne $x^2 = r_i^2 r_e^2$.

En comparant le critère (12.77) pour le tube simple avec le critère pour l'assemblage fretté (12.106), on constate le gain significatif apporté par les contraintes initiales : l'écart de pression maximal autorisé, obtenu pour $r_e/r_i \to \infty$ est deux fois plus grand pour l'assemblage fretté que pour le tube simple[7]. Pour une pression Δp acceptable pour les deux structures, on constate que l'assemblage fretté adéquat est plus mince que le tube seul correspondant requis. Le rayon intermédiaire ρ donné par (12.105) représente une valeur optimale de ce paramètre pour l'assemblage fretté. Le critère (12.106) est représenté sur la figure 12.7.

Il est possible aussi d'optimiser la pression de frettage p_{init}. La pression p, liée à p_{init} par (12.101), doit être telle que les inégalités (12.103) soient toujours satisfaites. Lorsque la valeur optimale du rayon intermédiaire (12.105) est substituée dans (12.103), les deux critères deviennent :

$$|p_i - p| < \frac{\sigma_0}{2}(1 - \frac{r_i}{r_e}) \quad \text{(tube intérieur)} \tag{12.107}$$

$$|p - p_e| < \frac{\sigma_0}{2}(1 - \frac{r_i}{r_e}) \quad \text{(tube extérieur)} \tag{12.108}$$

Les valeurs critiques sont donc identiques. L'idée est alors de choisir p telle que les deux critères (12.108) soient atteints simultanément, ce qui n'est possible que pour $p_i - p = p - p_e$. Cette condition fournit la pression intermédiaire optimale pour l'assemblage fretté :

$$p = \frac{p_e + p_i}{2} \quad \Longleftrightarrow p_{init} = \frac{p_i - p_e}{2}\,\frac{r_e - r_i}{r_e + r_i} \tag{12.109}$$

La valeur optimale de p a été introduite dans (12.101) pour trouver la pression initiale intermédiaire optimale p_{init} correspondante. Dans ces conditions, la limite d'élasticité est atteinte pour la première fois en $r = r_i$ et $r = \rho = \sqrt{r_i r_e}$ simultanément. La pression optimale p_{init} est obtenue pour un jeu ϵ optimal entre les deux tubes initiaux. La valeur du jeu est donnée par la relation (12.96), ce qui conduit à

$$\epsilon = \rho\,\frac{\Delta p}{E} = \sqrt{r_i r_e}\,\frac{|p_i - p_e|}{E} \tag{12.110}$$

En toute rigueur, il reste à vérifier qu'avec les valeurs choisies pour ρ et p_{init}, la structure reste élastique dans les conditions de chargement (12.108).

[7] La limite d'élasticité est certes doublée, mais on peut montrer que la charge limite, définie comme l'écart de pression pour lequel les tubes sont entièrement plastifiés, reste inchangée.

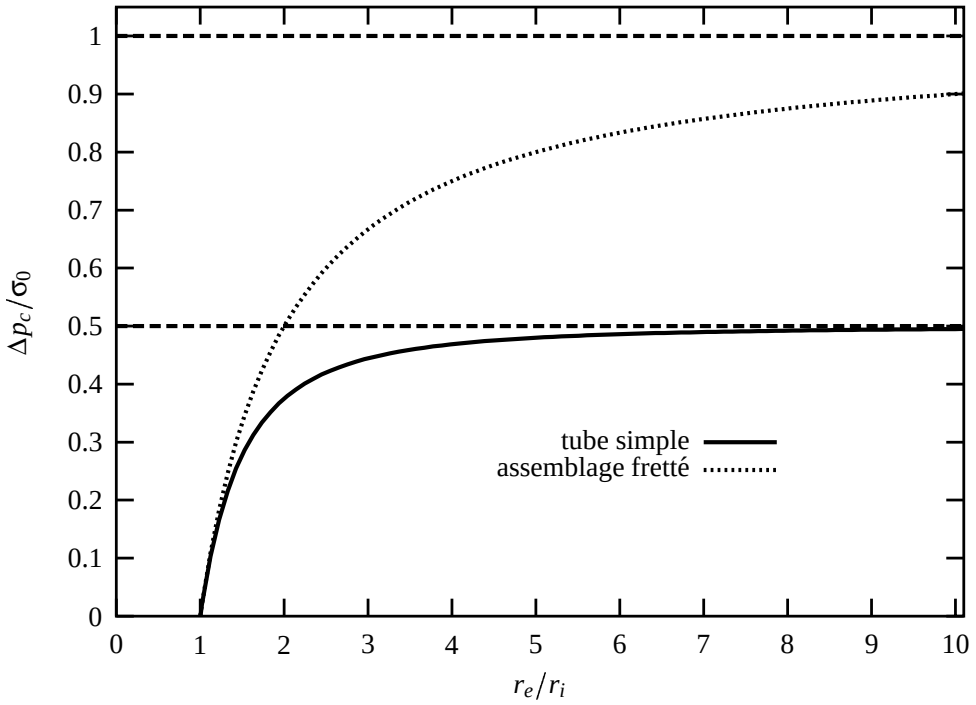


FIG. 12.7 – Dimensionnement d'un réservoir sous pression : comparaison entre un tube simple et un assemblage fretté. L'écart de pression critique Δp_c normalisée par la limite d'élasticité σ_0 est tracé en fonction du rapport des rayons du réservoir sous pression. Au–delà de cette limite le comportement du réservoir cesse d'être élastique linéaire. Les asymptotes $\sigma_0/2$ et σ_0 sont aussi représentées.

Chapitre 13

Torsion

13.1 Introduction

La solution du problème de torsion d'une barre cylindrique de section quelconque est due à A. Barré de Saint–Venant[1] entre 1853 et 1855. Pour un exposé moderne de cette solution, il est utile de présenter un préliminaire d'ordre mathématique sur le problème aux limites dit de Neumann.

13.1.1 Problème de Neumann pour les fonctions harmoniques

On considère un domaine Ω de l'espace, supposé simplement connexe, de frontière $\partial\Omega$. Le problème de Neumann pour les fonctions harmoniques consiste à chercher les fonctions φ à laplacien nul et à flux imposé q^d sur la frontière :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\nabla}\varphi.\underline{\boldsymbol{n}} = q^d & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{13.1}$$

De telles fonctions sont dites **harmoniques**.

On établit d'abord une condition nécessaire à l'existence d'une solution. Pour cela, on évalue le flux total de φ sortant de Ω :

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nabla}\varphi.\underline{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\varphi\, dV = \int_{\Omega} \Delta\varphi\, dV = 0 \tag{13.2}$$

Le théorème de la divergence (A.127) a été utilisé au passage. Dans le calcul précédent est apparue la dérivée normale de φ en un point matériel $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega$ définie comme

$$\frac{d\varphi}{dn} := \boldsymbol{\nabla}\varphi.\underline{\boldsymbol{n}} \tag{13.3}$$

La donnée q^d doit être compatible avec la condition précédente. Une condition nécessaire d'existence d'une solution est par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} q^d\, dS = 0 \tag{13.4}$$

Dans ces conditions, des résultats d'ordre mathématique montrent que la solution est déterminée de manière unique, à une constante additive près.

[1] Adémard Barré de Saint–Venant (1797–1886)

Cas plan

Si $\varphi(x,y)$ est une fonction du plan définie sur la surface plane S, simplement connexe, de bord Γ, le problème de Neuman s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \quad \text{sur } S \\ \boldsymbol{\nabla}\varphi.\underline{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}n_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}n_2 = q^d \quad \text{sur } \Gamma \end{array}\right. \tag{13.5}$$

Il est instructif de reprendre la preuve de la condition nécessaire (13.4) dans le cas bidimensionnel. Soit $x(l), y(l)$ une paramétrisation du contour Γ. Le vecteur tangent en tout point de Γ est colinéaire à $[x'(l)\ y'(l)]^T$ où la notation $x' = dx/dl$ est utilisée. Le vecteur normal à Γ dans le plan (x,y) est colinéaire à $[y'\ -x']^T$. La dérivée normale de φ le long de Γ est

$$\frac{d\varphi}{dn} = \boldsymbol{\nabla}\varphi.\underline{\boldsymbol{n}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}x' \tag{13.6}$$

L'intégration de ce flux le long de Γ conduit à

$$\int_\Gamma \frac{d\varphi}{dn}\,dl = \int_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right) = \int_S \left(\underbrace{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}}_{\Delta\varphi=0}\right) dxdy = 0 \tag{13.7}$$

Pour passer de la deuxième à la troisième égalité, on a utilisé le théorème de Green, qui n'est guère qu'un cas particulier du théorème de la divergence dans le cas bidimensionnel :

Théorème 20 (Théorème de Green) *Soit P, Q deux fonctions régulières définies sur une surface S du plan, de frontière Γ, alors*

$$\int_\Gamma (Pdx + Qdy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{13.8}$$

On obtient finalement la condition nécessaire d'existence de solution pour le problème de Neumann bidimensionnel

$$\int_\Gamma q^d\,dl = 0 \tag{13.9}$$

Il ne s'agit en fait que d'un cas particulier de (13.4), démontré plus haut en toute généralité.

13.2 Torsion élastostatique d'un barreau cylindrique

On considère un barreau cylindrique de section courante S de forme quelconque (simplement connexe, c'est–à–dire en un seul morceau) et de longueur l, comme l'indique la figure 13.1. Le barreau est constitué d'un matériau homogène et isotrope. Il est soumis aux efforts suivants :

- les efforts volumiques sont nuls ou négligés ;
- les surfaces latérales, i.e. $\partial S - (S_0 \cup S_l)$, sont libres :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{\,d} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{13.10}$$

- Les extrémités S_0 et S_l sont soumises à des densités surfaciques d'effort dont seul le torseur résultant est donné sur chaque extrémité. Le torseur des efforts appliqués à la section S_l est

$$[O,\ \underline{\boldsymbol{R}} = 0,\ \underline{\boldsymbol{M}}_0 = \mathcal{C}\,\underline{\boldsymbol{e}}_z] \tag{13.11}$$

Le torseur des efforts appliqués à la section S_0 est

$$[O,\ \underline{\boldsymbol{R}} = 0,\ \underline{\boldsymbol{M}}_0 = -\mathcal{C}\,\underline{\boldsymbol{e}}_z] \tag{13.12}$$

Un moment $\mathcal{C}$ selon l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ est donc appliqué à l'extrémité S_l et le moment opposé à l'autre extrémité. La résultante des forces sur chaque section est nulle.

On peut vérifier que le torseur résultant des efforts appliqués au barreau est nul.

De manière similaire au cas de la flexion traité à la section 8.2.2, on est confronté à un problème aux limites mal posé, puisque seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné au lieu du vecteur contrainte ou déplacement en chaque point des extrémités. On ne peut donc attendre de solution unique au problème posé. Toutefois, en vertu du principe de Saint–Venant exposé à la section 8.2.3, il existe une solution qui, suffisamment loin des extrémités, ne dépend quasiment pas de la façon dont les efforts sont appliqués aux extrémités. C'est cette solution qui nous intéresse ici. Pour la mettre en évidence, une certaine distribution particulière d'efforts ou de déplacements sera admise aux extrémités, compatible avec le torseur appliqué. Pour un tel choix, la solution devient bel et bien unique.

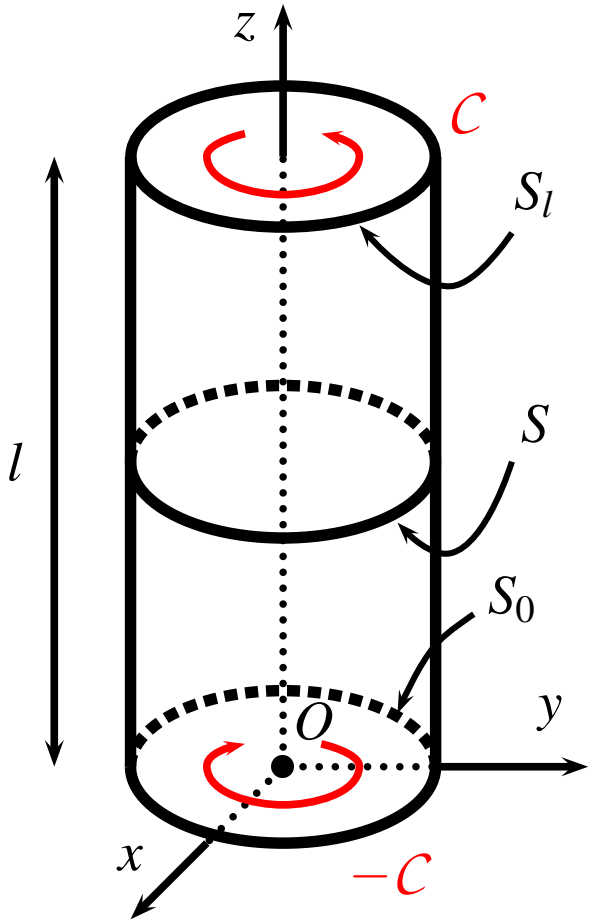


FIG. 13.1 – Torsion d'un barreau cylindrique : schéma de principe.

13.2.1 Méthode des déplacements

Bien que le problème ait été posé en terme d'efforts par l'intermédiaire du moment $\mathcal{C}$, c'est vers une solution par la méthode des déplacements que l'on se tourne ici. En effet, on imagine que l'application du moment d'axe z va provoquer une rotation des sections par rapport à cet axe. Proposer, dans le contexte infinitésimal, une cinématique dictant une rotation relative d'une section de cote donnée à la suivante. On supposera que la section S_0 ne bouge pas tandis que la section S_l subit la rotation maximale.

Si l'on suppose qu'une section de cote Z subit une rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ et d'angle θ, chaque point de cette section subit le déplacement :

$$\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.(\underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{X}}_z) \tag{13.13}$$

où le centre de rotation $\underline{\boldsymbol{X}}_Z = Z\underline{\boldsymbol{e}}_z$ ne jouera en fait aucun rôle dans la suite. Dans le contexte infinitésimal, la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ peut être remplacée par son vecteur axial $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{Q}}}$ tel que

$$\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.(\underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{X}}_z) = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{Q}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{X}}_z) \tag{13.14}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta Y \\ \theta X \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13.15}$$

Les matrices sont écrites dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées dont la base figure sur la figure 13.1. L'angle θ est nul en $Z = 0$ et maximal en $Z = l$. La fonction $\theta(Z)$ peut être intuitivement supposée monotone croissante. La fonction linéaire suivante est une bonne candidate à tester :

$$\theta = \alpha Z \tag{13.16}$$

Le coefficient α désigne un angle imposé par unité de longueur.

L'expérience courante nous indique, par exemple lors de la torsion de barre à section rectangulaire (tordre une gomme...), que, si chaque section subit effectivement une rotation, on ne peut exclure une gondolement ou gauchissement de la surface venant se superposer à la rotation : une section plane ne le reste pas nécessairement. On se propose donc de tester le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_x = -\alpha Y Z \\ u_y = \alpha X Z \\ u_z = \alpha \varphi(X, Y) \end{cases} \tag{13.17}$$

où le déplacement u_z correspond à un gauchissement de la surface $Z = Cste$ après déformation. La fonction φ inconnue est la fonction de gauchissement. Le gradient de la transformation vaut

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha Z & -\alpha Y \\ \alpha Z & 0 & \alpha X \\ \alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial X} & \alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial Y} & 0 \end{bmatrix} \tag{13.18}$$

qui se décompose en une déformation et une rotation infinitésimales :

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X} - Y) \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + X) \\ \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X} - Y) & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + X) & 0 \end{bmatrix} \tag{13.19}$$

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha Z & -\frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X} + Y) \\ \alpha Z & 0 & \frac{\alpha}{2}(X - \frac{\partial\varphi}{\partial Y}) \\ \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial X} + Y) & \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial Y} - X) & 0 \end{bmatrix} \tag{13.20}$$

La déformation proposée ne s'accompagne d'aucun changement de volume puisque la trace de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est nulle. La barre ne s'allonge pas lorsqu'on la tord puisque $\varepsilon_{zz} = 0$.

Evaluation des contraintes et des conditions d'équilibre

Dans le cadre de l'élasticité isotrope linéarisée, évaluer les contraintes engendrées par les déformations calculées précédemment. A quelles conditions portant sur la fonction de gauchissement, l'équilibre statique est–il réalisé ?

Comme la trace de la déformation est nulle, la loi d'élasticité isotrope linéarisée à partir d'un état naturel (7.44), s'écrit :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \mu\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial X} - Y \\ 0 & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial Y} + X \\ \frac{\partial\varphi}{\partial X} - Y & \frac{\partial\varphi}{\partial Y} + X & 0 \end{bmatrix} \tag{13.21}$$

où μ est le module de cisaillement. En l'absence de forces volumiques et dans le cas statique, la divergence du tenseur des contraintes est nulle. En coordonnées cartésiennes orthonormées, cette condition s'écrit $\sigma_{ij,j} = 0$. La seule équation pertinente en tenant compte de la forme trouvée (13.21) pour le tenseur des contraintes, est

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \tag{13.22}$$

En substituant les composantes trouvées, on obtient la condition :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} = \Delta\varphi = 0, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in S \tag{13.23}$$

pour toute section S. La fonction de gauchissement doit donc être harmonique pour que la solution en déplacements proposée soit recevable.
La fonction de gauchissement doit en outre permettre de satisfaire les conditions à la frontière (13.10) à (13.12). On commence par la condition de bord libre (13.10) que l'on écrit sur la frontière Γ d'une section courante S et de vecteur normal $[n_1\, n_2\, 0]^T$:

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{t}}^{\,d} &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial X}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial Y}n_2 - Yn_1 + Xn_2 = 0 \end{aligned} \tag{13.24}$$

On aboutit à la condition supplémentaire portant sur φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} n_2 = \boldsymbol{\nabla} \varphi . \underline{\boldsymbol{n}} = \frac{d\varphi}{dn} = n_1 Y - n_2 X, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in \Gamma \tag{13.25}$$

Au passage, on a reconnu le flux du gradient de φ à travers Γ, appelée aussi dérivée normale de φ, en suivant la définition (13.3). La condition de bord libre impose donc le flux de φ. Sur une section courante S, la fonction de gauchissement est donc solution de l'équation (13.23) avec la condition de flux imposé (13.25) sur son contour Γ. On reconnaît un problème de Neumann, du type (13.1), avec

$$q^d = n_1 Y - n_2 X, \quad \forall \underline{\boldsymbol{X}} \in \Gamma \tag{13.26}$$

On sait qu'une condition nécessaire à l'existence d'une solution est que le flux total de la donnée q^d soit nul, i.e. la condition (13.4). Il faut vérifier si cette condition est remplie ou non dans le cas du flux (13.26). Le contour Γ admet une paramétrisation $X(l), Y(l)$ et un vecteur normal dans le plan (X, Y) égal à $[Y' \; -X' \; 0]^T$; ce qui permet d'évaluer l'intégrale

$$\int_\Gamma (n_1 Y - n_2 X)\, dl = \int_\Gamma (\frac{dY}{dl} Y + \frac{dX}{dl} X)\, dl = \int_\Gamma (X dX + Y dY) \; = 0 \tag{13.27}$$

La dernière intégrale est effectivement nulle sur un contour fermé. D'après le préliminaire mathématique 13.1.1, la réalisation de la condition (13.4) garantit l'existence de la fonction de gauchissement et son unicité à une constante additive près correspondant à une translation selon $\underline{\boldsymbol{e}}_z$, qu'il reste à fixer.

Il reste à évaluer les conditions imposées sur les surfaces S_0 et S_l, à savoir la résultante nulle et le moment appliqué $\mathcal{C}$. Ce point fait l'objet de la section suivante.

13.2.2 Force résultante

On évalue d'abord la résultante des efforts induits par les contraintes calculées précédemment :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{R}} &= \int_{S_l} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{e}}_z \, dS \\ &= \mu\alpha \left(\int_{S_l} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y \right) dS \right) \underline{\boldsymbol{e}}_x + \mu\alpha \left(\int_{S_l} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X \right) dS \right) \underline{\boldsymbol{e}}_y \end{aligned} \tag{13.28}$$

Le résultat semble dépendre de la fonction de gauchissement et donc de la géométrie particulière de la section. En fait, on va montrer qu'il n'en est rien. Pour le voir, on part de la condition (13.25) portant sur φ établie plus haut et remplie sur Γ :

$$(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) n_1 + (\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) n_2 = 0 \tag{13.29}$$

On multiplie l'expression précédente par X et on l'intègre sur le contour Γ :

$$\int_\Gamma \left(X(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) n_1 + X(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) n_2 \right) dl \;\; = \;\; 0 \tag{13.30}$$

$$\int_\Gamma \left(\underbrace{X(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y)}_{Q} \, dY - \underbrace{X(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X)}_{P} \, dX \right) \;\; = \;\; 0 \tag{13.31}$$

Les termes P et Q ont été soulignés dans l'expression précédente afin de pouvoir appliquer le théorème de Green (13.8). L'expression précédente est donc égale à

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial X} \left(X(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(X(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) \right) \right) dS = 0 \tag{13.32}$$

$$\int_S \left((\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) + X(\underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}}_{=0 \text{ d'après (13.23)}}) \right) dS = 0 \tag{13.33}$$

On en déduit que

$$\int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y \right) dS = 0, \quad \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X \right) dS = 0 \tag{13.34}$$

La première équation $(13.34)_1$ résulte de la chaîne de calculs (13.33). La deuxième équation $(13.34)_2$ est le résultat que l'on obtient en suivant le même démarche mais en multipliant l'équation (13.29) par Y au lieu de X. Les résultats (13.34) permettent de conclure que, pour toute fonction de gauchissement φ vérifiant (13.23) et (13.25), la résultante (13.28) des efforts sur la section S_l est nulle. Il en va de même pour la résultante sur la section S_0. Ces résultats sont compatibles avec le chargement imposé (13.11) et (13.12).

13.2.3 Rigidité de torsion

Il reste à calculer le moment résultant des forces sur la section S_l par rapport au point O :

$$\underline{\boldsymbol{M}}_O = \int_{S_l} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}) \, dS \tag{13.35}$$

$$\begin{aligned}
[\underline{\boldsymbol{M}}_O] &= \mu\alpha \int_{S_l} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ l \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X \\ 0 \end{bmatrix} dS \\
&= \mu\alpha \int_{S_l} \begin{bmatrix} l(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) \\ l(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) \\ X(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) - Y(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) \end{bmatrix} dS \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\alpha \int_{S_l} \left(X(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) - Y(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) \right) dS \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{13.36}$$

où l'on a utilisé le résultat (13.34). Le moment résultant est donc porté par $\underline{\boldsymbol{e}}_z$. On peut l'identifier au couple imposé à S_l, à savoir $\mathcal{C}\,\underline{\boldsymbol{e}}_z$ d'après (13.11) :

$$\mathcal{C} = \mu J\,\alpha, \quad J := \int_S \left(X(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) - Y(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) \right) dS \tag{13.37}$$

La formule (13.37) relie le couple imposé $\mathcal{C}$ à l'angle de rotation de section par unité de longueur axiale α, par le biais de la **rigidité de torsion** μJ. La rigidité de torsion dépend du module de cisaillement du matériau et de la géométrie de la section. J est appelé **inertie de torsion** de la section.

Une autre expression du moment d'inertie J peut être obtenue en reprenant la démarche mise en œuvre pour le calcul de la force résultante au paragraphe 13.2.2. On multiplie cette fois l'expression (13.29) par φ, on l'intègre sur le contour Γ et on applique le théorème de Green. On peut alors montrer que

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left(X(\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X) - Y(\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y) \right) dS \\ &= \int_S \left((\frac{\partial \varphi}{\partial X} - Y)^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial Y} + X)^2 \right) dS \end{aligned} \tag{13.38}$$

Cette expression a le mérite de montrer que J est strictement positif quelle que soit la forme de la section non réduite à un point. Un couple $\mathcal{C} > 0$ positif selon Z implique donc nécessairement une rotation des sections dans le même sens d'après (13.37), ce qui est conforme à l'intuition.

13.2.4 Barre de section circulaire

Lorsque la section de la barre est un disque de rayon R, le flux de la fonction de gauchissement donné par (13.26) devient :

$$q^d = n_1 Y - n_2 X = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}(XY - YX) = 0 \tag{13.39}$$

Les solutions du problème de Neumann avec un flux imposé nul sont les fonctions constantes. En effet, $\varphi = 0$ est à laplacien nul et à flux nul, c'est donc une solution du problème de Neumann. Les autres en diffèrent par une constante. On prend ici

$$\varphi_{disque} = 0 \tag{13.40}$$

Il n'y a donc pas de gauchissement des sections perpendiculaires à l'axe de torsion : elles restent planes. Les champs de déplacement, contraintes et déformations donnés par (13.17), (13.21) et (13.19) s'écrivent plus simplement en coordonnées cylindriques :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \alpha Z r\, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{13.41}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\alpha}{2} r\, (\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta) \tag{13.42}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mu \alpha r (\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z + \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta) \tag{13.43}$$

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad \text{avec} \quad J = \frac{\pi R^4}{2} \tag{13.44}$$

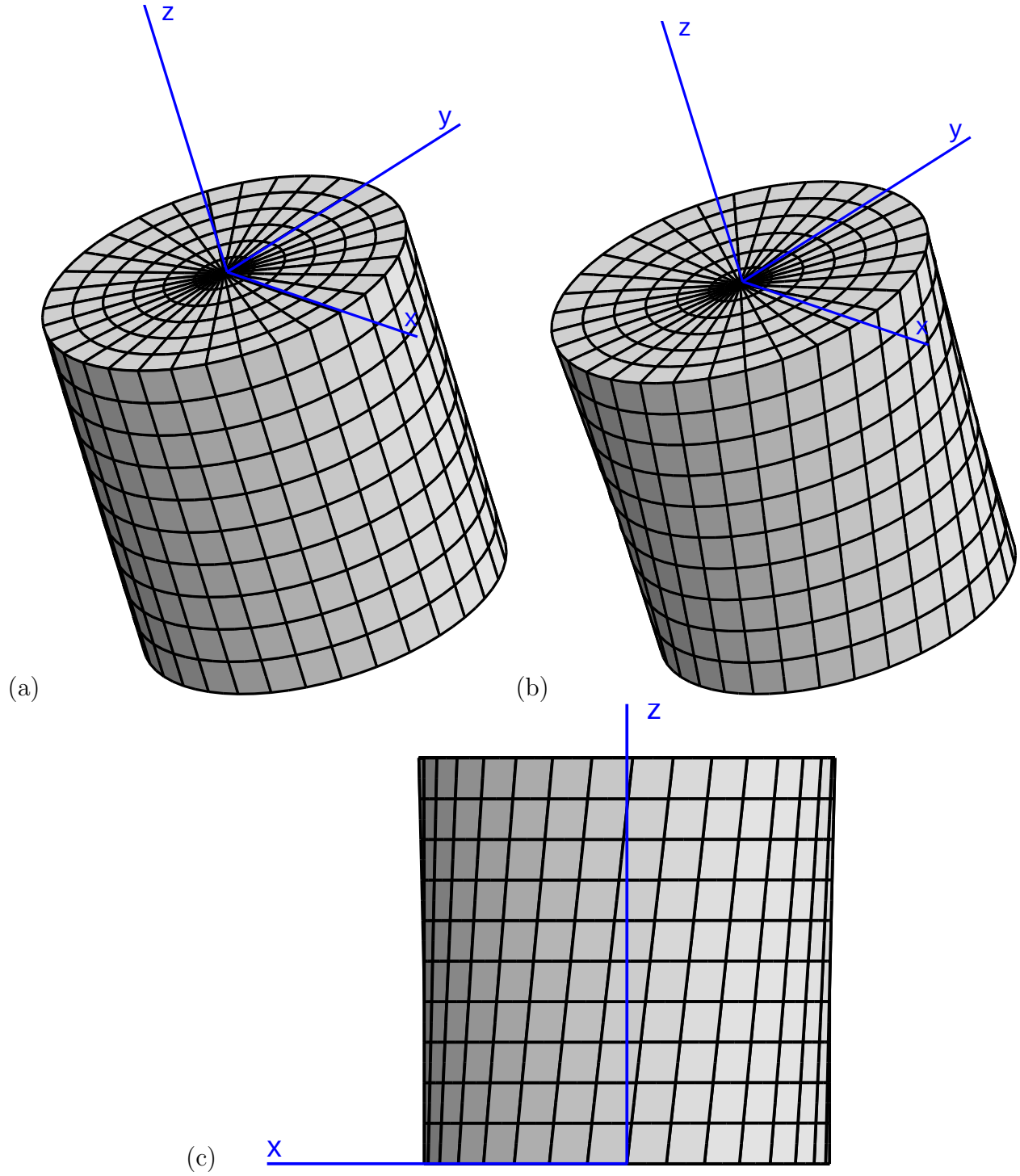


FIG. 13.2 – Déformée d'une barre cylindrique à section circulaire ($R = 1$ mm, $l = 2$ mm, $\alpha = 10°\text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) vue 3D de la déformée, (c) vue selon l'axe y.

Seules les composantes $u_\theta, \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta}, \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$ sont actives. Elles sont linéaires en r et, comme prévu, indépendantes de Z. Les contraintes sont nulles sur l'axe de torsion. Pour un même angle de rotation α par unité de longueur, la déformation est d'autant plus faible que le fil est mince de même donc que la contrainte. Si le fil est élancé, les déplacements peuvent être grands alors même que les déformations restent faibles. C'est pourquoi il est plus simple de tordre des fils que des barres !

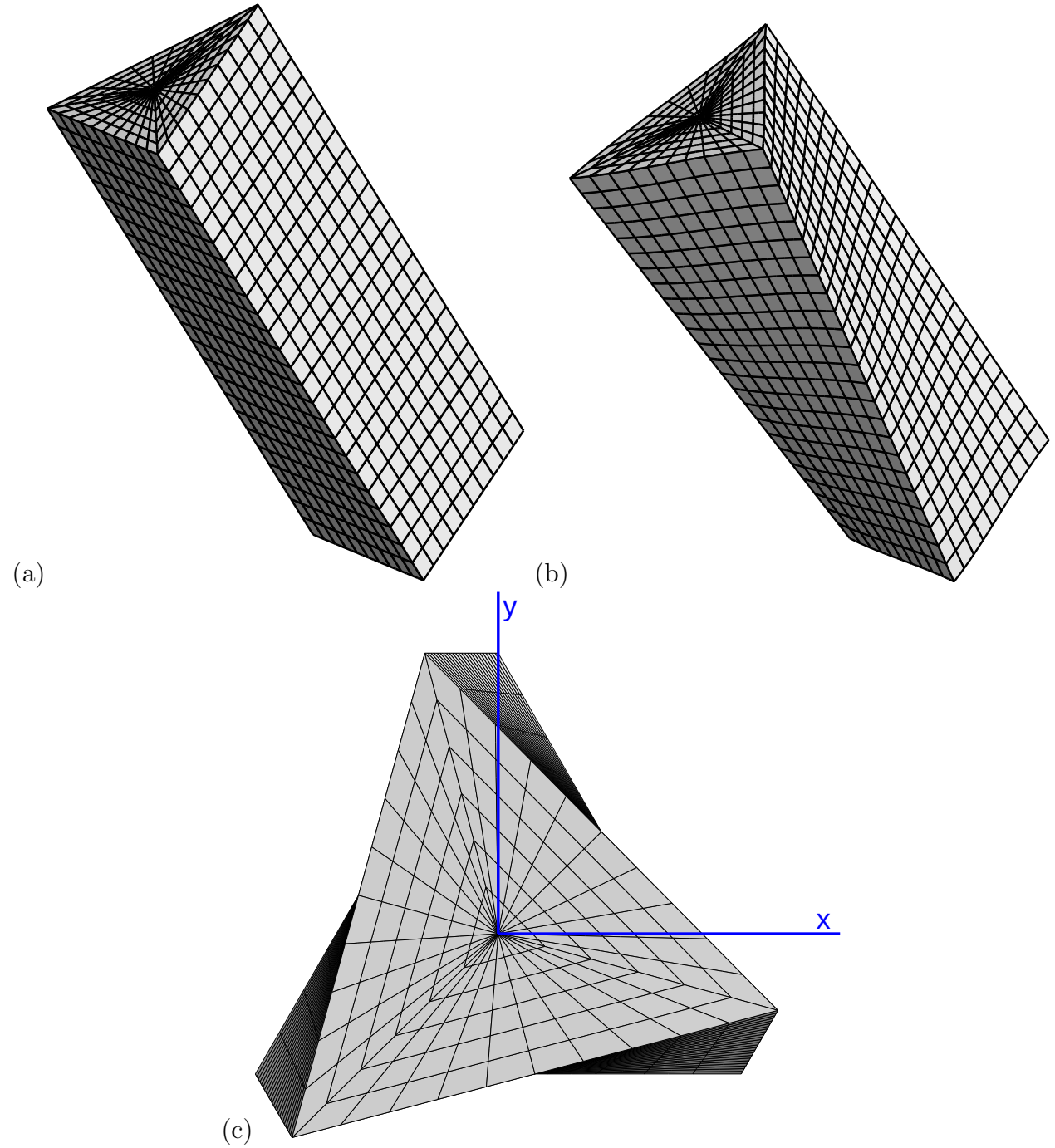


FIG. 13.3 – Etat déformé d'une barre cylindrique à section triangulaire (côté $a = 1$ mm $l = 4$ mm, $\alpha = 8°\text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de rotation).

Le vecteur contrainte sur S_l correspond à une densité d'efforts purement tangentiels qui engendrent le moment de torsion $\mathcal{C}$:

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{\,d} = \mu\alpha r\, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \tag{13.45}$$

L'état déformé d'une barre de section circulaire est illustré sur la figure 13.2. On voit en particulier que les droites $X = Y = Cste$ initialement verticales se transforment en droites inclinées.

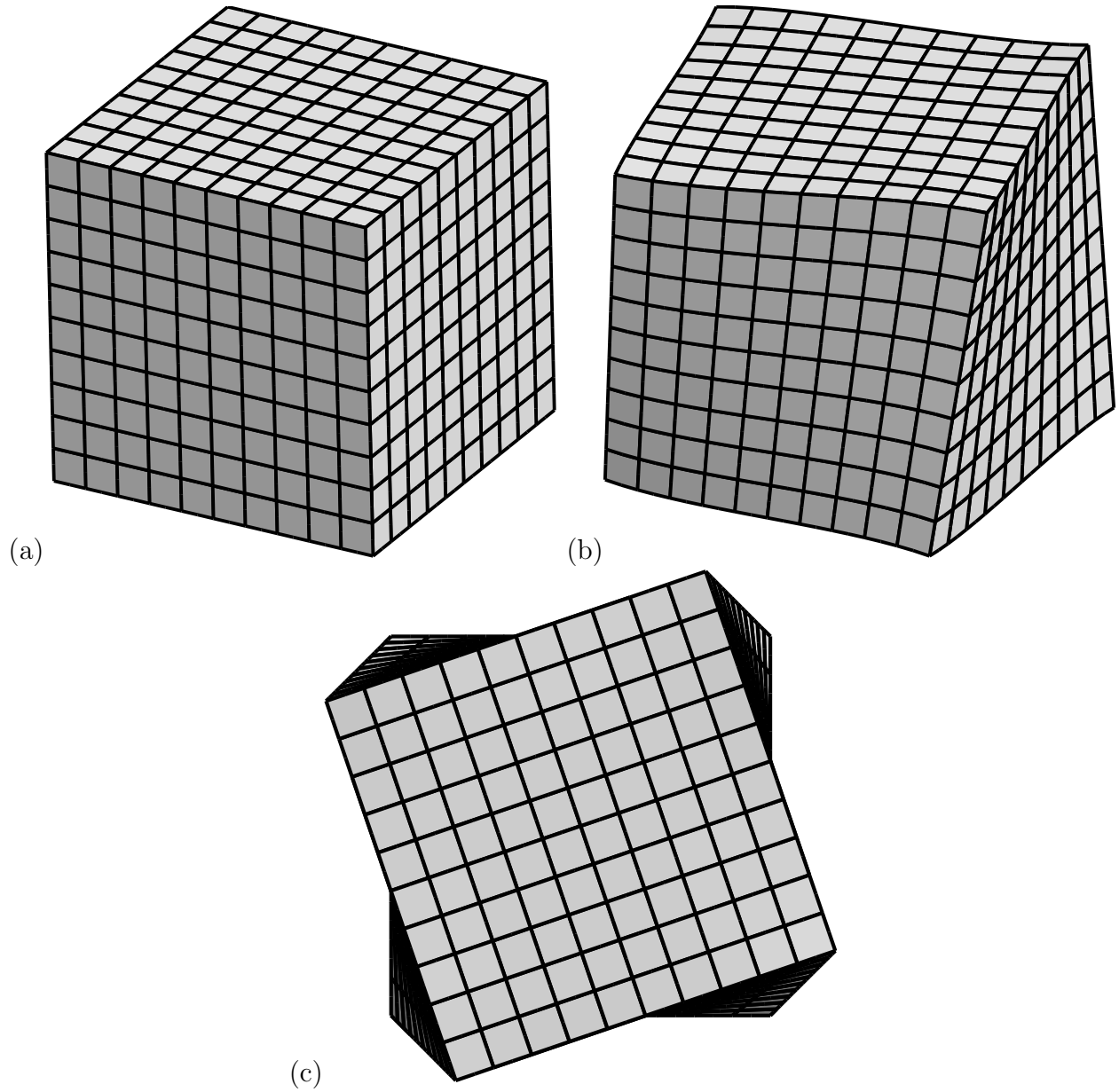


FIG. 13.4 – Etat déformé d'une barre cylindrique à section carrée (côté $a = 2$ mm, $l = 2$ mm, $\alpha = 5°\text{mm}^{-1}$) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de rotation).

Plus généralement, la torsion de barres à section triangulaire et carrée est illustrée par les figures 13.3 et 13.4. Contrairement au cas de la section circulaire, les sections triangulaires ou carrées ne restent pas planes. La fonction de gauchissement n'est pas nulle. Le champ de déplacement u_z normalisé est présenté sur la figure 13.5. La fonction de gauchissement est nulle au centre mais ondule près des bords. Les figures 13.3(c) et 13.4(c) montrent par contre que, vues de dessus (selon $\underline{\boldsymbol{e}}_z$), les sections gardent leur forme et ne subissent qu'une rotation, conformément au champ (13.17).

Les champs de contraintes $\sigma_{\theta z}$ sont illustrées par les figures 13.6 pour les trois types de section. Les résultats présentés ici pour les sections triangulaires et carrées ont été obtenus de manière numérique par la méthode des éléments finis.

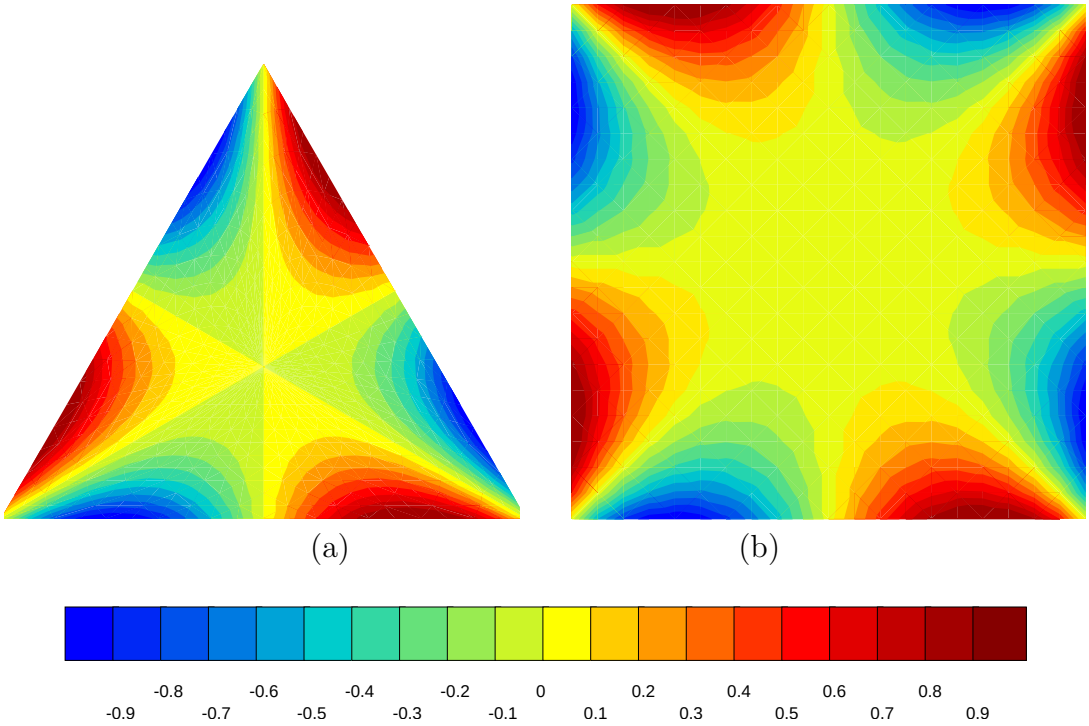


FIG. 13.5 – Cartes de déplacement u_z normalisé par la valeur maximale pour une barre à section triangulaire (a) et carrée (b).

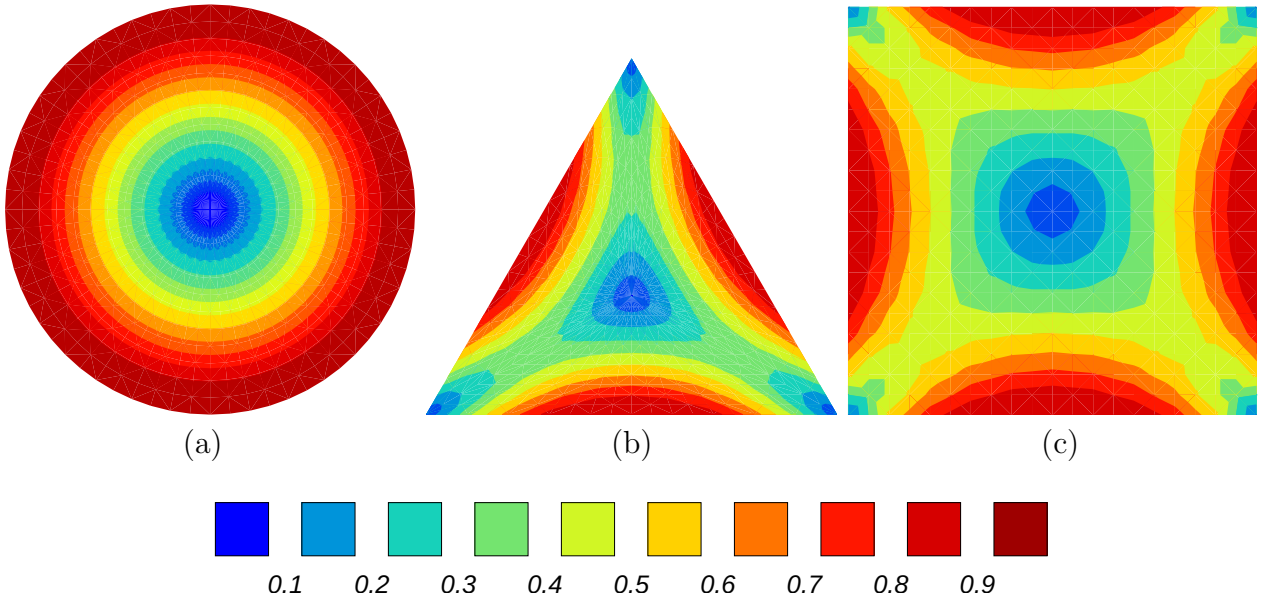


FIG. 13.6 – Cartes de contrainte $\sigma_{\theta z}$ normalisée par la valeur maximale pour une barre à section circulaire (a), triangulaire (b) et carrée (c).

Respect du contexte infinitésimal

Les analyses précédentes supposent que les composantes des tenseurs de déformation (13.19) et rotation (13.20) restent infinitésimales. Dans le cas d'une barre de section circulaire ces résultats se traduisent par

$$\alpha R \ll 1 \tag{13.46}$$

L'angle de rotation par unité de longueur est donc limité par l'inverse du rayon de la section. La solution est donc en particulier valable lorsqu'on impose des angles significatifs à des fils minces.

Cas d'un tube mince

La solution établie pour une barre à section circulaire est en fait valable aussi pour une tube d'épaisseur e quelconque. En effet, avec le champ de contraintes obtenu (13.21), le vecteur contrainte est nul en tout point d'une surface $r = r^d$ donnée, de sorte que la solution s'applique directement à un tube. L'inertie de torsion pour le tube de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e vaut

$$J_{tube} = \pi \frac{r_e^4 - r_i^4}{2} \tag{13.47}$$

Lorsque, de plus, le tube est mince, $r \simeq R$ si bien que contraintes et déformations peuvent être considérées comme constantes dans l'épaisseur du tube. Les champs de contraintes et de déformations sont quasi–homogènes. L'essai de torsion devient alors un bon candidat pour la caractérisation des matériaux puisque l'on recherche des états homogènes, autant que faire se peut. L'essai de torsion sur tube mince est une manière commode de réaliser pratiquement les conditions de glissement simple (dans le plan $(\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \underline{\boldsymbol{e}}_z)$), qui sont difficiles à réaliser sur des tôles, en raison d'effets de bord plus marqués.

L'essai de torsion sur tube ou sur barre permet de déterminer le module de cisaillement μ du matériau, tout comme l'essai de traction donne accès au module d'Young. Toutefois les précisions obtenues sur ces modules par ces essais de caractérisation statiques sont nettement moins bonnes qu'avec des essais dynamiques (vibrations). L'intérêt de l'essai sur tube mince apparaît plutôt lorsque l'on rentre dans le domaine de plasticité, problème abordé dans la section suivante.

13.3 Au–delà du régime élastique

13.3.1 Rupture fragile d'une barre de section circulaire

Un exemple de rupture fragile d'une éprouvette métallique en torsion a été donné sur la figure 4.4 au chapitre 4 introduisant les contraintes. On demande d'expertiser cette rupture.

La section de la partie utile de l'éprouvette est circulaire. Lors de l'essai de torsion, la contrainte maximale (en valeur absolue), dans la zone utile de l'éprouvette, est atteinte au bord $r = R$ avec la valeur $|\sigma_{\theta z}|^{max} = \mu\,|\alpha|\,R$. L'état de contrainte est de cisaillement simple (cf. table 4.3). Les contraintes principales sont donc $\sigma_{\theta z}, -\sigma_{\theta z}$. Les directions principales sont

$$(\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_z)/2, \quad (\underline{\boldsymbol{e}}_\theta - \underline{\boldsymbol{e}}_z)/2$$

Le critère de rupture fragile décrit au paragraphe 4.4.3 stipule que la rupture a lieu lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique σ_{rupt}. Pour la torsion de la barre, la rupture se produit donc pour :

$$|\alpha| = \alpha_{rupt} := \frac{\sigma_{rupt}}{\mu R} \tag{13.48}$$

On constate souvent en rupture fragile que la surface de rupture est perpendiculaire à la direction principale correspondant à la contrainte principale maximale. Dans le cas présent,

ces directions sont à 45° des vecteurs $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_z$. Cela explique la surface de rupture hélicoïdale[2] observée sur la figure 4.4.

13.3.2 Limite d'élasticité d'une barre à section circulaire en torsion

Si le matériau est ductile, c'est un critère de plasticité qu'il faut invoquer pour prévoir la limite du fonctionnement élastique de la barre en torsion. Le critère de Tresca (4.71) est un critère classique de plasticité. Il porte sur la différence maximale entre les contraintes principales. Dans le cas de la barre de section circulaire en torsion, le critère devient donc

$$|\sigma_{\theta z}|^{max} = \frac{\sigma_0}{2} \tag{13.49}$$

où σ_0 est la limite d'élasticité en traction. La contrainte est maximale en $r = R$, et c'est à cet endroit que la plasticité apparaît en premier. Ainsi, le fonctionnement de la barre reste élastique tant que :

$$|\alpha| < \frac{\sigma_0}{2\mu R} \tag{13.50}$$

Le critère peut aussi s'énoncer en fonction du couple imposé via l'équation (13.37) :

$$|\mathcal{C}| < \mathcal{C}^{max} := \frac{J\sigma_0}{2R} = \frac{\pi R^3 \sigma_0}{4} \tag{13.51}$$

Que deviennent ces valeurs critiques si l'on utilise le critère de von Mises (4.72) ?

[2]Cette observation est facile à faire sur une craie à section circulaire après torsion. La craie est un matériau fragile obéissant avec une bonne approximation au critère de rupture en contrainte normale maximale.

Chapitre 14

Machines tournantes

Les machines tournantes sont fréquentes dans les structures industrielles. Les disques et arbres sont des pièces critiques par exemple dans les moteurs d'avion et dans les turbines pour la production d'énergie. Leur dimensionnement est d'une importance capitale pour l'intégrité de la structure en service. Ils sont soumis à des forces centrifuges importantes et ne doivent pas éclater. En guise d'exemple, un assemblage complet de turbines de moteur d'hélicoptère est présenté sur la figure 14.1(a) comprenant la partie froide (compresseur) et la partie chaude du moteur (turbines haute pression en sortie de chambre de combustion). Les spécificités du moteur d'hélicoptère par rapport au moteur d'avion de ligne sont sa taille limitée et des vitesses de rotation des turbines sensiblement plus élevées. Dans ce moteur, on distingue deux familles de disques :

- les **disques alésés** possèdent un alésage (trou) concentrique permettant le passage de l'arbre. Deux exemples sont donnés sur les figures 14.1(b) et (c).
- les **disques non alésés** sont situés en tête ou fin d'assemblage et ne possèdent pas de trou central (figure 14.1(d)).

Les disques sont munis d'aubes formant un monobloc (figure 14.1(b)) ou attachées grâce à des encoches comme sur les figures 14.1(c) et (d). Les disques non solidaires de l'arbre sont entraînés en rotation grâce à des barres reliant les disques et passant par les trous visibles sur les disques des figures 14.1(c) et (d).

Le dimensionnement des disques de turbines vise à éviter l'éclatement aux vitesses de rotation souhaitées. La résistance à l'éclatement est testée lors d'essais de sur-vitesse sur banc. La figure 14.2 montre un disque de turbine de moteur d'hélicoptère qui a éclaté lors d'un tel essai. L'objectif de l'application traitée dans ce chapitre est d'évaluer les vitesses limites du fonctionnement élastique de disques alésés et non alésés. Les disques sont en général soumis à des températures élevées. Dans ce problème, on se place dans des conditions isothermes.

Dans les paragraphes 14.1 et 14.2, des expressions simplifiées des contraintes régnant dans les disques minces en rotation sont établies et appliquées à la prévision de l'entrée en plasticité et de la rupture des composants. Une solution complète du problème, au sens de Saint–Venant, est établie au paragraphe 14.3. Elle justifie *a posteriori* les expressions mises en avant dans les sections précédentes. L'établissement de cette solution nous conduit à mener ensuite une réflexion plus générale sur la déformation axisymétrique d'un composant cylindrique de longueur finie soumis à une large gamme de sollicitations. Une telle démarche est présentée au paragraphe 14.4. On établit au passage pour quels types de sollicitations la solution remplit les conditions de contraintes planes. Ces développements viennent en complément de la discussion sur la résolution de problèmes bidimensionnels en contraintes planes, entamée au paragraphe 8.3.2.

Le chapitre se termine par une évaluation des vitesses critiques dans les arbres en rotation.

14.1 Expressions simplifiées de la réponse élastique linéarisée d'un disque mince en rotation

On va déterminer la réponse élastique linéarisée d'un disque simplifié axisymétrique d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ présentant une section rectangulaire dans le plan (r, z) de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e comme sur la figure 14.3. On ne tient donc pas compte des variations d'épaisseur des disques réels. On supposera dans cette partie que le disque est libre d'effort en $r = r_i$ (existence d'un jeu entre l'arbre et le disque). Dans ce problème, l'aubage n'est pas pris en compte pour des raisons de simplicité. Le disque est alors libre d'effort en $r = r_e$. On se restreint au contexte des petites perturbations et au cas des contraintes planes ($\sigma_{zz} = 0$) licite pour un disque suffisamment mince. Le matériau a un comportement élastique isotrope linéarisé. La configuration initiale est supposée correspondre à un état naturel.

Le disque tourne à la vitesse angulaire $\omega\,\underline{\boldsymbol{e}}_z$ supposée constante (ou variant très lentement). Dans le problème, on va déterminer les composantes des champs de contraintes, de déformations et de déplacements dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), d'origine O, attaché au disque. On travaille donc dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire $\omega\,\underline{\boldsymbol{e}}_z$.

14.1.1 Efforts centrifuges

Dans le référentiel tournant attaché au disque, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = 0 \tag{14.1}$$

Montrer que les efforts volumiques induits par la vitesse d'entraînement du disque valent :

$$\rho \underline{\boldsymbol{f}} = \rho\omega^2 r\, \underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{14.2}$$

On calcule la vitesse d'entraînement du référentiel attaché au disque :

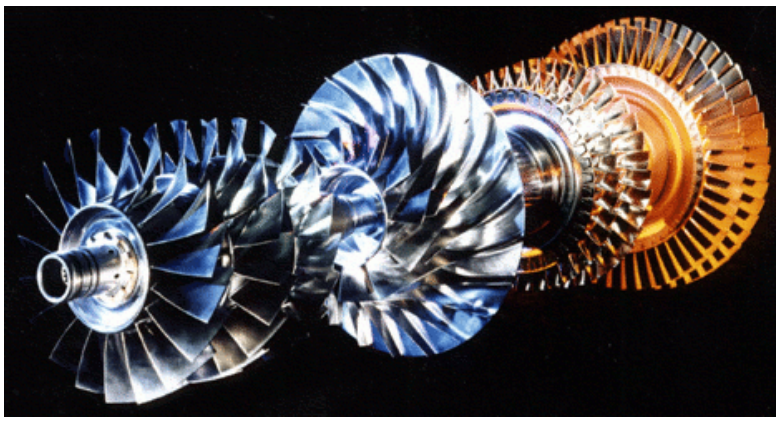
$$\underline{\boldsymbol{x}}^* = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}(t).\underline{\boldsymbol{x}}$$

$$\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}^* = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.\underline{\boldsymbol{x}}^* = \underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underline{\boldsymbol{x}} = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}}^*$$

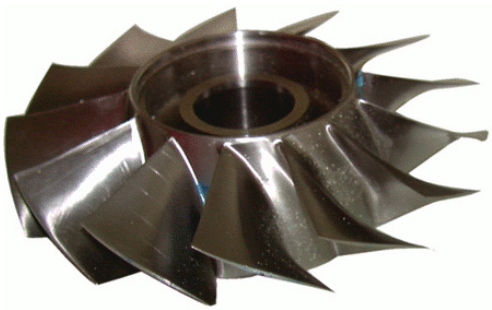
où $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \omega\,\underline{\boldsymbol{e}}_z$. D'où

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{\boldsymbol{x}}}^* &= \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \dot{\underline{\boldsymbol{x}}}^* = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge (\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}}^*) \\ &= (\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\,.\underline{\boldsymbol{x}}^*\,\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} - (\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\,.\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}})\underline{\boldsymbol{x}}^* \\ &= -\omega^2 r\, \underline{\boldsymbol{e}}_r \end{aligned} \tag{14.3}$$

pour $\underline{\boldsymbol{x}}^* = r\underline{\boldsymbol{e}}_r$, où $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ est attaché au disque. Dans le référentiel attaché au disque, il existe donc une force d'inertie $-\rho\ddot{\underline{\boldsymbol{x}}}^*$ On n'utilisera plus la notation $\underline{\boldsymbol{x}}^*$ dans la suite.

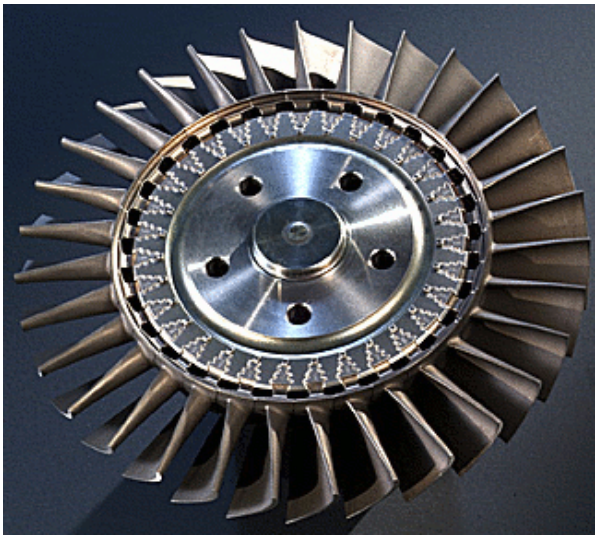


(a)



(b)

(c)



(d)

FIG. 14.1 – (a) Vue d'ensemble de l'assemblage de turbines d'un moteur d'hélicoptère (source Turboméca, cf. (Mazière, 2007)). (b) Disque alésé et son aubage (rouet de diamètre : 60 mm sans aubes). (c) Pour comparaison, disque alésé de moteur d'avion dépouillé de ses aubes (turbine haute pression, diamètre : 1000 mm). (d) Disque non alésé et ses aubes (diamètre du disque : 100 mm).

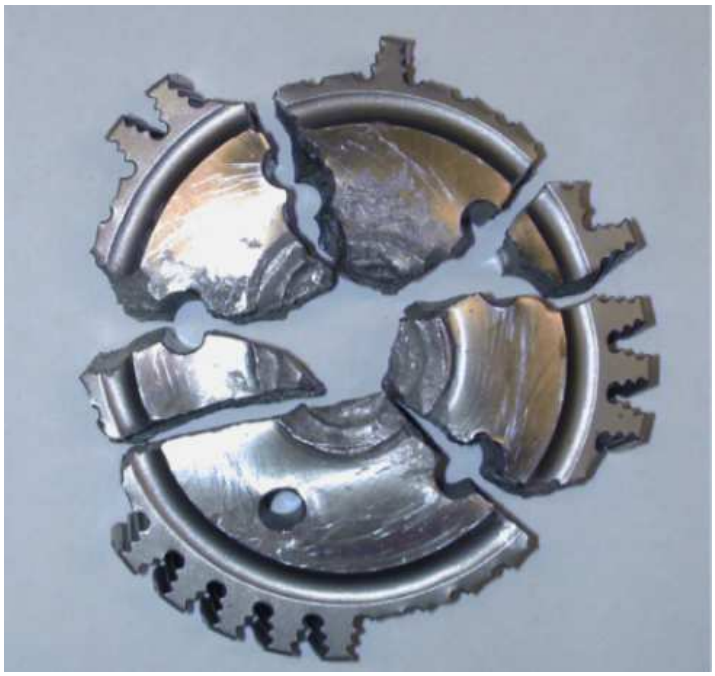


FIG. 14.2 – Disque de turbine éclaté après un essai de sur-vitesse sur banc (source Turboméca, cf. (Mazière, 2007)). La géométrie initiale du disque est celle de la figure 14.1(d).

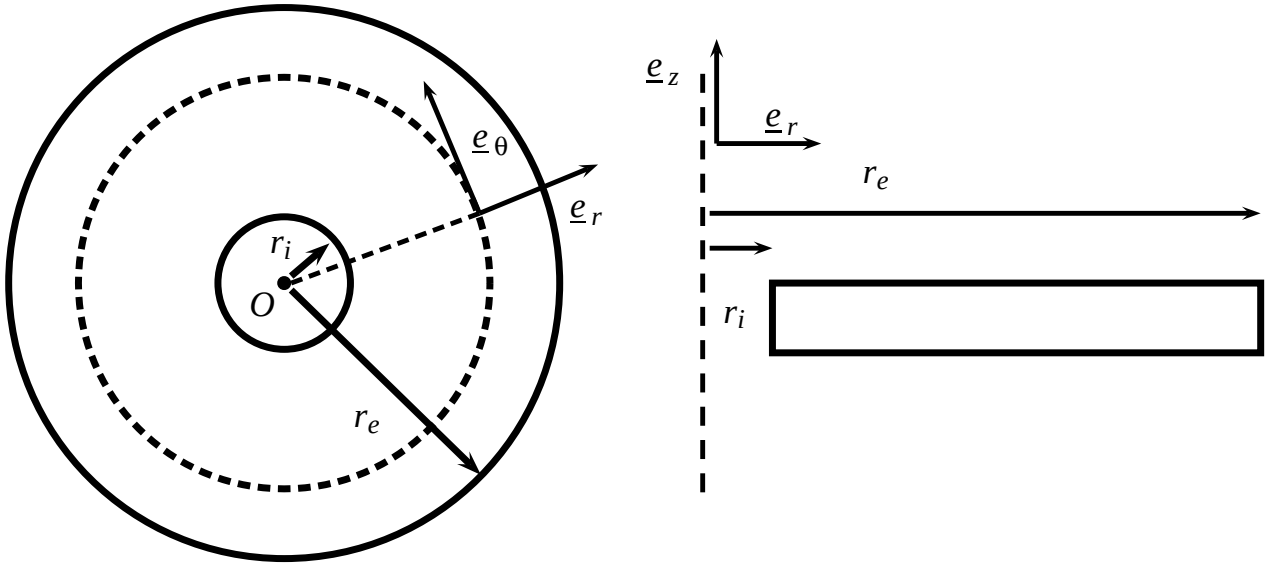


FIG. 14.3 – Schématisation d'un disque de turbine alésé ; dimensions du disque et introduction des coordonnées cylindriques.

14.1.2 Forme du tenseur des contraintes

On cherche l'état de contraintes dans le disque sous la forme

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14.4}$$

Le disque simplifié (ainsi que les autres données du problème) étant axisymétrique, les composantes cherchées ne dépendent pas de la variable θ. Dans ce problème, on va voir s'il est possible de trouver des expressions simplifiées de la solution, avec des contraintes sont indépendantes de la variable z. Les composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ sont donc recherchées comme des fonctions de la variable r seulement.

Déduire de (14.1) une équation portant sur les composantes cherchées du tenseur des contraintes.

L'expression de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cylindriques conduit à l'équation suivante portant sur les composantes de contraintes :

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \tag{14.5}$$

où σ'_{rr} désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr}.

14.1.3 Une condition de compatibilité

En utilisant une équation de compatibilité et les relations d'élasticité linéaire isotrope, établir la relation suivante

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma'_{\theta\theta} - \nu\sigma'_{rr}) \tag{14.6}$$

où σ'_{rr} (resp. $\sigma'_{\theta\theta}$) désigne la dérivée par rapport à r de σ_{rr} (resp. $\sigma_{\theta\theta}$).

En coordonnées cylindriques et lorsque les déformations ne dépendent que de r, une équation de compatibilité est

$$\varepsilon_{rr} = u'_r = (r\varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{\theta\theta} + r\varepsilon'_{\theta\theta} \tag{14.7}$$

où u_r est la composante radiale de déplacement. Les déformations sont liées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \frac{\nu\sigma_{rr}}{E},$$

Ces relations peuvent alors être substituées dans (14.7) ce qui conduit à (14.6).

14.1.4 Détermination des contraintes

Intégrer le système des deux équations obtenues et montrer que les contraintes se mettent sous la forme

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(3+\nu) + \frac{A}{r^2} + B \tag{14.8}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(1+3\nu) - \frac{A}{r^2} + B \tag{14.9}$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

Donner enfin l'expression complète des contraintes en fonction des caractéristiques du disque et des propriétés du matériau.

En éliminant $\sigma_{\theta\theta}$ dans (14.5) et (14.6), on obtient l'équation différentielle suivante portant sur σ_{rr} :

$$r\sigma''_{rr} + 3\sigma'_{rr} + \rho\omega^2 r(3+\nu) = 0 \tag{14.10}$$

dont la résolution conduit à (14.8) et (14.9).
Les conditions aux limites retenues dans ce problème sont

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{rr}(r = r_e) = 0$$

ce qui donne

$$A = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r_i^2 r_e^2, \quad B = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(r_i^2 + r_e^2)$$

On obtient finalement l'expression complète des contraintes :

$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{8}\frac{\rho\omega^2}{r^2}(r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2) \tag{14.11}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8}\left((3+\nu)\left(\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2}\right) - (1+3\nu)\right) \tag{14.12}$$

14.1.5 Déformations et déplacements

Les composantes du tenseur des déformations infinitésimales se déduisent des résultats précédents. En donner les expressions complètes.

Les relations d'élasticité isotrope linéarisées fournissent les déformations suivantes :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E}\left(3(\nu^2-1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right) \tag{14.13}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E}\left((\nu^2-1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right) \tag{14.14}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4}\left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2}\right) \tag{14.15}$$

Montrer que les résultats précédents permettent de déterminer la composante radiale de déplacement u_r.

Comme le déplacement radial vaut $u_r = r\varepsilon_{\theta\theta}$, il ne dépend pas de z et est entièrement déterminé :

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E}\left((\nu^2-1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right) \tag{14.16}$$

Donnons au passage la composante u_θ. Les dérivées partielles de u_θ par rapport à r et z interviennent dans les deux composantes de déformation suivante :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta} &= -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{aligned}$$

Comme ces deux cisaillements sont nuls dans le cadre de la solution recherchée, u_θ est une fonction de r seulement et vaut

$$u_\theta = \alpha r \tag{14.17}$$

Cette composante représente une rotation infinitésimale d'angle α par rapport à l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$. Fixons ce mouvement infinitésimal de corps rigide à $\alpha = 0$ dans la suite.

Montrer qu'il n'est pas possible de déterminer u_z. On constate donc l'échec de la démarche précédente pour trouver une solution acceptable au problème posé. Quelle hypothèse initiale doit–on remettre en cause ?

Il est possible en fait de trouver une solution acceptable à ce problème, au moins au sens de Saint–Venant. Cette solution plus complexe est illustrée par la figure 14.4 et sera établie au paragraphe 14.3. Commenter la déformée du disque vis–à–vis des résultats précédents.

L'intégration de l'équation (14.15) par rapport à z conduit à l'expression de u_z suivante :

$$u_z = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) + f(r) \tag{14.18}$$

où une fonction f de la coordonnée r doit être introduite. Pour la déterminer, il faut calculer la déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\nu(1+\nu)}{2E}\rho\omega^2 r z + f'(r) \tag{14.19}$$

Dans la démarche développée précédemment, un tel cisaillement est nul. Or, il est impossible de déterminer une fonction f dépendant de r seulement et annulant le cisaillement précédent.

L'échec de la démarche de résolution proposée est patent et nous amène à remettre en question les hypothèses simplificatrices introduites au début du problème. Deux hypothèses peuvent légitimement être remises en question : le cadre même des contraintes planes et l'indépendance des contraintes par rapport à la variable z. Le caractère mince du disque nous a incité à tester ces hypothèses. Toutefois, l'argument de minceur, à lui seul, ne permet d'exclure ni la dépendance en z (le contre–exemple étant la flexion d'un disque mince), ni même l'existence de contraintes σ_{zz} ou σ_{rz} dans la solution, même si ces dernières doivent s'annuler à la surface libre du disque. On montrera au paragraphe 14.3 qu'il est possible de construire une solution acceptable, en contraintes planes, au problème posé, mais seulement au sens de Saint–Venant. La différence fondamentale entre cette solution acceptable et les champs proposés précédemment est la dépendance en z des contraintes et déformations.

Cependant, il s'avère que les expressions des contraintes et déformations proposées précédemment représentent fidèlement certains aspects de la solution véritable. C'est pourquoi on propose de continuer à travailler avec ces expressions que l'on appellera dans la suite

"expressions simplifiées" de la solution acceptable. Pour cela, indiquer un argument qui incite à retenir l'expression suivante de u_z :

$$u_z = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \tag{14.20}$$

Dans la suite du problème on travaille avec les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements ainsi déterminées.

En vertu de la symétrie du disque (et des données du problème) par rapport au plan $z = 0$, la condition suivante est attendue :

$$u_z(r, z = 0) = 0, \quad \forall r \in [r_i, r_e] \tag{14.21}$$

Cette condition de symétrie entraîne la nullité de la fonction $f(r)$ dans (14.18). Le déplacement u_z prend donc la forme annoncée. Cette condition ne remet pas en cause l'échec de la démarche proposée. Mais le champ de déplacement proposé constitue une expression simplifiée de la solution. Il est donc utile dans la pratique.

La difficulté rencontrée pour remplir toutes les conditions de compatibilité avec la forme de solution initialement recherchée est typique des problèmes posés en contraintes planes. Les résultats obtenus de la sorte représentent des expressions simplifiées de la solution acceptable[1]. La pertinence de ces expressions simplifiées vient systématiquement de conditions de symétries particulières, dans le cas présent la symétrie par rapport au plan $z = 0$. Il sera utile de quantifier la correction apportée par la solution valide au sens de Saint–Venant.

Les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements du disque mince alésé en rotation sont rassemblées dans la table 14.1.

14.1.6 Contexte infinitésimal

Le contexte des petites perturbations qui a présidé aux développements précédents exige en particulier que les déformations restent infinitésimales. Préciser les conditions correspondantes, en fonction de la vitesse de rotation et des caractéristiques du disque. On ne cherchera pas dans ce problème à analyser les conditions associées au caractère infinitésimal des rotations.

Examinons d'abord la déformation circonférentielle,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2}{8E}\left((\nu^2-1)r^2 + (3+\nu)((1-\nu)(r_i^2+r_e^2) + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2}) \right) \\ &\geq \frac{\rho\omega^2}{8E}\left((\nu^2-1)r_e^2 + (3+\nu)((1-\nu)(r_i^2+r_e^2) + (1+\nu)r_i^2) \right) \\ &\geq \frac{\rho\omega^2}{4E}\left(r_e^2(1-\nu) + r_i^2(3+\nu) \right) \end{aligned} \tag{14.22}$$

[1] sauf circonstance exceptionnellement favorable, autorisant une dépendance affine de la déformation ε_{zz} et donc aussi de la trace des contraintes avec les coordonnées x, y pour des conditions de contraintes planes selon z. Cette dépendance affine de la déformation ε_{zz} dans le contexte des contraintes planes est une conséquence des équations de compatibilité (cf. paragraphe 8.3.2).

ce qui montre que $\varepsilon_{\theta\theta} \geq 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &\leq \frac{\rho\omega^2}{8E}\left((\nu^2-1)r_i^2+(3+\nu)((1-\nu)(r_i^2+r_e^2)+(1+\nu)r_e^2)\right) \\ &\leq \frac{\rho\omega^2}{4E}\left(r_i^2(1-\nu)+r_e^2(3+\nu)\right) \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \end{aligned} \tag{14.23}$$

On examine ensuite les déformations radiales et axiales :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8E}\left(3(\nu^2-1)r^2+(3+\nu)((1-\nu)(r_i^2+r_e^2)-(1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2})\right) \\ |\varepsilon_{rr}| &\leq \frac{\rho\omega^2}{8E}\left(3(1-\nu^2)r_e^2+(3+\nu)((1-\nu)(r_i^2+r_e^2)+(1+\nu)r_e^2)\right) \\ &\leq \frac{\rho\omega^2}{4E}(3-\nu)r_e^2 \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \end{aligned} \tag{14.24}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2}{4}\left(2(1+\nu)r^2-(3+\nu)(r_i^2+r_e^2)\right) \\ |\varepsilon_{zz}| &\leq \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2}{4}\left(2(1+\nu)r_e^2-(3+\nu)(r_i^2+r_e^2)\right) \\ &\leq 2\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \end{aligned} \tag{14.25}$$

Pour établir ces inégalités, on a utilisé la propriété suivante du coefficient de Poisson : $-1 < \nu < 0.5$ (cf. le résultat (7.65)). Les déformations précédentes sont infinitésimales si

$$\boxed{\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \ll 1} \tag{14.26}$$

L'expression (14.20) implique l'existence d'une déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\nu(1+\nu)}{E}\rho\omega^2 rz \tag{14.27}$$

Il se trouve que ce terme est du second ordre par rapport aux composantes de déformations retenues. En effet, d'après (14.26),

$$|\varepsilon_{rz}| = \frac{\nu(1+\nu)}{E}\rho\omega^2 r\ |z| \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E}\ \frac{|z|}{r_e} \ll |\varepsilon_{rr}|, |\varepsilon_{\theta\theta}|, |\varepsilon_{zz}| \tag{14.28}$$

pourvu que $|z|/r_e \ll 1$, i.e. pourvu que le disque soit suffisamment mince. Cet argument ne peut pas être utilisé pour justifier les expressions simplifiées trouvées, au titre du contexte infinitésimal. En effet, un tel cisaillement ε_{rz} se traduit, en vertu de la loi d'élasticité isotrope, par une contrainte de cisaillement $\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}$ non prise en compte dans la modélisation au paragraphe 14.1.2. Lorsque cette contrainte de cisaillement est insérée dans la première équation d'équilibre

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\rho\omega^2 r = 0 \tag{14.29}$$

les efforts volumiques sont corrigés et se transforment en $(1+\nu)\rho\omega^2 r$, ce qui ne représente pas en général une perturbation infinitésimale des efforts appliqués, à moins que ν soit idéalement nul.

Pour respecter le contexte infinitésimal, il reste encore à établir les conditions de rotations infinitésimales. Cette question sera abordée dans le cas de la solution correcte au sens de Saint–Venant établie au paragraphe 14.3.

14.1.7 Contact avec le carter et prise en compte de l'aubage

Il existe un jeu initial entre l'extrémité des aubes et le carter du moteur. En service, un contact entre les aubes et un matériau abradable tapissant le carter est possible en raison des déformations du disque et des aubes. Ce léger contact garantit l'étanchéité de l'écoulement des gaz. L'augmentation du rayon du disque ne doit toutefois pas dépasser une valeur critique e sous peine d'un arrêt de fonctionnement du disque. Indiquer le jeu minimal e autorisé en fonction de la vitesse de rotation en service.

L'augmentation du rayon extérieur du disque est donné par le déplacement

$$u_r(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4E} r_e (r_e^2(1-\nu) + r_i^2(3+\nu)) \tag{14.30}$$

Pour une vitesse de rotation du disque donnée, des caractéristiques géométriques et mécaniques données, le jeu minimal autorisé est donc $e = u_r(r = r_e)$ précédent, ou une fraction de cette valeur si une abrasion est autorisée.

Indiquer une manière approchée de prendre en compte l'influence des aubes sur la réponse du disque, tout en conservant la schématisation simplifiée axisymétrique du disque mince (figure 14.3).

Chaque aube exerce sur le disque une force égale à la résultante des forces centrifuges sur cette aube. On propose de distribuer de manière homogène cette force en tout point de la surface extérieure du disque sous la forme d'un effort surfacique donné :

$$\underline{\boldsymbol{t}}^{\,d} = \rho_{aube}\omega^2 r_a^2 \underline{\boldsymbol{e}}_r$$

La distance r_a est une distance effective définie à partir du rapport de n fois la norme de l'effort résultant sur chaque aube (n, nombre d'aubes) et de la surface extérieure du disque $\pi r_e H$, $2H$ étant l'épaisseur du disque. On est amené alors à reprendre les solutions en contraintes (14.8) et (14.9) et à identifier les constantes A et B avec les nouvelles conditions aux limites :

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = 0, \quad \sigma_{rr}(r = r_e) = \rho_{aube}\omega^2 r_a^2$$

14.2 Critères de plasticité et de rupture

On cherche ici les limites de fonctionnement du disque dans le régime élastique. Une vitesse de rotation critique est ainsi déterminée en fonction des caractéristiques du disque.

14.2.1 Seuil de plasticité et vitesse critique pour le disque mince alésé

On utilise le critère de Tresca pour prévoir le développement de déformations plastiques au sein du disque. On note σ_0 la limite d'élasticité du matériau en traction. La fonction critère s'écrit

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \max_{(\sigma_i,\sigma_j)} (\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0$$

où les σ_i désignent les contraintes principales. Le comportement du matériau reste purement élastique tant que

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) < 0$$

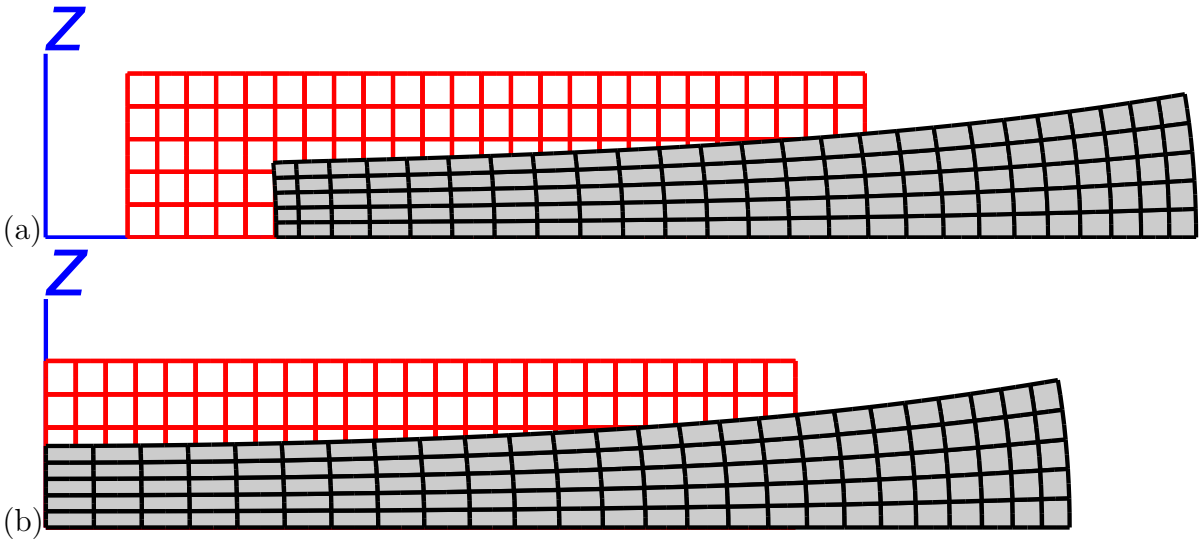


FIG. 14.4 – Déformation des disques minces en rotation : (a) disque alésé, (b) disque non alésé. L'état initial est en rouge et l'état déformé en grisé. Les déformations ont été exagérées pour l'illustration.

Tracer les profils de contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ obtenues au paragraphe 14.1.4. On se placera dans la situation $\nu > 0$ pertinente pour les classes de matériaux envisageables dans ce genre d'applications.

Indiquer en quel point du disque l'écoulement plastique va commencer.

Donner la vitesse de rotation ω_e correspondante, associée à l'apparition possible de la plasticité.

Remarquer que la vitesse critique ne dépend pas du module de Young du matériau.

La contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ est une fonction décroissante de r, au moins pour $\nu > 0$. Elle prend les valeurs minimale et maximale suivantes :

$$\sigma_{\theta\theta}^{min} = \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4}((3+\nu)r_i^2 + (1-\nu)r_e^2) \tag{14.31}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_{\theta\theta}(r = r_i) = \frac{\rho\omega^2}{4}((3+\nu)r_e^2 + (1-\nu)r_i^2) \tag{14.32}$$

(14.33)

La différence

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{4}((1-\nu)r^2 + (3+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2}) \geq 0 \tag{14.34}$$

est positive pour $r_i \leq r \leq r_e$. Ces contraintes normalisées par $\sigma_{\theta\theta}^{min}$ sont tracées sur la figure 14.5. Les contraintes principales se rangent donc dans l'ordre

$$\sigma_{zz} = 0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta} \tag{14.35}$$

de sorte que le critère de Tresca devient :

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_0 \ < 0 \tag{14.36}$$

Pour une vitesse de rotation donnée, la fonction critère est maximale en $r = r_i$. C'est donc à ce endroit que va commencer l'écoulement plastique. Ceci devient possible lorsque

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_0$$

ce qui correspond à la vitesse critique

$$\rho\omega_e^2 = \frac{4\sigma_0}{r_i^2(1-\nu) + r_e^2(3+\nu)} \tag{14.37}$$

La vitesse critique dépend donc uniquement de la limite d'élasticité σ_0 en traction, de la masse volumique et du coefficient de Poisson du matériau, ainsi que des caractéristiques géométriques r_i, r_e du disque.

En admettant que la plasticité s'initie au même endroit que pour le critère de Tresca, montrer que l'utilisation d'un critère de von Mises ne modifie pas la valeur de la vitesse limite du fonctionnement élastique.

Le critère de von Mises fait intervenir la contrainte équivalente

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2)}$$

(cf. paragraphe 4.4.5). Dans le cas du disque mince, elle vaut

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr}}$$

Elle prend la valeur $\sigma_{\theta\theta}^{max}$ en $r = r_i$ car la contrainte radiale s'y annule. En effet, le matériau en $r = r_i$ est soumis à un état de traction simple selon $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$. En admettant que la contrainte équivalente est effectivement maximale en $r = r_i$, on trouve donc la même vitesse limite qu'avec le critère de Tresca[2].

14.2.2 Vitesse critique pour un disque en superalliage à base de nickel

Evaluer numériquement la vitesse critique ω_e dans le cas d'un disque en superalliage à base de nickel de limite d'élasticité $\sigma_0 = 1000$ MPa. Les superalliages à base de nickel doivent leur nom à leur forte limite d'élasticité, même pour des hautes températures. On prendra les dimensions typiques :

$$r_i = 10 \text{ mm}, \quad r_e = 50 \text{ mm}$$

On donnera l'estimation trouvée en nombre de tours par minute.

Les disques de turbines de compresseur sont en général en alliage de titane, tandis que ceux des turbines haute pression, soumises à des températures plus élevées sont en superalliage à base de nickel. Considérons ce dernier cas en prenant $\rho = 8080$ kg.m^{-3} :

$$\omega_e = \sqrt{\frac{4\times10^9}{8080\,(0.01^2(1-0.3) + 0.5^2(3+0.3))}} = 3841 \text{ rad.s}^{-1} \simeq 74000 \text{ tr.min}^{-1}$$

[2] Un calcul un peu lourd montre que pour des valeurs pertinentes du coefficient de Poisson (en fait au moins pour $\nu > -1/3$) la contrainte équivalente de von Mises est maximale en $r = r_i$. Par contre, elle n'est pas monotone par rapport à r pour toutes ces valeurs de ν.

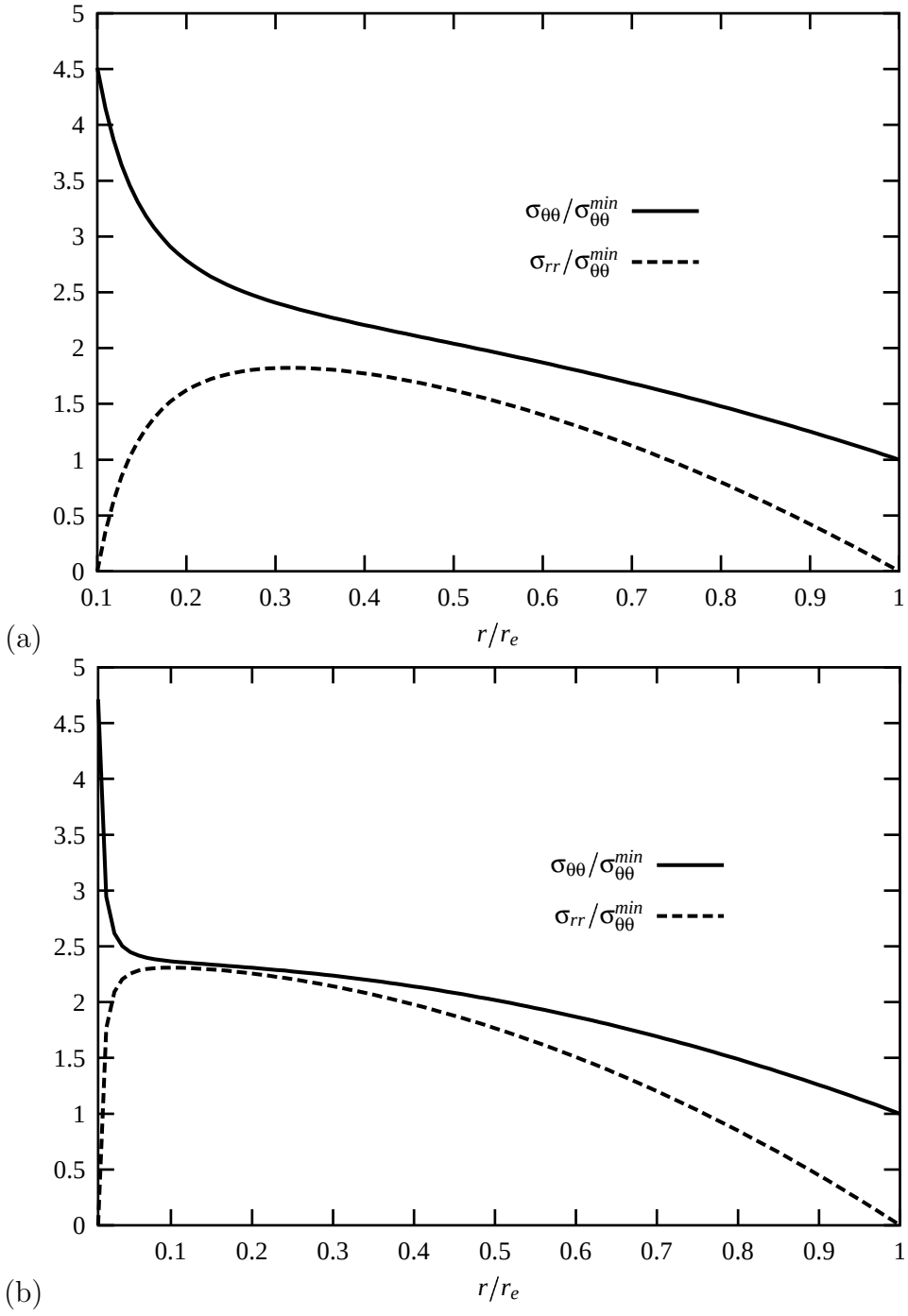


FIG. 14.5 – Profil des contraintes radiale et circonférentielle dans un disque alésé mince en rotation, normalisées par la contrainte circonférentielle minimale : (a) cas $r_e/r_i = 10$, (b) cas $r_e/r_i = 100$. Pour les courbes, on a pris $\nu = 0.3$.

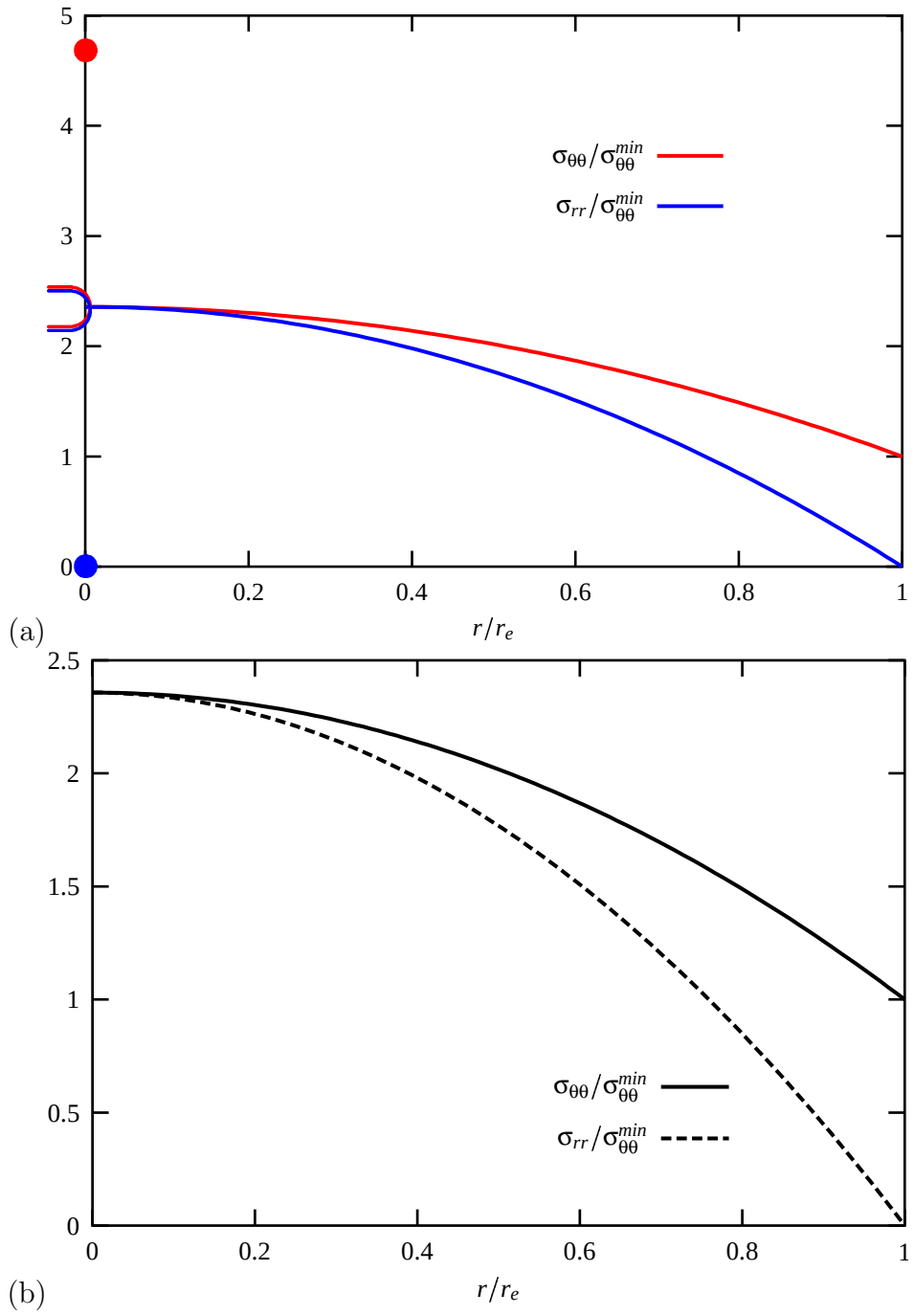


FIG. 14.6 – Profil des contraintes radiale et circonférentielle dans un disque mince en rotation, normalisée par la contrainte circonférentielle minimale : (a) disque à alésage infinitésimal, (b) disque sans alésage. Pour les courbes, on a pris $\nu = 0.3$. Le signe $\supset$ indique que le point entouré est exclus. Les valeurs en zéro des fonctions tracées en (a) sont données par les points.

Les vitesses typiques de fonctionnement de moteur d'hélicoptère sont de 60000 tr.min^{-1}, contre 20000 tr.min^{-1} dans les moteurs d'avion.

14.2.3 Rupture brutale

Utiliser un critère de rupture fragile et déterminer la vitesse limite correspondante.

Un critère de rupture fragile est le critère de contrainte normale positive maximale (cf. paragraphe 4.4.3). Dans le disque mince alésé, les contraintes principales sont rangées dans l'ordre (14.35). La contrainte normale positive maximale est donc $\sigma_{\theta\theta}$. A une vitesse donnée, elle est maximale en $r = r_i$, ce qui conduit à même vitesse critique ω_e que celle donnée par (14.37).

14.2.4 Cas où le rayon de l'alésage est très faible

On envisage le cas de disques alésés pour lesquels r_i/r_e est très faible. Le passage à la limite $r_i \to 0$ dans les résultats précédents doit être effectué avec précaution.

Passage à la limite en un point $0 < r \leq r_e$

En considérant les contraintes déterminées au paragraphe 14.1.4, calculer les deux limites suivantes, lorsque l'on fait tendre r_i vers 0, en un point r donné du disque tel que $0 < r \leq r_e$, et fixé indépendamment de r_i :

$$\lim_{r_i \to 0} \sigma_{rr}(r)$$

$$\lim_{r_i \to 0} \sigma_{\theta\theta}(r)$$

Tracer les profils de contraintes obtenues à la limite.

En faisant tendre r_i vers 0, pour $0 < r \leq r_e$ fixé indépendamment de r_i dans les expressions (14.8) et (14.9), nous obtenons les fonctions

$$f_r(r) := \lim_{r_i \to 0} \sigma_{rr}(r) = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(r_e^2 - r^2) \tag{14.38}$$

$$f_\theta(r) := \lim_{r_i \to 0} \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\rho\omega^2}{8}((3+\nu)r_e^2 - (1+3\nu)r^2) \tag{14.39}$$

Passage à la limite en $r = r_i$

Déterminer cette fois la limite de la valeur des contraintes en $r = r_i$ lorsque r_i tend vers 0 :

$$\lim_{r_i \to 0} \sigma_{rr}(r_i)$$

$$\lim_{r_i \to 0} \sigma_{\theta\theta}(r_i)$$

Ajouter les points obtenus sur le tracé précédent.

Donner alors la vitesse limite de fonctionnement élastique d'un disque en rotation percé d'un trou central de rayon infinitésimal. Vérifier la cohérence du résultat avec l'expression ω_e trouvée au paragraphe (14.2.1) dans le cas général.

En faisant tendre r_i vers 0, pour $r = r_i$ dans les expressions (14.8) et (14.9), nous obtenons les valeurs

$$f_r(0) := \lim_{r_i \to 0} \sigma_{rr}(r_i) = 0 \tag{14.40}$$

$$f_\theta(0) := \lim_{r_i \to 0} \sigma_{\theta\theta}(r_i) = \frac{\rho\omega^2}{4}(3+\nu)r_e^2 \tag{14.41}$$

On remarque que

$$f_\theta(0) = 2 \lim_{r \to 0, r>0} f_\theta(r)$$

Autrement dit, la convergence des expressions des contraintes dans le disque alésé vers les fonctions f_r et f_θ caractérisant les contraintes dans un disque dont l'alésage est infinitésimal, est une convergence simple mais non uniforme. La figure 14.5 pour deux valeurs du rapport r_i/r_e illustre ce fait. Les fonctions f_r et f_θ présentent une discontinuité en $r = 0$.

Les profils de contraintes dans le disque à alésage infinitésimal sont représentées sur la figure 14.6(a).

Le critère de plasticité de Tresca sera atteint en premier lieu en $r = 0$ pour $f_\theta(0) = \sigma_0$ ce qui fournit la vitesse limite du disque à alésage infinitésimal :

$$\rho \left(\omega_e^{inf}\right)^2 = \frac{4\sigma_0}{(3+\nu)r_e^2} \tag{14.42}$$

Remarquer que ω_e^{inf} s'obtient en faisant $r_i = 0$ dans l'expression (14.37) trouvée pour les disques à alésage quelconque.

14.2.5 Cas d'un disque mince non alésé

Des expressions simplifiées des contraintes et déformations régnant dans un disque mince non alésé peuvent être établies en suivant une démarche similaire à celle mise en œuvre dans la situation précédente. On peut vérifier que ces expressions simplifiées coïncident avec l'état limite $r_i \to 0$ déterminé au paragraphe 14.2.4, à condition toutefois de prolonger par continuité cette fonction en $r = 0$.

En déduire la vitesse limite de fonctionnement élastique du disque mince non alésé en rotation. Qu'en concluez–vous sur la résistance relative des disques alésé et non alésé ?

Contraintes, déformations et déplacements

Dans le cas du disque non alésé, l'équation différentielle à résoudre pour trouver σ_{rr} est toujours donnée par (14.10) lorsque le comportement du disque reste purement élastique. Les contraintes sont donc de la forme (14.8) et (14.9). L'absence de singularité attendue en $r = 0$ implique que $A = 0$. La constante B est alors déterminée à l'aide de la condition à la limite $\sigma_{rr}(r = r_e) = 0$. Finalement, les contraintes sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r_e^2 - r^2) \tag{14.43}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu)) \tag{14.44}$$

Constater que ces contraintes sont égales aux fonctions limites f_r et f_θ sur $]0, r_e]$ trouvées au paragraphe 14.2.4 pour les disques à alésage infinitésimal. Les valeurs des contraintes en $r = 0$ sont obtenues en prolongeant par continuité ces fonctions en 0.

Les déformations associées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope sont

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - 3r^2(1+\nu)) \tag{14.45}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu)) \tag{14.46}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu)) \tag{14.47}$$

Les déplacements $u_r = r\varepsilon_{\theta\theta}$ et u_z tel que $\partial u_z/\partial z = \varepsilon_{zz}$ s'en déduisent :

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu)) \tag{14.48}$$

$$u_z = -\nu z\frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu)) \tag{14.49}$$

où la condition de symétrie $u_z(z=0) = 0$ a été utilisée.

Les contraintes, déformations et déplacements du disque mince non alésé en rotation sont rassemblées dans la table 14.2.

Limite d'élasticité

Les profils de contraintes trouvés sont illustrés sur la figure 14.6(b). Les contraintes sont à nouveau rangés dans l'ordre (14.35) de sorte que la recherche de la vitesse limite de fonction élastique du disque est similaire à l'analyse du paragraphe 14.2.1. En particulier,

$$\sigma_{\theta\theta}^{min} = \sigma_{\theta\theta}(r=r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4}(1-\nu)r_e^2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_{\theta\theta}(r=0) = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 \tag{14.50}$$

La vitesse limite est donc donnée par

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_0}{r_e^2(3+\nu)} \tag{14.51}$$

Elle est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la valeur obtenue dans le cas du disque mince avec un alésage infinitésimal d'après les résultats du paragraphe 14.2.4. En l'absence d'alésage, l'état de contrainte au centre est équibiaxial en $r = 0$:

$$\sigma_{rr}(r=0) = \sigma_{\theta\theta}(r=0)$$

contrairement au cas alésé pour lequel le bord de l'alésage est caractérisé par un état de traction simple.

Cette étude montre qu'un disque alésé est plus vulnérable qu'un disque massif. Dans les applications industrielles, un disque massif sera donc préférable là où c'est possible.

Contraintes

$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{8}\frac{\rho\omega^2}{r^2}(r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8}\left((3+\nu)\left(\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2}\right) - (1+3\nu)\right)$$

Déformations

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E}\left(3(\nu^2-1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right)$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E}\left((\nu^2-1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right)$$
$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4}\left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2}\right)$$

Déplacements

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E}\left((\nu^2-1) + (3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right)$$
$$u_z = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4}z\left(2(1+\nu) - (3+\nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2}\right)$$

Vitesse limite

$$\rho\omega_e^2 = \frac{4\sigma_0}{r_i^2(1-\nu) + r_e^2(3+\nu)}$$

TAB. 14.1 – Récapitulatif : élastostatique d'un disque mince alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions simplifiées).

Contraintes

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r_e^2 - r^2)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu))$$

Déformations

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - 3r^2(1+\nu))$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$$
$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$$

Déplacements

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$$
$$u_z = -\nu\frac{\rho\omega^2}{4E}z(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$$

Vitesse limite

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_0}{r_e^2(3+\nu)}$$

TAB. 14.2 – Récapitulatif : élastostatique d'un disque mince non alésé animé d'une vitesse de rotation ω (expressions simplifiées).

14.3 Solution, au sens de Saint–Venant, du problème de l'élastostatique d'un disque en rotation

Le problème du disque mince (alésé ou non) en rotation est repris ici en gardant les conditions ($\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$) mais en acceptant une dépendance en z pour les contraintes radiale et circonférentielle :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{rr}(r,z)\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \sigma_{\theta\theta}(r,z)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{14.52}$$

Une telle dépendance a été reconnue comme nécessaire au cours de la démarche mise en œuvre aux paragraphes précédents. Le disque est d'épaisseur $2H$.

14.3.1 Expressions générales des contraintes

Les relations (14.5) et (14.6) établies respectivement aux paragraphes 14.1.2 et 14.1.3 sont valables à condition de les écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \tag{14.53}$$

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r\left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}\right) \tag{14.54}$$

La dérivée partielle de σ_{rr} par rapport à r est alors solution de l'équation

$$r\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + 3\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \rho\omega^2 r(3+\nu) = 0 \tag{14.55}$$

Les expressions générales des contraintes s'en déduisent :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r^2 + \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \tag{14.56}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(1+3\nu)r^2 - \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \tag{14.57}$$

où des fonctions A et B de la variable z seulement, ont été introduites.

14.3.2 Equations de compatibilité

Les équations de compatibilité en coordonnées cylindriques ont une forme complexe et ne seront pas utilisées explicitement ici. On va procéder d'une manière différente en utilisant certaines relations directes entre déformations et déplacements. Les déplacements non nuls u_r et u_z sont des fonctions de r et z. En particulier, la composante u_r du déplacement n'est autre que $r\varepsilon_{\theta\theta}$. La condition de compatibilité $\varepsilon_{rr} = \partial(r\varepsilon_{\theta\theta})/\partial r$ a en fait déjà été utilisée, de sorte que cette relation est automatiquement satisfaite. Par suite,

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = r(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})/E = -\frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu^2)r^3 - \frac{A(z)}{Er}(1+\nu) + B(z)r\frac{(1-\nu)}{E} \tag{14.58}$$

Le déplacement u_z se déduit de l'état de contraintes déterminé précédemment au travers de la relation

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\rho\omega^2}{2}\frac{\nu(1+\nu)}{E}r^2 - 2\frac{\nu}{E}B(z) \tag{14.59}$$

qui s'intègre en

$$u_z = \frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{\rho\omega^2}{2}r^2 z - \frac{2\nu}{E}\int B(z)dz + f_z(r) \tag{14.60}$$

où la fonction f_z à déterminer ne dépend que de la variable r. La solution recherchée n'admet pas de cisaillement σ_{rz} :

$$\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \tag{14.61}$$

Cela se traduit par la relation

$$-\frac{A'(z)}{Er}(1+\nu) + B'(z)r\frac{1-\nu}{E} + \frac{\rho\omega^2}{E}\nu(1+\nu)rz + f_z'(r) = 0 \tag{14.62}$$

La dérivation de cette équation par rapport à z permet d'établir que

$$A''(z) = 0, \quad B''(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 \tag{14.63}$$

Les fonctions cherchées sont donc de la forme

$$A(z) = A_1 z + A_0, \quad B(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2\frac{z^2}{2} + B_1 z + B_0 \tag{14.64}$$

En revenant alors à la relation initiale (14.62), on obtient

$$-\frac{1+\nu}{Er}A_1 + \frac{1-\nu}{E}rB_1 + f_z' = 0 \tag{14.65}$$

ce qui fournit la fonction f_z cherchée :

$$f_z(r) = \frac{1+\nu}{E}A_1\log\frac{r}{r_i} - B_1\frac{1-\nu}{2E}(r^2 - r_i^2) \tag{14.66}$$

La constante d'intégration a été prise telle que $u_z(r = r_i, z = 0) = 0$.

14.3.3 Détermination complète des contraintes

La détermination complète des contraintes est présentée dans le cas où la solution présente une symétrie par rapport au plan $z = 0$. Cette condition de symétrie implique que

$$u_z(r, z = 0) = 0, \forall r \tag{14.67}$$

La fonction f_z doit donc être identiquement nulle. L'expression de f_z trouvée en (14.66) conduit alors à

$$B_1 = 0, \quad A_1 = 0$$

Les contraintes et déformation présentent donc une dépendance en z^2 et des termes constants, en plus de la dépendance vis–à–vis de r.

A ce stade, il faut distinguer le cas du disque alésé et le cas du disque massif.

Disque alésé

La forme générale suivante des contraintes a été obtenue :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r^2 + \frac{A}{r^2} + B_2 z^2 + B_0 \tag{14.68}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(1+3\nu)r^2 - \frac{A}{r^2} + B_2 z^2 + B_0 \tag{14.69}$$

où A a été mis pour A_0 par simplicité. Le vecteur–contrainte en $r = r_i$ et $r = r_e$ est dirigé selon $\underline{\boldsymbol{e}}_r$ et prend les valeurs

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 + \frac{A}{r_i^2} + B_2 z^2 + B_0 \tag{14.70}$$

$$\sigma_{rr}(r = r_e) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 + \frac{A}{r_e^2} + B_2 z^2 + B_0 \tag{14.71}$$

$$\tag{14.72}$$

On voit qu'il n'est pas possible de trouver de constantes A et B_0 permettant de remplir la condition de bord extérieur libre, i.e.

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = 0$$

à toute cote z. On va donc se contenter de rechercher une solution permettant de remplir cette condition en résultante seulement. La condition à la limite $\underline{\boldsymbol{t}} = 0$ ne sera donc pas remplie point par point sur les bords $r = r_i$ et r_e mais seulement en résultante sur un secteur infinitésimal du disque $r_i d\theta \times 2H$ ou $r_e d\theta \times 2H$:

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{dR}} &= r_e d\theta \int_{r=r_e} \underline{\boldsymbol{t}}\, dz = r_e d\theta \left(\int_{r=r_e} \sigma_{rr}\, dz \right) \underline{\boldsymbol{e}}_r = 0 \\ &= r_e d\theta \left(-\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 2H + \frac{A}{r_e^2} 2H + 2B_2 \frac{H^3}{3} + B_0 2H \right) \underline{\boldsymbol{e}}_r \end{aligned} \tag{14.73}$$

Une condition analogue doit être écrite en $r = r_i$. Deux équations portant sur les constantes d'intégration A et B_0 s'en déduisent

$$\begin{aligned} B_0 + \frac{A}{r_i^2} &= \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 - B_2\frac{H^2}{3} \\ B_0 + \frac{A}{r_e^2} &= \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 - B_2\frac{H^2}{3} \end{aligned}$$

Il est effectivement possible de remplir la condition de résultante nulle au bord $\underline{\boldsymbol{dR}} = 0$ grâce aux valeurs

$$B_0 = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)(r_e^2 + r_i^2) - B_2\frac{H^2}{3}, \quad A = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 r_e^2 \tag{14.74}$$

Il faut encore vérifier que le moment résultant sur chacun des bords infinitésimaux est bien nul. Un argument de symétrie permet en fait d'assurer cette condition.

La solution obtenue est une **solution acceptable au sens de Saint–Venant si le disque est suffisamment mince** :

$$H/r_e \ll 1, H/r_i \ll 1$$

En effet, les surfaces sur lesquelles les résultantes ont été calculées possèdent alors deux dimensions caractéristiques, à savoir H et $r_{i/e}d\theta$, qui sont faibles devant la dimension $r_e - r_i$ du disque. Les expressions que nous allons proposer sont alors proches de la solution réelle pour $r_i \ll r \ll r_e$, c'est–à–dire en tout point assez loin des bords du disque alésé, en vertu du principe de Saint–Venant.

Voici enfin les expressions complètes des contraintes régnant dans un **disque mince alésé**, en régime élastostatique :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8r^2}(r^2-r_i^2)(r^2-r_e^2)+\rho\omega^2\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}(\frac{H^2}{3}-z^2) \quad (14.75)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8r^2}((1+3\nu)r^4-(3+\nu)((r_i^2+r_e^2)r^2+r_i^2r_e^2)+\rho\omega^2\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}(\frac{H^2}{3}-z^2) \quad (14.76)$$

Disque non alésé

Dans le cas du disque massif, les expressions des contraintes sous la forme (14.68) et (14.69) sont valables à condition de prendre $A=0$, c'est–à–dire d'exclure toute singularité en $r=0$. A nouveau il n'est pas possible de satisfaire la condition bord libre en tout point (r_e,z) du bord extérieur. Il est possible toutefois de trouver une constante B_0 permettant d'annuler le torseur résultant sur tout secteur infinitésimal $(r_e,d\theta)$ du bord extérieur :

$$B_0=\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}r_e^2-B_2\frac{H^2}{3}$$

La solution proposée ici est acceptable pour les disques minces

$$H/r_e \ll 1$$

en vertu du principe de Saint–Venant. Voici enfin les expressions des contraintes qui s'établissent dans un disque mince de rayon r_e et d'épaisseur $2H$:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r^2-r_e^2)+\rho\omega^2\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}(\frac{H^2}{3}-z^2) \quad (14.77)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}((3+\nu)r_e^2-(1+3\nu)r^2)+\rho\omega^2\frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)}(\frac{H^2}{3}-z^2) \quad (14.78)$$

Il apparaît clairement que les contributions en z^2 et H^2 sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que $H/r_e \ll 1$. Ce fait justifie *a posteriori* la pertinence des expressions simplifiées des contraintes données dans les tableaux 14.1 et 14.2.

14.3.4 Déformations et déplacements

Voici les déformations et déplacements au sein d'un disque mince alésé en rotation :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E}\left(3(\nu^2-1)+(3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2+r_e^2}{r^2}-(1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right) \\
&+ \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right) \qquad (14.79)\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E}\left((\nu^2-1)+(3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2+r_e^2}{r^2}+(1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right) \\
&+ \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right) \qquad (14.80)\\
\varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4}\left(2(1+\nu)-(3+\nu)\frac{r_i^2+r_e^2}{r^2}\right) \\
&- \frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right) \qquad (14.81)\\
u_r &= \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E}\left((\nu^2-1)+(3+\nu)((1-\nu)\frac{r_i^2+r_e^2}{r^2}+(1+\nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4})\right) \\
&+ \frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right) r \qquad (14.82)\\
u_z &= \frac{\nu}{E}\frac{\rho\omega^2 r^2}{4}\left(2(1+\nu)-(3+\nu)\frac{r_i^2+r_e^2}{r^2}\right) z - \frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3}-\frac{z^2}{3}\right) z \qquad (14.83)
\end{aligned}
$$

Voici les déformations et déplacements au sein d'un disque mince sans alésage en rotation :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)\left((3+\nu)r_e^2-3(1+\nu)r^2\right)+\frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right) \qquad (14.84)\\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)\left((3+\nu)r_e^2-(1+\nu)r^2\right)+\frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right) \qquad (14.85)\\
\varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu\rho\omega^2}{4E}\left((3+\nu)r_e^2-2(1+\nu)r^2\right)-\frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right) \qquad (14.86)\\
u_r &= \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)\left((3+\nu)r_e^2-(1+\nu)r^2\right)r+\frac{\rho\omega^2}{2E}\nu(1+\nu)\left(\frac{H^2}{3}-z^2\right)r \qquad (14.87)\\
u_z &= -\frac{\nu\rho\omega^2}{4E}\left((3+\nu)r_e^2-2(1+\nu)r^2\right)z-\frac{\rho\omega^2}{E}\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\left(\frac{H^2}{3}-\frac{z^2}{3}\right)z \qquad (14.88)
\end{aligned}
$$

Il apparaît clairement que les contributions en z^2 et H^2 sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que $H/r_e \ll 1$. Ce fait justifie *a posteriori* la pertinence des expressions simplifiées des déformations et déplacements donnés dans les tableaux 14.1 et 14.2.

Déformée du disque

Les déformées typiques des disques alésés et non alésés sont représentées sur la figure 14.4. Analysons par exemple ce que devient la surface initiale $z = H$ d'un disque sans alésage. Les points de ce plan se déplacent en

$$r' = r + u_r(r, H) \tag{14.89}$$
$$z' = H + u_z(r, H) \tag{14.90}$$

Dans le contexte infinitésimal, il est licite de remplacer r par r' dans la dernière équation. La surface déformée a donc aussi pour équation

$$z' - H - u_z(r', H) = 0$$

En tenant compte de l'expression (14.88) de u_z, cette surface apparaît comme une portion de paraboloïde de révolution qui, dans le contexte infinitésimal, ne peut être distingué de la sphère osculatrice de rayon

$$R = \frac{2E}{\rho\omega^2\nu(1+\nu)H} \tag{14.91}$$

De manière similaire, le bord libre $r = r_e, \theta$ donné, $|z| \leq H$ se transforme en une portion de parabole qui, dans le contexte infinitésimal, ne peut être distingué de la sphère osculatrice de rayon

$$R = \frac{E}{\rho\omega^2\nu(1+\nu)r_e} \tag{14.92}$$

Remarquer que les deux surfaces transformées étudiées restent orthogonales au point de coordonnées initiales (r_e, H). Ce fait est dû à la nullité du cisaillement ε_{rz}.

Ces caractéristiques de la déformée du disque ont été mises en évidence en particulier dans (Amestoy, 2004).

14.3.5 Comparaison avec une solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis[3] permet d'obtenir une solution numérique approchée à la précision souhaitée du problème d'un cylindre de hauteur finie soumis à des efforts centrifuges. Il est intéressant d'utiliser cette méthode numérique pour déterminer la valeur du rapport H/r_e à partir de laquelle la solution établie précédemment au sens de Saint–Venant n'est plus acceptable. Le calcul par éléments finis a été mené pour trois valeurs $H/r_e = 0.1; 0.5; 1$. Les états déformés de ces trois disques, ainsi que le champ de contraintes σ_{zz} prévu par l'analyse numériques sont représentés sur la figure 14.7. Il est effectivement légitime de négliger σ_{zz} pour le disque mince. Par contre, dans un cylindre allongé, la contrainte σ_{zz} se développe au sein de l'échantillon et peut représenter jusqu'à 20% de la valeur maximale de la contrainte orthoradiale. On peut juger de la qualité de la solution au sens de Saint–Venant et des mérites des expressions simplifiées indépendantes de z établies au paragraphe 14.1 en observant la superposition des profils de contraintes théoriques et numériques sur la figure 14.8. La solution au sens de Saint–Venant et les expressions simplifiées coïncident avec la solution numérique pour $H/r_e = 0.1$. Les expressions simplifiées ne sont plus acceptables pour $H/r_e = 0.5$ tandis

[3]Une présentation détaillée de la méthode des éléments finis appliquée à différents problèmes de la physique et de la mécanique est offerte au travers du cours (Cailletaud et al., 2004). Les documents sont disponibles sur le site mms2.ensmp.fr.

que la solution au sens de Saint–Venant rend encore bien compte du champ obtenu par éléments finis. Il n'en va plus de même pour le cylindre allongé $H/r_e = 1$ pour lequel des écarts notables existent entre la solution au sens de Saint–Venant et la solution éléments finis. En particulier, la figure 14.8(c) montre bien que l'expression (14.77) de la contrainte radiale conduit à une valeur $\sigma_{rr}(r = r_e, z = 0)$ notablement éloignée de 0, alors que la méthode des éléments finis permet d'imposer cette condition de manière aussi précise que souhaitable.

14.4 Contraintes planes et réponse axisymétrique d'un cylindre de longueur finie

Les développements précédents incitent à reprendre le problème plus général de la déformation de cylindres au sein desquels s'établit un champ de contraintes de la forme :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(r,z) = \sigma_{rr}\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \sigma_{\theta\theta}(r,z)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{14.93}$$

Le disque est en état de contraintes planes, i.e. relevant d'une description strictement bidimensionnelle (r,θ), lorsqu'en outre les contraintes considérées ne dépendent pas de z. On va voir que la représentation (14.93) permet d'envisager un ensemble varié de conditions de chargements (efforts centrifuges, flexion axisymétrique, pression interne/externe) mais que l'état de contraintes planes ne peut pas exister, de manière exacte, en présence de forces de volume à divergence non nulle. Cette section illustre de manière remarquable l'approche en contraintes en mécanique des solides au comportement élastique linéarisé.

14.4.1 Approche par les équations de Beltrami en coordonnées cylindriques

La méthode des contraintes dans le traitement linéarisé de la statique des structures élastiques consiste à rechercher un champ de contraintes statiquement admissible et conduisant, *in fine*, à des déformations compatibles. Une condition nécessaire et suffisante est que le champ de contraintes proposé vérifie les équations d'équilibre et les équations de Beltrami (8.13) que l'on rappelle ici :

$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu}\text{grad}\,(\text{grad}\,(\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})) + \frac{\nu}{1-\nu}\rho(\text{div}\,\underline{\boldsymbol{f}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \rho(\text{grad}\,\underline{\boldsymbol{f}} + (\text{grad}\,\underline{\boldsymbol{f}})^T) = 0 \tag{14.94}$$

Les efforts volumiques sont envisagés sous la forme générale

$$\rho\underline{\boldsymbol{f}} = \rho f(r)\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{14.95}$$

qui inclut le cas des efforts centrifuges $f(r) = \omega^2 r$.

Les équations de Beltrami doivent être explicitées dans le cas des coordonnées cylindriques et pour une distribution de contraintes de la forme (14.93). Exprimons d'abord le laplacien du tenseur des contraintes en partant de sa définition :

$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \text{div}\,\text{grad}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) \tag{14.96}$$

Pour cela, il faut partir de la définition intrinsèque (A.92) du gradient d'un tenseur. Le gradient du tenseur des contraintes est

$$\text{grad}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\theta} \otimes \frac{\underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{r} + \frac{\partial\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{14.97}$$

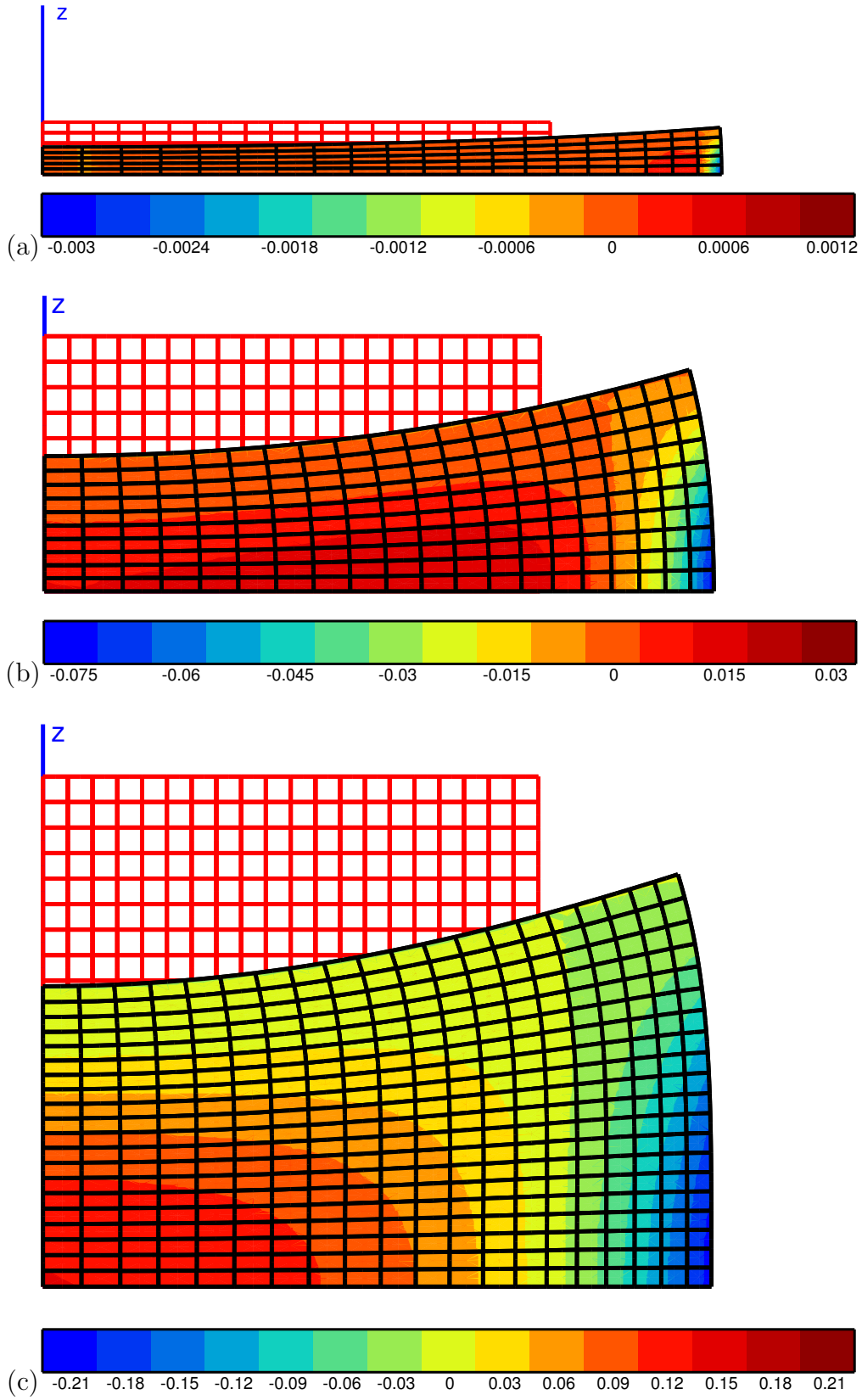


FIG. 14.7 – Champ de contrainte σ_{zz} obtenu par la méthode des éléments finis, rapportée à la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ maximale dans un disque massif en rotation : (a) $H/r_e = 0.1$, (b) $H/r_e = 0.5$, (c) $H/r_e = 1$. Dans le cas (c), la composante σ_{zz} atteint 20% de la contrainte orthoradiale maximale. L'état initial du disque est représenté en rouge. Les déplacements ont été exagérés pour l'illustration. L'axe de rotation est z.

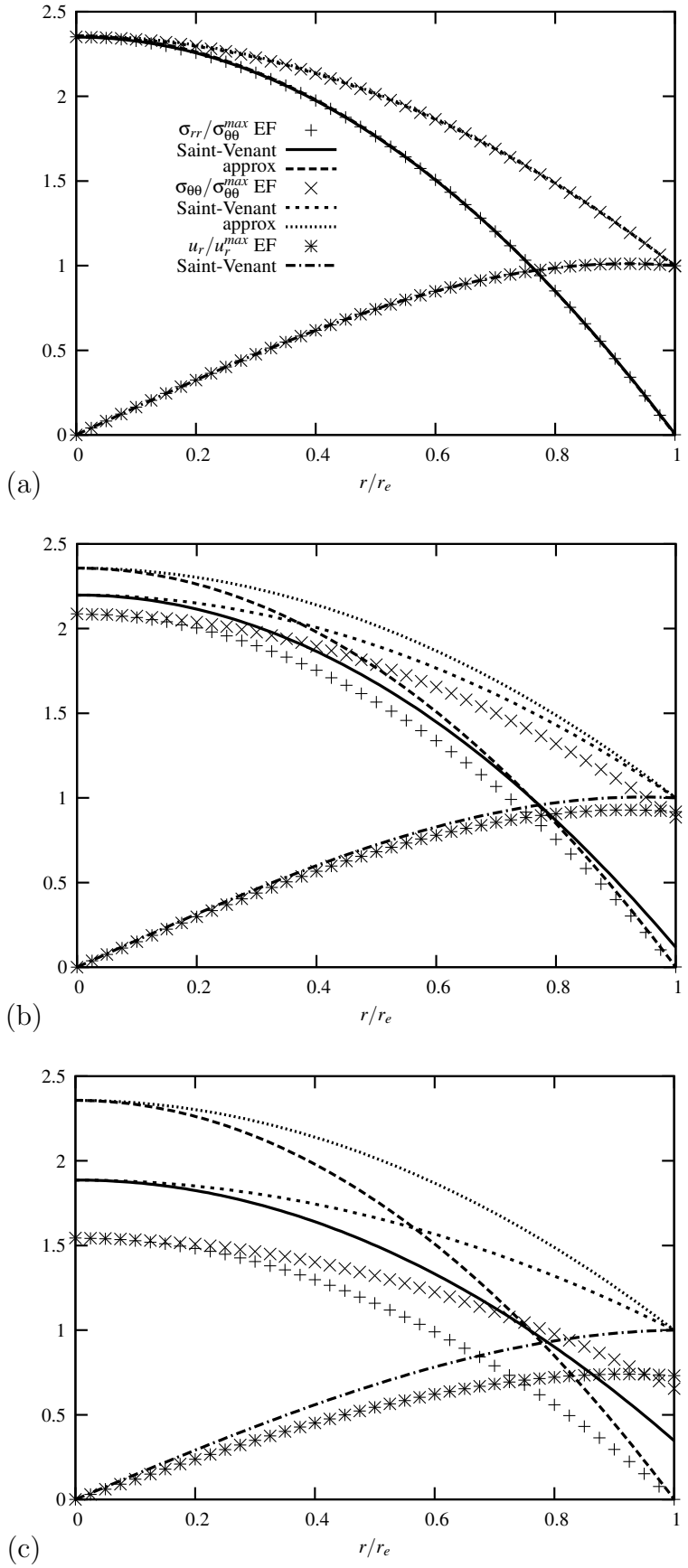


FIG. 14.8 – Comparaison entre la solution approchée en contraintes (approx), la solution au sens de Saint–Venant et la solution numérique par la méthode des éléments finis (EF), pour les profils de contraintes radiale et orthoradiale, et le déplacement u_r en $z = 0$. La comparaison est effectuée pour trois cylindres massifs en rotation de hauteurs différentes : (a) $H/r_e = 0.1$, (b) $H/r_e = 0.5$, (c) $H/r_e = 1$.

Dans le cas particulier d'un champ de la forme (14.93), cela donne

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r\\ &+ \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}(\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta+\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta)\\ &+ \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}\tag{14.98}$$

La définition intrinsèque (A.96) de la divergence d'un champ de tenseurs fournit :

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial(\operatorname{grad}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial r}.\underline{\boldsymbol{e}}_r+\frac{\partial(\operatorname{grad}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial\theta}.\frac{\underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{r}+\frac{\partial(\operatorname{grad}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial z}.\underline{\boldsymbol{e}}_z\tag{14.99}$$

En substituant l'expression (14.98) du gradient du tenseur des contraintes dans cette définition et en ordonnant les termes, l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques est obtenue :

$$\begin{aligned}\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \left(\frac{\partial^2\sigma_{rr}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\sigma_{rr}+\frac{2}{r^2}\sigma_{\theta\theta}+\frac{\partial^2\sigma_{rr}}{\partial z^2}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r\\ &+ \left(\frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\sigma_{rr}-\frac{2}{r^2}\sigma_{\theta\theta}+\frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}}{\partial z^2}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\end{aligned}\tag{14.100}$$

Pour aboutir à l'expression des équations de Beltrami, il reste à calculer le second gradient de la trace des contraintes, puis le gradient des efforts massiques, et enfin la divergence des efforts massiques. Les voici successivement :

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}) &= \frac{\partial\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r+\frac{\partial\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\theta}\frac{\underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{r}+\frac{\partial\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z\\ &= \left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r+\left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial z}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}\tag{14.101}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\operatorname{grad}(\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})) &= \frac{\partial\boldsymbol{\nabla}\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r+\frac{\partial\boldsymbol{\nabla}\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\theta}\otimes\frac{\underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{r}+\frac{\partial\boldsymbol{\nabla}\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z\\ &= \frac{\partial^2\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r^2}\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\\ &+ \frac{\partial^2\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r\partial z}(\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z+\underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r)+\frac{\partial^2\operatorname{trace}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z^2}\underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}\tag{14.102}$$

$$\operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{f}} = f'\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r+\frac{f}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\tag{14.103}$$

$$\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{f}} = \operatorname{trace}\operatorname{grad}\underline{\boldsymbol{f}}=f'+\frac{f}{r}\tag{14.104}$$

où f' désigne la dérivée par rapport à r de la fonction f.

Finalement, les équations de Beltrami pour un champ de la forme (14.93) sont les quatre premières équations ci–dessous :

$$(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_{rr} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\rho(f' + \frac{f}{r}) + 2\rho f' = 0 \quad (14.105)$$

$$(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_{\theta\theta} + \frac{1}{1+\nu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\rho(f' + \frac{f}{r}) + 2\rho\frac{f}{r} = 0 \quad (14.106)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r \partial z} = 0 \quad (14.107)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z^2} + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho(f' + \frac{f}{r}) = 0 \quad (14.108)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f = 0 \quad (14.109)$$

Les équations de Beltrami suffisent à résoudre le problème posé en contraintes à condition de leur adjoindre 3 conditions supplémentaires, à savoir la vérification des équations d'équilibre en surface (voir page 197 et la note de bas de page correspondante). Il est toutefois plus facile dans les développements qui vont suivre de se servir de l'équation d'équilibre (14.109) sur tout le volume. C'est redondant mais plus pratique *in fine*.

La combinaison des équations (14.107) et (14.108) de Beltrami conduit à une restriction de la forme des efforts volumiques compatible avec le type de solution en contraintes recherché :

$$\left(f' + \frac{f}{r}\right)' = 0 \quad (14.110)$$

ce qui conduit à

$$f(r) = \omega^2 r + \frac{\alpha}{r} \quad (14.111)$$

Le terme linéaire en r est celui que l'on rencontre en présence d'effort centrifuges. C'est pourquoi le coefficient de proportionnalité a été noté ω^2, même si en toute généralité ce coefficient n'est pas tenu d'être positif. Les efforts en $1/r$ sont délicats à interpréter. Ils seront toutefois pris en compte dans la suite par souci de généralité.

L'exploitation directe des équations (14.105) à (14.109) pour déterminer le champ des contraintes est possible mais malaisée. Il est plus rapide de tirer parti directement de l'équation de compatibilité sous la forme (14.7), combinée avec la relation de comportement pour donner l'équation (14.6) déjà mentionnée. Cette relation et l'équation d'équilibre sont réécrites sous la forme

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}) \quad (14.112)$$

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = -(1+\nu)r\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - (1+\nu)r\rho f \quad (14.113)$$

(14.114)

L'addition et la soustraction des deux équations précédentes fournit un système portant sur la somme et la différence des composantes de contraintes cherchées :

$$\frac{\partial \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} + (1+\nu)\rho f = 0 \quad (14.115)$$

$$(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r})(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} + \rho f = 0 \quad (14.116)$$

Remarquer que l'équation (14.115) implique la troisième relation de Beltrami (14.107). La résolution de ces équations permet de trouver la dépendance en r de la somme et de la différence des contraintes radiale et orthoradiale :

$$\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta} = -(1+\nu)\rho\int f dr + g_1(z) = -(1+\nu)\rho(\omega^2\frac{r^2}{2}+\alpha\log r)+g_1(z) \quad (14.117)$$

$$\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta} = -\frac{1-\nu}{r^2}\rho\int f r^2 dr + g_2(z) = -\rho(1-\nu)(\frac{\omega^2}{4}r^2+\frac{\alpha}{2})+\frac{g_2(z)}{r^2} \quad (14.118)$$

La forme licite (14.111) des efforts massiques a été prise en compte. Les constantes d'intégration g_1 et g_2 sont *a priori* des fonctions de la variable z. L'équation de Beltrami (14.108) permet de déterminer g_1 :

$$g_1(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 z^2 + 2(Az+B) \quad (14.119)$$

avec deux constantes d'intégration A et B. Une expression de la contrainte radiale peut alors être obtenue :

$$\sigma_{rr} = -\rho\omega^2 r^2\frac{3+\nu}{8} - \frac{\rho\alpha}{4}(1-\nu+2(1+\nu)\log r) - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2\frac{z^2}{2} + Az + B + \frac{g_2(z)}{2r^2} \quad (14.120)$$

Il reste à utiliser une des équations de Beltrami non encore exploitée, par exemple (14.105) qui, compte tenu de la forme des efforts volumiques, devient :

$$(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_{rr} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\omega^2 - \frac{\rho\alpha}{r^2} = 0 \quad (14.121)$$

On élimine $\sigma_{\theta\theta}$ dans l'équation précédente en utilisant l'équation d'équilibre (14.109). Finalement, la contrainte radiale est solution de

$$\frac{\partial^2\sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2\sigma_{rr}}{\partial z^2} + \frac{3-\nu}{1-\nu}\rho\omega^2 + \frac{\rho\alpha}{r^2} = 0 \quad (14.122)$$

ce qui conduit à la détermination de g_2 :

$$g_2'' = 2\nu\rho\alpha \Longrightarrow g_2(z) = \nu\rho\alpha z^2 + Cz + D \quad (14.123)$$

Les expressions générales des contraintes sont donc

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 + \frac{Cz+D+\nu\rho\alpha z^2}{2r^2} - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2\frac{z^2}{2} + Az + B \\ &- \frac{\rho\alpha}{4}(1-\nu+2(1+\nu)\log r) \quad (14.124)\\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 - \frac{Cz+D+\nu\rho\alpha z^2}{2r^2} - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2\frac{z^2}{2} + Az + B \\ &+ \frac{\rho\alpha}{4}(1-\nu-2(1+\nu)\log r) \quad (14.125)\end{aligned}$$

Encore faut–il s'assurer que l'équation de Beltrami (14.106), non encore exploitée, est bien vérifiée par la solution précédente. C'est effectivement le cas.

14.4.2 Interprétation des termes de la solution

Les différentes contributions apparaissant dans les expressions des contraintes radiale et orthoradiale mises en évidence au paragraphe précédent peuvent être classées en fonction des sollicitations mécaniques élémentaires du cylindre étudié correspondantes :

- **cylindre en rotation.** Cette situation correspond à

$$\alpha = 0, \quad A = C = 0$$

Les champs de contraintes ont été entièrement explicitées au paragraphe 14.3.3. Dans ce cas particulier, la condition de symétrie par rapport au plan $z = 0$ permet d'exclure les termes de flexion en z. Les constantes B et D sont déterminées par la condition de résultante nulle (ou imposée) aux bords $r = r_e$ et $r = r_i$. La contribution D/r^2 est nulle pour un disque sans alésage. Cette solution est acceptable au sens de Saint–Venant et concerne donc les disques minces. Il s'agit d'un cas de contraintes planes approchées puisque, pour un disque mince, les termes en z^2 sont faibles devant les termes en r^2.

- **tube sous pression.** Cette situation est rencontrée pour

$$\omega = \alpha = 0, \quad A = C = 0$$

Les contraintes ont la forme établie pour les réservoirs cylindriques sous pression interne ou/et externe, avec des extrémités libres :

$$\sigma_{rr} = B + \frac{D}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = B - \frac{D}{r^2}$$

Les conditions de pression imposée en $r = r_i, r_e$ permettent de déterminer les constantes B et D. Il s'agit là de la solution exacte du réservoir sous pression, libre à ses extrémités, traité au chapitre 12. Les expressions complètes des contraintes sont données dans le tableau récapitulatif 12.1. Le réservoir est dans un état de contraintes planes.

- **flexion axisymétrique d'une plaque trouée.** Cette situation est caractérisée par

$$\omega = \alpha = 0, \quad B = D = 0$$

Le profil de contrainte est linéaire en z :

$$\sigma_{rr} = z(A + \frac{C}{r^2}), \quad \sigma_{\theta\theta} = z(A - \frac{C}{r^2})$$

Ce profil de contraintes est rencontré dans un disque troué sollicité par un moment de flexion selon $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ imposé sur chaque tranche élémentaire $2Hr_e d\theta$ en $r = r_e$, et, par exemple, libre d'effort en $r = r_i$. Le disque non alésé correspond à $C = 0$. Ce problème est traité dans le recueil de problèmes (Amestoy, 2004). Il sort du cadre des contraintes planes même approchées puisque la dépendance en z y est essentielle[4].

Seule la situation du cylindre sous pression interne/externe conduit à une solution exacte en contraintes planes. Dans les autres cas, il ne s'agit que de solutions en contraintes planes approchées puisque la dépendance en z ne peut être exclue ou/et que le principe de Saint–Venant doit être invoqué. Mandel indique *qu'un cylindre de longueur finie n'est qu'exceptionnellement en état de contraintes planes* (Mandel, 1994). En particulier, l'équation de Beltrami (14.108) montre qu'en présence d'efforts volumiques à divergence non nulle, l'état de contrainte dépend nécessairement de z, ce qui exclut l'état de contraintes planes exact.

[4] En effet, le contexte des contraintes planes approchées, c'est–à–dire le cas où les contributions en z peuvent être négligées, ne requiert pas seulement la bonne forme des contrainte mais aussi des condition de parité sur la dépendance réelle des contraintes en fonction de z (voir la page 534 de l'ouvrage (Mandel, 1994)). Il est pertinent dans le cas d'une plaque mince, non chargée sur ses deux faces, chargée sur sa surface latérale ou dans le volume par des forces parallèles au plan moyen, symétriquement distribuées par rapport à ce plan (de manière que le plan moyen reste plan). Ce n'est clairement pas le cas pour le chargement de flexion.

14.4.3 Complément à l'étude des contraintes planes

Si l'on recherche les situations permettant l'établissement d'un état de contraintes planes exact ou approché, dans un cylindre sollicité de manière axisymétrique, il est nécessaire d'envisager aussi l'existence d'un cisaillement $\sigma_{r\theta}$. Par souci d'exhaustivité, ce paragraphe vient compléter l'analyse précédente où seules les composantes radiale et orthoradiale étaient envisagées. Pour englober le cas des contraintes planes approchées, une dépendance $\sigma_{r\theta}(r,z)$ est recherchée *a priori*. En fait, la dépendance en z est exclue dans le cadre présent. En effet, une dépendance en z de la composante de cisaillement entraînerait une dépendance en z de la déformation

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

et donc une dépendance $u_\theta(r,z)$. Ce fait est incompatible avec la nullité de $\varepsilon_{\theta z}$ et $\sigma_{\theta z}$ en contraintes planes. Nous étudions donc le champ

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{r\theta}(r)(\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta) \tag{14.126}$$

qui vient s'ajouter au champ (14.93) déjà étudié de manière exhaustive. De même, l'existence d'une densité d'efforts volumiques selon $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ doit aussi être envisagée et additionnée à la contribution (14.95) déjà considérée :

$$\underline{\boldsymbol{f}} = f_\theta(r)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{14.127}$$

champ dont la divergence est nulle. La condition d'équilibre statique conduit à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 \tag{14.128}$$

Les équations de Beltrami se réduisent à

$$\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{4}{r^2}\sigma_{r\theta} + \rho(f'_\theta - \frac{f_\theta}{r}) = 0 \tag{14.129}$$

qui n'est autre que la dérivée par rapport à r de l'équation d'équilibre (14.128) divisée par r. Le problème se réduit donc à la résolution de (14.128) qui fournit

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2}(\rho \int f_\theta r^2 dr + C) \tag{14.130}$$

où C est une constante d'intégration. Chaque tranche $r_e H d\theta$ est soumise en $r = r_e$ à un effort tangentiel indépendant de θ et de z. Un effort tangentiel existe aussi en $r = r_i$ pour assurer l'équilibre. Ce type de sollicitation est l'analogue pour le solide élastique linéaire isotrope de l'écoulement de Couette que subit un fluide placé entre deux tubes en rotation relative.

14.5 Arbres en rotation

C'est la méthode des contraintes qui a été utilisée jusqu'ici dans ce chapitre pour établir des solutions dont la pertinence est apparue dans le cas de disques minces. On propose ici de rechercher une solution au problème d'un cylindre en rotation par rapport à son axe par la méthode des déplacements. On va montrer que cette démarche ne vaudra que pour des cylindres élancés $r_e/H \leq 1$. La forme proposée pour le champ de déplacements est la suivante :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_r(r)\underline{\boldsymbol{e}}_r + u_z(z)\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{14.131}$$

Les sections perpendiculaires à l'axe du cylindre sont donc supposées rester planes et orthogonales à l'axe. Le caractère axisymétrique de la géométrie et de la sollicitation radiale implique que $u_\theta = 0$.

Cette situation est rencontrée par exemple dans les arbres d'entraînement des disques de turbines dans les moteurs ou les alternateurs. La géométrie de ces arbres peut être massive ou tubulaire. Les résultats sont explicités uniquement dans le cas de l'arbre massif car l'extension au cas du tube ne pose pas de difficulté.

14.5.1 Mise en œuvre de la méthode de déplacements

A partir de la forme proposée (14.131) du champ de déplacement, on calcule successivement le tenseur des déformations

$$[\underset{\sim}{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} u_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & u_{z,z} \end{bmatrix} \tag{14.132}$$

et, dans le cas d'un comportement élastique linéarisé et isotrope, les composantes non nulles du tenseur des contraintes associées :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda(\frac{u_r}{r} + \varepsilon_{zz}) \tag{14.133}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda(u_{r,r} + \varepsilon_{zz}) \tag{14.134}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(u_{r,r} + \frac{u_r}{r}) \tag{14.135}$$

où nous avons fait intervenir les coefficients de Lamé. La virgule qui suit un indice désigne comme dans les chapitre précédents la dérivation par rapport à la variable indiquée.

Les équations d'équilibre, en présence d'efforts volumiques d'inertie, se traduisent par les deux équations suivantes :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \tag{14.136}$$

$$\sigma_{zz,z} = 0 \tag{14.137}$$

En substituant l'expression (14.135) de la contrainte axiale dans la seconde équation d'équilibre, nous obtenons

$$\varepsilon_{zz} = c, \quad u_z = cz \tag{14.138}$$

où c est une constante d'intégration. La translation selon l'axe z a été fixée à 0.

L'équation d'équilibre (14.136) conduit à une équation différentielle en u_r :

$$u_{r,rr} + \left(\frac{u_r}{r}\right)_{,r} + \frac{\rho\omega^2 r}{\lambda + 2\mu} = 0 \tag{14.139}$$

dont la solution est de la forme

$$u_r = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}r^3 + ar + \frac{b}{r} \tag{14.140}$$

Dans le cas d'un arbre massif, l'absence de singularité attendue en $r = 0$ implique $b = 0$. La résolution complète est menée pour deux types de conditions aux extrémités du cylindre :

- **Déformation axiale de l'arbre imposée.** La constante c est donc supposée connue. Elle est par exemple nulle si l'arbre est bloqué aux extrémités $z = \pm H$. Si l'arbre est libre d'effort sur la surface $r = r_e$, la condition

$$\sigma_{rr}(r = r_e) = 2(\lambda + \mu)a - \frac{\rho\omega^2(2\lambda + 6\mu)r_e^2}{4(\lambda + 2\mu)} + \lambda c = 0 \tag{14.141}$$

  permet d'obtenir

$$a = \frac{\rho\omega^2(2\lambda + 3\mu)r_e^2}{8(\lambda + 2\mu)} - \nu c \tag{14.142}$$

  ce qui achève la résolution du problème.
- **Tube libre à ses extrémités.** La condition $\sigma_{zz} = 0$ en $z = \pm H$ ne peut être satisfaite pour tout $0 \leq r \leq r_e$. Il est possible toutefois de garantir la condition d'extrémité libre d'effort en résultante :

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{z=H} \sigma_{zz}\, dS = 2\pi \int_0^{r_e} \sigma_{zz}\, r dr = 0 \\ &= ((\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a)\frac{r_e^2}{2} - \frac{\rho\omega^2\lambda}{8(\lambda + 2\mu)} r_e^4 \end{aligned} \tag{14.143}$$

  L'équation (14.141) traduisant la nullité des efforts appliqués sur la surface latérale de l'arbre et l'équation précédente constituent un système linéaire d'inconnues a et c. La résolution de ce système conduit à

$$c = -\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{2}\frac{\nu}{E}, \quad a = \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{8E}\frac{3 - 5\nu}{1 - \nu} \tag{14.144}$$

  Conformément à l'intuition, la déformation axiale ε_{zz} est négative. Les expressions des contraintes s'en déduisent. Pour obtenir ces expressions concises, il est nécessaire d'utiliser les relations entre les coefficients de Lamé, le coefficient de Poisson et le module de Young rassemblées dans la table 7.1.

La solution établie dans le cas de l'arbre libre d'effort à ses extrémités n'est valide qu'au sens de Saint–Venant. Elle ne permet pas de satisfaire point par point la condition de nullité du vecteur–contrainte en $z = \pm H$ mais seulement en terme de torseur résultant.

14.5.2 Vitesse critique pour un arbre en rotation

Les contraintes qui s'établissent dans un arbre en rotation dont les extrémités sont libres se déduisent des expressions données au paragraphe précédent :

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{4}\frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu}(r_e^2 - r^2) = \frac{\rho\omega^2}{8}\frac{3 - 2\nu}{1 - \nu}(r_e^2 - r^2) \tag{14.145}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{4}\left(\frac{2\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu}r_e^2 - \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}r^2\right) = \frac{\rho\omega^2}{8(1 - \nu)}((3 - 2\nu)r_e^2 - (1 + 2\nu)r^2) \tag{14.146}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\rho\omega^2}{4}\frac{\nu}{1 - \nu}(r_e^2 - 2r^2) \tag{14.147}$$

Il s'agit d'un état triaxial de contraintes en particulier en $r = 0$. Les contraintes radiale et orthoradiale sont toujours positives pour les valeurs licites du coefficient de Poisson. Remarquer

aussi que les contraintes ne dépendent pas du module de Young mais seulement du coefficient de Poisson. La contrainte axiale n'est pas nulle mais sa résultante selon z l'est effectivement.

Les contraintes s'ordonnent de la façon suivante, en tout point $r \leq r_e$:

$$\sigma_{zz} \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta} \tag{14.148}$$

L'inégalité $\sigma_{zz} \leq \sigma_{rr}$ n'est en fait valable que pour $\nu \geq 0$. En effet,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} 2(1-2\nu) r^2 \geq 0 \\
\sigma_{rr} - \sigma_{zz} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-4\nu) r_e^2 - (3-6\nu) r^2) \geq 0 \quad \text{pour } \nu > 0 \\
\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-4\nu) r_e^2 - (1-2\nu) r^2) \geq 0
\end{aligned}$$

Les écarts les plus grands entre les contraintes principales sont

$$\begin{aligned}
(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en} \quad r = 0 \\
(\sigma_{rr} - \sigma_{zz})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en} \quad r = 0 \\
(\sigma_{zz} - \sigma_{rr})_{max} &= -\frac{\rho\omega^2}{8} \frac{2\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en} \quad r = r_e \\
(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en} \quad r = 0
\end{aligned}$$

sans restriction autre que $-1 < \nu < 0.5$. Cette analyse permet de prévoir la limite d'élasticité selon le critère de Tresca (4.71). La plasticité commence en $r = 0$ lorsque la vitesse de rotation atteint

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8(1-\nu)}{3-4\nu} \frac{\sigma_0}{r_e^2} \tag{14.149}$$

où σ_0 est la limite d'élasticité du matériau en traction simple. Remarquer que la vitesse limite de l'arbre massif en rotation coïncide avec celle du disque mince sans alésage (14.51) lorsque le coefficient de Poisson est nul. Pour un même rayon extérieur r_e, la vitesse critique de l'arbre en rotation est plus forte que celle du disque mince à condition que $\nu > 0$.

14.5.3 Epilogue

Le recours au principe de Saint–Venant a été mis à profit lors de la résolution de la déformation de cylindres pour choisir la méthode des contraintes ou des déplacements en fonction de l'élancement du cylindre. A priori, les deux méthodes sont légitimes mais c'est la méthode des contraintes qui s'est avérée efficace dans le traitement des disques minces, tandis que la méthode des déplacements est adaptée aux arbres. La forme simple du champ de déplacement (14.131) est en effet trop restrictive pour résoudre le problème des disques minces.

Chapitre 15

Concentrations de contraintes

Ce chapitre a pour objectif de montrer que la présence de trous, entailles et autres congés de raccordement conduit à un affaiblissement de la structure en raison de surcontraintes locales, appelées concentrations de contrainte. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le **facteur de concentration de contrainte** associé à chaque géométrie, notion introduite dans ce chapitre, afin de dimensionner les structures. Ce fait a été reconnu tardivement dans la communauté scientifique, près de cent ans après l'établissement de la théorie tridimensionnelle des milieux continus élastiques. Des ruptures précoces sont ainsi restées longtemps inexpliquées. La prise en compte des concentrations de contraintes est aujourd'hui codifiée. Un tel catalogue de concentrateurs de contraintes est disponible par exemple dans (Pilkey, 1997).

Le cas de la traction d'une plaque percée d'un trou circulaire est analysé dans le détail avant d'évoquer d'autres concentrateurs tels que les trous elliptiques, sphériques et les entailles avec un rayon de courbure donné. L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état naturel, au comportement élastique linéarisé.

Le chapitre commence par la description de l'outil de résolution privilégié pour les problèmes traités, à savoir les fonctions de contraintes ou fonctions d'Airy, qui sera appliqué dans les sections suivantes.

15.1 Préliminaire : fonction de contraintes et coordonnées cylindriques

La résolution d'un problème bidimensionnel d'élasticité isotrope linéarisée peut se ramener à la recherche d'une fonction, appelée fonction de contraintes introduite au paragraphe 8.3.3. En coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée et dans le cas où les contraintes recherchées sont de la forme :

$$\sigma_{11}(x_1, x_2),\ \sigma_{22}(x_1, x_2),\ \sigma_{12}(x_1, x_2),\ \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \tag{15.1}$$

et, *en l'absence d'efforts volumiques*, il existe une fonction $\chi(x_1, x_2)$ telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Les équations de compatibilité exigent alors que cette fonction soit biharmonique :

$$\Delta^2\chi = \chi_{,1111} + \chi_{,2222} + 2\chi_{,1122} = 0$$

Les relations précédentes peuvent être traduites dans un système de coordonnées cylindriques, pour un champ de contraintes recherché de la forme

$$\sigma_{rr}(r,\theta),\ \sigma_{\theta\theta}(r,\theta),\ \sigma_{r\theta}(r,\theta),\ \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \tag{15.2}$$

Il existe une fonction de contraintes $\chi(r,\theta)$ telle que

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2} \tag{15.3}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} \tag{15.4}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta}\right) \tag{15.5}$$

L'opérateur bilaplacien s'écrit :

$$\Delta^2\chi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2}\right) = 0 \tag{15.6}$$

Une large classe de fonctions biharmoniques s'obtient sous la forme

$$\chi = \Phi_1(r,\theta) + r^2\Phi_2(r,\theta)$$

où Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions harmoniques, i.e. telles que $\Delta\Phi = 0$. On vérifie qu'effectivement les fonctions construites de la sorte sont biharmoniques. La grande variété des fonctions harmoniques permet alors d'engendrer de nombreuses familles de solutions de l'équation biharmonique. Une telle famille de fonctions biharmoniques est

$$\begin{aligned}
\chi(r,\theta) &= A_0\log r + B_0 r^2\log r + C_0 r^2 + D_0 \\
&+ (A_1 r\log r + B_1 r^3 + C_1 r + \frac{D_1}{r})\cos\theta + (A_1^\star r\log r + B_1^\star r^3 + C_1^\star r + \frac{D_1^\star}{r})\sin\theta \\
&+ F\theta + r\theta(G_1\cos\theta + G_2\sin\theta) \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty}(A_k r^k + B_k r^{-k} + C_k r^{k+2} + D_k r^{-k+2})\cos k\theta \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty}(A_k^\star r^k + B_k^\star r^{-k} + C_k^\star r^{k+2} + D_k^\star r^{-k+2})\sin k\theta
\end{aligned} \tag{15.7}$$

qui permet de résoudre de nombreux problèmes aux limites d'élasticité linéaire plane avec des conditions de chargement périodiques en θ (Rekatch, 1980; Szabó, 1985). Il reste au lecteur à vérifier qu'effectivement cette famille de fonctions satisfait à l'équation (15.6). Les constantes $A_k, A_k^\star, B_k, B_k^\star, C_k, C_k^\star, D_k, D_k^\star, F, G_1, G_2$ doivent être déterminées grâce aux conditions à la frontière, lorsque cela est possible.

15.2 Champ de contraintes dans une plaque trouée en traction simple

Une plaque d'épaisseur $2h$ percée d'un trou cylindrique à section circulaire de rayon a est soumise à ses extrémités à un état de traction simple. La géométrie et les données de ce

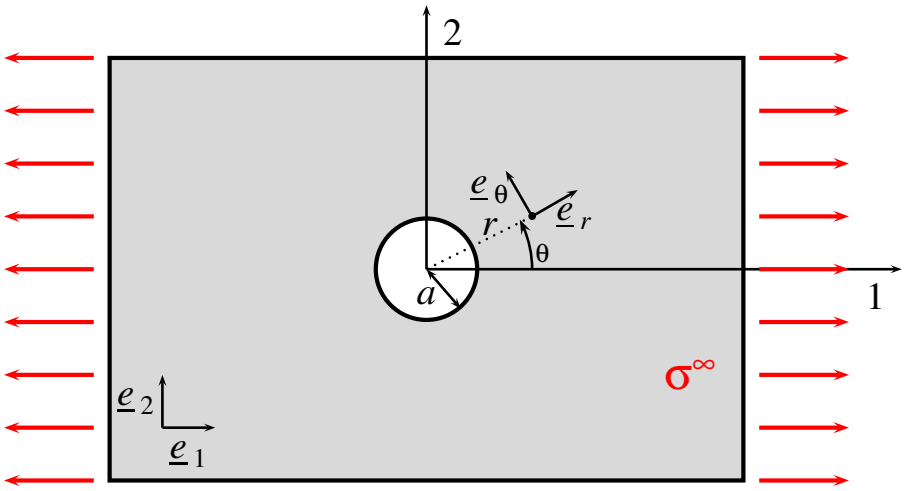


FIG. 15.1 – Plaque percée d'un trou circulaire de rayon a et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité σ^∞.

problème[1] sont illustrées par le schéma de la figure 15.1. L'axe du trou est $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ et la direction de traction est $\underline{\boldsymbol{e}}_1$. La longueur et la largeur L sont supposées suffisamment grandes par rapport à a pour que l'état de contrainte loin du trou ne soit pas affecté par la présence du trou et puisse donc être assimilé à l'état homogène suivant :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\infty = \sigma^\infty \, \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 \tag{15.8}$$

où σ^∞ est la contrainte imposée, donnée du problème. Dans cette partie, le bord du trou ainsi que les surfaces $z = \pm h$ sont libres d'effort.

Un système de coordonnées cylindriques (O, r, θ) est adopté, O étant le centre du trou, l'angle θ étant mesuré par rapport à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$. Il est représenté sur la figure 15.1.

Compte tenu des caractéristiques du chargement, le traitement du problème est justiciable d'une résolution en contraintes planes, fût–elle approchée. Le champ de contraintes est donc recherché sous la forme (15.2).

15.2.1 Champ de contraintes loin du trou

Donner les composantes du tenseur des contraintes loin du trou dans le système de coordonnées cylindriques. Donner une fonction de contraintes $\chi(r, \theta)$ correspondant à un champ de traction simple en intégrant les relations (15.3) à (15.5).

On substitue

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \cos\theta \underline{\boldsymbol{e}}_r - \sin\theta \underline{\boldsymbol{e}}_\theta$$

dans l'état de contrainte (15.8) pour trouver

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2}\left((1+\cos 2\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + (1-\cos 2\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta - \sin 2\theta(\underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r)\right) \tag{15.9}$$

[1] aussi appelé problème de Kirsch qui le résolut en 1898.

Autrement dit,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{\infty} = \dfrac{\sigma^{\infty}}{2}(1+\cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^{\infty} = \dfrac{\sigma^{\infty}}{2}(1-\cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^{\infty} = -\dfrac{\sigma^{\infty}}{2}\sin 2\theta \end{cases} \tag{15.10}$$

Pour trouver une fonction de contraintes conduisant au champ de traction simple, on intègre l'équation (15.4) en

$$\chi = \frac{\sigma^{\infty}}{2}(1-\cos 2\theta)\frac{r^2}{2} + g(\theta)r + h(\theta)$$

En calculant $\sigma_{r\theta}$ grâce à (15.5), on trouve que $h = Cste$. En calculant σ_{rr} grâce à (15.4), on trouve que $g = g_1\cos\theta + g_2\sin\theta$. On vérifie que la contribution aux contraintes des termes en h, g_1, g_2 est nulle de sorte qu'on ne perd pas en généralité en prenant $h = g_1 = g_2 = 0$. Finalement, une fonction de contraintes associée à l'état de traction simple est

$$\chi = \frac{\sigma^{\infty}}{2}(1-\cos 2\theta)\frac{r^2}{2} \tag{15.11}$$

15.2.2 Forme générale des contraintes

Le résultat précédent nous incite à rechercher, au sein de la collection répertoriée en (15.7), la fonction de contraintes, en tout point de la plaque trouée, sous la forme :

$$\chi(r,\theta) = A\log r + Br^2\log r + Cr^2 + (A_2r^2 + B_2r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2)\cos 2\theta \tag{15.12}$$

où $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont des constantes à déterminer. D'après les relations (15.3) à (15.5), donner l'expression du champ de contraintes général associé à la famille de fonctions de contraintes précédente.
Identifier certaines des constantes grâce à l'expression du champ de contraintes à l'infini mise en évidence en 15.2.1.

La famille de fonctions de contraintes choisie conduit au champ de contraintes suivant :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B\log r + B + 2C + (-2A_2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2})\cos 2\theta \tag{15.13}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B\log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2r^2 + \frac{6C_2}{r^4})\cos 2\theta \tag{15.14}$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\sin 2\theta(A_2 + 3B_2r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}) \tag{15.15}$$

Loin du trou, i.e. lorsque r est suffisamment grand, le champ précédent prend la forme asymptotique

$$\sigma_{rr}^{\infty} = 2B\log r + B + 2C - 2A_2\cos 2\theta \tag{15.16}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\infty} = 2B\log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2r^2)\cos 2\theta \tag{15.17}$$

$$\sigma_{r\theta}^{\infty} = 2\sin 2\theta(A_2 + 3B_2r^2) \tag{15.18}$$

L'identification entre ce champ et celui de traction simple (15.9) permet de déterminer les constantes :

$$B = 0, \quad C = \frac{\sigma^{\infty}}{4}, \quad A_2 = -\frac{\sigma^{\infty}}{4}, \quad B_2 = 0$$

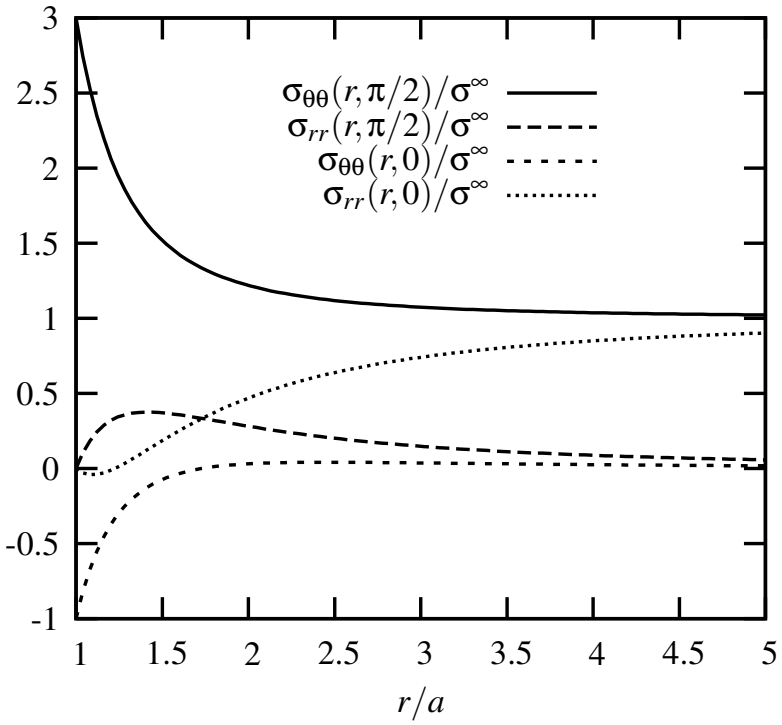


FIG. 15.2 – Profils des contraintes radiale et orthoradiale normalisées par la contrainte appliquée en partant du pôle ($\theta = 0$) et de l'équateur ($\theta = \pi/2$) en fonction de la distance relative r/a par rapport au trou.

15.2.3 Prise en compte des conditions à la frontière

Utiliser les conditions aux limites non prises en compte à ce stade pour déterminer complètement le champ de contraintes.

L'analyse du paragraphe précédent a permis d'aboutir à la forme suivante du champ des contraintes dans la plaque :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2})\cos 2\theta \quad (15.19)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (-\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{r^4})\cos 2\theta \quad (15.20)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\sin 2\theta(-\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}) \quad (15.21)$$

Les bords du trou sont libres d'effort de sorte que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(r=a).\underline{\boldsymbol{e}}_r = 0$, ce qui implique la nullité en $r = a$ des composantes σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$, pour toutes les valeurs de l'angle θ :

$$\sigma_{rr}(r=a) = \frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2})\cos 2\theta = 0$$

$$\sigma_{r\theta}(r=a) = 2\sin 2\theta(-\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{a^4} - \frac{D_2}{a^2}) = 0$$

Un système linéaire portant sur les inconnues A, C_2, D_2 en découle :

$$\frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{4} + \frac{3C_2}{a^4} + \frac{D_2}{a^2} = 0$$

dont la résolution fournit

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{2}a^2, \quad C_2 = -\frac{\sigma^\infty}{4}a^4, \quad D_2 = \frac{\sigma^\infty}{2}a^2 \tag{15.22}$$

Finalement, le champ de contraintes et la fonction de contraintes identifiés sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2}) + \frac{\sigma^\infty}{2}(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2})\cos 2\theta \tag{15.23}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2}(1+\frac{a^2}{r^2}) - \frac{\sigma^\infty}{2}(1+\frac{3a^4}{r^4})\cos 2\theta \tag{15.24}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2}(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2})\sin 2\theta \tag{15.25}$$

$$\chi = -\frac{\sigma^\infty}{2}a^2\log r + \frac{\sigma^\infty}{4}r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4}(-r^2+2a^2-\frac{a^4}{r^2})\cos 2\theta \tag{15.26}$$

Il s'agit d'un état de contraintes planes (CP), tel qu'il a été recherché dans cette section. Ces relations sont rassemblées dans le tableau récapitulatif 15.1.
La fonction de contrainte loin du trou s'obtient, à r fixé, en faisant tendre $a \to 0$ (situation correspondant au trou dans une plaque infinie). L'expression précédente conduit alors à la fonction de contrainte (15.11) associée à la traction simple.

15.3 Concentration de contrainte au bord du trou

Le champ de contraintes trouvé précédemment indique que les contraintes ne sont pas homogènes dans une plaque trouée sollicitée en traction à ses extrémités. La décroissance rapide en $1/r^2$ du champ de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou et que le champ suffisamment loin du trou peut être considéré comme homogène. Cette décroissance en fonction de r/a est visible sur la figure 15.2 où sont tracées les contraintes à partir du pôle et de l'équateur. Le champ de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ est représenté sur la figure 15.3(a), ce qui permet de voir que cette composante est plus forte au bord du trou que partout ailleurs dans la plaque. Plus généralement, les cartes des contraintes principales des figures 15.3(c) et (d) montrent que celles-ci sont maximales au bord du trou. Il existe donc des surcontraintes en bord de trou, appelées aussi concentrations de contraintes. Elles jouent un rôle essentiel dans l'amorçage de la rupture et/ou l'apparition de la plasticité, dont l'étude fait l'objet de cette partie.

15.3.1 Facteur de concentration de contrainte

Donner la valeur de la contrainte orthoradiale[2] $\sigma_{\theta\theta}$ au bord du trou en fonction de l'angle θ. Indiquer à quel endroit cette contrainte est maximale et quelle valeur elle y prend. Calculer le facteur de concentration de contrainte défini par

$$K_t := \frac{\sigma_{\theta\theta}^{max}}{|\sigma^\infty|} \tag{15.27}$$

On distinguera la situation de traction simple $\sigma^\infty > 0$ de celle de compression simple $\sigma^\infty < 0$.

La contrainte orthoradiale vaut

$$\sigma_{\theta\theta}(r=a) = \sigma^\infty(1-2\cos 2\theta) \tag{15.28}$$

au bord du trou. On distingue deux situations :

[2] *Hoop stress* en anglais.

Champ de contraintes

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{\sigma^\infty}{2}(1 - \dfrac{a^2}{r^2}) + \dfrac{\sigma^\infty}{2}(1 + \dfrac{3a^4}{r^4} - \dfrac{4a^2}{r^2})\cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\sigma^\infty}{2}(1 + \dfrac{a^2}{r^2}) - \dfrac{\sigma^\infty}{2}(1 + \dfrac{3a^4}{r^4})\cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\sigma^\infty}{2}(1 - \dfrac{3a^4}{r^4} + \dfrac{2a^2}{r^2})\sin 2\theta \\ \sigma_{zz} = 0 \quad \text{(CP)} \\ \sigma_{zz} = \sigma^\infty \nu(1 - \dfrac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta) \quad \text{(DP)} \end{cases}$$

$$\chi = -\frac{\sigma^\infty}{2}a^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4}r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4}(-r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^2})\cos 2\theta$$

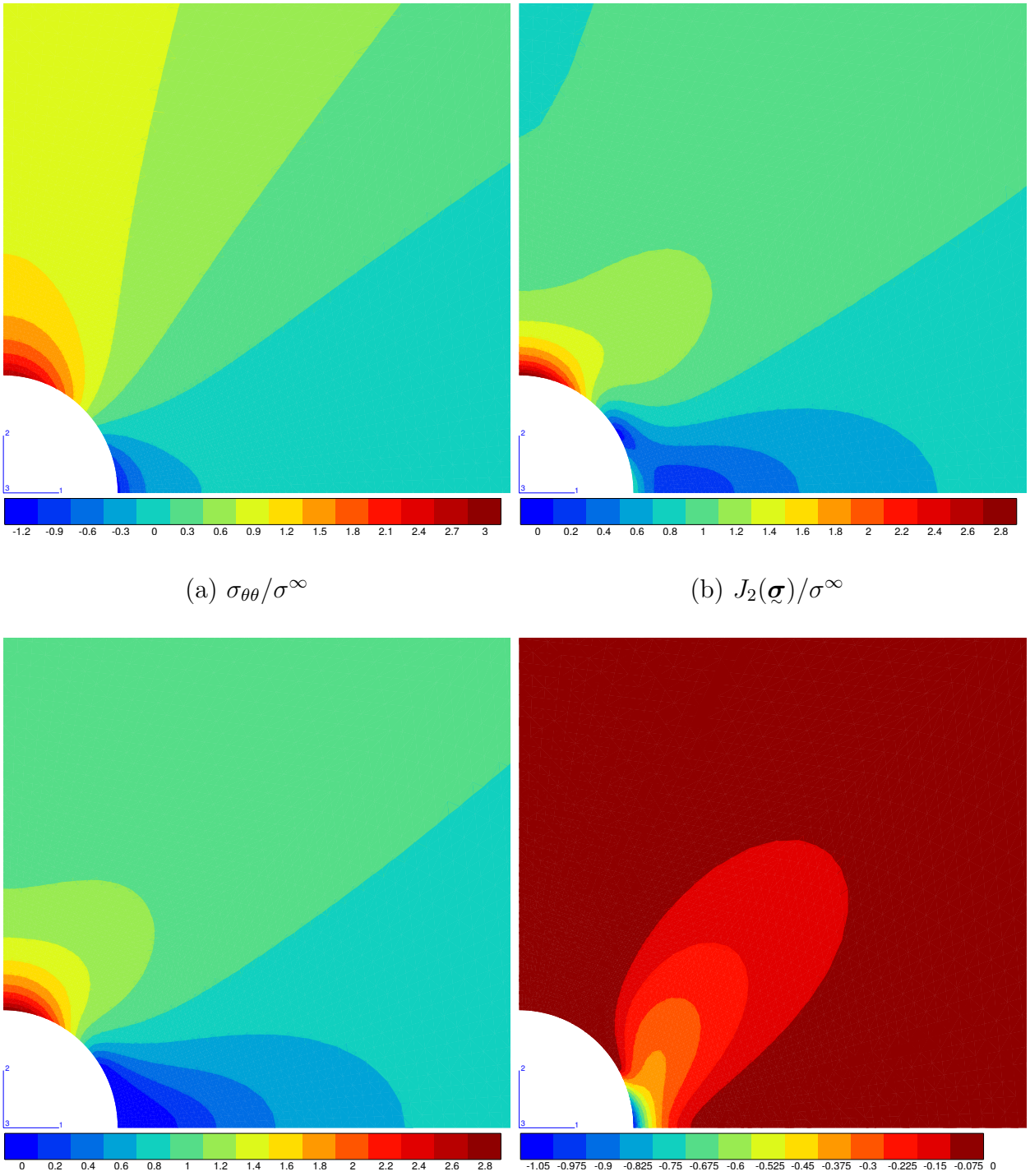
Champ de déformations (DP)

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\sigma^\infty}{2}\dfrac{1+\nu}{E}\left(1 - 2\nu - \dfrac{a^2}{r^2} + (1 + \dfrac{3a^4}{r^4} - \dfrac{4a^2}{r^2}(1-\nu))\cos 2\theta\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{\sigma^\infty}{2}\dfrac{1+\nu}{E}\left(1 - 2\nu + \dfrac{a^2}{r^2} - (1 + \dfrac{3a^4}{r^4} - \dfrac{4a^2}{r^2}\nu)\cos 2\theta\right) \\ \varepsilon_{r\theta} = -\dfrac{\sigma^\infty}{2}\dfrac{1+\nu}{E}(1 - \dfrac{3a^4}{r^4} + \dfrac{2a^2}{r^2})\sin 2\theta \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{cases}$$

Champ de déplacements (DP)

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{\sigma^\infty}{2}\dfrac{1+\nu}{E}\left((1-2\nu)r + \dfrac{a^2}{r} + (r - \dfrac{a^4}{r^3} + \dfrac{4a^2}{r}(1-\nu))\cos 2\theta\right) \\ u_\theta = -\dfrac{\sigma^\infty}{2}\dfrac{1+\nu}{E}\left(r + \dfrac{a^4}{r^3} + \dfrac{2a^2}{r}(1-2\nu)\right)\sin 2\theta \\ u_z = 0 \end{cases}$$

TAB. 15.1 – Récapitulatif : plaque infinie percée d'un trou circulaire en traction simple (expressions simplifiées en contraintes planes (CP)) et en traction plane (solution exacte en déformations planes (DP)).



(a) $\sigma_{\theta\theta}/\sigma^{\infty}$ (b) $J_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})/\sigma^{\infty}$

(c) σ_1/σ^{∞} (d) σ_2/σ^{∞}

FIG. 15.3 – Représentation par lignes de niveaux du champ de contraintes autour d'un trou dans une plaque en traction selon la direction 1. Les grandeurs représentées sont : (a) la composante $\sigma_{\theta\theta}$, (b) la contrainte équivalente de von Mises, (c) la plus grande contrainte principale en chaque point, (d) la plus petite contrainte principale en chaque point. Toutes les contraintes sont normalisées par la valeur de la contrainte axiale loin du trou. Pour des raisons de symétrie, un quart seulement de la plaque trouée est représenté.

- **traction simple : la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $\theta = \pm\pi/2$ et vaut trois fois la contrainte appliquée. Le facteur de concentration de contraintes vaut donc :**

$$K_t^{\text{traction}} = 3$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est minimale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ où elle vaut $-\sigma^\infty$.
- **compression simple : la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et vaut $|\sigma^\infty|$. Le facteur de concentration de contraintes vaut donc :**

$$K_t^{\text{compression}} = 1$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est minimale en $\theta = \pm\pi/2$ où elle vaut $-3\sigma^\infty$.

Le facteur de concentration de 3 en traction montre l'affaiblissement qu'apporte la présence d'un trou dans une plaque. Il peut conduire à une rupture précoce de la plaque étudiée au paragraphe suivant. Les facteurs de concentration contrainte se lisent aussi sur les courbes de la figure 15.2.

15.3.2 Plasticité et rupture

Donner les contraintes principales et la contrainte équivalente de von Mises au bord du trou en fonction de l'angle θ. En déduire à quel endroit et pour quelle valeur de la contrainte imposée σ^∞ la rupture ou la plasticité peuvent apparaître. Pour prévoir la rupture d'une plaque trouée constituée d'un matériau fragile, le critère de contrainte principale positive maximale est adopté (cf. paragraphe 4.4.3). Pour prévoir l'apparition de la plasticité dans une plaque métallique ductile, le critère de von Mises est utilisé (cf. paragraphe 4.4.5). La contrainte à rupture ou la limite d'élasticité du matériau constitutif de la plaque sont notées σ_0. On demande de donner successivement ces valeurs de contraintes appliquées critiques pour deux situations de chargement distinctes, en fonction de σ_0 :

- **traction simple**, pour laquelle $\sigma^\infty > 0$;
- **compression simple**, pour laquelle $\sigma^\infty < 0$;

Dans le cas d'un matériau fragile, faire un dessin représentant schématiquement la forme et l'orientation de la fissure qui peut apparaître. On supposera pour cela que la fissure est orthogonale à la direction principale associée à la contrainte principale positive maximale.

La rupture d'une plaque en composite percée d'un trou et sollicitée en traction simple est illustrée sur la figure 15.5(a). Commenter cette figure. Commenter ensuite la figure 15.6 qui montre la rupture d'une plaque de béton multi–perforée sollicitée en compression.

Les composantes σ_{rr} et $\sigma_{r\theta}$ sont nulles en bord de trou de sorte que l'état de contrainte en tout point du bord de trou est un état de traction ou compression simple d'intensité $\sigma_{\theta\theta}$, seule contrainte principale non nulle. La direction principale associée est $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$. La contrainte équivalente de von Mises vaut donc :

$$J_2(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) = |\sigma_{\theta\theta}| \tag{15.29}$$

On envisage d'abord le cas de plaque trouée chargée en traction $\sigma^\infty > 0$. Au bord du trou, la contrainte principale est $\sigma_{\theta\theta}$. Elle est maximale en $\theta = \pm\pi/2$ et vaut $3\sigma^\infty$. La direction principale correspondante est $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ qui coïncide avec $\mp\underline{\boldsymbol{e}}_1$ à cet endroit–là. Dans une plaque constituée d'un matériau fragile, une fissure perpendiculaire à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ risque donc d'apparaître à partir de la charge appliquée :

$$\sigma^\infty_{rupture} = \frac{\sigma_0}{3} \tag{15.30}$$

Cette valeur représente aussi la limite du fonctionnement élastique d'une plaque ductile. La plasticité apparaît au même endroit $\theta = \pm\pi/2$ pour la même valeur critique de chargement.

On envisage ensuite le cas de la plaque trouée chargée en compression σ^∞. Au bord du trou, la contrainte principale est maximale en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et vaut $|\sigma^\infty|$. La direction principale correspondante est $\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$ qui coïncide avec $\pm\underline{\boldsymbol{e}}_2$ à cet endroit–là. Dans une plaque constituée d'un matériau fragile, une fissure perpendiculaire à $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ risque donc d'apparaître à partir de la charge appliquée :

$$\sigma^\infty_{rupture} = -\sigma_0 \tag{15.31}$$

Dans le cas d'une plaque ductile, le comportement plastique se manifeste encore en $\theta = \pm\pi/2$ puisque la contrainte équivalente de von Mises prend les mêmes valeurs indépendamment du signe de σ^∞ d'après (15.29). La plasticité est donc plus précoce dans ce cas que la rupture et intervient pour la charge appliquée (15.30).
Les différentes situations de fissuration sont représentées sur la figure 15.4.

Les concentrations de contraintes représentent un danger majeur pour le fonctionnement des structures puisqu'elles multiplient les risques d'amorçage local de la rupture ou de la plasticité. Le facteur 3 rencontré dans le cas du trou dans une plaque est, à ce titre, remarquable.

Le facteur de concentration de contrainte est indépendant de la taille a du trou, c'est un résultat important. Les petits trous sont aussi dangereux que les gros trous ! Ce raisonnement a toutefois des limites qui sont celles de la validité de la mécanique des milieux continus classique. On constate en effet que les plaques munies de trous plus petits sont en général plus résistantes à la rupture (cas de composites stratifiés dans (Lahellec et al., 2005)) ou à la plasticité (cas d'un acier dans (Bascoul and Maso, 1981)). Cet effet d'échelle se manifeste en fait lorsque la taille du trou devient comparable à celle des éléments de la microstructure du matériau (grains d'un polycristal, pli ou fibre d'un composite...). La prise en compte de ces effets d'échelle peut se faire de plusieurs manières :

- *approche statistique* : des défauts présents dans la microstructure des matériaux sont responsables des fluctuations de contraintes à rupture de plaques trouées fragiles (inclusions, porosités, état de surface...). Le nombre de défauts susceptibles de s'activer dépend du volume de la zone où les contraintes sont élevées. Ce volume dépend effectivement de la taille du trou. Si le volume de matière fortement sollicité est faible (petit trou), la probabilité de rencontrer un défaut critique est faible. La contrainte à rupture apparente de la plaque n'en sera que plus grande (Beremin, 1983).
- *calcul du gradient de contrainte* : le gradient de contrainte est sensible à la taille de l'inclusion. Calculons par exemple

$$K_{grad} := -\frac{1}{\sigma_{\theta\theta}}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r}(r = a, \theta = \pi/2)$$

  ce qui donne

$$aK_{grad} = \frac{7}{3}$$

  Des critères portant sur K_{grad} ont été développés pour modéliser les effets d'échelles observés (Filippini, 2000).
- *milieux continus généralisés* : il est possible de construire des théories de milieux continus enrichis pour incorporer certains aspects de la microstructure des matériaux. La prise en compte de couples de contraintes dans la théorie des milieux de Cosserat conduit à un facteur de concentration de contrainte qui dépend explicitement de la taille du trou (Mindlin, 1962).

Ces approches ont en commun d'introduire une longueur interne ou longueur caractéristique, absente de la modélisation continue classique.

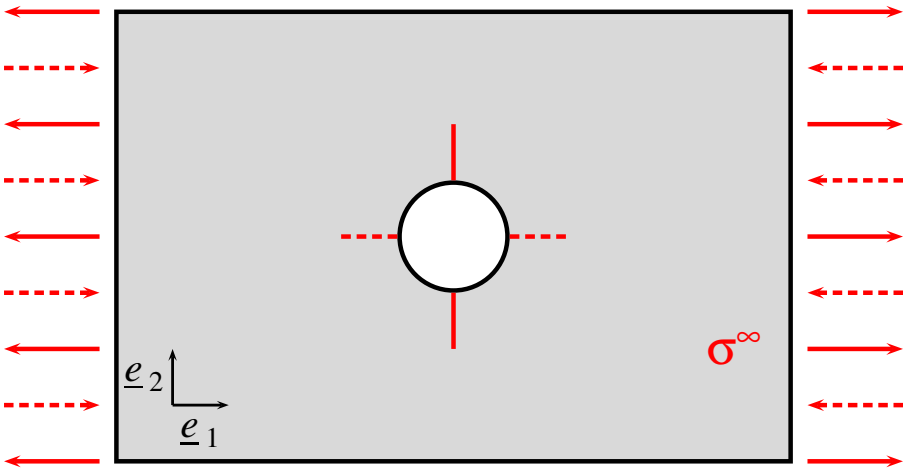


FIG. 15.4 – Apparition de fissures dans une plaque trouée soumise à une sollicitation uniaxiale à ses extrémités. La direction de sollicitation est $\underline{\boldsymbol{e}}_1$. Les fissures en trait plein sont induites par un état de traction simple loin du trou ($\sigma^\infty > 0$). Les fissures en trait pointillé sont induites par un état de compression loin du trou ($\sigma^\infty < 0$).

Des effets de taille ont également été constatés lors de la fatigue de plaques trouées ou entaillées (Rau and Burck, 1971).

15.4 Déformations et déplacements

D'après (15.23) et (15.24), on a

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma^\infty(1 - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta)$$

Cette expression n'étant pas affine vis–à–vis des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2), la résolution en contraintes planes n'est donc qu'approchée. Il est impossible d'associer au champ de contraintes calculé précédemment un champ de déplacements défini dans toute l'épaisseur de la plaque. La seule connaissance à laquelle on peut accéder est *la restriction dans le plan* $z = 0$ du champ de déplacements de la solution exacte du problème, grâce au fait que la satisfaction de la relation de compatibilité strictement "bidimensionnelle"

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

y est rigoureusement assurée.
Le travail d'intégration à venir sera donc mené dans un univers purement bidimensionnel (le plan $z = 0$) à l'aide d'un tenseur des déformations réduit à ses composantes $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r}$, sans utiliser en aucune façon la variable z.

15.4.1 Détermination partielle des déformations et des déplacements

A partir du champ de contraintes identifié en 15.2.3, donner le champ de déformations bidimensionnel correspondant.
Trouver alors les composantes de déplacements u_r et u_θ qui lui sont associées.

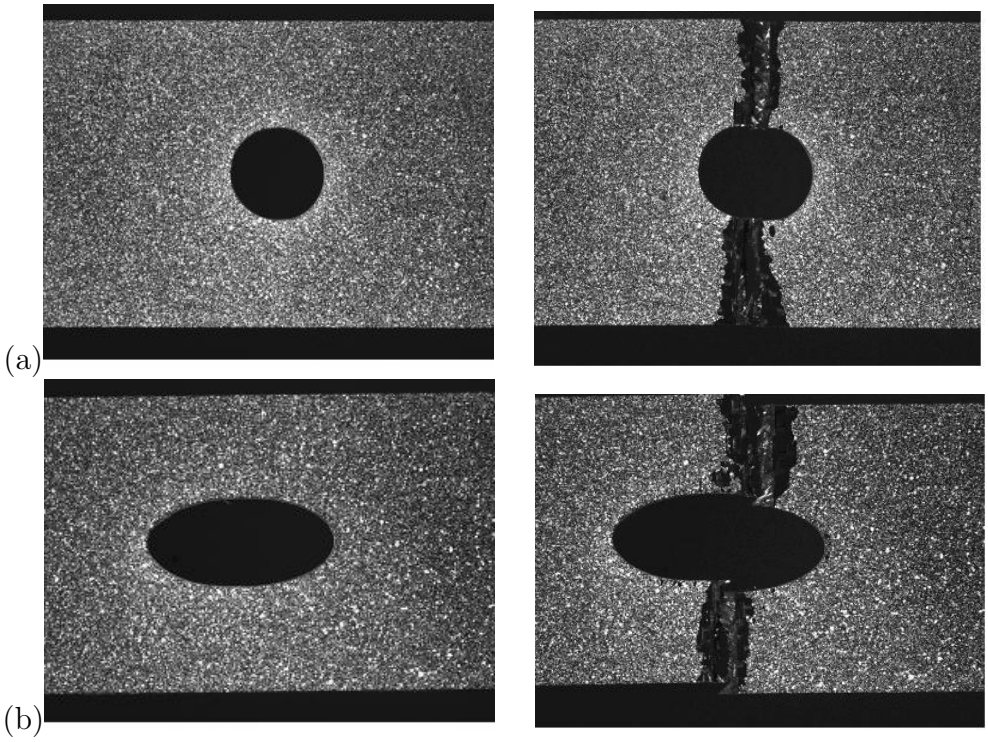


FIG. 15.5 – Rupture fragile de plaques en composites à fibres de carbone et matrice de résine percée d'un trou circulaire (a) ou elliptique (b). Les plaques sont sollicitées en traction simple selon la direction horizontale. Les images de gauche montrent l'état initial tandis que les images de droite correspondent à l'état rompu. La surface des plaque est recouverte d'un mouchetis permettant de réaliser des mesures de champs de déplacements par corrélation d'images, non présentées ici (source LMA–CNRS, Marseille, cf. (Lahellec et al., 2005)).

FIG. 15.6 – Multifissuration en compression d'une plaque de béton perforée d'un réseau périodique de trous cylindriques d'axes parallèles (source, K. Sab, LAMI–ENPC). L'appareillage visible est le capteur de déplacement ainsi que les plateaux de la machine de compression.

Les composantes de déformations sont liées aux composantes de contraintes par les lois de l'élasticité isotrope linéarisée :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \tag{15.32}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \tag{15.33}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \tag{15.34}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \tag{15.35}$$

La substitution des relations (15.23) à (15.25) dans les expressions précédentes fournit les déformations

$$E\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 - \nu + (1+\nu)((1+\frac{3a^4}{r^4})\cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2}) - \frac{4a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) \tag{15.36}$$

$$E\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 - \nu + (1+\nu)(\frac{a^2}{r^2} - (1+\frac{3a^4}{r^4})\cos 2\theta) + \nu\frac{4a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) \tag{15.37}$$

$$E\varepsilon_{zz} = -\nu\sigma^\infty\left(1 - \frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta\right) \tag{15.38}$$

$$E\varepsilon_{r\theta} = -(1+\nu)\frac{\sigma^\infty}{2}\left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta \tag{15.39}$$

Ces composantes de déformation sont reliées aux composantes du vecteur déplacement par le biais de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{15.40}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{15.41}$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \tag{15.42}$$

La composante radiale de déplacement est évaluée en intégrant l'équation (15.40) :

$$Eu_r = \frac{\sigma^\infty}{2}\left((1-\nu)r + (1+\nu)(\frac{a^2}{r} + (r - \frac{a^4}{r^3})\cos 2\theta) + \frac{4a^2}{r}\cos 2\theta\right) + f(\theta) \tag{15.43}$$

La composante orthoradiale est estimée ensuite en intégrant l'équation (15.41) :

$$Eu_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2}\left((1+\nu)(1+\frac{a^4}{r^4})r + (1-\nu)\frac{2a^2}{r}\right)\sin 2\theta - \int_0^\theta f(\theta)\,d\theta + g(r) \tag{15.44}$$

Ces expressions font intervenir des fonctions inconnues $f(\theta)$ et $g(r)$ à déterminer. Elles doivent alors être substituées dans la relation (15.42), ce qui fournit une équation différentielle portant sur ces fonctions inconnues :

$$f'(\theta) + rg'(r) + \int_0^\theta f(\theta)\,d\theta - g(r) = 0 \tag{15.45}$$

A l'évidence, la relation (15.45) est satisfaite par le couple de fonctions

$$f(\theta) = 0, \quad g(r) = 0$$

Le champ de composantes

$$Eu_r = \frac{\sigma^\infty}{2}\left((1-\nu)r + (1+\nu)(\frac{a^2}{r} + (r - \frac{a^4}{r^3})\cos 2\theta) + \frac{4a^2}{r}\cos 2\theta\right) \quad (15.46)$$

$$Eu_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2}\left((1+\nu)(1+\frac{a^4}{r^4})r + (1-\nu)\frac{2a^2}{r}\right)\sin 2\theta \quad (15.47)$$

est donc un champ de déplacement solution pour le problème posé, dans le contexte indiqué. Dès lors, la résolution exhaustive de (15.45) ne fournira rien d'autre que le déplacement d'ensemble arbitraire qu'il est loisible d'ajouter aux expressions précédentes.
En effet, la dérivation de cette équation par rapport à r et à θ conduit respectivement aux deux équations

$$\frac{d}{dr}(rg'(r) - g(r)) = 0, \quad f"(\theta) + f(\theta) = 0$$

qui suffisent à déterminer

$$f(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta, \quad g(r) = Cr + D \quad (15.48)$$

Muni de ces expressions, on revient à la relation (15.45) qui exige alors que $B + D = 0$. Quelle est la signification de la partie du champ de déplacements trouvé (15.43) et (15.44) faisant intervenir les constantes d'intégration A, B, C ? Un changement de bases permet de le voir précisément :

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{u}}^0 &= (A\cos\theta + B\sin\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_r + (B\cos\theta - A\sin\theta - Cr)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\
&= (A\cos\theta + B\sin\theta)(\cos\theta\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\theta\underline{\boldsymbol{e}}_2) + (B\cos\theta - A\sin\theta - Cr)(-\sin\theta\underline{\boldsymbol{e}}_1 + \cos\theta\underline{\boldsymbol{e}}_2) \\
&= (A + Cr\sin\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + (B - Cr\cos\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_2 \\
&= (A + CX_2)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + (B - CX_1)\underline{\boldsymbol{e}}_2 \quad (15.49)
\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un mouvement de corps rigide infinitésimal, composé d'une translation caractérisée par les constantes A et B, et d'une rotation infinitésimale d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_3$ d'angle C. C'est bien ce que l'on attend d'une procédure d'intégration du champ de déformation. Dans la suite, ce mouvement d'ensemble est fixé à 0 : $A = B = C = 0$.

15.4.2 Précision du contexte infinitésimal

Préciser les conditions de validité du contexte infinitésimal adopté dans ce chapitre, en fonction du chargement appliqué σ^∞ et des caractéristiques du matériau.

Le gradient de la transformation fait intervenir le gradient du champ de déplacements calculé précédemment. Les termes qui apparaissent peuvent systématiquement être majorés par un multiple de σ^∞/E puisqu'ils ne font intervenir que des fonctions bornées de r et de θ. Les déformations et rotations restent infinitésimales tant que

$$\frac{\sigma_\infty}{E} \ll 1$$

i.e. la même condition que pour la traction simple infinitésimale.

15.4.3 Déformée du trou

Donner, dans le contexte infinitésimal et en utilisant les expressions des déplacements u_r et u_θ trouvées précédemment, l'équation de la déformée du trou initialement circulaire, en fonction de la charge appliquée. Ce travail gagne à être réalisé en coordonnées cartésiennes dans le repère $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2)$. Dessiner le trou initial et sa déformée. L'équation trouvée représente effectivement la déformée du trou dans une plaque mince, dans le plan $z = 0$ uniquement.
Calculer la variation relative de l'aire du trou après déformation.

Les déplacements au bord du trou sont

$$u_r(r=a) = \frac{\sigma^\infty}{E} a(1 + 2\cos 2\theta) \tag{15.50}$$

$$u_\theta(r=a) = -\frac{\sigma^\infty}{E} 2a \sin 2\theta \tag{15.51}$$

On va donner l'équation de la déformée du trou dans le système de coordonnées associé à la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2)$. Ce changement de base pour les composantes de déplacement en $r = a$ se traduit par :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{u}} &= u_r \underline{\boldsymbol{e}}_r + u_\theta \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= (u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_1 + (u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta)\underline{\boldsymbol{e}}_2 \\ &= \frac{\sigma^\infty}{E} 3a \cos\theta \, \underline{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{\sigma^\infty}{E} a \sin\theta \, \underline{\boldsymbol{e}}_2 \end{aligned} \tag{15.52}$$

La position actuelle (x_1, x_2) des points matériels appartenant au bord du trou s'exprime donc en fonction de leur position initiale (X_1, X_2) en tenant compte du fait que $(X_1 = a\cos\theta,\ X_2 = a\sin\theta)$:

$$x_1 = X_1(1 + 3\frac{\sigma^\infty}{E}), \quad x_2 = X_2(1 - \frac{\sigma^\infty}{E}) \tag{15.53}$$

Comme ces points sont initialement sur le cercle d'équation $X_1^2 + X_2^2 = a^2$, on obtient l'équation de la surface déformée :

$$\frac{x_1^2}{(1 + \frac{3\sigma^\infty}{E})^2} + \frac{x_2^2}{(1 - \frac{\sigma^\infty}{E})^2} = a^2 \tag{15.54}$$

Cette déformée est illustrée par la figure 15.7 et comparée à la forme initiale. Il s'agit d'une ellipse dont le grand axe est dans la direction de traction. Remarquer que la forme du trou après déformation dépend du module de Young du matériau mais pas du coefficient de Poisson. L'aire du trou déformé est celle de l'ellipse qui vaut

$$\pi ab = \pi(1 + \frac{3\sigma^\infty}{E})(1 - \frac{\sigma^\infty}{E}) \simeq \pi(1 + 2\frac{\sigma^\infty}{E})a^2$$

puisque $\sigma^\infty/E \ll 1$. La variation relative d'aire est donc

$$\frac{\Delta S}{S_0} = 2\frac{\sigma^\infty}{E} \tag{15.55}$$

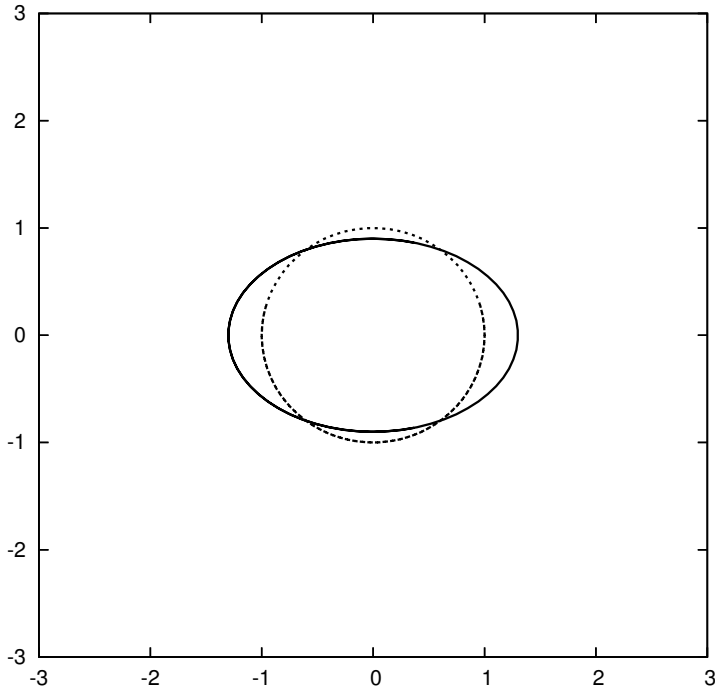


FIG. 15.7 – Tracé de la déformée du trou initialement circulaire dans le plan $(X_1/a, X_2/a)$. Le chargement appliqué est $\sigma^\infty/E = 0.1$, valeur touchant les limites du contexte infinitésimal pour l'illustration. Le coefficient de Poisson utilisé est $\nu = 0.3$. La forme initiale est en trait pointillé tandis que la déformée est en trait plein.

15.5 Plaque trouée sollicitée en traction plane

Les contraintes et les déformations d'une plaque trouée sollicitée en conditions de déformations planes (DP) sont analysées dans ce paragraphe. Dans ces conditions, le chargement appliqué loin du trou est un état dit de traction plane présentée dans la première section. Contrairement au cas des contraintes planes, on va déterminer complètement les champs de contraintes, déformations et déplacements du problème.

15.5.1 Etude de la traction plane

Les conditions de déformations planes $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ rendent impossible, en général, l'établissement d'un état de contraintes de traction simple dans une plaque homogène sollicitée dans le plan $(1, 2)$. C'est pourquoi l'on introduit l'état dit de traction plane correspondant à

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^\infty \, \underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \sigma_{zz} \, \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{15.56}$$

qui fait intervenir une composante de contrainte σ_{zz} supplémentaire par rapport à la traction simple (15.8). Calculer cette composante en fonction de σ^∞ et des propriétés du matériau.

En déformations planes, la composante σ_{zz} se déduit de la relation d'élasticité isotrope linéarisée suivante :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$$

Compte tenu de l'hypothèse $\varepsilon_{zz} = 0$, on obtient

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

En traction plane, cela donne

$$\sigma_{zz} = \nu\sigma^\infty \tag{15.57}$$

et finalement

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^\infty \left(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \nu\, \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z\right) \tag{15.58}$$

Les autres relations d'élasticité linéaire isotrope conduisent aux déformations suivantes

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1+\nu)\frac{\sigma^\infty}{E}\left((1-\nu)\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 - \nu\,\underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2\right) \tag{15.59}$$

qui s'intègrent en

$$\underline{\boldsymbol{u}} = (1+\nu)\frac{\sigma^\infty}{E}\left((1-\nu)X_1\,\underline{\boldsymbol{e}}_1 - \nu X_2\,\underline{\boldsymbol{e}}_2\right) \tag{15.60}$$

à un mouvement bidimensionnel infinitésimal de corps rigide près.

15.5.2 Plaque trouée en déformations planes

Montrer qu'il est possible d'utiliser le champ de contraintes construit dans la partie 15.2 (du moins les composantes $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$) pour trouver la solution exacte et complète du problème de la traction plane d'une plaque trouée. Pour cela, on proposera d'abord un champ de contraintes statiquement admissible permettant de construire un champ de déformations compatible. La compatibilité du champ de déformations sera établie en construisant explicitement les champs de déplacements solutions.

Le champ de contraintes

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2}(1-\frac{a^2}{r^2}) + \frac{\sigma^\infty}{2}(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2})\cos 2\theta \tag{15.61}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2}(1+\frac{a^2}{r^2}) - \frac{\sigma^\infty}{2}(1+\frac{3a^4}{r^4})\cos 2\theta \tag{15.62}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2}(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2})\sin 2\theta \tag{15.63}$$

$$\sigma_{zz} = \sigma^\infty\nu(1-\frac{2a^2}{r^2}\cos 2\theta) \tag{15.64}$$

obtenu à partir des équations (15.23) à (15.25) en rajoutant la composante $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta})$ nécessaire en conditions de déformations planes, vérifie les conditions d'équilibre statique. En effet, les composantes $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{r\theta}$ dérivent de la fonction de contraintes (15.26) tandis que la composante σ_{zz} est indépendante de z. Les relations d'élasticité isotrope linéarisées permettent d'en déduire le champ des déformations associé :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2}\frac{1+\nu}{E}\left(1-2\nu-\frac{a^2}{r^2}+(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}(1-\nu))\cos 2\theta\right) \tag{15.65}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2}\frac{1+\nu}{E}\left(1-2\nu+\frac{a^2}{r^2}-(1+\frac{3a^4}{r^4}-\frac{4a^2}{r^2}\nu)\cos 2\theta\right) \tag{15.66}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2}\frac{1+\nu}{E}(1-\frac{3a^4}{r^4}+\frac{2a^2}{r^2})\sin 2\theta \tag{15.67}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \tag{15.68}$$

La procédure d'intégration mise en œuvre au paragraphe 15.4.1 est utilisée à nouveau pour construire les champs de déplacements dont dérivent les déformations précédentes. En

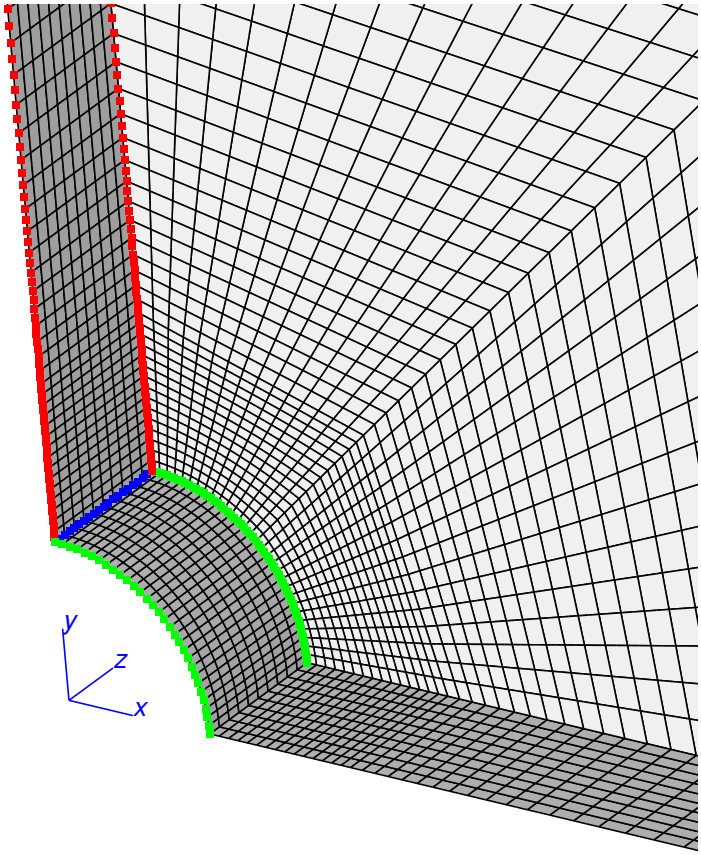


FIG. 15.8 – Maillage par éléments finis d'un huitième de plaque trouée avec $h/a = 1$. Des lignes ont été soulignées, le long desquelles les profils de contraintes et de déformations peuvent être étudiées.

particulier, les relations de compatibilité (15.40) et (15.41) conduisent à

$$u_r = \frac{\sigma^\infty}{2}\frac{1+\nu}{E}\left((1-2\nu)r + \frac{a^2}{r} + (r - \frac{a^4}{r^3} + \frac{4a^2}{r}(1-\nu))\cos 2\theta\right) + f(\theta) \quad (15.69)$$

$$u_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2}\frac{1+\nu}{E}\left(r + \frac{a^4}{r^3} + \frac{2a^2}{r}(1-2\nu)\right)\sin 2\theta - \int f(\theta)d\theta + g(r) \quad (15.70)$$

Lorsque ces composantes sont introduites dans (15.42), l'équation aux dérivées partielles (15.45) portant sur les fonctions inconnues $f(\theta), g(r)$ est obtenue, dont une solution est $f = g = 0$, retenue ici.
A ces composantes de déplacement, il faut ajouter : $u_z = 0$,
compatible avec les conditions de déformations planes $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$. Ceci achève la résolution du problème d'une plaque trouée en traction plane. Ces résultats sont consignés dans le tableau 15.1.
La déformée du trou dans le cas des déformations planes s'obtient en suivant la même méthodologie que pour les contraintes planes, à ceci près que, cette fois–ci, la déformée obtenue est valable quelle que soit la cote z et non plus seulement pour $z = 0$. Il s'agit à nouveau d'une ellipse de grand axe $(1 + 3(1-\nu^2)\sigma^\infty/E)$, dans la direction de traction, et de petit axe $(1 - (1-\nu^2)\sigma^\infty/E)$. Contrairement au cas des contraintes planes, la déformée du trou dépend aussi du coefficient de Poisson.

15.6 Qualité des estimations proposées vis–à–vis de simulations numériques tridimensionnelles

Le calcul numérique permet de s'approcher aussi près qu'on le souhaite de la solution exacte des problèmes de plaques trouées de différentes épaisseurs. On propose, dans le cas de la traction simple, de comparer ces résultats numériques avec, d'une part, les estimations analytiques proposées sous l'hypothèse de contraintes planes, et, d'autre part, la solution trouvée en déformations planes. L'outil numérique employé est la méthode des éléments finis. Il suffit pour le calcul numérique de considérer un huitième de plaque trouée pour des raisons de symétrie. On rappelle que le trou circulaire est de rayon a. L'épaisseur de la plaque est de $2h$. Le plan $z = 0$ à l'intérieur de la plaque est un plan de symétrie, la composante de déplacement u_z des points de ce plan peut être prise nulle. De même, le plan $X_1 = 0$ (resp. $X_2 = 0$) est un plan de symétrie, la composante de déplacement u_1 (resp. u_2) peut être prise nulle. Un déplacement dans la direction 1 est imposé loin du trou. Avec ces conditions aux limites, le mouvement de corps rigide est fixé. Les calculs sont réalisés pour une plaque de dimensions finies mais suffisamment grandes, dans le plan $(1, 2)$, par rapport au rayon a du trou pour que la solution obtenue ne puisse plus être distinguée pratiquement de celles obtenues avec des plaques plus grandes. Un rapport $L/a = 15$ s'avère suffisant où $2L$ est la plus grande dimension de la plaque. Les calculs ont été réalisés pour différentes valeurs du rapport h/a, à savoir 0.1, 1 et 10. Une portion du maillage par éléments finis utilisé pour $h/a = 1$ est illustrée sur la figure 15.8. Pour compléter la donnée des conditions aux limites, la surface $z = h$, ainsi que la surface latérale et le bord du trou sont libres de tout effort.

La figure 15.9 illustre les profils de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ le long des deux lignes rouges de la figure 15.8 qui sont perpendiculaires à l'axe de traction, situées l'une sur la surface libre, l'autre à l'intérieur de la plaque. Les expressions (15.23), (15.24) et (15.25) des contraintes obtenues dans des conditions de contraintes planes s'avèrent être d'excellentes estimations des contraintes réelles dans un plaque de faible épaisseur ($h/a = 0.1$, figure 15.9(a)), aussi bien à l'intérieur que sur la surface libre. Au contraire, lorsque la taille du trou est comparable à l'épaisseur, les valeurs déduites de ces expressions se distinguent notablement de la solution réelle ($h/a = 1$, figure 15.9(b)). Pour des plaques épaisses ($h/a = 10$, figure 15.9(c)), l'expression (15.24) est en bon accord avec l'état de contrainte réelle à l'intérieur mais s'en distingue à la surface libre. Des conclusions similaires peuvent être tirées de l'observation des profils de contraintes au bord du trou à l'intérieur et sur la surface libre (lignes vertes de la figure 15.8). Ces profils issus de la simulation numérique sont comparés à l'expression (15.24) sur la figure 15.10 pour différentes épaisseurs de plaques.

Les champs de contraintes autour du trou sont illustrés sous forme de lignes de niveaux dans le cas d'une plaque $h/a = 1$ sur la figure 15.11. La concentration de contrainte équivalente de von Mises à l'équateur est visible sur la figure 15.11(a). La dépendance des contraintes par rapport à la variable z apparaît aussi grâce à la vue en coupe de cette même figure. La surface visible est la surface libre tandis que l'intérieur de la plaque est à l'arrière–plan. La figure 15.11(b) montre la contrainte σ_{zz} qui, si elle est nulle bien sûr en surface, se développe au bord du trou à l'intérieur de la plaque. Certes, cette composante ne dépasse pas le tiers de la contrainte appliquée. Elle est positive (traction) à l'équateur et négative (compression) au pôle. L'existence d'une dépendance en z des champs de contraintes et, par conséquent, des déformations implique le développement d'un champ de déplacements u_z près du trou, ce qui est visible sur la figure 15.12. En surface libre, le bord du trou se creuse légèrement à l'équateur et fait légèrement saillie au pôle. La surface libre ne reste donc pas plane lors d'un tel essai.

Par contre, la dépendance en z du champ de contraintes devient négligeable dans le cas d'une

plaque mince comme l'illustre la figure 15.13.

La dépendance en z des composantes de déformations en bord de trou fait l'objet de la figure 15.14. Les déformations $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}$ et ε_{zz} obtenues par simulation numérique sont tracées le long de la ligne bleue (équateur) du maillage de la figure 15.8, en fonction de la cote z. Lorsque la plaque est mince par rapport à la taille du trou ($h/a = 0.1$, figure 15.14(a)), ces déformations ne dépendent quasiment pas de z et les valeurs trouvées sont conformes aux prédictions (15.36) à (15.38) obtenues dans le contexte des contraintes planes (CP). Ce n'est plus le cas lorsque la plaque est épaisse ($h/a = 10$, figure 15.14(c)). Dans ce cas, c'est la solution obtenue en déformations planes (DP), à savoir les expressions (15.65) à (15.68), qui s'approchent le plus de l'état des déformations au cœur de la plaque, tandis que les expressions de type (CP) restent pertinentes en surface. Dans la situation intermédiaire ($h/a = 1$, figure 15.14(b)), les expressions de type CP fournissent une bonne estimation mais la composante ε_{zz} commence à se distinguer de la composante ε_{rr} au cœur de la plaque. Ce constat justifie la règle d'ingénieur courante selon laquelle les plaques minces trouées sont plutôt en situations de contraintes planes, tandis que les plaques épaisses sont plus proches d'un état de déformations planes.

15.7 Trou elliptique dans une plaque

Une plaque infinie est percée d'un trou cylindrique de forme elliptique caractérisée par les paramètres a (demi grand axe) et b (demi petit axe), $0 < b < a$, comme sur la figure 15.15. Le grand axe de l'ellipse est parallèle à l'axe 1. La plaque est soumise, loin du trou, à un effort de traction simple $\sigma^\infty > 0$ selon une direction faisant un angle α avec l'axe 1. On s'interroge sur l'état de contrainte autour du trou et sur le facteur de concentration de contrainte introduit par la présence du trou. La résolution complète de ce problème[3] est plus délicate que dans le cas du trou circulaire. Seuls quelques éléments de la solution sont étudiés ici, tirés des traités (Rekatch, 1980; Kachanov et al., 2003).

15.7.1 Contrainte au bord du trou elliptique

On adopte la représentation paramétrique suivante des points du bord du trou elliptique représenté sur la figure 15.15 :

$$X_1 = a\cos\theta, \quad X_2 = b\sin\theta \tag{15.71}$$

Dans le contexte des contraintes planes, justifier qu'il n'existe, au bord du trou elliptique, qu'une seule contrainte principale non nulle que l'on exprimera à l'aide de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et d'un vecteur unitaire adapté (sans explicitation détaillée). Dans la suite on note $\bar{\sigma}$ cette contrainte principale, en vue de l'application d'un critère de rupture fragile.

Le bord du trou est libre d'effort. Le vecteur–contrainte est donc nul en chaque point du bord. Dans le repère local $(\underline{\boldsymbol{m}}, \underline{\boldsymbol{n}})$ où $\underline{\boldsymbol{m}}$ est tangent à l'ellipse et $\underline{\boldsymbol{n}}$ normal, et sous l'hypothèse de contraintes planes, seule la composante $\sigma_{mm} = \underline{\boldsymbol{m}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{m}} = \bar{\sigma}$ est non nulle.

Lorsque la plaque trouée est soumise à une traction simple selon une direction faisant un angle α avec l'axe 1, on admettra que $\bar{\sigma}$ vaut, en un point (X_1, X_2) de l'ellipse, caractérisé par

[3] Elle a été obtenue par Kolossov en 1910 et Inglis en 1913 (Inglis, 1913). Pour un exposé plus complet de la solution du problème d'Inglis, le lecteur est renvoyé à la référence (Timoshenko and Goodier, 1970) et (Rekatch, 1980).

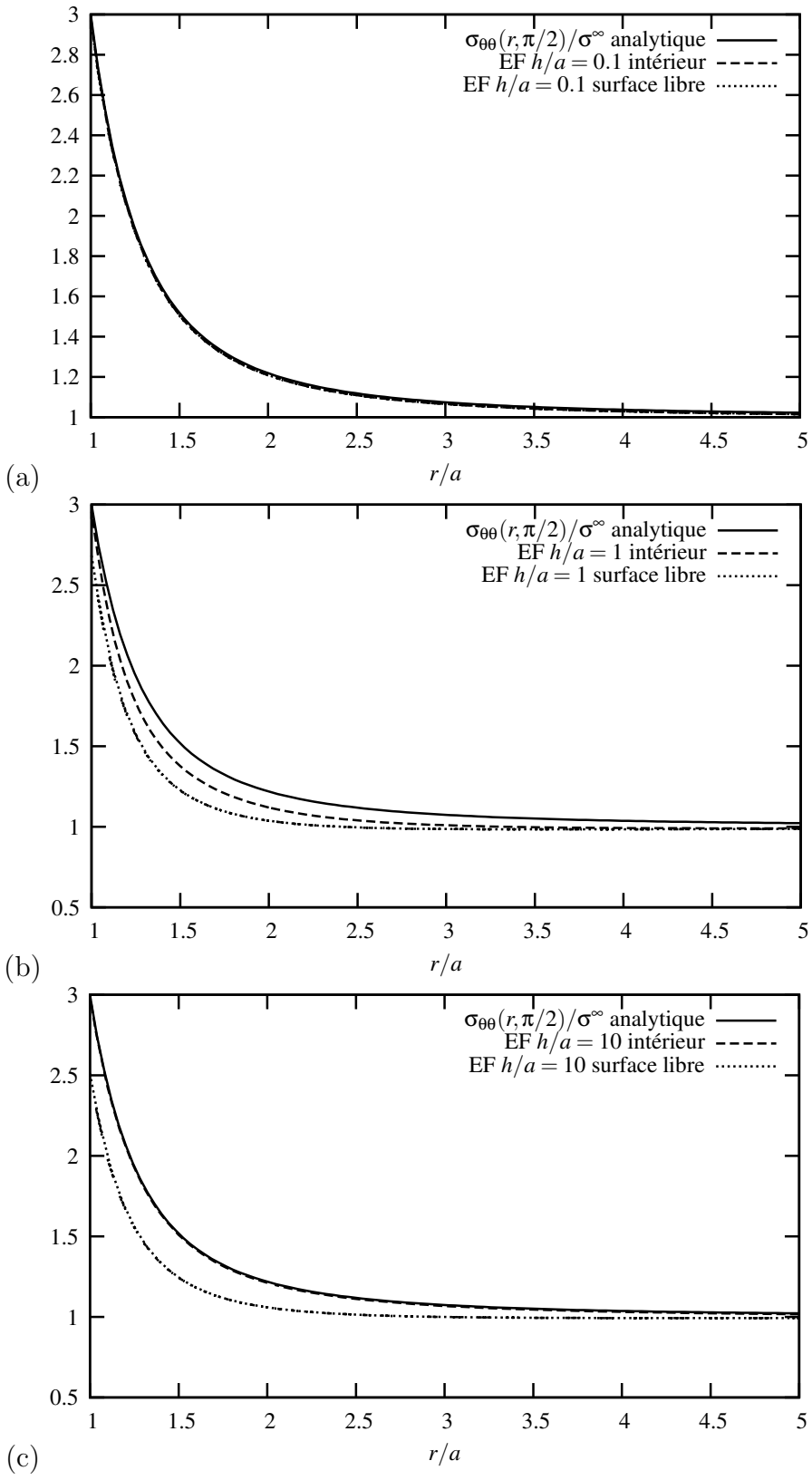


FIG. 15.9 – Comparaison entre le champ de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ donné analytiquement par (15.24) et les résultats de calculs par éléments finis (EF) pour des plaques trouées d'épaisseurs différentes : (a) $h/a = 0.1$, (b) $h/a = 1$, (c) $h/a = 10$. Les profils de contraintes sont donnés le long de deux lignes d'équations $\theta = \pi/2$ et $z = 0$ (intérieur, ligne située dans le plan de symétrie normal à l'axe z) ou $z = h$ (surface libre), lignes rouges de la figure 15.8.

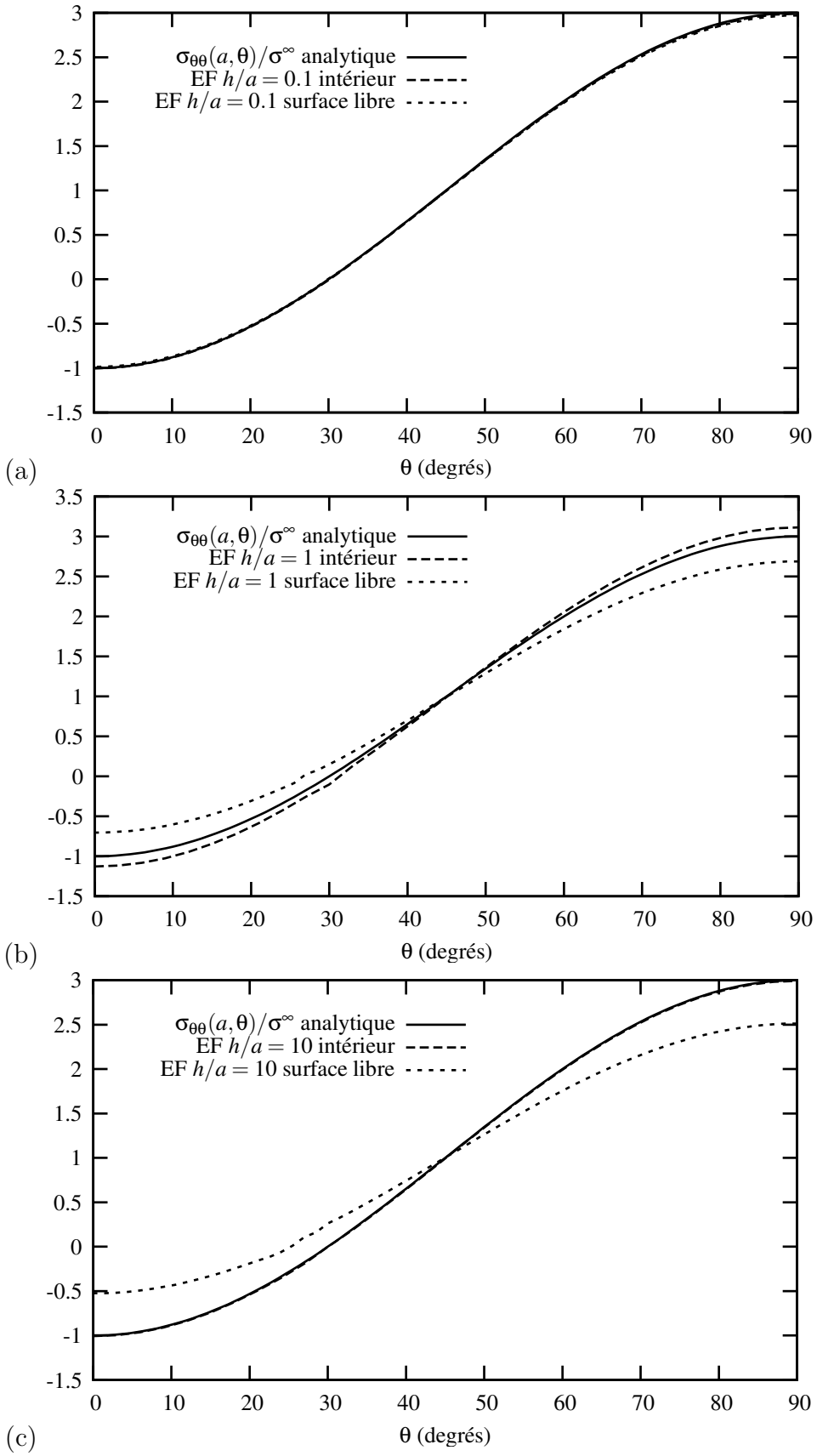
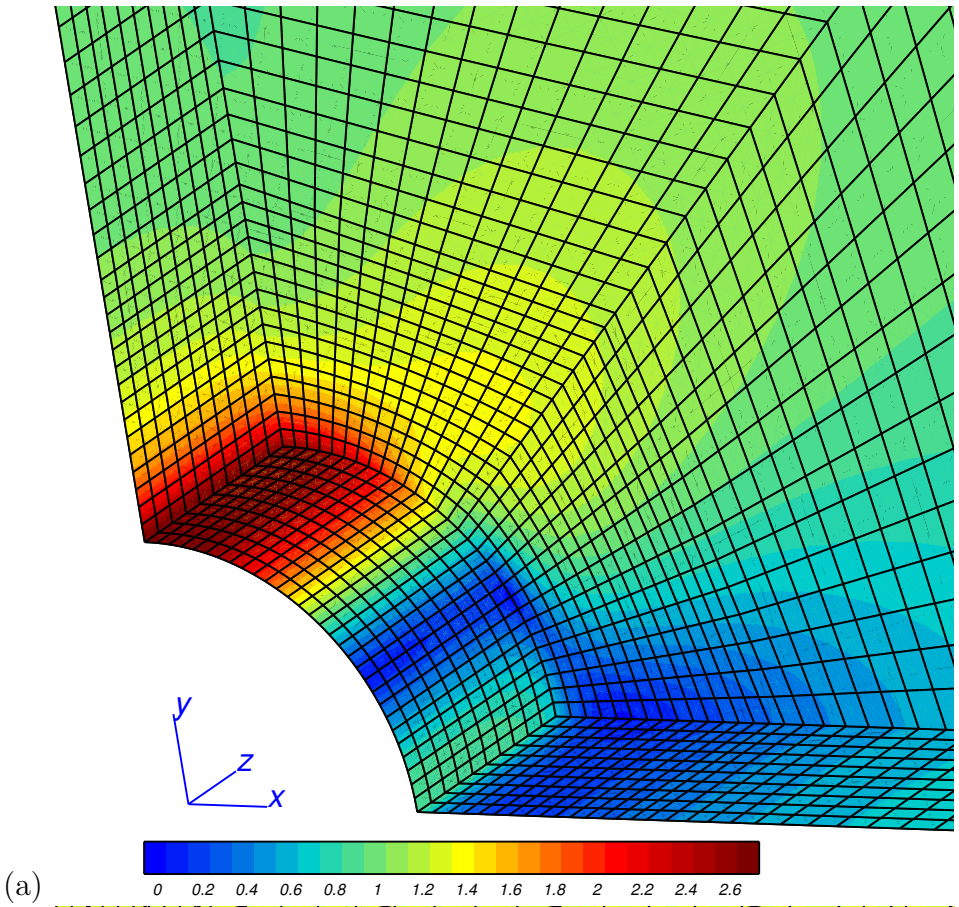
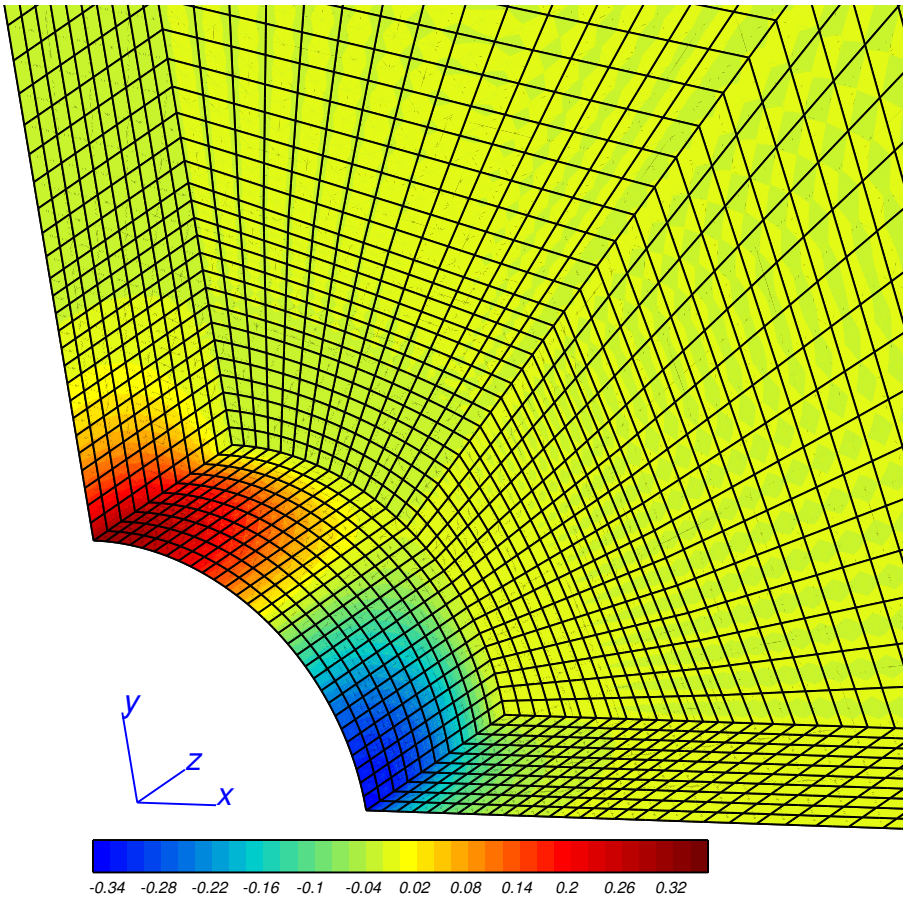


FIG. 15.10 – Comparaison entre le champ de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ donné analytiquement par (15.24) et les résultats de calculs par éléments finis (EF) pour des plaques trouées d'épaisseurs différentes : (a) $h/a = 0.1$, (b) $h/a = 1$, (c) $h/a = 10$. Les profils de contraintes sont donnés au bord du trou, le long de deux lignes d'équations $r = a$ et $z = 0$ (intérieur, ligne située dans le plan de symétrie normal à l'axe z) ou $z = h$ (surface libre), lignes vertes de la figure 15.8.



(a)



(b)

FIG. 15.11 – Champs de contraintes autour du trou dans une plaque trouée telle que $h/a = 1$, obtenus numériquement par la méthode des éléments finis : (a) contrainte équivalente de von Mises, (b) contrainte σ_{zz}. Les contraintes sont normalisées par la valeur σ^{∞}.

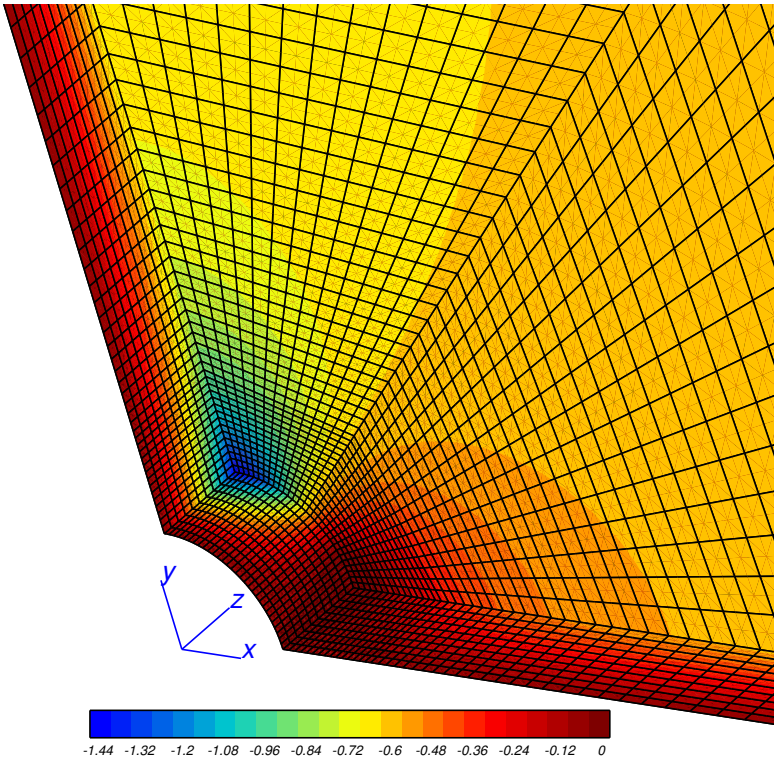


FIG. 15.12 – Champ de déplacements u_z autour du trou dans une plaque trouée telle que $h/a = 1$, obtenu numériquement par la méthode des éléments finis. Les valeurs sont normalisées par $h\sigma^\infty/E$.

le paramètre θ de (15.71) :

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 + 2m\cos 2\alpha - 2\cos 2(\theta - \alpha)}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2} \tag{15.72}$$

L'expression[4] fait intervenir la quantité suivante, fonction des paramètres de l'ellipse :

$$m = \frac{a - b}{a + b}, \quad 0 \leq m \leq 1 \tag{15.73}$$

Compte tenu de la périodicité de $\bar{\sigma}$, l'étude doit être menée *a priori* pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et

[4] Dans son article original, Inglis donne la relation (15.72) sous la forme équivalente suivante :

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{\sinh 2\alpha_0 + \cos 2\alpha - e^{2\alpha_0}\cos 2(\alpha - \theta)}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\theta}$$

car il utilise un système de coordonnées curvilignes dites elliptiques :

$$x = c\cosh\alpha_0 \cos\theta, \quad y = c\sinh\alpha_0 \sin\theta$$

constitué d'un réseau orthogonal d'ellipses et d'hyperboles d'équations respectives

$$\frac{x^2}{c^2\cosh^2\alpha_0} + \frac{y^2}{c^2\sinh^2\alpha_0} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2\cos^2\theta} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\theta} = 1$$

Lorsque (x, y) appartient au bord du trou, on a $c\cosh\alpha_0 = a$ et $b = c\sinh\alpha_0$. On vérifie alors que l'expression précédente est effectivement équivalente à (15.72). Le lecteur est renvoyé à la référence (Timoshenko and Goodier, 1970) pour un usage plus systématique des coordonnées elliptiques.

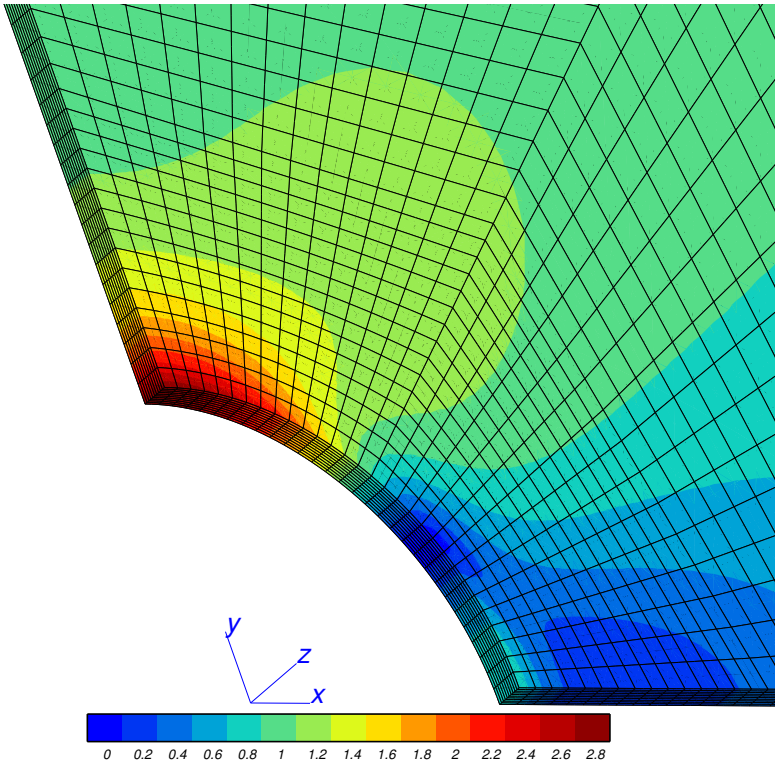


FIG. 15.13 – Champ de contrainte équivalente de von Mises autour du trou dans une plaque mince trouée telle que $h/a = 0.1$, obtenu numériquement par la méthode des éléments finis. Les valeurs sont normalisées par σ^∞.

$\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. Toutefois, l'invariance du problème vis–à–vis de la transformation $(\alpha, \theta) \rightarrow (-\alpha, -\theta)$ permet de se limiter à $\alpha \in [0, \pi/2]$.

15.7.2 Cas d'une sollicitation perpendiculaire au grand axe de l'ellipse

On considère d'abord le cas $\alpha = \pi/2$, c'est–à–dire une traction dans la direction 2, perpendiculaire au grand axe de l'ellipse. Préciser alors $\bar{\sigma}$ et calculer la contrainte maximale $\bar{\sigma}^{max}$ et la contrainte minimale $\bar{\sigma}^{min}$. Remarquer que σ^{min} est indépendante de m et donc des paramètres de l'ellipse.
A quel endroit ces valeurs extrémales sont–elles atteintes ?
Le facteur de concentration de contrainte K_t est toujours défini par (15.27). Le calculer pour le trou elliptique en fonction de m puis en fonction du rapport b/a.
On étudie ensuite les cas particuliers suivants :

Trou circulaire

Retrouver les résultats établis au paragraphe 15.3.1, à ceci près que la direction de traction est ici l'axe 2 au lieu de l'axe 1.

Ellipse infiniment aplatie

Que devient le facteur de concentration de contrainte K_t, pour une ellipse de plus en plus aplatie, c'est–à–dire lorsque $b/a \rightarrow 0$, autrement dit $m \rightarrow 1$.

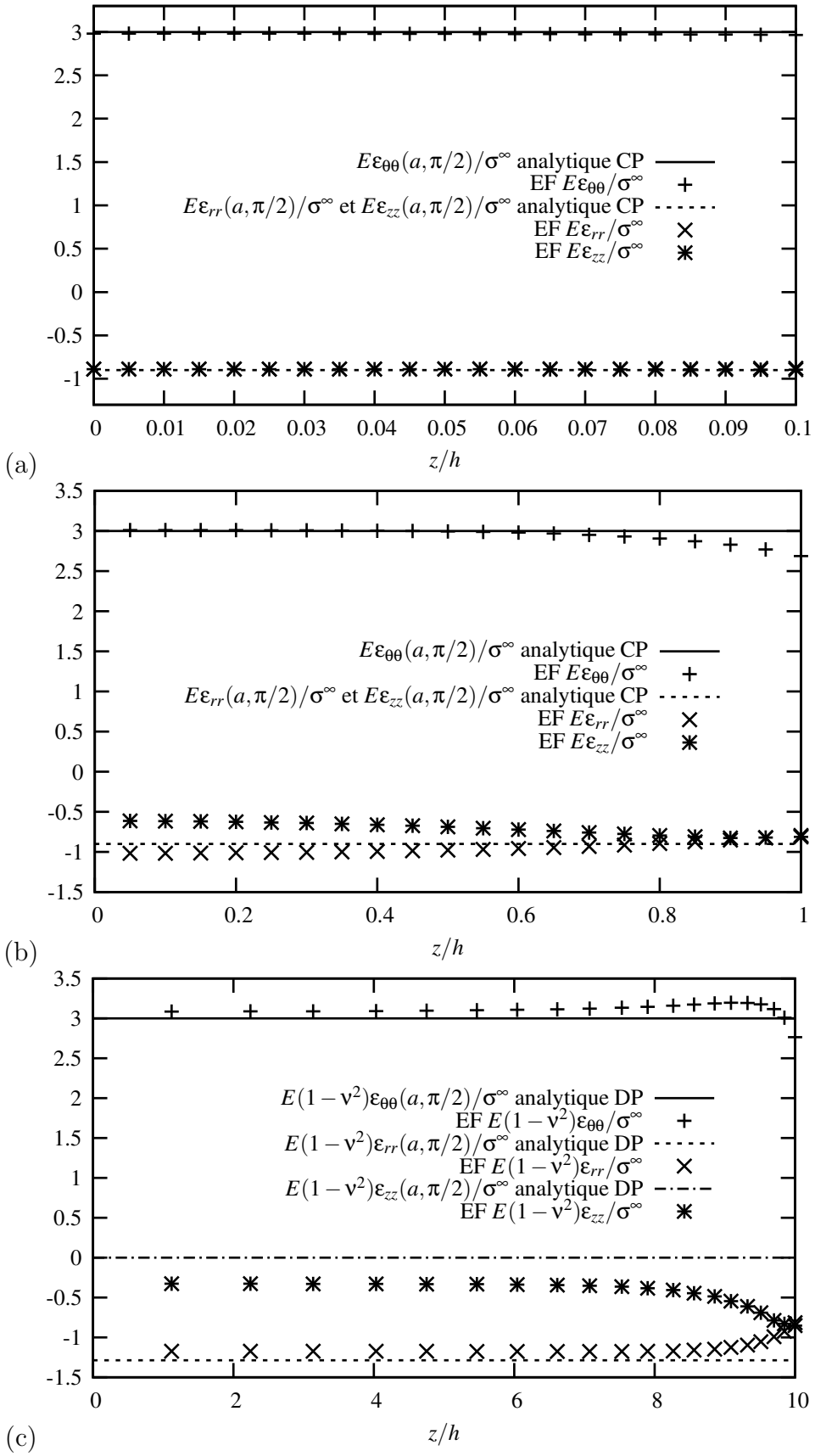


FIG. 15.14 – Profils des déformations le long de la ligne d'équation $(r = a, \theta = \pi/2)$ pour des plaques trouées telles que (a) $h/a = 0.1$, (b) $h/a = 1$, (c) $h/a = 10$. Les résultats sont obtenus numériquement par la méthode des éléments finis. Ils sont comparés aux expressions simplifiées des déformations en contraintes planes (CP) ou à la solution du problème en déformations planes (DP).

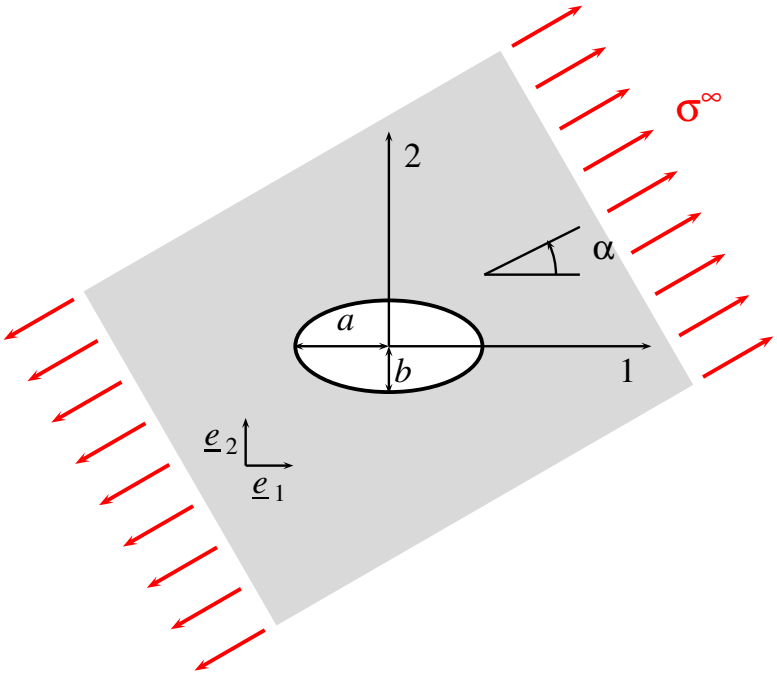


FIG. 15.15 – Plaque percée d'un trou elliptique et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité σ^∞, inclinée d'un angle α par rapport au grand axe de l'ellipse.

Quelle situation physique ce cas asymptotique évoque–t–il pour vous ?
Que suggère l'analyse précédente à propos du tenseur des contraintes dans cette circonstance ?

Pour une traction dans la direction 2, on a $\alpha = \pi/2$ et la contrainte au bord du trou donnée par (15.72) vaut

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 - 2m + 2\cos 2\theta}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2} \tag{15.74}$$

La dérivée de cette fonction de θ est

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\theta} = -4\sigma^\infty \sin 2\theta \frac{1 + m - m^2 - m^3}{(1 - 2m\cos 2\theta + m^2)^2} \tag{15.75}$$

Cette fonction est du signe de $-\sin 2\theta$, en tenant compte du fait que $0 \leq m \leq 1$. La contrainte $\bar{\sigma}$ est donc croissante pour $\theta \in [-\pi/2, 0]$ et décroissante pour $\theta \in [0, \pi/2]$. Compte tenu de la périodicité de $\bar{\sigma}$, les contraintes maximale et minimale sont

$$\bar{\sigma}^{max} = \bar{\sigma}(\theta = 0) = \frac{3 + m}{1 - m}\sigma^\infty \tag{15.76}$$

$$\bar{\sigma}^{min} = \bar{\sigma}(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\sigma^\infty \tag{15.77}$$

La contrainte est donc maximale au bord du trou en $r = a$ ($\theta = 0$) et minimale en $r = b$ ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$). C'est une situation comparable au cas du trou circulaire déjà traité. On retrouve d'ailleurs le cas circulaire pour $m = 0$ pour lequel $\bar{\sigma}^{max} = 3\sigma^\infty$.
Dans le cas du trou elliptique en traction simple, le facteur de concentration de contrainte vaut donc :

$$K_t := \frac{\bar{\sigma}_t^{max}}{\sigma^\infty} = \frac{3 + m}{1 - m} = 1 + 2\frac{a}{b} \tag{15.78}$$

On retrouve le facteur de concentration de contrainte $K_t = 3$ pour le trou circulaire. Pour $b/a = 1/2$, il vaut 5, ce qui correspond à une concentration de contrainte très sévère.
On peut utiliser ces valeurs de contraintes pour prévoir la rupture d'une plaque constituée d'un matériau fragile, percée d'un trou elliptique et sollicitée en traction simple, comme sur la figure 15.5(b).
On exprime parfois le facteur K_t pour le trou elliptique en fonction du rayon de courbure R de l'ellipse au point $(X_1 = 0, X_2 = \pm a)$ qui vaut

$$R = \frac{b^2}{a} \tag{15.79}$$

de sorte que

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{R}} \tag{15.80}$$

La concentration de contrainte devient d'autant plus sévère que l'ellipse est aplatie, ou, de manière équivalente, que le rayon de courbure est petit. A la limite,

$$\lim_{b/a \to 0} K_t = \lim_{R \to 0} K_t = \infty$$

L'ellipse infiniment aplatie fait penser à une fissure. L'analyse précédente suggère l'existence d'une singularité des contraintes en pointe de fissure. Nous reviendrons plus précisément sur ces remarques dans la suite.

15.7.3 Cas d'une sollicitation parallèle au grand axe de l'ellipse

On considère cette fois–ci le cas $\alpha = 0$, c'est–à–dire une traction dans la direction parallèle au grand axe. Reprendre les questions de la section précédente dans ce cas. En comparant les cas $\alpha = \pi/2$ et $\alpha = 0$, quelle est la situation la plus pénalisante du point de vue des concentrations de contraintes ?
Quelle différence essentielle observe–t–on pour une ellipse infiniment aplatie ?

Pour une traction dans la direction 1, on a $\alpha = 0$ et la contrainte au bord du trou donnée par (15.72) vaut

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 + 2m - 2\cos 2\theta}{1 - 2m\cos 2\theta + m^2} \tag{15.81}$$

La dérivée de cette fonction de θ est

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 4\sigma^\infty \sin 2\theta \frac{1 - m - m^2 + m^3}{(1 - 2m\cos 2\theta + m^2)^2} \tag{15.82}$$

Cette fonction est du signe de $\sin 2\theta$, en tenant compte du fait que $0 \leq m \leq 1$. La contrainte $\bar{\sigma}$ est donc décroissante pour $\theta \in [-\pi/2, 0]$ et croissante pour $\theta \in [0, \pi/2]$. Compte tenu de la périodicité de $\bar{\sigma}$, les contraintes maximale et minimale sont

$$\bar{\sigma}^{min} = \bar{\sigma}(\theta = 0) = -\sigma^\infty \tag{15.83}$$

$$\bar{\sigma}^{max} = \bar{\sigma}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{3 - m}{1 + m}\sigma^\infty \tag{15.84}$$

La contrainte est donc maximale au bord du trou en $r = b$ $(\theta = \pm\frac{\pi}{2})$ et minimale en $r = a$ $(\theta = 0)$. Le facteur de concentration de contrainte vaut :

$$K_t = \frac{3 - m}{1 + m} \tag{15.85}$$

Il reste borné pour $0 \leq m \leq 1$, contrairement à l'expression (15.78) pour la traction selon 2. La concentration de contrainte en $\theta = \pi/2$ est moins sévère et reste inférieure à 3. La situation la plus pénalisante est donc celle d'une plaque sollicitée perpendiculairement au grand axe de l'ellipse.

15.7.4 Cas d'une ellipse infiniment aplatie sollicitée en traction dans une direction quelconque $0 < \alpha < \pi/2$

On envisage les autres situations pour lesquelles $0 < \alpha < \pi/2$, mais seulement dans le cas d'une ellipse infiniment aplatie :

$$m = 1 - \eta, \quad \eta = \frac{2b}{a} \ll 1 \tag{15.86}$$

On montre alors que le maximum de $\bar{\sigma}$ est atteint en

$$\theta = -\frac{\eta}{2}\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) + o(\eta) \tag{15.87}$$

Le maximum vaut

$$\sigma^\infty \left(\frac{2\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{\eta} + \mathcal{O}(1) \right)$$

et est donc positif.
Identifier alors (pour $\eta \to 0$) le point du bord de l'ellipse et la facette correspondante où la contrainte est maximale. L'orientation de cette facette par rapport à l'axe 1 est notée β. Déterminer β et tracer la courbe de $-\beta$ en fonction de α pour $0 < \alpha < \pi/2$. Compléter cette courbe avec le résultat acquis au paragraphe 15.7.2 ($\alpha = \pi/2$). Tracer en outre la courbe de $-\beta$ en fonction de α pour $-\pi/2 \leq \alpha < 0$.
En supposant un mécanisme de rupture fragile, dessiner schématiquement une fissure amorcée à l'endroit critique trouvé pour un chargement de traction de la plaque dans la direction $\alpha = \pi/6$.

La convergence simple à $\theta \neq 0$ fixé de la contrainte (15.72) conduit à la limite

$$\lim_{m\to 1} \bar{\sigma}/\sigma^\infty = \frac{\cos 2\alpha - \cos 2(\theta - \alpha)}{1 - \cos 2\theta} = \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{cotan}\theta \tag{15.88}$$

La contrainte devient infiniment grande pour $\theta \to 0^-$ où la rupture est attendue quel que soit l'angle $\alpha \neq 0, \pi/2$ de la sollicitation.
Le cas $\alpha = 0$ présente une indétermination mais ce cas particulier a déjà été étudié au paragraphe 15.7.3. Il est illustré par la figure 15.16(a) pour différentes valeurs de m proches de 1. Le cas limite ne donne pas lieu à une singularité.
Le cas $\alpha = \pm\pi/2$ présente un indétermination mais ce cas particulier a déjà été étudié au paragraphe 15.7.2. Il est illustré par la figure 15.16(b) pour différentes valeurs de m proches de 1. Le cas limite donne lieu à une singularité en $\theta = 0$.
Pour les autres cas et pour m proche de 1, on attend un minimum et un maximum de $\bar{\sigma}$ d'autant plus proche de $\theta = 0$ que m est proche de 1. Cette intuition est confirmée par le tracé de la figure 15.16(c). C'est pourquoi on recherche les angles où $\bar{\sigma}$ est extrémal sous la forme

$$\theta = k\eta \tag{15.89}$$

Pour étudier les extrema de $\bar{\sigma}$, on calcule la dérivée de l'expression générale (15.72). On trouve que la dérivée s'annule lorsque

$$2m\sin 2\alpha + \sin 2\theta(1-m^2)(\cos 2\alpha - m) - \sin 2\alpha\cos 2\theta(1+m^2) = 0 \tag{15.90}$$

Les zéros de cette fonction sont de la forme $k\eta$, $\eta \ll 1$ lorsque m est proche de 1. Le développement limité de l'expression précédente par rapport à η fournit l'équation suivante :

$$2(1-\eta)\sin 2\alpha + 4k\eta^2(\cos 2\alpha - 1) - \sin 2\alpha(1-2k^2\eta^2)(2-2\eta+\eta^2) = 0$$

qui se simplifie en

$$4k^2 - 4k\tan\alpha - 1 = 0$$

Cette équation possède deux racines, l'une positive, l'autre négative :

$$k_+ = \frac{1+\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) \tag{15.91}$$

$$k_- = \frac{\sin\alpha - 1}{2\cos\alpha} = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{15.92}$$

L'évaluation de la contrainte $\bar{\sigma}$ en $\theta = k_-\eta$ et $\theta = k_+\eta$ fournit respectivement le maximum et le minimum cherchés lorsque m est proche de 1 :

$$\bar{\sigma}_{max}/\sigma^\infty \simeq \frac{2\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{1-m}, \quad \bar{\sigma}_{min}/\sigma^\infty \simeq -\frac{2\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{1-m} \tag{15.93}$$

La direction principale associée à la contrainte principale $\bar{\sigma}$ est tangente à l'ellipse. Le vecteur tangent de l'ellipse en θ est colinéaire à $[-a\sin\theta, b\cos\theta]^T$. La facette dont la normale est tangente à l'ellipse est donc parallèle à $[b\cos\theta, a\sin\theta]^T$. La facette fait un angle β avec la direction 1, qui vaut donc

$$\tan\beta = \frac{a}{b}\tan\theta \tag{15.94}$$

La contrainte est maximale en $\theta = k_-(1-m)$. A cet endroit, la facette est orientée selon :

$$\tan\beta \simeq \frac{a}{b}k_-(1-m) \simeq \frac{a}{b}\frac{2b}{a}k_- = 2k_- \Longrightarrow -\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \tag{15.95}$$

angle représenté, en fonction de α sur la figure 15.17. A la limite $m \to 1$, le point où la contrainte est maximale est en $\theta = 0^-$ et l'orientation de la facette correspondante est donnée par l'expression précédente, indépendante de η. Noter que l'équation (15.95) fournit aussi la solution $\beta = \alpha/2 + 3\pi/4$ qui n'a de sens qu'en $\theta = \pi^-$. Les situations suivantes méritent d'être distinguées :

- Lorsque $\alpha = \pi/2$, on a $\beta = 0$, ce qui correspond à la situation étudiée au paragraphe 15.7.2. L'amorçage de la fissuration et la propagation suivante se font dans le prolongement du trou elliptique initial.
- Lorsque $\alpha = \pi/6$, on a $\beta = -\pi/6$. L'orientation de la fissure attendue dans un matériau fragile est illustrée sur la figure 15.18.
- Lorsque $\alpha = 0$, la limite du facteur de concentration de contraintes (15.7.3) est finie lorsque $m \to 1$. Aucune singularité n'est attendue dans ce cas. Toutefois, une légère déviation de α par rapport à cette orientation idéale fait apparaître une singularité en $\theta = 0$ pour $m \to 1$. Conformément à l'étude précédente, une fissure va s'amorcer en $\theta = 0^-$. Elle fait un angle $\beta = -\pi/4$ avec le grand axe de l'ellipse.

Le diagramme de la figure 15.17 est complété pour des angles α négatifs en remarquant qu'un chargement dans la direction $-\alpha$ conduit à un amorçage de fissure d'angle $-(-\beta(\alpha))$.

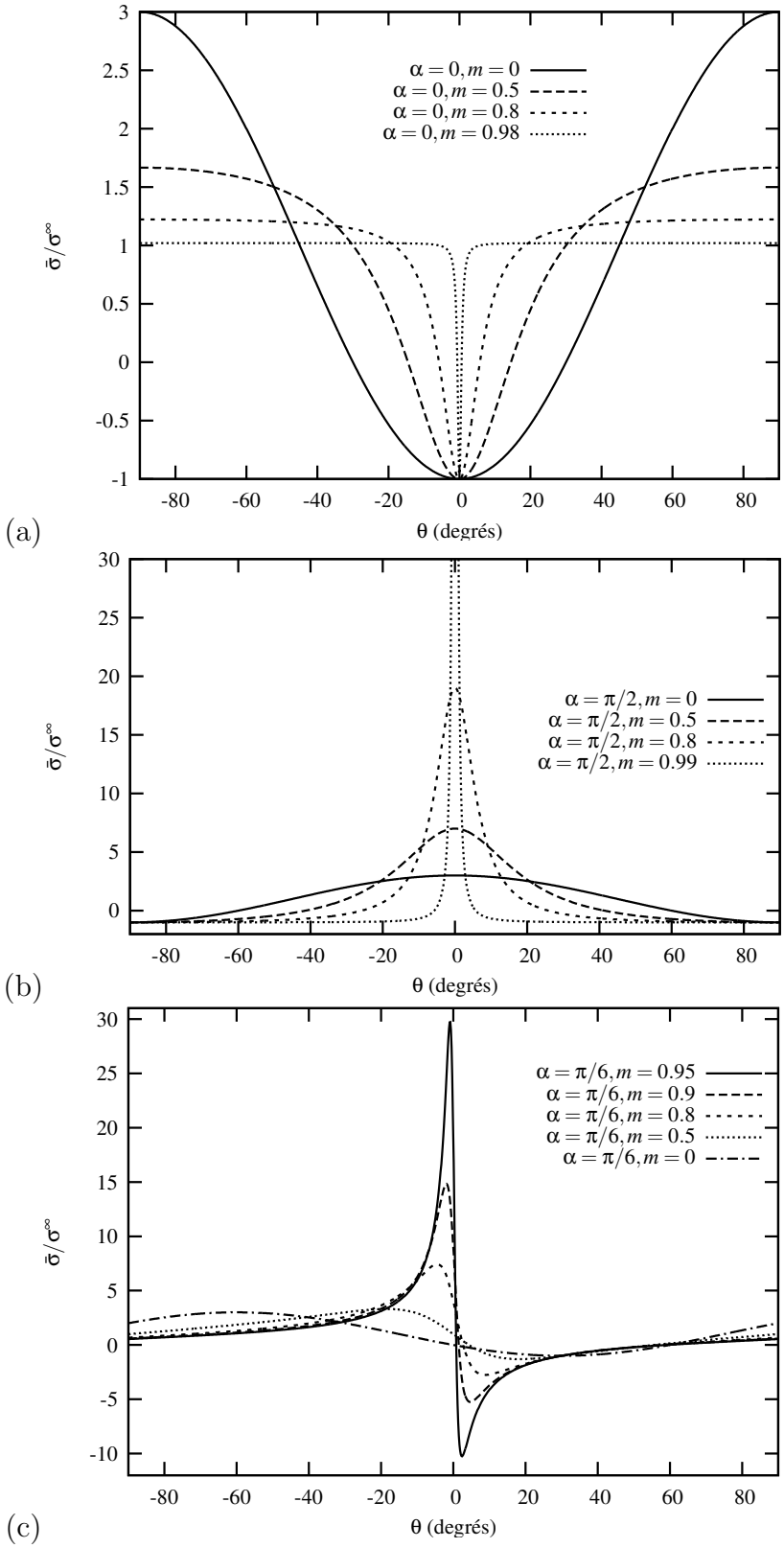


FIG. 15.16 – Contrainte principale au bord d'un trou elliptique dans une plaque sollicitée en traction parallèlement (a), perpendiculairement (b), ou dans une direction faisant un angle $\alpha = \pi/6$ (c) par rapport au grand axe de l'ellipse.

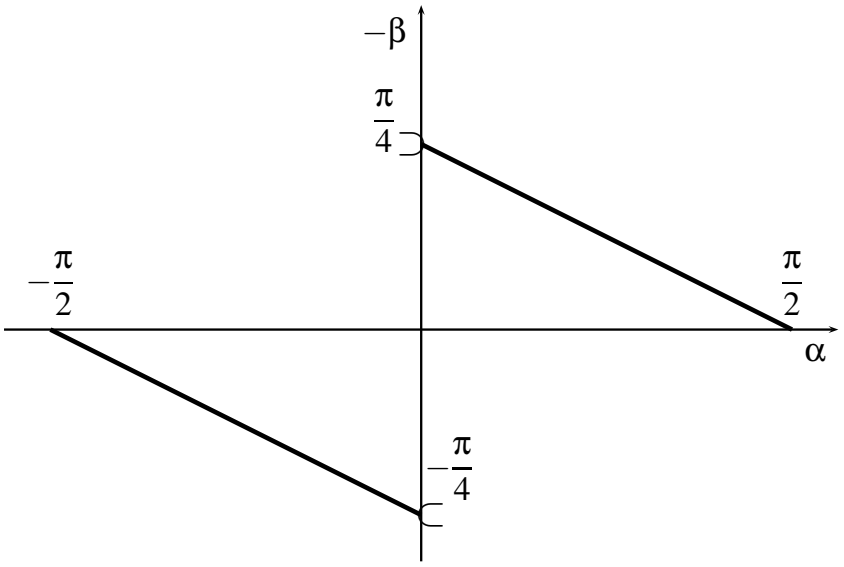


FIG. 15.17 – Orientation de la fissure attendue par rapport à l'axe 1 pour un trou elliptique infiniment aplati sollicité en traction dans une direction faisant l'angle α avec l'axe 1 qui est par ailleurs parallèle au grand axe de l'ellipse. Cette fissure s'amorce en $\theta = 0^-$.

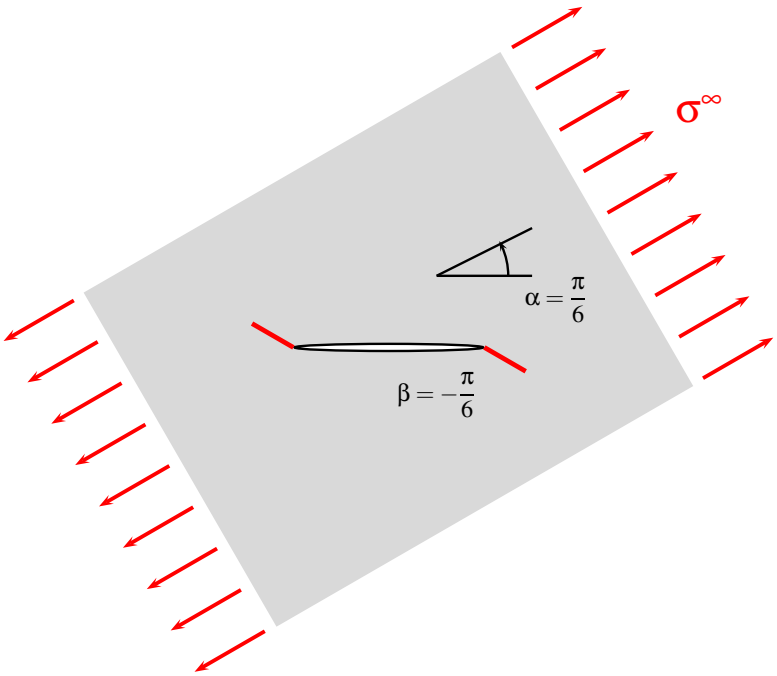


FIG. 15.18 – Amorçage de la rupture d'une plaque percée d'un trou elliptique infiniment aplati sollicité en traction dans une direction inclinée à 30° par rapport au grand axe de l'ellipse.

15.7.5 Expérience de mécanique de la rupture

Concevoir et réaliser une série d'expériences susceptibles d'illustrer les conclusions précédentes relatives à l'ellipse infiniment aplatie. Critiquer la fidélité du dispositif retenu vis–à–vis de la définition du problème que nous venons d'étudier.
Joindre les échantillons expérimentaux à la copie.

L'ellipse infiniment aplatie évoque une coupure dans le matériau, ou **fissure**. L'analyse directe de la fissure conduit effectivement à un comportement singulier des contraintes (voir paragraphe 15.8). Le fait que $K_t \to \infty$ pour le trou infiniment aplati semble confirmer la similarité avec une fissure. Pour voir si l'analogie fissure/ellipse aplatie peut être poussée plus loin encore, on peut réaliser l'expérience simple qui consiste, à l'aide d'un cutter, à introduire une fissure au centre d'une feuille de papier de format A4 par exemple et à solliciter la feuille incisée en traction selon une direction donnée jusqu'à la déchirer. On mesure alors l'angle que fait la fissure qui s'est amorcée à chaque pointe de la fissure initiale. Les résultats d'une telle série d'expériences sont consignés sur la figure 15.19 et comparés au critère établi pour l'ellipse aplatie. Ces résultats présentent une dispersion importante due au caractère rudimentaire du dispositif expérimental. Des résultats moins dispersés ont été obtenus au début des années 1960 avec du plexiglas (matériau polymère fragile) et confirment le résultat entrevu ici avec le papier : l'angle de bifurcation observé expérimentalement s'écarte notablement de la valeur prévue pour l'ellipse infiniment aplatie dès que l'angle α s'éloigne de $\pi/2$. L'écart le plus important est obtenu pour α proche de 0. Dans ce cas d'ailleurs l'expérience est difficile a réaliser et demande un surcroît d'effort, en raison du facteur $\sin\alpha$ dans (15.93) qui s'annule en $\alpha = 0$. On se rapproche en effet du cas strict $\alpha = 0$ pour lequel aucune singularité n'existe à la pointe de la fissure et aucune rupture précoce n'est attendue. Toutefois, l'expérience pour α s'approchant de 0 indique l'existence d'un angle limite proche de $-\beta = 70°$. Pour éviter cette difficulté, sans modifier la structure du chargement, il faut recourir à une sollicitation de cisaillement, dite de mode II. Un tel angle de bifurcation peut en effet être obtenu pour une sollicitation différente de la plaque fissurée, à savoir un cisaillement simple parallèlement à la direction de fissure initiale. Dans ce cas, la singularité des contraintes existe bel et bien et conduit à la rupture de la plaque si un cisaillement suffisant est appliqué. Ce cas est traité au paragraphe 15.8.4.
On ne peut donc pas dire qu'un trou elliptique infiniment aplati corresponde exactement à une fissure. Cela est dû à la courbure imposée par la forme elliptique pour tout $\eta \neq 0$, par opposition au caractère aigu de la fissure. En fait, on pourrait étudier des formes différentes de trous (rectangles, losanges aplatis...) et comparer le cas limite infiniment aplati avec la fissure idéale. Pour bien comprendre cette subtile distinction entre fissure et ellipse aplatie, un complément d'information sur les contraintes en pointe de fissure est nécessaire et fait l'objet du paragraphe suivant. En particulier, on va montrer au paragraphe 15.8 que le critère de rupture fragile appliqué en pointe de fissure prévoit, pour le cas limite $\alpha = 0$ l'amorçage d'une nouvelle fissure à la pointe de la première et faisant un angle proche de 70.5° avec la fissure initiale. Ce résultat diffère du **branchement** à 45° prévu précédemment pour une ellipse infiniment aplatie.

15.8 Différence entre le comportement d'un trou elliptique infiniment aplati et celui d'une fissure

D'après l'analyse précédente, on s'attend à l'existence d'une singularité des contraintes à la pointe d'une ellipse infiniment aplatie dont la forme s'approche de celle d'une fissure. Le champ

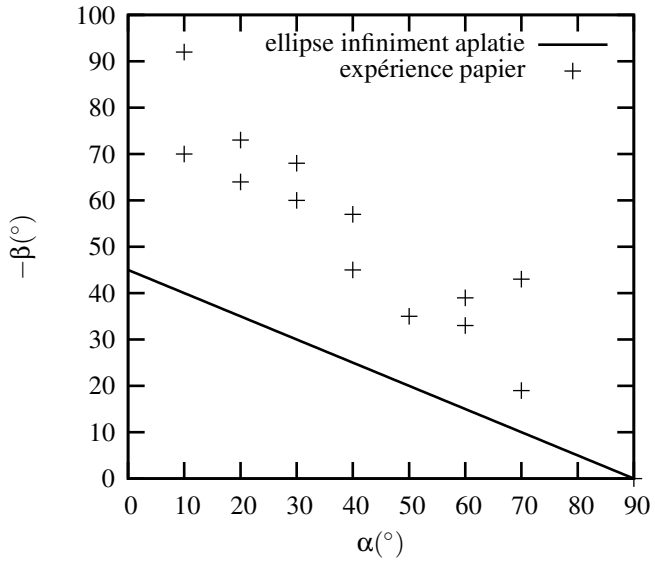


FIG. 15.19 – Angle de bifurcation de fissure dans une plaque en traction : résultat théorique pour le trou elliptique infiniment aplati et résultats expérimentaux pour du papier.

de contraintes en pointe de fissure, donné dans ce paragraphe, sans l'établir, pour deux modes de sollicitations, comporte effectivement une telle singularité. Toutefois, le comportement d'une fissure diffère fondamentalement de celui de l'ellipse infiniment aplatie quant à l'amorçage d'une nouvelle fissure lorsque le chargement appliqué est trop fort. C'est ce qu'a montré l'expérience de déchirure d'une feuille de papier fissurée au paragraphe 15.7.5. Ce fait est illustré ici dans le cas d'une sollicitation de la fissure en mode mixte (traction/cisaillement).

15.8.1 Champ de contraintes en pointe de fissure

Une fissure est une surface de coupure au sein d'un matériau au travers de laquelle le champ de déplacement peut présenter des discontinuités. On considère le cas d'une fissure plane de longueur $2a$ présente dans une plaque dont les dimensions sont grandes par rapport à a. La géométrie et les systèmes de coordonnées adoptés sont donnés sur la figure 15.20. Lorsque la plaque est soumise, loin du trou, à une sollicitation homogène, on dispose d'une solution asymptotique donnant les termes prépondérants du champ de contrainte autour, et suffisamment près, de la pointe de la fissure. La fissure peut être chargée en mode d'ouverture (traction σ^∞ à l'infini), appelé mode I en mécanique de la rupture, ou/et en cisaillement dans le plan de la fissure (cisaillement τ^∞ à l'infini), appelé mode II en mécanique de la rupture :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^\infty = \sigma^\infty \, \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \tau^\infty \, (\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1)$$

Les lèvres de la fissure sont supposées libres d'effort. Le champ de contrainte proche de la pointe de la fissure prend la forme suivante, d'après les résultats de la mécanique de la rupture dont on trouvera un exposé dans l'ouvrage (Sanford and Thompson, 1997) rassemblant les textes fondateurs sur le sujet, et dans les manuels récents en français (François et al., 1993; Miannay, 1995; Leblond, 2003) :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(K_I(1+\sin^2\frac{\theta}{2}) + K_{II} \left(\frac{3}{2}\sin\theta - 2\tan\frac{\theta}{2} \right) \right) \tag{15.96}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right) \tag{15.97}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \left(K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1)\right) \tag{15.98}$$

dans un système de coordonnées cylindriques[5] dont l'origine est à la pointe de la fissure, r désignant la distance du point courant à cette pointe, comme sur la figure 15.20. Les expressions font intervenir les coefficients K_I et K_{II}, appelés **facteurs d'intensité de contrainte**, reliés au chargement appliqué par :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau^\infty \sqrt{\pi a} \tag{15.102}$$

Le champ de contrainte présente une singularité en $r = 0$. Le fait que le facteur de concentration de contrainte K_t puisse devenir infini pour une ellipse infiniment aplatie a permis de soupçonner l'existence d'une telle singularité dans le cas d'une fissure. La forme de la singularité s'avère être en $1/\sqrt{r}$.

15.8.2 Quelques paradoxes liés à la rupture

La mise en évidence d'une singularité des contraintes en pointe de fissure suscite de nombreuses interrogations.

Comment un matériau peut–il résister à une contrainte locale infinie sans rompre à la moindre charge appliquée ? On montre en fait que la singularité du champ de contraintes est telle que l'énergie élastique contenue dans un volume fini entourant la fissure reste finie. Par conséquent, la rupture ne se produit que lorsque cette énergie est suffisante pour créer des surfaces nouvelles correspondant à la propagation de la fissure sur une certaine distance.

Mais alors, pourquoi une plaque fragile percée d'un trou circulaire et chargée en traction casse–t–elle pour une valeur critique finie atteinte à l'équateur tandis qu'une plaque fissurée ne casse pas spontanément sous l'effet de la moindre charge ? C'est la notion de défaut qu'il faut invoquer ici. Le volume de matière fragile fortement sollicité à l'équateur contient des défauts (microfissures, microcavités, microinclusions, défauts de surface...). Dès lors la contrainte à rupture n'est pas une donnée intrinsèque du matériau mais dépend de la statistique de défauts présents, qui est intimement liée à son élaboration et aux traitements de surface.

On est en droit aussi de rétorquer que l'existence d'un champ de contraintes singulier n'est pas compatible avec l'hypothèse des petites perturbations qui a présidé à l'établissement de cette solution. Il est légitime de s'interroger sur la pertinence du champ trouvé près de la pointe de la fissure. On peut, pudiquement, s'interdire d'appliquer alors un critère rupture en–deçà d'une distance critique à la pointe de la fissure. Cette précaution ne lève toutefois pas le doute émis sur la légitimité de la solution exhibée. En effet, on utilise une théorie asymptotique en résolvant un problème linéarisé par rapport au problème de perturbation initial qui dépend d'un petit paramètre η. Rien ne garantit, en général, la convergence de la solution du problème

[5] Quelques transformations des fonctions trigonométriques permettent aussi d'écrire le champ de contraintes sous la forme équivalente :

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(-5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{15.99}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(-3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{15.100}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2}\right) \tag{15.101}$$

La vérification que ces formules sont effectivement identiques aux expressions (15.96), (15.97) et (15.98) est immédiate.

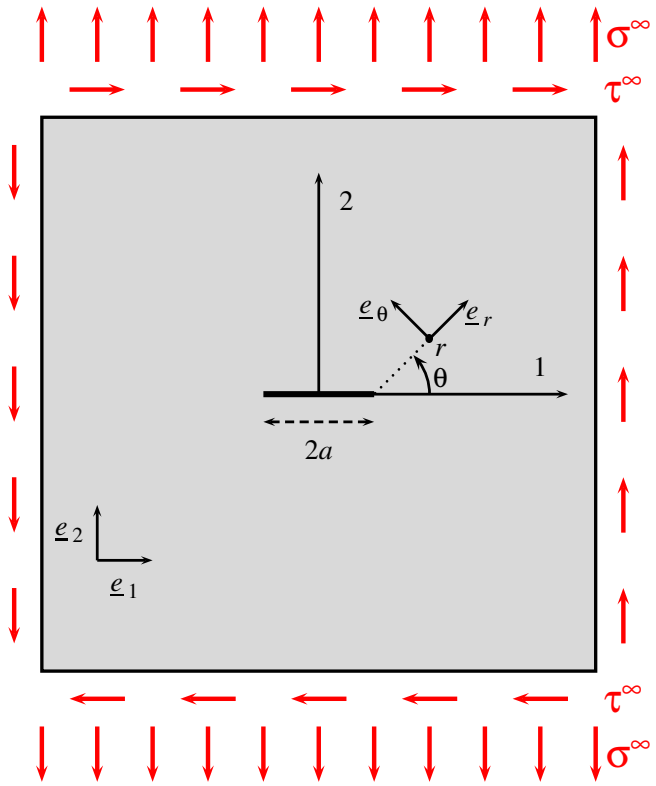


FIG. 15.20 – Plaque munie d'une fissure de longueur $2a$ et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction σ^∞ et de cisaillement τ^∞.

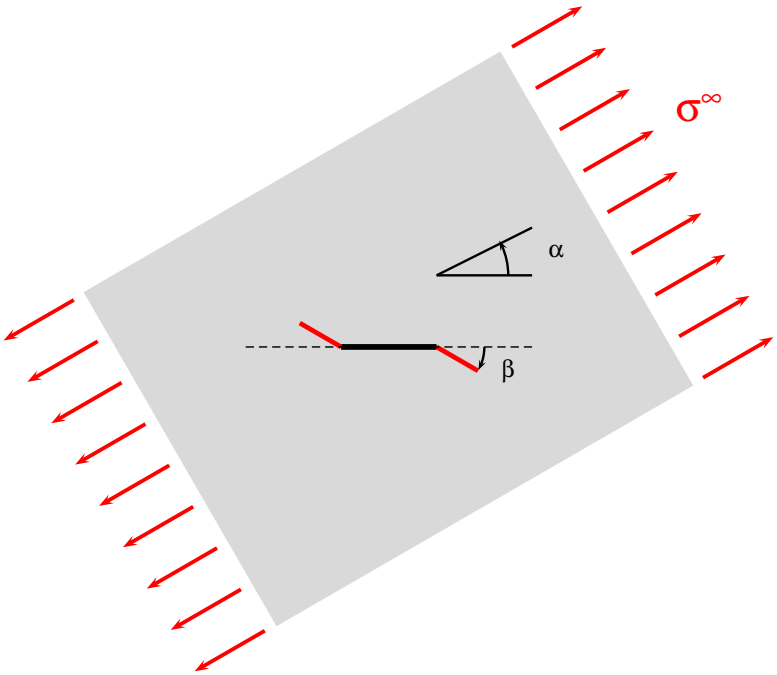


FIG. 15.21 – Plaque munie d'une fissure de longueur $2a$ et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction σ^∞ inclinée de l'angle α par rapport à la direction de la fissure initiale. Sous la charge appliquée, la fissure initiale se propage en bifurquant sur un plan faisant un angle β avec la direction initiale de la fissure.

linéarisé vers le premier terme de la solution asymptotique du problème réel. Dans certains cas, cette convergence n'est pas assurée uniformément sur tout le domaine étudié[6]. Dans le cas de la fissure, la convergence est acquise pour tout domaine excluant un cylindre $r < \eta$ pourvu que η soit suffisamment petit pour un chargement donné. Toutefois, rien ne garantit que le type de singularité trouvé en $r = 0$, dans le contexte HPP, soit le même que celui du problème asymptotique réel. Le mérite de cette "solution" tient en fait à la pertinence remarquable qu'elle présente vis–à–vis de nombreux résultats expérimentaux de mécanique de la rupture.

Le critère simple de rupture consistant à décréter qu'un matériau fragile rompt lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique contient en germe un autre paradoxe. C'est que la rupture d'une plaque (suffisamment grande par rapport à a) ne dépendrait pas de la taille du défaut. En effet la concentration de contrainte au bord d'un trou dans une plaque infinie ne dépend pas de sa taille, on l'a vu. Or les grande fissures sont plus dangereuses que les petites. En rupture il y a un effet de taille de fissure (même dans une plaque infini). A nouveau, c'est l'approche énergétique signalée précédemment qui permet de lever ce paradoxe et de modéliser un effet d'échelle en rupture. Comme de toute façon, un critère de contrainte maximale n'est pas tenable en présence d'un champ singulier, c'est la notion de **ténacité** K_{Ic} qui prend le pas, c'est–à–dire une valeur critique du facteur d'intensité de contrainte. Cette notion est intimement liée à l'approche énergétique mentionnée.

Considérons enfin un barreau soumis à une sollicitation de traction simple. Quel que soit le niveau de contrainte appliqué, une barre suffisamment longue devrait permettre de mobiliser suffisamment d'énergie élastique dans le volume sollicité pour conduire à l'amorçage d'une fissure si l'on en croit le critère énergétique invoqué déjà à plusieurs reprises. A la limite, une barre très longue devrait rompre à la moindre charge...

En fait, la rupture résulte bel et bien de la combinaison d'une condition de contrainte critique atteinte localement et d'un critère énergétique (McClintock and Argon, 1966; Leguillon, 2002).

15.8.3 Un critère simple de bifurcation de fissure

Lorsqu'une plaque fissurée est sollicitée mécaniquement, on peut se demander, d'une part, à partir de quelle charge appliquée la fissure initiale va se propager et, d'autre part, dans quelle direction aura lieu cette propagation. La fissure va–t–elle continuer à se propager dans son plan initial ou bifurquer sur un plan incliné ? On présente un élément de réponse à cette deuxième question[7], à savoir une estimation de l'angle de bifurcation de la fissure par rapport à son orientation initiale. L'approche proposée est due à (Erdogan and Sih, 1963).

Une plaque fissurée est soumise, loin de la fissure, à une sollicitation de traction σ^∞ selon une direction faisant un angle α avec la fissure, comme sur la figure 15.21. Le champ de contraintes en pointe de fissure est obtenu à partir des expressions (15.96) à (15.98) en prenant

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}\, \sin^2 \alpha, \quad K_{II} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}\, \sin \alpha \cos \alpha \tag{15.103}$$

En effet, la charge de traction appliquée se décompose en une composante d'ouverture en mode I, $\sigma^\infty \sin^2 \alpha$, et en une composante de cisaillement (mode II), $\sigma^\infty \sin \alpha \cos \alpha$.

[6] Le lecteur est renvoyé à la référence (Germain, 1973a) aux pages 108 et 114.

[7] La réponse à première question, à savoir la prévision de la contrainte à rupture, est plus délicate. Les résultats expérimentaux issus de (Erdogan and Sih, 1963) sont assez mal décrits par les critères de rupture proposés. D'autres approches, prenant notamment en compte la statistique des défauts contenus dans le matériaux, permettent d'améliorer ces prévisions de rupture. Au contraire, l'angle de bifurcation observé expérimentalement est remarquablement bien décrit par le critère simple développé dans ce paragraphe. Une analyse plus rigoureuse et plus complète, développée dans (Leblond, 1989; Amestoy and Leblond, 1992; Leblond, 2003) permet de justifier *a posteriori* la remarquable efficacité du critère d'Erdogan et Sih.

Le critère de bifurcation proposé est basé sur les deux hypothèses suivantes :
(i) la bifurcation s'effectue sur un plan radial à partir de la pointe initiale de la fissure ;
(ii) le plan de bifurcation est celui pour lequel la contrainte normale d'ouverture est maximale (à $r \neq 0$ fixé).

Ces hypothèses, certes confortées par l'intuition, sont pour le moins discutables mais ont le mérite de la simplicité. Elles ont pour conséquence que la fissure va bifurquer sur le plan radial pour lequel la contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale et la contrainte de cisaillement $\sigma_{r\theta}$ est nulle. Sur un plan radial, la contrainte normale est effectivement $\sigma_{\theta\theta}$. Cette contrainte est maximale pour l'angle θ tel que

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0$$

La seconde équation d'équilibre statique indique qu'alors

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

Or, d'après (15.98), la dérivée de la contrainte de cisaillement est égale à $-\sigma_{r\theta}/r$, de sorte que l'équation précédente implique que $\sigma_{r\theta}$ s'annule à l'endroit où la contrainte orthoradiale est maximale.

La mise en œuvre du critère de bifurcation (ii) passe par le calcul de la dérivée par rapport à θ de la composante (15.97) :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = -\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(K_I \sin\frac{\theta}{2} + K_{II}(3\cos\theta - 1)\right)$$

En conséquence, la contrainte orthoradiale présente des extrémas en

$$\theta = \pm\pi, \quad K_I \sin\frac{\theta}{2} + K_{II}(3\cos\theta - 1) = 0 \tag{15.104}$$

Les angles $\theta = \pm\pi$ correspondent aux lèvres de la fissures où les efforts sont supposés nuls. Le plan de bifurcation est donc donné par la seconde équation.
En mode I pur ($K_{II} = 0$), ce critère prévoit une propagation coplanaire de la fissure ($\beta = 0$).
En mode II pur ($K_I = 0$), ce critère prévoit une bifurcation sur le plan incliné de l'angle[8]

$$\beta = -\text{acos}\frac{1}{3} \simeq -70.5^\circ \tag{15.105}$$

Dans le cas d'une plaque fissurée en traction, les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés par (15.103) et peuvent être substitués dans l'équation précédente. Lorsque $\alpha \neq 0$ (le cas $\alpha = 0$ ne conduit pas à une singularité des contraintes en pointe de fissure), l'angle de bifurcation β de la fissure lors de sa propagation est solution de l'équation suivante :

$$\sin\beta + (3\cos\beta - 1)\text{cotan}\alpha = 0 \tag{15.106}$$

Pour $0 < \alpha < \pi/2$, cette équation indique que β est négatif, conformément à l'intuition (cf. figure 15.21). La courbe correspondante donnant l'angle β en fonction de α est tracée sur la figure 15.22. Cette courbe se prolonge en $\alpha = \pi/2$ par la valeur $\beta = 0$.
F.A. McClintock, dans sa discussion de l'article de (Erdogan and Sih, 1963), remarque que cette courbe est distincte de celle correspondant au trou elliptique infiniment aplati. L'expérience sur

[8] Parmi les solutions possibles $\beta = \pm\text{acos}(1/3)$, seul l'angle $\beta = -\text{acos}(1/3)$ conduit à une contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ positive, d'après (15.97).

le papier, comme sur le plexiglas dans l'article original, corrobore indiscutablement le critère établi dans cette section, comme l'indique la figure 15.22.

Il est important de noter que ce critère de contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ maximale ne coïncide pas avec le critère de contrainte normale maximale. Pour le voir, on donne les composantes cartésiennes des contraintes, d'après (François et al., 1993; Miannay, 1995), selon le repère de la figure 15.20 :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \quad (15.107)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \quad (15.108)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (15.109)$$

En mode I pur par exemple ($K_{II}=0$), on peut vérifier que les contraintes principales sont

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}), \quad \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}) \quad (15.110)$$

La contrainte principale σ_1, à r fixé, est maximale en $\theta=\pi/3$ où elle vaut

$$\sigma_1^{max} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1.3\sigma_{\theta\theta}(r,\theta=0)$$

La contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ est clairement maximale en $\theta=0$ où elle prend une valeur plus faible que la contrainte principale maximale. On vérifie en fait que, en $\theta=\pi/3$, la contrainte de cisaillement σ_{12} est nulle de sorte que les contraintes σ_{11} et σ_{22} sont principales. La contrainte $\sigma_{22}(r,\theta=\pi/3)$ n'est autre que la contrainte principale maximale σ_1^{max}.

Pourquoi ne pas utiliser le critère de contrainte normale maximale en présence d'une fissure ? En mode I pur, le critère de contrainte principale maximale, appliqué en $r\neq 0$ prévoit la propagation de la fissure à partir d'un point situé sur une ligne $\theta=\pi/3$. L'observation courante indique que la fissure principale se propage selon sa direction initiale sans bifurquer, c'est–à–dire en suivant le plan où $\sigma_{\theta\theta}$ est maximal. Les facette correspondant à la contrainte principale maximale, à une distance $r\neq 0$, est horizontale et ne passe pas, en général, par la pointe de la fissure initiale de sorte que la rupture se produirait par multifissuration non radiale, ce qui n'est, en général, pas observé dans les matériaux fragiles.

15.8.4 Trou elliptique infiniment aplati chargé en mode II

La plaque munie d'un trou elliptique est soumise à un chargement de cisaillement simple loin du trou, $\sigma_{12}^{\infty}=\tau^{\infty}$ dans le repère de la figure 15.15. La contrainte $\bar{\sigma}$ au bord du trou s'obtient en utilisant l'expression (15.72) successivement pour $\sigma^{\infty}=\tau^{\infty}, \alpha=\pi/4$ et $\sigma^{\infty}=-\tau^{\infty}, \alpha=-\pi/4$. La superposition de ces chargements de traction simple à 45° et de compression simple à -45°, de même amplitude, est équivalente au chargement de cisaillement simple envisagé ici. On trouve

$$\bar{\sigma} = -\tau^{\infty}\frac{4\sin 2\theta}{1-2m\cos 2\theta+m^2} \quad (15.111)$$

Cette contrainte est extrémale lorsque

$$\cos 2\theta = \frac{2m}{1+m^2} \quad (15.112)$$

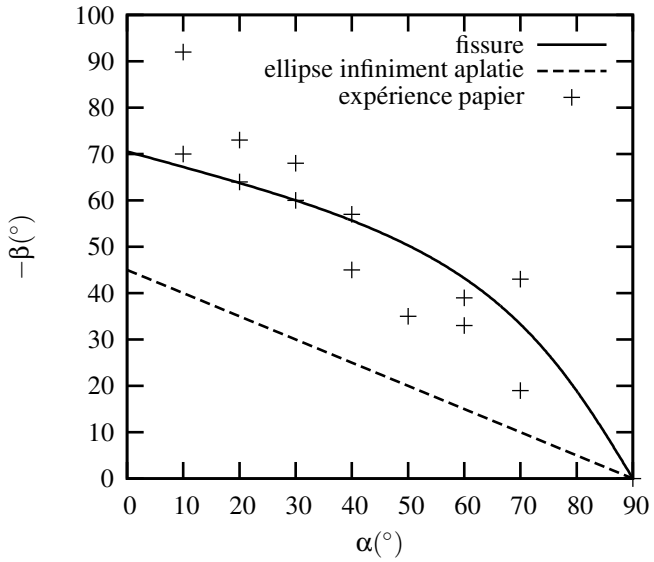


FIG. 15.22 – Angle de bifurcation de fissure dans une plaque en traction : résultat théorique pour la fissure, le trou elliptique infiniment aplati et résultats expérimentaux pour du papier.

Pour m proche de 1, les angles solutions sont proches de 0. Seule la solution $\theta < 0$ de l'équation précédente fournit un maximum positif de $\bar{\sigma}$ pour $\tau^\infty > 0$. La tangente de l'angle correspondant vaut

$$\tan\theta = -\frac{1-m}{1+m}$$

et peut alors être insérée dans l'équation (15.94) donnant l'angle de bifurcation

$$\tan\beta = -\frac{1}{1-b/a} \tag{15.113}$$

dont la limite lorsque $b/a \to 0$ fournit $\beta = -\pi/4$. On retrouve l'angle de bifurcation limite trouvé pour lors de la traction de la plaque pour $\alpha \to 0^+$ (cf. figure 15.17).

L'analogie entre le trou elliptique chargé en cisaillement selon son grand axe et le problème initial du trou elliptique en traction parallèlement au grand axe apparaît lorsque l'on compare l'expression[9] de la contrainte maximale atteinte en mode II pour m proche de 1 :

$$\bar{\sigma}^{max} = \frac{2\tau^\infty}{1-m} \tag{15.114}$$

avec l'expression (15.93) trouvée en traction et donnée ici lorsque α est proche de 0 :

$$\bar{\sigma}^{max} = \frac{2\alpha\sigma^\infty}{1-m} \tag{15.115}$$

Ces expressions sont identiques, au terme d'affaiblissement α prêt. Le chargement en mode II permet de retrouver la structure du chargement de traction en évacuant l'affaiblissement de la singularité α. Dans le cas d'une fissure chargée en mode II, on a trouvé $\beta \simeq -70.5°$, valeur qui distingue clairement le cas de la fissure du cas du trou elliptique infiniment aplati.

[9]Pour trouver l'expression (15.114), on substitue le résultat (15.112) et la relation $\sin 2\theta = -(1-m^2)/(1+m^2)$ (le signe moins vient de la valeur négative de l'angle θ pour laquelle la contrainte maximale est atteinte) dans l'équation (15.111) donnant la contrainte au bord du trou.

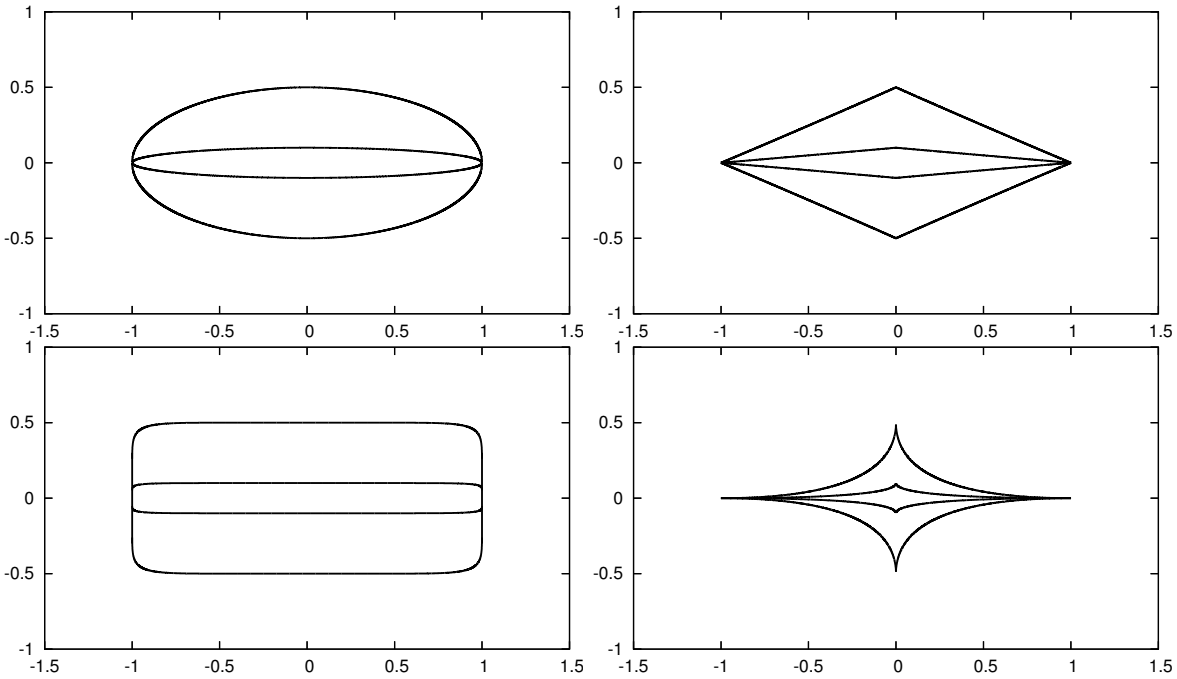


FIG. 15.23 – Trous dans une plaque de forme géométrique d'équation (15.116) avec : $n = 2$ en haut à gauche, $n = 1$ en haut à droite, $n = 10$ en bas à gauche, $n = 0.5$ en bas à droite. Dans chaque cas, deux trous sont représentés pour $b/a = 0.5$ et $b/a = 0.1$.

15.8.5 Comportement asymptotique de trous de formes plus générales

On peut imaginer d'autres formes géométriques de trous cylindriques dans une plaque susceptibles de ressembler à une fissure lorsqu'on les aplatit indéfiniment. Une famille générique de telles géométries est décrite par l'équation suivante

$$\left(\frac{|X_1|}{a}\right)^n + \left(\frac{|X_2|}{b}\right)^n = 1 \tag{15.116}$$

où l'exposant n caractérise la géométrie intrinsèque de la zone amenée à jouer le rôle de la pointe de fissure. Le cas $n = 2$ correspond au trou elliptique étudié dans ce chapitre. D'autres formes sont illustrées sur la figure 15.23. Les puissances élevées sont proches du trou rectangulaire pour lequel la courbure en $\theta = 0$ est nulle. Les puissances plus petites que 1 conduisent à un point de rebroussement en $\theta = 0$, les deux lèvres ayant une tangente commune, situation qui semble plus proche de l'image de la fissure. Le cas intermédiaire $n = 1$ introduit un angle vif en $\theta = 0$, angle qui devient nul pour $n < 1$ et plat pour $n > 1$. En faisant tendre b/a vers 0, ces figures ressemblent de plus en plus à une fissure.

A la lumière de l'étude précédente, on peut suspecter que chacune de ces géométries conduise à un comportement asymptotique spécifique qui diffère, à la limite, de celui de la fissure, en raison de la forme particulière associée à chaque valeur de n. Il reste toutefois à mener cette étude jusqu'au bout pour s'en assurer.

géométrie	K_t
trou circulaire (DP et CP)	3
cavité sphérique	$\frac{3(9-5\nu)}{2(7-5\nu)}$
trou elliptique (CP et DP) (axes a, b, rayon de courbure R)	$1+2\frac{a}{b}=1+2\sqrt{\frac{a}{R}}$

TAB. 15.2 – Récapitulatif : facteurs de concentration de contrainte pour différents types de défauts dans une plaque sollicitée en traction simple.

15.9 Cavités sphériques et ellipsoïdales dans un massif

La question de l'existence d'une concentration de contraintes se pose aussi dans le cas d'un trou sphérique ou, plus généralement ellipsoïdal, de petite taille dans une pièce massive.

L'intérêt pratique de cette analyse est lié à l'existence de défauts sphériques (porosités) inévitables dans les pièces de fonderie par exemple (culasses automobiles, aubes de turbine monocristallines...) même s'ils sont généralement de tailles très limitées (du micromètre au millimètre). La concentration de contrainte mise en évidence limite l'endurance de la pièce, i.e. sa résistance à la fatigue à grands nombres de cycles.

La méthode de résolution du problème du trou ellipsoïdal dans un massif infini diffère fondamentalement de l'approche résolument bidimensionnelle mise en œuvre dans ce chapitre. Elle fait appel à des techniques plus générales qui ne sont pas rapportées dans ce chapitre. C'est dans l'ouvrage de (Mura, 1987) qu'on trouvera l'exposé le plus détaillé des problèmes de défauts (cavités, inclusions...) dans les solides élastiques. On se contente ici, par souci d'exhaustivité vis–à–vis des problèmes de concentrations de contraintes, de donner le facteur de concentration de contrainte K_t pour un trou sphérique en traction :

$$K_t = \frac{3(9-5\nu)}{2(7-5\nu)} \tag{15.117}$$

La concentration de contrainte est maximale dans le cas quasi–incompressible (ν proche de 0.5), avec une valeur d'environ 2.17, et minimale pour ν proche de -1, avec un facteur de 1.75. Le facteur est de 2.04 pour ν proche de 0.3.

15.10 Epilogue

L'ensemble des situations évoquées dans ce chapitre et les facteurs de concentration de contraintes associés sont rassemblés dans le tableau 15.2. Des cas beaucoup plus généraux d'entailles, de fissures et de défauts peuvent être consultés dans l'ouvrage (Pilkey, 1997).

Chapitre 16

Dislocations de Volterra

Des contraintes internes peuvent exister dans un corps homogène élastique sans chargement extérieur imposé. Il s'agit d'un champ d'*auto–contraintes*, dont la divergence est nulle en l'absence de forces volumiques, et qui est tel que le vecteur contrainte est nul sur les surfaces du corps. Les champs d'auto–contraintes étudiés dans ce chapitre sont dus à la présence d'une *dislocation*, défaut linéique dont on va préciser la formation.

Un cylindre creux de rayon intérieur r_i, de rayon extérieur r_e, d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$, et de longueur L, subit les opérations suivantes de formation d'une dislocation, qui sont des cas particuliers de la procédure générale établie par Volterra[1] :

1. Le cylindre est coupé le long du plan $\theta = 0$, comme sur la figure 16.1(a).
2. Une lèvre de la coupure est déplacée d'un mouvement de translation de vecteur $\underline{\boldsymbol{b}}$, constant et pris parallèle au plan de la coupure, par rapport à l'autre face de la coupure.
3. Les surfaces de coupure sont ensuite définitivement soudées, point par point, par un moyen ou par un autre.
4. Les efforts qui ont été nécessaires au déplacement relatif des lèvres sont finalement relâchés. Ils sont en fait repris, au moins partiellement, par des contraintes internes. Le corps est alors dans un état d'auto–contraintes et de déformations à déterminer.

L'axe du cylindre défectueux est appelé *ligne de dislocation*.

L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état initial naturel, au comportement élastique linéarisé. On utilise en général un système de coordonnées cylindriques comme sur la figure 16.1(a). La coordonnée X_3 est aussi notée z dans la suite. Les fonctions de la variable angulaire θ considérées dans ce chapitre, seront définies, sauf mention contraire, sur le domaine suivant :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

16.1 Dislocation–vis

Le défaut introduit est appelé dislocation–vis lorsque le vecteur de translation $\underline{\boldsymbol{b}}$ est parallèle à l'axe du cylindre :

$$\underline{\boldsymbol{b}} = b\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{16.1}$$

[1] L'article original de V. Volterra date de 1907 (Volterra, 1907).

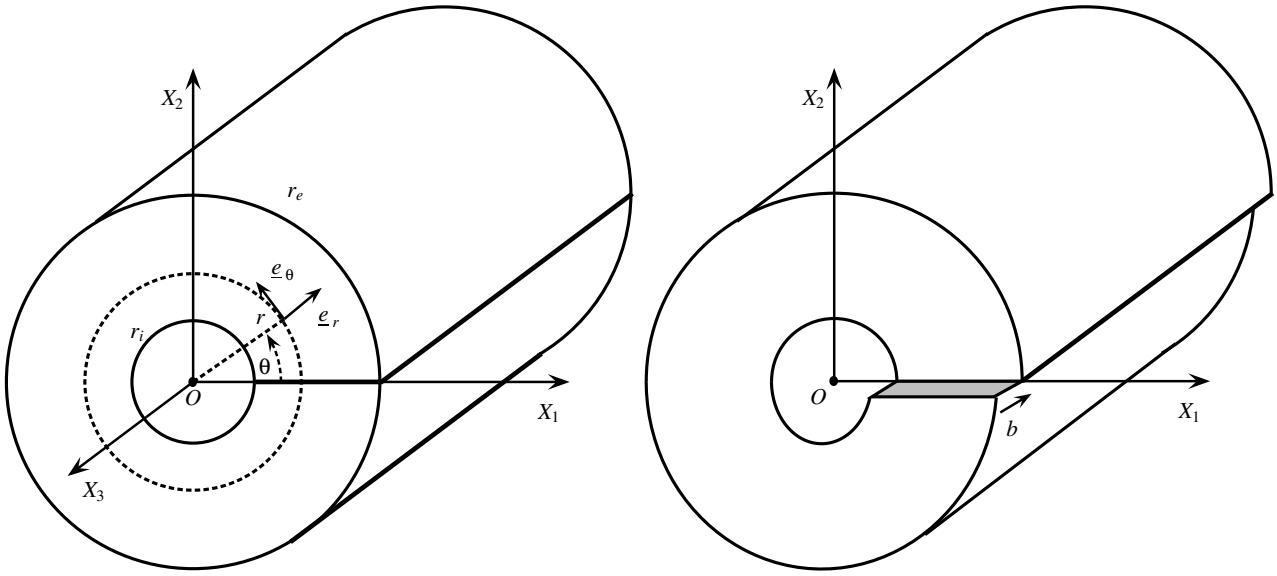


FIG. 16.1 – Procédure de fabrication d'une dislocation dans un cylindre creux : (a) coupure dans le cylindre initial, repérages utilisés dans le chapitre, (b) dislocation–vis.

On recherche les composantes de déplacements u_r, u_θ et u_z associés à ce défaut, par rapport à la configuration initiale du cylindre intact, sans coupure. Manifestement, la composante u_z présente une discontinuité en $\theta = 0$. Les composantes u_r et u_θ, par contre, sont continues à la traversée de la coupure.

Dans un premier temps, jusqu'à la question 16.1.8, on ne se préoccupe pas de la dépendance en z de ces fonctions, ni des conditions aux extrémités du cylindre $z = 0, z = L$. On recherche alors une solution en déplacements de la forme :

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z(r, \theta) \tag{16.2}$$

La discontinuité du déplacement axial est due au déplacement relatif égal à $\underline{\boldsymbol{b}}$ imposé aux lèvres avant de les coller :

$$u_z(r, \theta = 0^+) - u_z(r, \theta = 2\pi^-) = b, \quad r_i \leq r \leq r_e \tag{16.3}$$

où les notations introduites désignent les limites suivantes :

$$u_z(r, 0^+) = \lim_{\theta \to 0, \theta > 0} u_z(r, \theta), \quad u_z(r, 2\pi^-) = \lim_{\theta \to 2\pi, \theta < 2\pi} u_z(r, \theta) \tag{16.4}$$

On se propose enfin de rechercher une solution $u_z(\theta)$ qui ne dépendrait pas de r.

16.1.1 Champ de déplacements

Montrer que, dans ce cas, la dépendance de u_z par rapport à θ est nécessairement affine et que l'expression suivante du déplacement peut être adoptée :

$$u_z(\theta) = -\frac{b\theta}{2\pi} \tag{16.5}$$

Noter que la fonction $u_z(\theta)$ est à valeurs multiples puisqu'elle prend deux valeurs distinctes sur le plan de coupure. On obtient une fonction à valeurs simples en éliminant le plan de coupure du domaine de définition, désormais restreint à :

$$0 < \theta < 2\pi \tag{16.6}$$

Ce sera le domaine de définition des fonctions de θ considérées dans la suite de ce chapitre, sauf mention contraire.

En coordonnées cylindriques, les seules composantes de déformation et de contraintes non nulles associées au déplacement proposé sont

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{\mu}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} \tag{16.7}$$

La troisième équation d'équilibre des contraintes fournit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0 \tag{16.8}$$

La fonction $u_z(\theta)$ est donc affine : $u_z(\theta) = A\theta + B$. La constante A est déterminée grâce à la condition de discontinuité (16.3) :

$$u_z(\theta = 0^+) - u_z(\theta = 2\pi^-) = -2\pi A = b, \quad r_i \leq r \leq r_e$$

En prenant la translation $B = 0$, on aboutit à la proposition (16.5).

16.1.2 Vecteur de Burgers

On considère un cercle Γ_0 d'équation $r = r_0$ tracé sur la configuration initiale du cylindre (voir la partie gauche de la figure 16.2). On appelle *vecteur de Burgers* de la dislocation l'intégrale le long de Γ_0 de l'élément de fibre matériel déformé $\underline{\boldsymbol{dx}}$:

$$\oint_{\Gamma_0} \underline{\boldsymbol{dx}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}) \tag{16.9}$$

Calculer le vecteur de Burgers pour la dislocation–vis et montrer qu'il est indépendant du contour fermé choisi pour le calculer.

On rappelle que $\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{u}}$. Le contour Γ_0 est fermé de sorte que

$$\int_{\Gamma_0} \underline{\boldsymbol{dX}} = 0 \tag{16.10}$$

Le vecteur de Burgers vaut donc

$$\int_{\Gamma_0} \underline{\boldsymbol{dx}} = \int_{\Gamma_0} d\underline{\boldsymbol{u}}\,(\underline{\boldsymbol{X}}) = \underline{\boldsymbol{u}}_z(2\pi^+) - \underline{\boldsymbol{u}}_z(O^-) = -\underline{\boldsymbol{b}} \tag{16.11}$$

Il ne dépend que de la discontinuité du champ de déplacements et peut se calculer avec n'importe quel contour fermé ne s'intersectant pas lui–même et irréductible à un point, tracé sur le cylindre initial. On entend par là tout contour ne pouvant être réduit à un point par déformation du circuit tout en restant contenue dans le cylindre creux, autrement dit tout contour entourant, une seule fois, le creux du cylindre étudié.

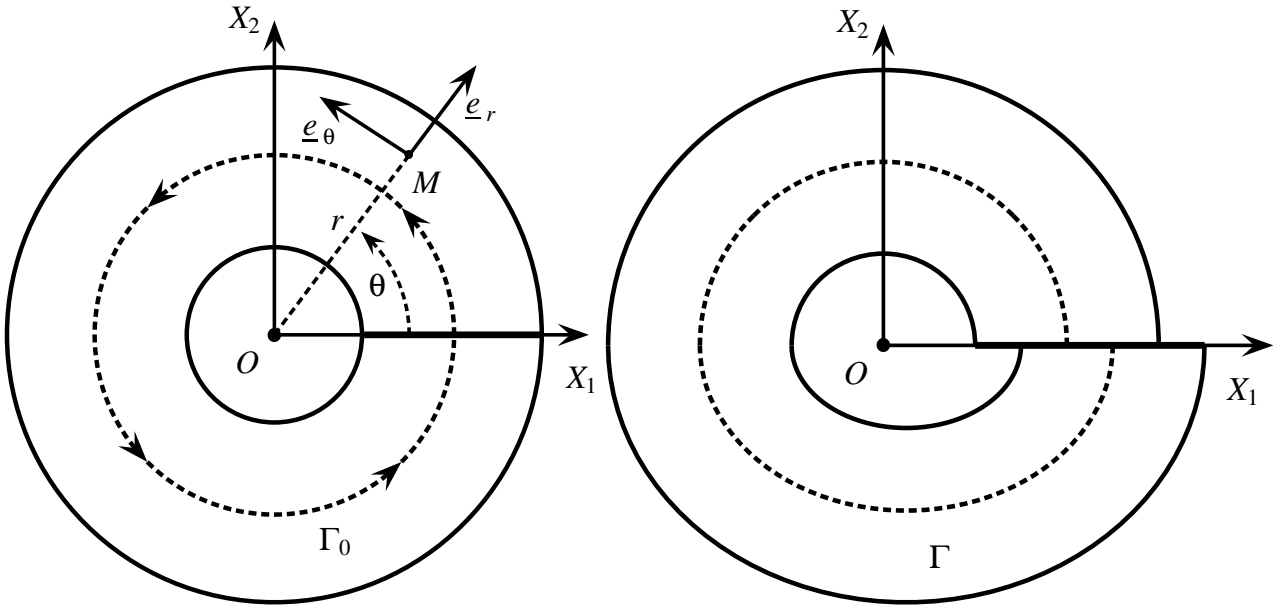


FIG. 16.2 – Section initiale et actuelle du cylindre déformé par une dislocation–coin.

16.1.3 Champs de contraintes et de déformations

Calculer les déformations et les contraintes associées au champ de déplacements précédents. Remarquer qu'elles sont continues pour toutes les valeurs de θ.

Préciser les conditions imposées par le contexte infinitésimal.

Les composantes non nulles de déformations et de contraintes pour la dislocation–vis sont :

$$\varepsilon_{\theta z} = -\frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\mu b}{2\pi r} \tag{16.12}$$

Elles sont indépendantes de θ et continues sur tout le cylindre.
Le contexte infinitésimal est respecté tant que

$$\frac{|b|}{r_i} \ll 1 \tag{16.13}$$

16.1.4 Equilibre et conditions aux limites en contraintes

Confirmer que les équations d'équilibre local sont vérifiées par les contraintes précédentes. Les conditions aux limites sur les bords intérieur $r = r_i$ et extérieur $r = r_e$ du cylindre le sont–elles également ?

16.1.5 Energie élastique d'une dislocation–vis

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

La densité d'énergie libre de déformation vaut :

$$\rho\psi(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\approx}{\mathbf{\Lambda}} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z} + \sigma_{z\theta}\varepsilon_{z\theta}) = \sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z}$$
$$= \frac{\mu b^2}{8\pi^2 r^2} \tag{16.14}$$

L'énergie par unité de longueur du cylindre s'obtient en intégrant sur une section du cylindre :

$$W = \int_{r=r_i}^{r=r_e}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\psi\, r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi}\log\frac{r_e}{r_i} \tag{16.15}$$

16.1.6 Cas où $r_i \to 0$

Que deviennent les contraintes et l'énergie stockée lorsque $r_i \to 0$? Comment interprétez–vous ce résultat ?

Nommer une situation physique pour laquelle un phénomène similaire se produit pour les contraintes, mais où le résultat pour l'énergie est fondamentalement différent ?

Pour $r_i = 0$, la contrainte $\sigma_{\theta z}$ présente un singularité en $1/r$ en $r = 0$. L'énergie stockée quant à elle devient infinie, ce qui n'est pas acceptable du point de vue physique. Cela vient du fait qu'il n'est pas possible d'effectuer le mouvement relatif de b constant en $r = 0$. Pour créer une dislocation dans un cylindre massif, il faut accepter de faire varier rapidement la translation relative de b à 0 lorsqu'on s'approche du centre, comme sur la figure 16.3.
Une singularité de contrainte se rencontre également à la pointe d'une fissure, comme on la vu au paragraphe 15.8.1, mais elle est en $1/\sqrt{r}$ de sorte que l'énergie contenue dans un volume incluant la fissure reste finie.

16.1.7 Influence du choix du plan de coupure

Montrer que les champs de déformations et de contraintes dues à la dislocation–vis ne dépendent pas du choix du plan de coupure $\theta = \theta_0$. Justifier cette remarque.

Il est remarquable de trouver un état d'énergie de déformation non nulle dans un corps homogène en l'absence de tout chargement extérieur. Si la coupure et les opérations 2 à 4 de la procédure de Volterra sont réalisées sur tout le plan $X_2 = 0$, i.e. $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, quels champs de déplacements, de déformations et de contraintes obtient–on ?

Comment se distinguent fondamentalement ces deux situations ?

Si la coupure est réalisée en $\theta = \theta_0 \neq 0$, la solution (16.5) est encore acceptable à condition d'être définie sur le domaine $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$. Les déformations et contraintes sont alors inchangées. La nouvelle situation s'obtient en fait à partir du cas précédent en tournant le cylindre de θ_0 par rapport à l'axe z.
Les champs de déformations et de contraintes nulles sont également solutions du problème d'efforts imposés nuls sur les bords intérieur et extérieur du cylindre. C'est la solution que l'on obtient lorsque la coupure est réalisée sur les deux faces $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et que la partie supérieure du cylindre est déplacée d'un mouvement d'ensemble de $\underline{\boldsymbol{b}}$ par rapport à la partie inférieure. Les deux situations considérées se distinguent par le fait que la coupure le long de $\theta = 0$ change la connexité du cylindre. Le cylindre creux n'est pas simplement connexe. Il le devient si la coupure est opérée. Effectuer deux coupures laisse la connexité du cylindre creux inchangée.

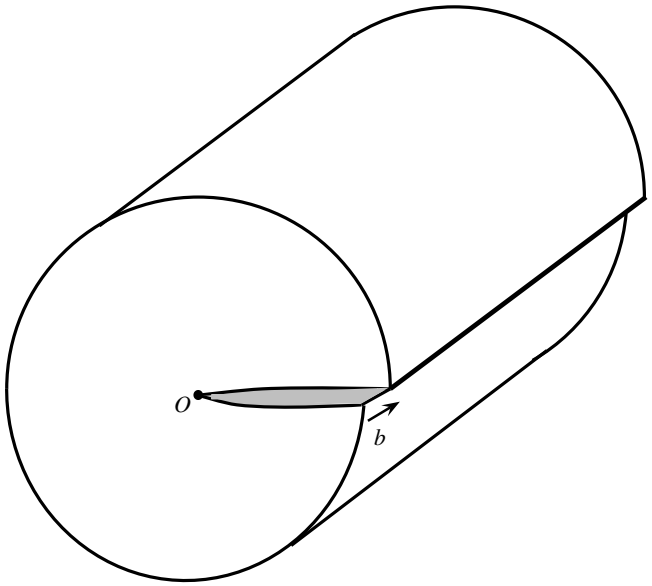


FIG. 16.3 – Dislocation–vis créée dans un cylindre massif.

16.1.8 Torseur résultant

En considérant cette fois–ci le torseur des efforts résultant sur l'une des extrémités du cylindre ($z = 0$ ou $z = L$), montrer que la solution proposée précédemment n'est finalement pas acceptable, même au sens de Saint–Venant.

Le vecteur contrainte en chaque point de l'extrémité de normale $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ vaut

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\mu b}{2\pi r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{16.16}$$

Il s'agit d'un effort tangentiel qu'il faut appliquer en chaque point de l'extrémité pour la maintenir en équilibre. Toutefois, cette densité surfacique d'efforts ne produit pas de résultante :

$$\underline{\boldsymbol{R}} = -\int_{Z=L} \frac{\mu b}{2\pi r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \, dS = 0$$

Le moment résultant, quant à lui, vaut :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{M}} &= \int_{Z=L} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge \underline{\boldsymbol{t}} \, dS = -\int_{Z=L} r\underline{\boldsymbol{e}}_r \wedge \frac{\mu b}{2\pi r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \, r dr d\theta \\ &= -\mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2}\underline{\boldsymbol{e}}_z \end{aligned} \tag{16.17}$$

L'existence d'un moment résultant non nul sur l'extrémité considérée n'est pas compatible avec la condition de surface libre recherchée pour cette extrémité. Le champ de contraintes trouvé n'est donc pas acceptable, même au sens de Saint–Venant. L'objet du paragraphe suivant est de remédier à cette insuffisance.

16.1.9 Solution exacte au sens de Saint–Venant

Remédier à la difficulté rencontrée prédédemment et obtenir une solution exacte, au sens de Saint–Venant, du problème de la dislocation–vis dans le cylindre de lonngueur L. Donner les champs de contraintes, de déformations et de déplacements correspondants.

Commenter alors l'image de la figure 16.4, tirée de l'ouvrage (Friedel, 1964).

Il suffit de superposer à la solution partielle trouvée pour le cylindre le champ de contrainte induit par l'application du moment d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ opposé au moment résultant $\underline{\boldsymbol{M}}$ calculé précédemment :

$$-\underline{\boldsymbol{M}} = \mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{16.18}$$

Un tel moment induit le champ de contraintes suivant dans le cylindre fini :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mu b}{\pi (r_e^2 + r_i^2)} r \tag{16.19}$$

d'après la théorie de la torsion des barres à section circulaire (cf. paragraphe 13.2.4). Cette contribution vient s'ajouter à la contrainte (16.12) déjà trouvée. On est en droit d'appliquer ici le théorème de superposition, établi au paragraphe 8.1.4, puisque le problème auxiliaire de torsion considéré s'applique sur la même géométrie et avec des conditions en effort sur les bases du cylindre. Les contraintes dues à la torsion s'appliquant aux extrémités ne suffisent pas à annuler point par point le vecteur contrainte (16.16) issu de la contribution initiale, de sorte que la solution complète résultant de la superposition n'est satisfaisante qu'au sens de Saint–Venant.
La figure 16.4 montre le cisaillement du plan de coupure induit par cette torsion supplémentaire.

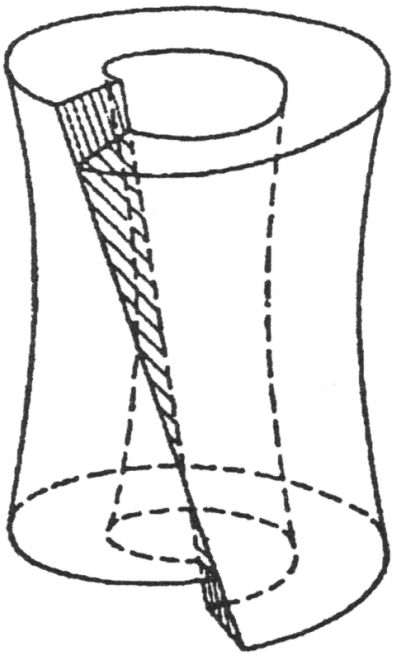


FIG. 16.4 – Dislocation–vis dans un cylindre de longueur finie, d'après (Friedel, 1964).

16.2 Dislocation–coin

Le défaut introduit dans le cylindre selon la procédure de Volterra est appelé *dislocation–coin* lorsque le vecteur de translation est orthogonal à la ligne de dislocation :

$$\underline{\boldsymbol{b}} = b\, \underline{\boldsymbol{e}}_1 \tag{16.20}$$

selon le repérage de la figure 16.1(a). La dislocation–coin est représentée sur la figure 16.5. Une section du cylindre défectueux correspondant est également donnée sur la figure 16.2.

Le champ de contraintes internes induit par une dislocation–coin est techniquement plus délicat à obtenir que celui de la dislocation–vis. La méthode des fonctions de contraintes permet d'aboutir et le lecteur peut se reporter aux références (Timoshenko and Goodier, 1970; Hirth and Lothe, 1982; Teodosiu, 1982). On se contente ici de donner le résultat sans expliciter les étapes qui président à sa construction :

$$\sigma_{rr} = \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_i^2+r_e^2} - \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2+r_e^2}\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta \tag{16.21}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{3r}{r_i^2+r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2+r_e^2}\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta \tag{16.22}$$

$$\sigma_{r\theta} = \alpha\left(-\frac{1}{r} + \frac{r}{r_i^2+r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2+r_e^2}\frac{1}{r^3}\right)\cos\theta \tag{16.23}$$

$$\tag{16.24}$$

où α est une constante à déterminer dans la suite.

Faire un commentaire sur ce champ de contraintes.

Le champ de contrainte présente une singularité lorsque $r_i \to 0$. Cette singularité est en $1/r$ comme dans le cas de la dislocation–vis.

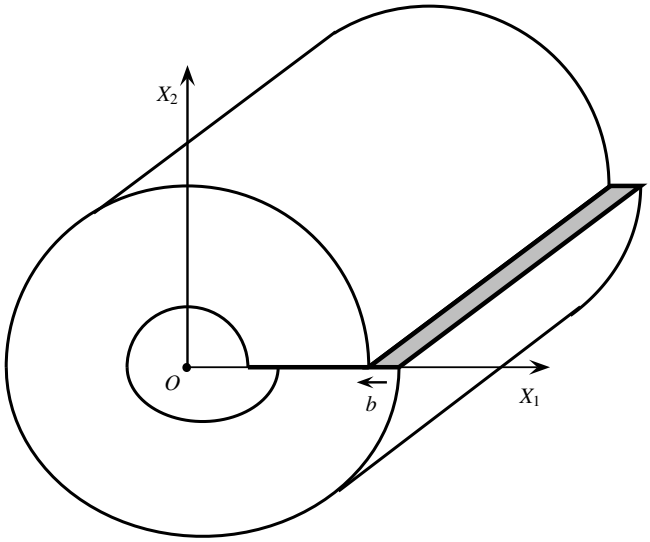


FIG. 16.5 – Dislocation–coin.

16.2.1 Equilibre local et conditions aux limites

On admet que le champ de contraintes précédent satisfait les équations d'équilibre local. Vérifier, par contre, que les conditions aux limites sont effectivement remplies.

Les termes en $\sin\theta/r$, $r\sin\theta$ et $\sin\theta/r^3$ permettent de vérifier séparément que $\operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ en coordonnées cylindriques. On vérifie en outre que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{e}}_r = 0$ en $r = r_i$ et $r = r_e$.

16.2.2 Contraintes réduites

Donner une expression réduite des contraintes précédentes lorsque, simultanément, $r_e \to +\infty$ et $r \gg r_i$.

Dans ces conditions, les contraintes (16.21) à (16.23) se réduisent à

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha \sin\theta}{r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\alpha \cos\theta}{r} \tag{16.25}$$

16.2.3 Contexte des déformations planes

Calculer la composante de contrainte σ_{zz} associée au champ réduit précédent, dans le contexte des déformations planes selon l'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$. Ce contexte suppose que

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Dans ces conditions, la déformation axiale vaut

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zz} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = 0 \tag{16.26}$$

d'où le résultat connu en déformations planes :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

i.e.

$$\sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{rr}$$

dans le cas présent.

16.2.4 Moment résultant

On considère un contour carré, de côté $2X_0$, autour de la ligne de dislocation, comme sur la figure 16.6, avec $X_0 \gg r_i$ et $r_e \to +\infty$. Montrer que les contraintes internes dues à la dislocation engendrent un moment résultant, par unité d'épaisseur de cylindre, sur la face d'équation $X_1 = X_0, |X_2| \leq X_0$.

La normale à la face considérée a pour composantes :

$$\underline{\boldsymbol{n}} = \cos\theta \underline{\boldsymbol{e}}_r - \sin\theta \underline{\boldsymbol{e}}_\theta$$

Le vecteur contrainte en chaque point de cette face vaut

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}} = \frac{\alpha \sin 2\theta}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_r - \frac{\alpha}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{16.27}$$

Le moment résultant sur la face d'équation $X_1 = X_0$, $|X_2| \leq X_0$ vaut :

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \int_{X_0} \underline{\boldsymbol{OM}} \wedge \underline{\boldsymbol{t}}\, dX_2 = \left(\int_{X_0} r t_\theta\, dX_2\right)\underline{\boldsymbol{e}}_z = -\left(\int_{X_0} \alpha\, dX_2\right)\underline{\boldsymbol{e}}_z = -2\alpha X_0 \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{16.28}$$

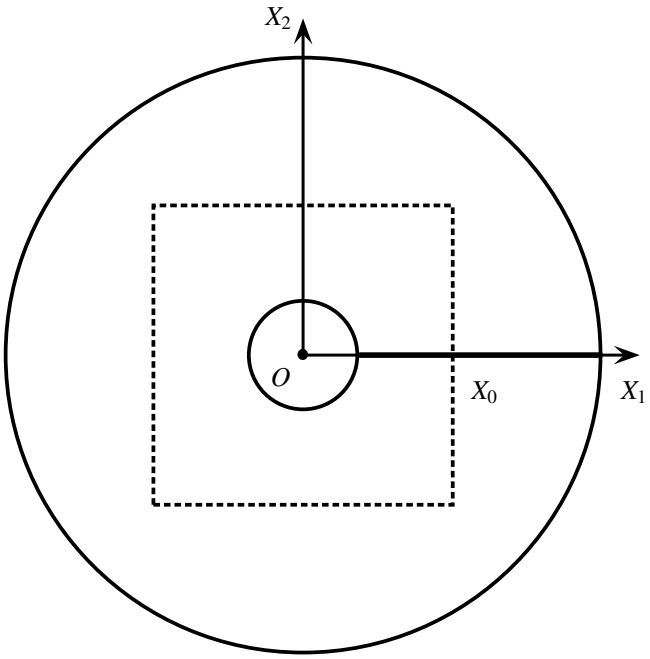


FIG. 16.6 – Contour carré autour de l'axe du cylindre.

16.2.5 Déformations et déplacements

Calculer les déformations associées au champ de contraintes dans sa forme réduite trouvée en 16.2.2.

Intégrer pas à pas ce champ pour en déduire un champ de déplacement correspondant.

Identifier au passage la constante α en fonction de la donnée du problème, à savoir b.

Déterminer alors les zones de dilatation et de contraction de la matière autour de la dislocation.

Quelques commentaires sur le champ de déplacements obtenu s'imposent. Indiquer une différence fondamentale entre les déplacements associés à la dislocation–coin et ceux trouvés pour la dislocation–vis.

Remarquer enfin que la soudure ne reste pas plane.

L'élasticité isotrope linéarisée fournit :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{\alpha \sin\theta}{r} \tag{16.29}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{1+\nu}{E}\frac{\alpha\cos\theta}{r} \tag{16.30}$$

La composante $\varepsilon_{rr} = \partial u_r/\partial r$ peut être intégrée pour donner

$$u_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\alpha \sin\theta \log r + f(\theta) \tag{16.31}$$

où $f(\theta)$ est une fonction d'intégration à déterminer. La relation de compatibilité

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r\varepsilon_{\theta\theta} - u_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}(1-\log r)\alpha \sin\theta - f(\theta) \tag{16.32}$$

permet d'obtenir la composante de déplacement tangentiel :

$$u_\theta = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}(1-\log r)\alpha\cos\theta - \int f(\theta)d\theta + g(r) \tag{16.33}$$

où apparaît une nouvelle fonction d'intégration $g(r)$. Noter que la nullité des composantes de déformations ε_{rz} et $\varepsilon_{\theta z}$ permet d'exclure une dépendance éventuelle de u_r et u_θ par rapport à z. La composante de cisaillement se calcule alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ &= 2\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{\alpha\cos\theta}{r} + \frac{f_{,\theta}(\theta)}{r} + g_{,r}(r) + \frac{1}{r}\left(\int f(\theta)d\theta - g(r)\right) \end{aligned} \tag{16.34}$$

Les notations $f_{,\theta}$ et $g_{,r}$ désignent les dérivées premières des fonctions f et g. Cette dernière expression doit être identifiée avec le résultat (16.30) ce qui fournit l'équation

$$-\frac{4(1-\nu^2)}{E}\frac{\alpha\cos\theta}{r} = \frac{f_{,\theta}(\theta) + \int f(\theta)d\theta}{r} + g_{,r}(r) - \frac{g(r)}{r} \tag{16.35}$$

La dérivation de l'équation précédente par rapport à r, d'une part, et par rapport à θ d'autre part conduit aux deux équations différentielles indépendantes :

$$g_{,rr}(r) = 0 \tag{16.36}$$

$$f_{,\theta\theta} + f = \frac{4(1-\nu^2)}{E}\alpha\sin\theta \tag{16.37}$$

L'équation (16.36) fournit :

$$g(r) = Ar + D_1 \tag{16.38}$$

où A et D_1 sont des constantes d'intégration.
L'équation (16.37), quant à elle, possède une solution particulière de la forme $\theta\cos\theta$. Elle s'intègre finalement en

$$f(\theta) = -\frac{2(1-\nu^2)}{E}\alpha\theta\cos\theta + B\cos\theta + C\sin\theta \tag{16.39}$$

où B et C sont des constantes d'intégration. Il est utile de calculer aussi une primitive de f, car elle intervient dans l'expression du déplacement tangentiel :

$$\int f(\theta)d\theta = -\frac{2(1-\nu^2)}{E}\alpha(\theta\sin\theta + \cos\theta) + B\sin\theta - C\cos\theta + D_2 \tag{16.40}$$

L'équation (16.34) est vérifiée à condition que $D_1 = D_2 = 0$.
Remarquer que les termes en $B\cos\theta$ et $C\sin\theta$ dans l'expression du déplacement radial à travers la fonction f sont des mouvements de translation exprimés en coordonnées cylindriques, comme on s'en convaincra aisément. La fonction $g(r) = Ar$, quant à elle, correspond à une rotation d'ensemble d'axe $\underline{\boldsymbol{e}}_z$ et d'angle A.
C'est la condition de discontinuité sur le plan $\theta = 0$, visible sur la figure 16.5, qui donne finalement accès à la constante α recherchée :

$$u_r(0^+) - u(2\pi^-) = b = \frac{2(1-\nu^2)}{E}\alpha 2\pi \tag{16.41}$$

d'où

$$\alpha = \frac{Eb}{4\pi(1+\nu)(1-\nu)} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \tag{16.42}$$

La dilatation ou la contraction de la matière sont données par le signe de la trace de la déformation qui, en vertu des lois de l'élasticité isotrope linéarisée est proportionnelle à, et

du même signe que, la trace du tenseur des contraintes. La trace du tenseur des contraintes est égale à $2(1+\nu)\sigma_{rr}$. Lorsque $b>0$, la matière se dilate donc au–dessus du plan de coupure ($\theta>0$) et se contracte en–dessous ($\pi \leq \theta \leq 2\pi$).

En bref, on obtient les déplacements suivants

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)}\left((1-2\nu)\sin\theta\log r - 2(1-\nu)\theta\cos\theta\right) \tag{16.43}$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)}\left(-(1-2\nu)(1-\log r)\cos\theta + 2(1-\nu)(\theta\sin\theta+\cos\theta)\right) \tag{16.44}$$

auxquels s'ajoute un éventuel mouvement de corps rigide.
Le champ de déplacement présente une divergence en $\log r$ lorsque $r_i \to 0$, ce qui n'était pas le cas pour la dislocation–vis.
Le plan de coupure $\theta = 0$ subit un déplacement u_θ non constant et non linéaire en r. Par conséquent, il ne reste pas plan.

Parce que ces expressions sont parfois invoquées dans la pratique, on donne aussi les composantes cartésiennes des déplacements qui se déduisent des résultats obtenus en coordonnées cylindriques :

$$u_1 = -\frac{b}{2\pi}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{4(1-\nu)}\right) = \frac{b}{2\pi}\left(\operatorname{atan}\frac{X_2}{X_1} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{X_1X_2}{X_1^2+X_2^2}\right) \tag{16.45}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{b}{8\pi(1-\nu)}\left(2(1-2\nu)\log r + \cos 2\theta\right) \\ &= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)}\left((1-2\nu)\log(X_1^2+X_2^2) + \frac{X_1^2-X_2^2}{X_1^2+X_2^2}\right) \end{aligned} \tag{16.46}$$

Pour information, les contraintes cartésiennes associées sont :

$$\sigma_{11} = -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}\frac{X_2(3X_1^2+X_2^2)}{(X_1^2+X_2^2)^2} \tag{16.47}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}\frac{X_2(X_1^2-X_2^2)}{(X_1^2+X_2^2)^2} \tag{16.48}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}\frac{X_1(X_1^2-X_2^2)}{(X_1^2+X_2^2)^2} \tag{16.49}$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11}+\sigma_{22}) = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)}\frac{X_2}{X_1^2+X_2^2} \tag{16.50}$$

16.2.6 Energie d'une dislocation–coin

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

La densité d'énergie élastique stockée, calculée avec les contraintes et déformations réduites, vaut

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\alpha^2(1+\nu)}{Er^2}(1-2\nu\sin^2\theta) \tag{16.51}$$

L'énergie élastique totale par unité d'épaisseur du cylindre, calculée sur la portion du cylindre $r_i \ll r_0 < R \ll r_e$ est donc :

$$W = \int_{r=r_0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\psi \, r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \log \frac{R}{r_0} \tag{16.52}$$

L'énergie croît de manière illimitée lorsque R augmente et lorsque r_0 diminue. Cette expression est la même que pour la dislocation–vis au facteur $(1-\nu)$ près.

16.2.7 Dislocation–coin équivalente

On soumet le cylindre parfait initial au champ de déplacements suivant :

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left((1-2\nu) \sin\theta \log r - 2(1-\nu)\theta \cos\theta \right) \tag{16.53}$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left(-(1-2\nu)(1-\log r)\cos\theta + 2(1-\nu)(\theta \sin\theta + \cos\theta) \right) \tag{16.54}$$

définis sur l'intervalle :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \tag{16.55}$$

Montrer que ce champ est à valeurs multiples si on le prolonge par continuité en $\theta = -\pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$.
Montrer que le champ de déformations associé à ces déplacements est strictement le même que celui trouvé pour la dislocation–coin au paragraphe 16.2.5. En déduire que le champ de contraintes correspondant est auto–équilibré.
Proposer une procédure pour que s'établisse précisément le champ de déplacements décrit par les fonctions (16.53) à (16.55), dans le cylindre, au prix d'une coupure bien choisie. Faire le dessin correspondant.
Justifier alors que ce champ mérite tout autant le nom de dislocation–coin que celui étudié au paragraphe 16.2.5.
Calculer le vecteur de Burgers correspondant (voir figure 16.2).

On a donc mis en évidence deux champs de déplacements, à savoir celui trouvé en 16.2.5 et celui donné par les équations (16.53) à (16.55), conduisant aux mêmes champs de déformations. Montrer que la différence entre ces deux champs ne se limite pas à un mouvement de corps rigide. Ce résultat vous étonne–t–il ?
A quelle caractéristique topologique fondamentale du cylindre creux pourrait–on l'attribuer ?

On calcule les limites suivantes :

$$u_r(-\frac{\pi}{2}^-) - u_r(\frac{3\pi}{2}^+) = 0, \quad u_\theta(-\frac{\pi}{2}^-) - u_\theta(\frac{3\pi}{2}^+) = b \tag{16.56}$$

La fonction u_θ est discontinue au travers du plan $\theta = -\pi/2$. Elle se prolonge donc en une fonction à valeurs multiples de part et d'autre du domaine de définition (16.55). La seule différence entre le champ proposé et celui trouvé pour la dislocation–coin, à savoir les équations (16.43) et (16.44), réside dans le domaine de définition des fonctions par rapport à l'angle θ. On vérifie que ces déplacements conduisent aux mêmes déformations qui sont, quant à elles, continues, on l'a vu.
Pour obtenir un tel champ de déplacement, il suffit d'effectuer la coupure le long du plan

$\theta = -\pi/2$ et de translater l'une des faces de la coupure du vecteur $\underline{\boldsymbol{b}} = b\underline{\boldsymbol{e}}_\theta$, orthogonal au plan de coupure, comme indiqué sur la figure 16.2. Ce déplacement relatif crée un vide que l'on comble en rajoutant la plaque de matière d'épaisseur b, que l'on colle aux faces de la coupure afin de restaurer la cohésion du cylindre. Si $b < 0$, il faut enlever de la matière, puis coller, afin de réaliser la dislocation. La procédure est illustrée sur la figure 16.7.
Remarquer que le vecteur de translation est le même que (16.20), ce qui incite à décréter qu'il s'agit là de la même dislocation–coin. La dislocation–coin est caractérisée par son vecteur de Burgers $\underline{\boldsymbol{b}}$, perpendiculaire à la ligne de dislocation, elle est indépendante du plan de coupure.

Notons $\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)}$ et $\underline{\boldsymbol{u}}^{(2)}$ les deux champs de déplacements fournissant le champ de déformations de la dislocation–coin. Ils coïncident pour $0 < \theta < 3\pi/2$. Ils diffèrent pour $3\pi/2 < \theta < 2\pi$, domaine sur lequel :

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)}\left((1-2\nu)\sin\theta\log r - 2(1-\nu)(\theta-2\pi)\cos\theta\right) \\ u_\theta^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)}\left(-(1-2\nu)(1-\log r)\cos\theta + 2(1-\nu)((\theta-2\pi)\sin\theta + \cos\theta)\right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$u_r^{(2)} - u_r^{(1)} = b\cos\theta, \quad u_\theta^{(2)} - u_\theta^{(1)} = -b\sin\theta$$

sur ce quartier du cylindre.
Le même champ de déformation sur le cylindre peut donc s'intégrer en deux champs de déplacements qui diffèrent par plus qu'un simple mouvement de corps rigide infinitésimal. Autrement dit, le champ de déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}^{(2)} - \underline{\boldsymbol{u}}^{(1)}$ engendre un champ de déformation nulle et n'est pas un mouvement de corps rigide infinitésimal.
Ce résultat peut surprendre puisqu'on a établi, lors de l'étude du problème de la compatibilité des déformations (voir le théorème 4 de la page 50), que la déformation s'annule seulement pour les mouvements de corps rigide infinitésimaux. La démonstration de ce résultat fait toutefois appel à plusieurs reprises au théorème 23 de Poincaré, qui n'est valable que sur un corps simplement connexe. Un ensemble de points est dit simplement connexe si toute courbe fermée continue dans l'ensemble peut être déformée en un point tout en restant dans l'ensemble. Ce n'est pas le cas des cercles concentriques d'un cylindre creux entourant le trou central. Le cylindre creux n'est donc pas simplement connexe. Un ensemble non simplement connexe peut être rendu simplement connexe en effectuant autant de coupures que nécessaire. Une seule suffit pour le cylindre creux. Le théorème de Poincaré peut être appliqué dans le cylindre coupé mais les champs ainsi déterminés peuvent présenter des discontinuités au passage de la coupure. C'est pourquoi on a pu trouver un champ de déplacement à valeur simple pour chaque coupure considérée dans ce problème.

16.3 Dislocations mixtes

Une dislocation dans un cylindre est de caractère mixte lorsque son vecteur de Burgers possède une composante vis, parallèle à la ligne de dislocation, et une composante coin, perpendiculaire à la ligne :

$$\underline{\boldsymbol{b}} = b_\perp \underline{\boldsymbol{e}}_1 + b_\odot \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{16.57}$$

Donner, en le justifiant, le champ de contraintes et l'énergie d'une telle dislocation.

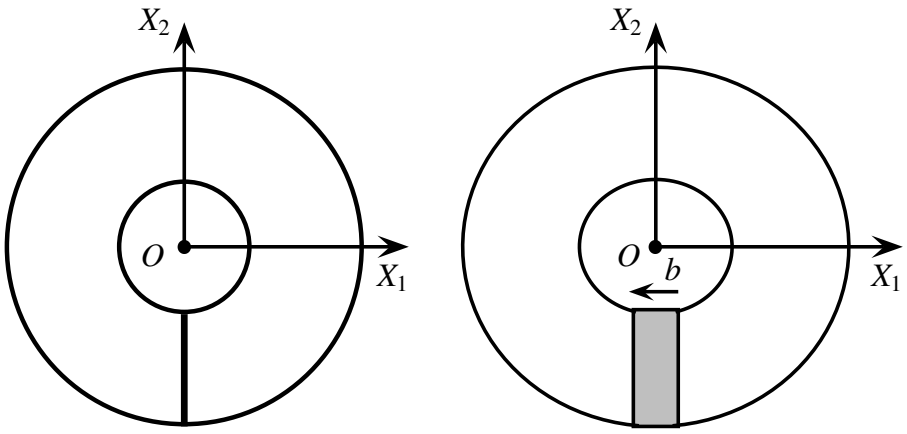


FIG. 16.7 – Construction alternative d'une dislocation–coin dans un cylindre creux. La partie grisée correspond à de la matière rajoutée (ou enlevée) pour combler l'espace libéré par le déplacement relatif des lèvres de la coupure.

16.4 Compatibilité générale

Le travail précédent incite à reformuler de manière générale le problème de la compatibilité d'un champ de déformation dans les corps multiplement connexes. On distinguera en particulier la recherche de solutions continues ou non en déplacement. La question de la compatibilité d'un champ de déformations dans le contexte infinitésimal a été explorée au paragraphe 2.3.5. Le théorème 5 établit l'existence d'un champ de déplacement de classe C^3 dès lors que $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est de classe C^2. Il n'est toutefois valable que dans le cas d'un domaine simplement connexe en raison de l'application du théorème de Poincaré. L'objectif de cette section est d'étendre ce théorème au cas non simplement connexe.

16.4.1 Retour sur la compatibilité

On commence d'abord par reprendre la démarche mise en œuvre au paragraphe 2.3.5 dans un esprit un peu différent. Alors que cette première analyse avait simplement prouvé l'existence du champ de déplacement, on se propose ici de construire explicitement un tel champ à partir de la donnée du champ des déformations infinitésimales $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ sur un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega_0$.

Si le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ est compatible alors il existe $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ et $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ tels que

$$\operatorname{grad} \underline{\boldsymbol{u}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} \tag{16.58}$$

Le rotationnel de l'expression précédente est nécessairement nul ($\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$) de sorte que :

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} = -\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{16.59}$$

Il se trouve d'autre part que le rotationnel du tenseur des rotations infinitésimales n'est autre

que le transposé du gradient du vecteur rotation infinitésimale[2] :

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} = (\operatorname{grad} \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}})^T \tag{16.60}$$

Les définitions de ces grandeurs sont données par (2.129) et (2.130) (pour l'algèbre des tenseurs antisymétriques, voir l'annexe A.1.3). L'application du rotationnel au gradient de $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$ conduit aux identités suivantes :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}})^T = 0 \tag{16.61}$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T = 0 \tag{16.62}$$

Il reste à vérifier que les 6 équations (16.62) ne sont autres que les relations de compatibilité (2.143). On a donc trouvé une formulation très concise des conditions de compatibilité grâce à l'opérateur rotationnel que l'on va continuer à utiliser pour construire le champ de déplacement issu d'un champ de déformations compatible.

Construction explicite du champ de déplacement

Soit un champ de déformations $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ donné vérifiant les équations de compatibilité (16.62). Il existe un champ $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$ tel que

$$\operatorname{grad} \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = -(\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \tag{16.63}$$

Supposons connue la valeur $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M_0)$ du vecteur rotation infinitésimale au point M_0 et cherchons $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M)$ en un autre point M. Soit L une ligne joignant M_0 à M et intégrons (16.63) le long de L :

$$\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M) - \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M_0) = -\int_{M_0,L}^{M} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{dl}} \tag{16.64}$$

ce qui fournit la valeur cherchée à condition que l'intégrale soit indépendante du trajet L. Considérons alors une autre ligne L' liant M à M_0. Le contour $L \cup L'$ est donc fermé. Sur tout domaine simplement connexe $\mathcal{D} \subset \Omega_0$ contenant $L \cup L'$, il existe une surface S contenue dans $\mathcal{D}$ et s'appuyant sur $L \cup L'$. Le théorème de Stokes (A.132) s'applique pour une telle surface :

$$\oint_{L \cup L'} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{dl}} = \int_S \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{n}}\, ds = 0 \tag{16.65}$$

d'où

$$\int_L (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{dl}} + \int_{L'} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{dl}} = 0$$

ce qui établit l'invariance de l'intégrale par rapport au trajet dans (16.64) et par conséquent assure l'unicité de $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M)$ pour $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M_0)$ donné. On revient alors à (16.58) que l'on intègre sur le trajet L :

$$\underline{\boldsymbol{u}}(M) - \underline{\boldsymbol{u}}(M_0) = \int_{M_0,L}^{M} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} . \underline{\boldsymbol{dl}} + \int_{M_0,L}^{M} \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{dl}} \tag{16.66}$$

[2] Pour le voir, le calcul fait appel successivement aux relations (A.73) et (A.70) :

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}})_{im} &= \epsilon_{mjk} \omega_{ij,k} = -\epsilon_{mjk} \epsilon_{ijp} \overset{\times}{\omega}_{p,k} \\ &= \epsilon_{jmk} \epsilon_{jpi} \overset{\times}{\omega}_{p,k} = (\delta_{mp}\delta_{ki} - \delta_{mi}\delta_{kp}) \overset{\times}{\omega}_{p,k} \\ &= \overset{\times}{\omega}_{m,i} - \overset{\times}{\omega}_{k,k} \delta_{im} \end{aligned}$$

Or, on se rappelle aussi que $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = -\frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{u}}$ de sorte que sa divergence est nulle ($\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$). Le dernier terme s'annule et le résultat annoncé (16.60) est obtenu.

On effectue une intégration par parties du dernier terme sous la forme (avec $\underline{\boldsymbol{y}} \in L$) :

$$\begin{aligned}\int_{M_0,L}^{M} \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge \underline{\boldsymbol{dl}} &= \int_{M_0,L}^{M} \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge d(\underline{\boldsymbol{y}} - \underline{\boldsymbol{x}}) = \int_{M_0,L}^{M} d\left(\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{y}} - \underline{\boldsymbol{x}})\right) - \int_{M_0,L}^{M} d\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge (\underline{\boldsymbol{y}} - \underline{\boldsymbol{x}}) \\ &= \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M_0) \wedge (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) + \int_{M_0,L}^{M} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}) \wedge (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{dl}} \end{aligned} \tag{16.67}$$

On obtient finalement le déplacement

$$\underline{\boldsymbol{u}}(M) = \underline{\boldsymbol{u}}(M_0) + \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M_0) \wedge (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_0) + \int_{M_0}^{M} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{y}}) \wedge (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{dl}} \tag{16.68}$$

La dépendance vis–à–vis du trajet L a été enlevée car, pour un domaine L simplement connexe, on peut montrer, d'une manière similaire au cas du vecteur rotation, l'invariance de l'intégrale par rapport au trajet L dans le dernier terme. Il reste à vérifier que le gradient symétrisé du champ (16.68) donne bien le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de départ. On retrouve aussi le fait que le champ de déplacement obtenu est unique à un mouvement de corps rigide infinitésimal près caractérisé par la translation $\underline{\boldsymbol{u}}(M_0)$ et la rotation infinitésimale $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M_0)$. La formule (16.68) est parfois attribuée à Castigliano.

16.4.2 Domaines non simplement connexes

Pour fixer les idées, on prend le cas du cylindre Ω_0 des figures 16.1(a) et 16.8(a) qui est doublement connexe. Une coupure quelconque S ($\theta = 0$, sur les figures) permet de restaurer la connexité du domaine $\Omega_0 \setminus S$. Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{X}})$ un champ de tenseurs symétriques de classe C^2 (même si cette hypothèse peut sans doute être un peu relâchée) défini sur Ω_0 et vérifiant les équations de compatibilité (16.62). La construction précédente ayant conduit au champ de déplacement (16.68) est valable sur $\Omega_0 \setminus S$ mais le champ obtenu peut présenter une discontinuité au passage de S. En effet d'après (16.64), le saut du vecteur rotation au travers de S s'obtient par passage à la limite sur une ligne M^+M^-, comme sur la figure 16.8(a) :

$$[\![\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}]\!] = \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M^+) - \overset{\times}{\underline{\boldsymbol{\omega}}}(M^-) = -\oint_{M^-M^+} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T . \underline{\boldsymbol{dl}} =: \underline{\boldsymbol{d}} \tag{16.69}$$

Le saut de déplacement s'écrit :

$$[\![\underline{\boldsymbol{u}}]\!] = \underline{\boldsymbol{u}}(M^+) - \underline{\boldsymbol{u}}(M^-) = \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{d}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}} \tag{16.70}$$

où le vecteur de Burgers vaut

$$\underline{\boldsymbol{b}} = \oint_{M^-M^+} \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\underline{\boldsymbol{y}} \wedge (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}})^T)\right) . \underline{\boldsymbol{dl}} \tag{16.71}$$

L'utilisation du circuit fermé $M^-M^+P^+P^-M^-$ de la figure 16.8(b), réductible à un point dans $\Omega_0 \setminus S$, permet par passage à la limite de montrer l'indépendance des intégrales précédentes vis–à–vis du circuit Γ_0 traversant S. Par conséquent, les vecteurs $\underline{\boldsymbol{b}}$ et $\underline{\boldsymbol{d}}$ introduits précédemment sont constants le long de S. La discontinuité du déplacement correspond à un mouvement de corps rigide d'une lèvre de la coupure par rapport à l'autre. Comme le choix de la coupure est arbitraire, il existe une infinité de solutions en déplacement du problème de compatibilité, présentant une discontinuité et conduisant aux mêmes contraintes et déformations (continues !) dans le cylindre. On est en mesure d'énoncer le

Théorème 21 (dit de Weingarten) *Soit $\mathcal{D}$ un domaine doublement connexe de Ω_0 et un champ de tenseurs symétriques $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ à valeurs simples, continu (idéalement de classe C^2), vérifiant les conditions de compatibilité (16.62), alors il existe un champ de déplacement (idéalement de classe C^3 sur $\Omega_0 \setminus S$) dont $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est le champ de gradient symétrisé associé et présentant une discontinuité au travers d'une surface S telle que $\Omega_0 \setminus S$ soit simplement connexe. En outre la discontinuité est de la forme (16.70) où le vecteur de Burgers $\underline{\boldsymbol{b}}$ et de disclinaison $\underline{\boldsymbol{d}}$ sont donnés par (16.71) et (16.69).*

Ce théorème se substitue à la réciproque du théorème 5 valable pour les ensembles simplement connexes. Il se généralise aux domaines multiplement connexes en considérant autant de surfaces de coupure (sans intersection) que nécessaire pour partager le corps en composantes connexes (Teodosiu, 1982).

Les deux situations physiques suivantes peuvent être distinguées :

- Les **dislocations** correspondent au cas $\underline{\boldsymbol{b}} \neq 0, \underline{\boldsymbol{d}} = 0$. Les dislocations droites dans un cylindre été étudiées en détail dans ce chapitre et correspondent à une translation relative des lèvres de la coupure. Selon que la translation est parallèle ou perpendiculaire à la ligne de dislocation, les dislocations vis et coin ont été distinguées.
- Les **disclinaisons** correspondent au cas $\underline{\boldsymbol{b}} = 0, \underline{\boldsymbol{d}} \neq 0$. Il s'agit d'une rotation relative par rapport à un axe passant par l'origine. Dans le cas du cylindre avec une coupure en $\theta = 0$ et une rotation d'un angle θ_0 de la lèvre supérieure, on peut imaginer introduire un coin (comme dans une buche que l'on fend) et calculer les contraintes internes introduites par le coin.

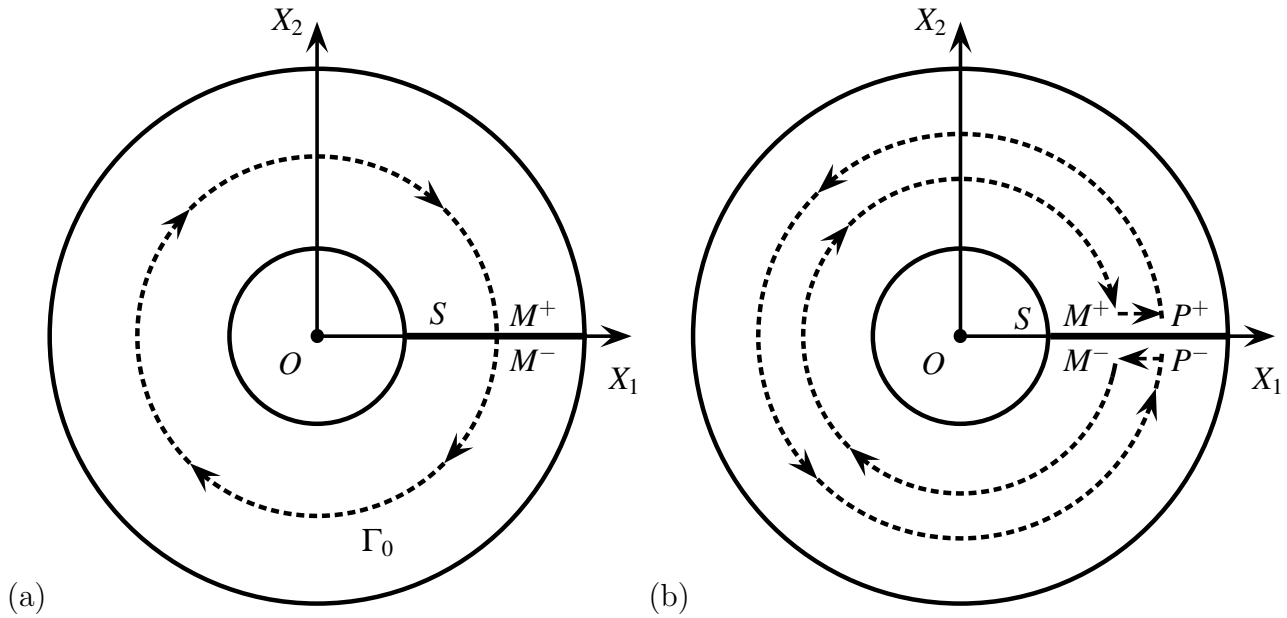


FIG. 16.8 – Coupure dans un cylindre creux et contour franchissant la coupure (a), contour $M^-M^+P^+P^-M^-$ servant à établir l'indépendance du vecteur de Burgers par rapport au choix du contour Γ_0 (b).

16.4.3 Dislocations dans les cristaux

La découverte des dislocations dans les matériaux cristallins représente un des plus beaux épisodes de l'histoire des sciences pour lequel la théorie a précédé l'observation expérimentale de près de cinquante ans. Elles s'est déroulée en trois étapes principales (Jaoul, 2008) :

- **1907** : Volterra invente les dislocations (*distorsioni* à l'origine, le nom *dislocation* lui est substitué par Love (Love, 1944)). Les 100 ans de cette avancée théorique majeure ont été célébrés par un problème d'examen de mécanique des dislocations à l'Ecole des Mines de Paris...
- **1934** : Orowan, Taylor et Polanyi, simultanément et sans se concerter, imaginent la notion de dislocation–coin dans un réseau cristallin d'atomes (figure 16.9(a)). Ils conjecturent que les dislocations sont des défauts cristallins responsables de la déformation plastique (irréversible) et du durcissement des métaux. L'avancée théorique est majeure car les autres mécanismes proposés conduisaient à une limite d'élasticité nettement trop forte par rapport aux observations expérimentales. Le vecteur de Burgers coorespondant varie entre l'angström et le nanomètre (cf. figure 16.9(c) pour le circuit et le vecteur de Burgers d'une dislocation–coin). Taylor a estimé les contraintes internes à l'aide des résultats de Volterra. Le modèle continu de Volterra fournit une excellente représentation des contraintes et déformations autour des défauts mais cesse d'être valide en–dessous d'une distance de un à deux vecteurs de Burgers. En 1939, Burgers imagine la dislocation–vis dans un réseau cristallin (figure 16.9(b)).
- **1956** : Hirsch observe au microscope électronique à transmission des lignes de dislocation dans l'aluminium. Le désordre atomique près du cœur de la dislocation est responsable du contraste obtenu sur l'image et révèle la présence de la dislocation (figure 16.9(e)). En 1947, Bragg et Nye avaient identifié des dislocations–coins dans un réseau bidimensionnel de bulles de savon à la surface de l'eau (figure 16.9(d), cf. (Nye, 1985)), mais on en trouve aussi dans l'arrangement des grains de maïs...

Le défaut dislocation–coin de la figure 16.9(a) peut se concevoir comme l'ajout ou la suppresion d'un plan atomique et s'apparente donc tout à fait à la dislocation de Volterra de la figure 16.7. La dislocation–vis, quant à elle, est conforme à l'image de la figure 16.3.

L'étude des dislocations et de la déformation plastique dans les solides représente une combinaison exemplaire et extrêmement féconde de la mécanique et de la physique du solide. Elle reste d'une grande actualité dans la recherche scientifique. Le monument dédié aux dislocations est l'ouvrage (Hirth and Lothe, 1982).

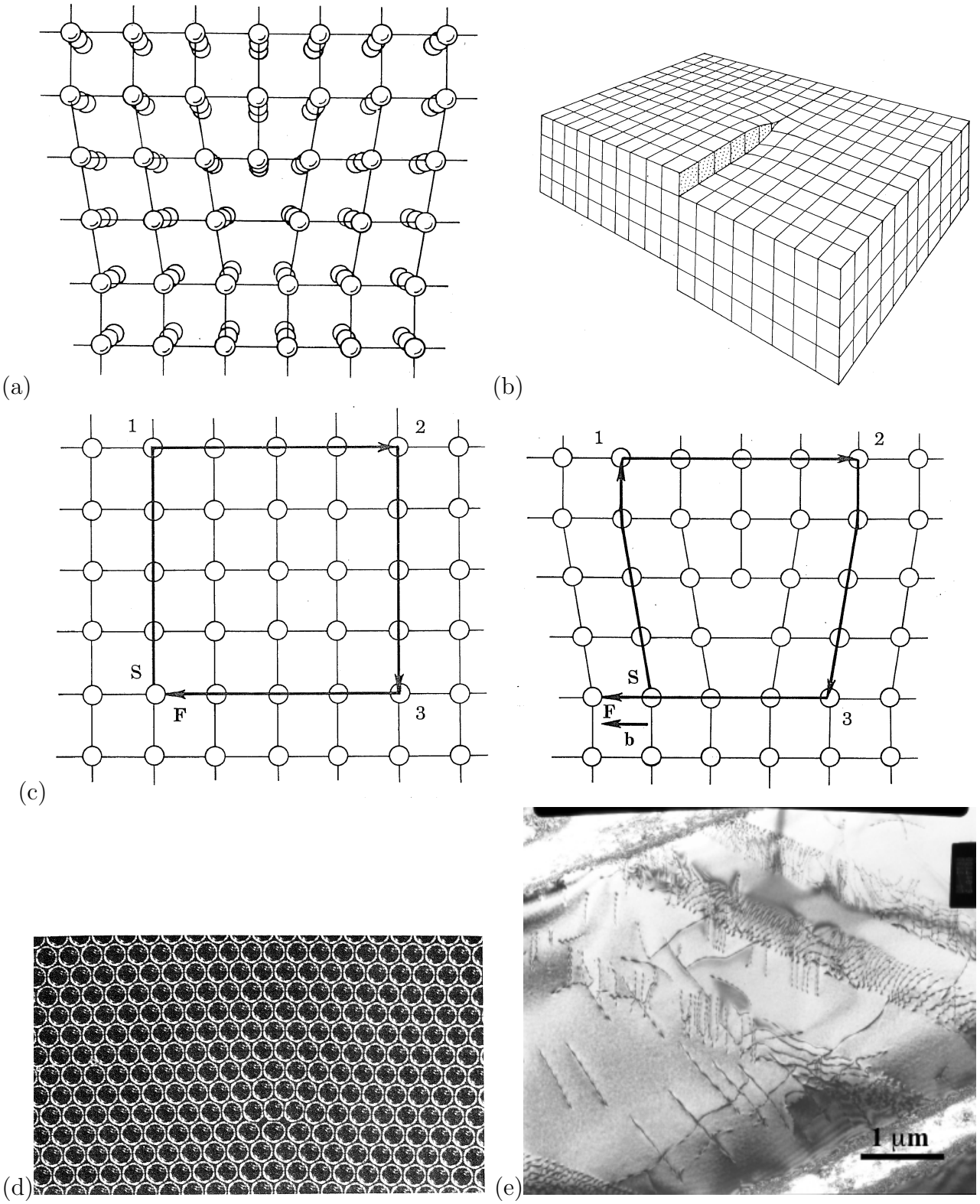


FIG. 16.9 – Dislocations dans les cristaux : dislocation–coin (a), dislocation–vis (b), circuit de Burgers pour une dislocation–coin (c), dislocations dans un film de bulles de savon (d), d'après (Hirth and Lothe, 1982), dislocations dans un alliage de titane par microscopie électronique à transmission ; les lignes de dislocation débouchant sur une portion de lame de quelques fractions de micromètre d'épaisseur apparaissent comme des lignes noires (photo Loïc Nazé).

Troisième partie

ANNEXES

Annexe A

Tenseurs

Wir stellen endlich in dritte Linie Zustände, die durch eine Zahlgrösse und eine zweiseitige Richtung charakterisiert sind. Ein solcher Zustand lässt sich durch eine Strecke veranschaulichen, die von einem festem Punkt aus gleichweit nach beiden Seiten reicht. Man könnte ihn demgemäss als bivectoriell, die für ihn charakteristische Grösse als Bivector bezeichnen, indessen würde dadurch eine Verwandschaft mit den Vektoren ausgedrückt werden, die in Wahrheit nicht vorhanden ist. Wir wollen uns deshalb nur darauf stützen, dass Zustände der geschilderten Art bei Spannungen und Dehnungen auftreten, und sie deshalb **tensorielle**[a]*, die für sie charakteristischen physikalischen Grössen aber* **Tensoren**[a] *nennen.*

Woldemar Voigt, *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle*, 1898.

[a] C'est moi qui souligne. Voilà, à ma connaissance, le texte qui introduit pour la première fois le mot *tenseur*.

A.1 Algèbre tensorielle

L'algèbre tensorielle s'appuie sur les notions d'algèbre linéaire acquises en classes préparatoires et les étend à des situations plus générales. **Pourquoi les tenseurs ?** L'intérêt des tenseurs est d'offrir une représentation intrinsèque des lois physiques, c'est–à–dire indépendante de tout système de coordonnées. Libre à l'utilisateur ensuite de choisir, après coup, un repère et d'y exprimer les composantes des grandeurs tensorielles introduites. Il pourra alors mettre en pratique l'algèbre des matrices bien maîtrisée grâce aux enseignements passés. Les grandeurs physiques sont représentées par des tenseurs d'ordre et de variance spécifiques, notions introduites dans cette annexe.

Une introduction mathématique de l'algèbre tensorielle est proposée dans le cours (Legrand,

2003). Une présentation plus complète est donnée dans (Legrand, 1971). On reprend ici certains éléments en introduisant les notations spécifiques à ce cours.

A.1.1 Tenseurs sur un espace vectoriel E

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n = 1, 2$ ou 3, sur le corps des réels (les résultats s'appliquent au corps des complexes, mais nous n'en profiterons pas dans ce cours). Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. Ils sont soulignés : $\underline{\boldsymbol{u}} \in E$. L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle **l'espace dual** E^* de E. La notation $<,>$, crochets de dualité, est introduite pour désigner l'action d'une forme linéaire sur son argument :

$$< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}} >= \underline{\boldsymbol{u}}^*(\underline{\boldsymbol{v}}) \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^* \in E^*, \forall \underline{\boldsymbol{v}} \in E \tag{A.1}$$

On peut en principe aller plus loin en introduisant le **bidual** E^{**} de E, i.e. l'ensemble des formes linéaires sur E^*. Le bidual s'identifie en fait à E lui–même. Si $\underline{\boldsymbol{u}} \in E$ et $\underline{\boldsymbol{v}}^* \in E^*$, on définit l'élément $\underline{\boldsymbol{u}}^{**} \in E^{**}$ tel que

$$< \underline{\boldsymbol{u}}^{**}, \underline{\boldsymbol{v}}^* >:=< \underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{u}} > \tag{A.2}$$

Il s'agit d'un isomorphisme permettant l'identification de E et de son bidual. On peut dès lors utiliser les crochets de dualité de manière symétrique :

$$< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}} >=< \underline{\boldsymbol{v}}^{**}, \underline{\boldsymbol{u}}^* >=< \underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{u}}^* > \tag{A.3}$$

Soit $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ une base quelconque de E. La **base duale** $(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i})_{i=1,n}$ de E^* associée est l'unique base telle que

$$< \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j >= \delta^i_j \tag{A.4}$$

où δ^i_j est le symbole de Kronecker. Les éléments de E et de son dual se décomposent de manière unique dans ces bases :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u^i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i, \quad \underline{\boldsymbol{v}}^* = v^*_i \, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \tag{A.5}$$

où la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés est adoptée. Chaque composante s'obtient en faisant opérer le vecteur de base adapté :

$$u^i =< \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{u}} >, \quad v^*_j =< \underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{e}}_j > \tag{A.6}$$

Définition

Pour deux entiers p et q, on appelle **tenseur p–contravariant et q–covariant** toute forme multilinéaire sur $(E^*)^p \times E^q$. Il s'agit donc d'une application qui à p éléments de E^* et à q éléments de E attribue un réel, avec des propriétés de linéarité sur chaque argument. Le couple (p, q) s'appelle **variance** du tenseur. La somme $p+q$ s'appelle **l'ordre du tenseur**. On distingue donc les

- **tenseurs d'ordre 0.** On convient qu'il s'agit des scalaires. L'ensemble des tenseurs d'ordre 0 est identifié à $\mathbb{R}$.
- **tenseurs d'ordre 1.**
  - $(p, q) = (1, 0)$: Il s'agit des **vecteurs**, i.e. les éléments de E. En effet, la définition indique qu'un tenseur d'ordre 1 associe un réel à tout élément de E^*. Les tenseurs 1–fois contravariants sont donc les éléments du bidual, identifiés aux vecteurs de E. L'ensemble des tenseurs 1–fois contravariants est donc l'espace E lui–même.
    En mécanique des milieux continus, les directions de l'espace, les fibres matérielles sont des tenseurs 1–fois contravariants, i.e. des vecteurs.

⋆ $(p,q) = (0,1)$: Il s'agit des **covecteurs**, c'est le nom que l'on donne aussi aux éléments du dual E^*. En effet, la définition d'un tenseur 1–fois covariant indique qu'il associe à tout élément de E un réel, c'est donc un élément du dual. L'ensemble des tenseurs 1–fois covariant n'est autre que E^*, l'ensemble des covecteurs.
En mécanique des milieux continus, l'élément de surface $\underline{\boldsymbol{ds}}$ *(et donc aussi la normale* $\underline{\boldsymbol{n}}$*) est un covecteur. En effet, c'est la grandeur qui opère sur un vecteur* $\underline{\boldsymbol{v}}$ *pour donner le volume du cylindre engendré par l'élément de surface et le vecteur* $\underline{\boldsymbol{v}}$ *:*

$$< \underline{\boldsymbol{ds}}\,, \underline{\boldsymbol{v}} >= dv$$

Pour un espace euclidien, l'opération précédente sera remplacée par le produit scalaire $\underline{\boldsymbol{ds}}\,.\underline{\boldsymbol{v}} = dv$.
En physique, les **forces sont fondamentalement des covecteurs**. *En effet, elles opèrent sur les vecteurs vitesses pour fournir le scalaire "puissance"* $< \underline{\boldsymbol{f}}\,, \underline{\boldsymbol{v}} >$. *Elles opèrent de même sur les vecteurs de déplacement pour fournir le scalaire "travail". La modélisation de efforts en physique consiste en la recherche de telles formes linéaires.*

• **tenseurs d'ordre 2.** Il sont notés à l'aide d'un $\sim$ dans ce cours.

⋆ $(p,q) = (2,0)$: Il s'agit des tenseurs 2–fois contravariants. Ils opèrent sur des couples de covecteurs pour donner un scalaire :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} \quad 2-\text{fois contravariant} : \quad E^* \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs d'ordre 2, 2–fois contravariants est noté $E \otimes E$.

⋆ $(p,q) = (0,2)$: Il s'agit des tenseurs 2–fois covariants. Ils opèrent sur des couples de vecteurs pour donner un scalaire :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} \quad 2-\text{fois covariant} : \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs d'ordre 2, 2–fois covariants est noté $E^* \otimes E^*$.
En mécanique des milieux continus, le tenseur des déformations infinitésimales $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ *est fondamentalement un tenseur 2–fois covariant. Il opère sur le couple de vecteurs* $(\underline{\boldsymbol{M}}\,, \underline{\boldsymbol{M}})$ *où* $\underline{\boldsymbol{M}}$ *est une direction matérielle pour donner l'allongement relatif de ce vecteur au cours de la transformation :*

$$\lambda(\underline{\boldsymbol{M}}) - 1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\boldsymbol{M}}\,, \underline{\boldsymbol{M}}) = \underline{\boldsymbol{M}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}.\underline{\boldsymbol{M}}$$

d'après l'équation (2.113) introduite dans le cours.

⋆ $(p,q) = (1,1)$: Les tenseurs d'ordre 2, 1–fois contravariants et 1–fois covariants opèrent sur des couples (covecteur,vecteur) pour donner un scalaire.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} \quad 1-\text{fois contravariant, } 1-\text{fois covariant} : \quad E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs 1–fois contravariants et 1–fois covariants est noté $E \otimes E^*$. On verra qu'on peut les identifier aussi à des **endomorphismes de** E.
Les tenseurs d'ordre 2, 1–fois covariants et 1–fois contravariants opèrent sur des couples (vecteur,covecteur) pour donner un scalaire.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} \quad 1-\text{fois covariant, } 1-\text{fois contravariant} : \quad E \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs 1–fois covariants et 1–fois contravariants est noté $E^* \otimes E$. On verra qu'on peut les identifier aussi à des **endomorphismes de** E^*.

En mécanique des milieux continus, selon l'approche de construction de Cauchy, le tenseur des contraintes de Cauchy $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ *est fondamentalement un tenseur d'ordre 2, 1–fois covariant 1–fois contravariant, élément de* $E^* \otimes E$*. En effet, il opère sur le couple* $(\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{n}})$ *où la vitesse* $\underline{\boldsymbol{v}}$ *est un vecteur et la normale à une facette* $\underline{\boldsymbol{n}}$ *est un covecteur, pour donner le scalaire puissance surfacique*

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{n}}) =: \underline{\boldsymbol{v}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}$$

où l'on a anticipé sur la contraction entre tenseurs d'ordres 2 et 1. Vu comme un endomorphisme sur E^**, le tenseur des contraintes associe au covecteur* $\underline{\boldsymbol{n}}$ *le covecteur force surfacique* $\underline{\boldsymbol{t}}$*, c'est le théorème de Cauchy de la page 79.*

- **tenseurs d'ordre 3.** On se contente d'un exemple. Les tenseurs d'ordre 3 opérant sur $E^* \times E \times E$ sont dits 1–fois contravariants et 2–fois covariants. L'ensemble de ces tenseurs est noté $E \otimes E^* \otimes E^*$.
  Les propriétés piézoélectriques des cristaux sont représentées par un tenseur d'ordre 3.
- **tenseurs d'ordre 4.** *Ils jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'élasticité. Ils sont notés* $\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}$ *dans ce cours.*

Toute grandeur physique possède une variance fondamentale. Ce fait n'empêche certes pas de travailler avec d'autres de ses représentants mais connaître la variance fondamentale de la notion physique introduite, qui doit apparaître dans sa définition même, permet de mieux comprendre pourquoi certaines formules impliquant la grandeur en question revêtent des formes particulières qui semblent compliquées au premier abord. C'est le cas par exemple pour la formule formule de Nanson (2.42) donnant le transport d'un élément de surface (covecteur), mais aussi de la loi de comportement du fluide élastique (6.18).

Produit tensoriel

Le produit tensoriel, noté $\otimes$ est l'opération permettant de construire des tenseurs d'ordre 2 à partir de vecteurs et de covecteurs. Le **produit tensoriel de deux vecteurs** $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}} \in E$ est le tenseur d'ordre 2, 2–fois contravariant, qui à tout couple de covecteur $(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}^*) \in E^* \times E^*$ associe

$$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}})(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}^*) :=< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{a}} >< \underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{b}} > \in \mathbb{R} \tag{A.7}$$

La définition s'étend aisément au produit d'un vecteur et d'un covecteur, ainsi qu'au produit de deux covecteurs. Par exemple, $\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^*$ est le tenseur d'ordre 2, 1–fois contravariant et 1–fois covariant tel que

$$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^*)(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}) :=< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{a}} >< \underline{\boldsymbol{b}}^*, \underline{\boldsymbol{v}} > \in \mathbb{R} \tag{A.8}$$

Ainsi,

$$\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}} \in E \otimes E, \quad \underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^* \in E \otimes E^*, \quad \underline{\boldsymbol{a}}^* \otimes \underline{\boldsymbol{b}} \in E^* \otimes E, \quad \underline{\boldsymbol{a}}^* \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^* \in E^* \otimes E^*$$

Décomposition d'un tenseur

Soit $\underset{\approx}{\boldsymbol{A}} \in E \otimes E^*$, un tenseur d'ordre 2, 1–fois contravariant et 1–fois covariant, c'est–à–dire une application de $E^* \times E$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\underline{\boldsymbol{u}}^*$ et $\underline{\boldsymbol{v}}$ un covecteur et un vecteur de composantes respectives u_i^* et v^i :

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}) &= \underset{\approx}{\boldsymbol{A}}(u_i^* \, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, v^j \, \underline{\boldsymbol{e}}_j) = u_i^* v^j \, \underset{\approx}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \\ &= < \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{e}}_i >< \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{v}} > \, \underset{\approx}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \\ &= \underset{\approx}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \, (\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j})(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}) \end{aligned} \tag{A.9}$$

où l'on a utilisé (A.6) et (A.8). On en déduit la décomposition suivante du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j)\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j} = A^i{}_j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \quad \text{avec} \quad A^i{}_j = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \tag{A.10}$$

Les $A^i{}_j$ sont les composantes du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j})_{i,j=1,n}$. On montre que les $(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j})_{i,j=1,n}$ constituent une base des tenseurs d'ordre 2, 1–fois contravariants 1–fois covariants, et que la décomposition (A.10) est unique. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que la connaissance des composantes $A^i{}_j$ permet de calculer l'image par $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ de n'importe quel couple $(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}})$. Cela fait n^2 composantes, i.e. le nombre de tenseurs de base $\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}$. Il suffit alors de montrer que cet ensemble n'est pas lié, i.e. que les $\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}$ sont linéairement indépendants. C'est acquis dès que $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$ est une base de E.

La notation indicielle $A^i{}_j$ permet de reconnaître au premier coup d'œil qu'il s'agit d'un tenseur d'ordre 2 (2 indices) 1–fois contravariant (premier indice en haut), 1–fois covariant (second indice en bas). L'ordre des indices est important car un tenseur de $E \otimes E^*$ est différent d'un tenseur de $E^* \otimes E$ puisqu'ils n'opèrent pas sur les mêmes arguments. La décomposition doit s'écrire de manière automatique, sachant que la convention d'Einstein de sommation ne porte que sur les paires d'indices répétés de variances distinctes (l'un en haut, l'autre en bas). Les composantes $A^i{}_j$ peuvent se ranger dans une matrice $n \times n$ (premier indice : numéro de ligne, second indice : numéro de colonne), appelée **matrice des composantes** de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ dans la base des $(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j})_{i,j=1,n}$. La matrice associée à $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est notée $[\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}]$.

Lorsque $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est de la forme $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$, ses composantes sont $A^{ij} = a^i b^j$:

$$\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}} &= a^i b^j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \in E \otimes E \\
\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^* &= a^i b^*_j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j} \in E \otimes E^* \\
\underline{\boldsymbol{a}}^* \otimes \underline{\boldsymbol{b}} &= a^*_i b^j\, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \in E^* \otimes E \\
\underline{\boldsymbol{a}}^* \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^* &= a^*_i b^*_j\, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j} \in E^* \otimes E^*
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Les composantes du tenseur $\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$ forment une matrice qui s'obtient par le produit du vecteur colonne $[a^i]$ par le vecteur ligne $[b^i]^T$:

$$[\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}] = [\underline{\boldsymbol{a}}]\,[\underline{\boldsymbol{b}}]^T \tag{A.12}$$

La décomposition (A.10) s'étend aux tenseurs d'ordre quelconque. On a le résultat remarquable suivant : *tout tenseur se décompose en une somme de produits tensoriels du même ordre*. Par contre, un tenseur d'ordre 2 quelconque $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ ne s'exprime pas nécessairement comme un produit tensoriel unique de deux (co-)vecteurs. En effet, de manière intuitive, un produit du type $\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$ ne met en jeu que $2n$ composantes indépendantes, et l'on aura donc du mal en général à représenter ainsi les n^2 composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. Plus précisément, on va voir que le produit $\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$ s'interprète aussi comme une application linéaire de E^* dans E. En dimension $n = 3$, son rang est au plus 1 (2 valeurs propres nulles), alors que le rang des tenseurs de $E \otimes E^*$ peut atteindre 3.

Transposition

Soit $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \in E \otimes E^*$, on appelle transposé du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ l'unique tenseur noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T \in E^* \otimes E$ tel que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T(\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}}^*) = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{u}}), \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}} \in E, \forall \underline{\boldsymbol{v}}^* \in E^* \tag{A.13}$$

On vérifie que le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T$ admet comme matrice de composantes $[A^T_i{}^j]$ la transposée de la matrice $[A^i{}_j]$ des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T(\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}}^*) = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{u}}) = A^i{}_j (\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j})(\underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{u}})$$

$$\begin{aligned} &= A^i{}_j < \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{u}} >< \underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{e}}_i > \\ &= A^j{}_i (\underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j)(\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}}^*) \end{aligned}$$

d'où

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T = A_i^{T\,j}\, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = A^j{}_i\, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad A_i^{T\,j} = A^j{}_i \tag{A.14}$$

La définition de la transposition s'étend selon la même logique à tout type de tenseur d'ordre 2.

Contraction

L'opération de contraction d'un tenseur a pour effet d'abaisser l'ordre du tenseur de 2. Appliqué à un tenseur d'ordre 3 $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \in E^* \otimes E^* \otimes E$, on définit la contraction $\underline{\boldsymbol{\tau}}_c$ de $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ par

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_c(\underline{\boldsymbol{u}}) := \underline{\underline{\tau}}(\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}) = \tau_{ki}{}^i\, u^k \tag{A.15}$$

où, comme d'habitude, on somme sur les indices répétés de variance différente. Autrement dit,

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_c = \tau_{ki}{}^i\, \underline{\boldsymbol{e}}^{*k} \tag{A.16}$$

On ne contracte que les indices de variance différente. Appliqué à un tenseur d'ordre 2, 1–fois contravariant 1–fois covariant, cela donne le scalaire

$$A_c = A^i{}_i =: \operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \tag{A.17}$$

que l'on définit comme la trace de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.

Le **produit contracté**, noté avec un point, d'un vecteur et d'un covecteur donne le scalaire

$$\underline{\boldsymbol{a}}\,.\underline{\boldsymbol{b}}^* :=< \underline{\boldsymbol{b}}^*, \underline{\boldsymbol{a}} >= a^i\, b_i^* = \operatorname{trace}(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^*) \tag{A.18}$$

Une conséquence est que l'on peut aussi contracter un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ de $E \otimes E^*$ avec un vecteur :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}} = A^i{}_j(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}).\underline{\boldsymbol{v}} := A^i{}_j \underline{\boldsymbol{e}}_i\, \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}.\underline{\boldsymbol{v}} = A^i{}_j v^j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{A.19}$$

Cela donne donc un vecteur de E. D'autres combinaisons sont bien sûr possibles.

Le **produit doublement contracté**, noté à l'aide du double point :, de deux tenseurs d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \in E \otimes E$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} \in E^* \otimes E^*$ fournit le scalaire

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = A^{ij} B_{ij} = \operatorname{trace}([\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}]\,[\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}]^T) = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^T) \tag{A.20}$$

La définition précédente du produit doublement contracté n'est pas la seule possible mais c'est celle qui est adoptée dans les notations de ce cours[1].

[1] Conséquence de cette convention dans le cas de tenseurs euclidiens : le produit doublement contracté est défini par

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}^T) = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}) = A_{ij} B_{ij}$$

Il y a deux raisons à ce choix. L'une est que $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ désigne simplement la somme des carrés des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ et permet de construire une norme sur les endomorphismes de E. La seconde raison pratique est que l'on peut alors écrire pour une fonction $f(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ (en anticipant sur la dérivation des champs de tenseurs) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} : \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t}$$

Dans de nombreux ouvrages, c'est la convention $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \operatorname{trace}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}) = A^{ij} B_{ji}$ qui est adoptée. Les deux définitions coïncident bien sûr dans le cas du produit doublement contracté de tenseurs euclidiens symétriques.

Endomorphismes et tenseurs d'ordre 2

Les endomorphismes sur E sont les applications linéaires de E dans E. Il constituent l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$. A chaque application linéaire t de E dans E, on peut associer le tenseur d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} \in E \otimes E^*$ défini par

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}) =< \underline{\boldsymbol{u}}^*, t(\underline{\boldsymbol{v}}) >= \underline{\boldsymbol{u}}^*.t(\underline{\boldsymbol{v}}) \tag{A.21}$$

L'endomorphisme t est classiquement représenté par une matrice de composantes t^j_k dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$. Ces composantes s'identifient à celles du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ d'ordre 2 associé :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) =< \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \sum_{k=1}^{n} t^j_k \underline{\boldsymbol{e}}_k >= t^j_i = T^i{}_j \tag{A.22}$$

Inversement, à tout tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} \in E \otimes E^*$, on peut associer l'endomorphisme sur E tel que

$$t(\underline{\boldsymbol{v}}) := \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{v}} = T^i{}_j v^j \underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{A.23}$$

Il s'agit en fait d'un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $E \otimes E^*$. On établit de la même façon l'isomorphisme entre les endomorphismes sur E^* et $E^* \otimes E$, entre les applications linéaires de E dans E^*, $\mathcal{L}(E, E^*)$, et $E^* \otimes E^*$, et enfin les applications linéaires de E^* dans E, $\mathcal{L}(E^*, E)$, et $E \otimes E^*$.

Changement de base

On cherche maintenant à exprimer les composantes des tenseurs dans une autre base quelconque $(\underline{\boldsymbol{e}}'_i)_{i=1,n}$ de E qui se déduit de $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$:

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = P^k_i \underline{\boldsymbol{e}}_k, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_i = (P^{-1})^k_i \underline{\boldsymbol{e}}'_k \quad \text{avec} \quad P^k_i =< \underline{\boldsymbol{e}}^{*k}, \underline{\boldsymbol{e}}'_i > \tag{A.24}$$

On a coutume de ranger les scalaires P^k_i au sein de la **matrice de passage** $[P]$ en stipulant que l'indice du bas désigne le numéro de colonne, et l'indice du haut désigne le numéro de ligne[2]. On rappelle que cette matrice de passage permet de passer des coordonnées d'un vecteur d'une base à une autre selon

$$\underline{\boldsymbol{x}} = x^i \underline{\boldsymbol{e}}_i = x'^k \underline{\boldsymbol{e}}'_k = x'^k P^i_k \underline{\boldsymbol{e}}_i \Longrightarrow x^i = P^i_k x'^k \tag{A.25}$$

En notation matricielle, la relation donnant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles s'écrit :

$$[x] = [P]\,[x'] \tag{A.26}$$

en appliquant les règles classiques de multiplication matrice–vecteur (Ramis et al., 1985). On peut vérifier que

$$\underline{\boldsymbol{e}}'^{*j} = (P^{-1})^j_k \underline{\boldsymbol{e}}^{*k} \tag{A.27}$$

est la base duale des $(\underline{\boldsymbol{e}}'_i)$. En effet,

$$\underline{\boldsymbol{e}}'^{*j}.\underline{\boldsymbol{e}}'_i = (P^{-1})^j_k P^l_i \underline{\boldsymbol{e}}^{*k}.\underline{\boldsymbol{e}}_l = (P^{-1})^j_k P^k_i = \delta^j_i \tag{A.28}$$

On peut inverser la relation (A.27)

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{*j} = P^j_k \underline{\boldsymbol{e}}'^{*k} \tag{A.29}$$

[2] Remarquer que les indices ne sont pas décalés ici car on n'a pas besoin dans ce paragraphe d'associer à cette famille de scalaire un tenseur, même si c'est tout à fait possible (voir à ce propos la note 3).

Les coordonnées d'un covecteur dans la nouvelle base s'expriment alors en fonction de ces anciennes coordonnées par l'intermédiaire de la transposée de la matrice de passage[3]

$$\underline{\boldsymbol{x}}^{\,*} = x'_k\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *k} = x_i\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\,*i} = x_i P^i_k\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *k} \Longrightarrow x'_k = P^i_k x_i, \quad [x'^*] = [P]^T\,[x^*] \tag{A.30}$$

Soit un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ d'ordre 2, 2–fois contravariant, et soient A^{ij} et A'^{ij} ses composantes respectives dans les bases $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ et $(\underline{\boldsymbol{e}}'_i)_{i=1,n}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = A^{ij}\,\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = A^{ij}(P^{-1})^k_i (P^{-1})^l_j\,\underline{\boldsymbol{e}}'_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_l \tag{A.31}$$

d'où les relations de changement de base

$$A'^{kl} = (P^{-1})^k_i (P^{-1})^l_j A^{ij} \tag{A.32}$$

Des formules analogues existent pour les autres variances des tenseurs d'ordre 2 :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = A_{ij}\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\,*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{\,*j} = A_{ij} P^i_k P^j_l\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *k} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *l}, \quad A'_{kl} = P^i_k P^j_l A_{ij} \tag{A.33}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = A_i{}^j\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\,*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = A_i{}^j P^i_k (P^{-1})^l_j\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *k} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_l, \quad A'^{\,l}_k = P^i_k (P^{-1})^l_j A_i{}^j \tag{A.34}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = A^i{}_j\,\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{\,*j} = A^i{}_j (P^{-1})^k_i P_j{}^j\,\underline{\boldsymbol{e}}'_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *l}, \quad A'^k{}_l = (P^{-1})^k_i P^j_l A^i{}_j \tag{A.35}$$

Ces relations entre composantes d'un tenseur selon différentes bases jouent un rôle fondamental. En effet, en pratique, pour mettre en évidence les lois physiques, on n'a accès qu'à des scalaires dont on peut se demander s'ils représentent les composantes d'un tenseur, i.e. d'une grandeur intrinsèque possédant des propriétés de (multi)linéarité. Pour le vérifier, il suffit de regarder comment se transforment les scalaires en question lorsqu'on change de repère. Si les relations de changement de base sont conformes à (A.32) (ou à l'une des relations (A.32) à (A.35)), alors il existe derrière ces scalaires une grandeur tensorielle dont on définira le sens physique.

Les formules de changement de base s'étendent de manière automatique aux tenseurs d'ordre

[3] On peut associer aux formules de changement de base (A.24) un endomorphisme $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ (les images des vecteurs de la base initiale par cet endomorphisme sont les vecteurs de la nouvelle base). Dès lors, les formules (A.29) indiquent que c'est l'endomorphisme transposé associé qui permet de passer d'une base duale à l'autre selon le schéma

$$(\underline{\boldsymbol{e}}_i) \xrightarrow{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}} (\underline{\boldsymbol{e}}'_i)$$

$$(\underline{\boldsymbol{e}}^{\,i}) \xleftarrow{\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T} (\underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime i})$$

En effet, soient $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ les endomorphismes sur E et E^* respectivement tels que

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underline{\boldsymbol{e}}_i, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *i} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}^{\,*i}$$

Ces bases sont duales l'une de l'autre si

$$< \underline{\boldsymbol{e}}^{\,\prime *i}, \underline{\boldsymbol{e}}'_j > = < \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}^{\,*i}, \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}.\underline{\boldsymbol{e}}_j > = < \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}^{\,*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j > = \delta^i_j$$

L'unicité de la base duale de $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ implique que $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{1}}$, l'identité.

et de variance quelconques [4].

A.1.2 Tenseurs euclidiens

L'espace physique E est euclidien. Il est muni d'un **produit scalaire**, i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive. Il s'agit donc d'un tenseur d'ordre 2 particulier noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} \in E^* \otimes E^*$, que l'on appelle aussi **tenseur métrique** :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{v}}\,) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{v}}\,,\underline{\boldsymbol{u}}\,) \in \mathbb{R}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{u}}\,) \geq 0, \quad (\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{u}}\,) = 0 \Longrightarrow \underline{\boldsymbol{u}} = 0) \tag{A.36}$$

On note g_{ij} les composantes du tenseur métrique dans une base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} = g_{ij}\,\underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \quad g_{ij} = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \tag{A.37}$$

Le caractère bilinéaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$ implique donc que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{v}}\,) = u^i v^j \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_j) = u^i v^j g_{ij} = \underline{\boldsymbol{u}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{u}}\,.\underline{\boldsymbol{v}} \tag{A.38}$$

Dans le dernier terme, le point relie deux vecteurs, c'est la notation pour le produit scalaire. Les points intervenant dans le quatrième terme sont les points de contraction.

Le produit scalaire permet d'identifier E à son dual E^* par l'intermédiaire de l'isomorphisme

$$\gamma : \quad E \longrightarrow E^*$$

$$\gamma(\underline{\boldsymbol{v}}\,) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{v}} = g_{ij} v^j \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \tag{A.39}$$

La matrice de l'application linéaire γ n'est autre que la matrice des $[g_{ij}]$. Comme $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$ est défini positif, la matrice $[g_{ij}]$ est inversible et l'on note $[g^{ij}]$ les composantes de son inverse. Il s'agit des composantes de l'application linéaire γ^{-1}. Cela permet de définir un produit scalaire sur E^* :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^* = g^{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \in E \otimes E \tag{A.40}$$

[4] Les formules de passage (A.32) à (A.35) s'écrivent respectivement de la manière suivante en notation matricielle

$$[A'^{kl}] = [P^{-1}]\,[A^{ij}]\,[P^{-1}]^T$$

$$[A'_{kl}] = [P]^T\,[A_{ij}]\,[P]$$

$$[A'^{\,l}_{k}] = [P]^T\,[A_i{}^j]\,[P^{-1}]^T$$

$$[A'^{k}{}_{l}] = [P^{-1}]\,[A^i{}_j]\,[P]$$

Les règles classiques de multiplication matrice-vecteur s'appliquent alors sans réserve. Les indices introduits entre les crochets sont là simplement pour indiquer la variance du tenseur d'ordre 2 considéré. On insiste toutefois sur la supériorité de la notation indicielle qui évite toute mémorisation des relations précédentes. En effet, la cohérence de l'écriture avec les P^i_k permet de retrouver de manière automatique les relations de passage. En outre, la notation indicielle donne accès aux nouvelles composantes pour des tenseurs d'ordre quelconque (3, 4...) de manière systématique.

La dernière relation matricielle de cette note est exactement la formule de changement de base pour les endomorphismes sur les espaces vectoriels de dimension finie, largement utilisée dans les classes préparatoires. C'est bien légitime car les composantes $A^i{}_j$ sont les composantes d'un tenseur appartenant à $E \otimes E^\star$, espace des endomorphismes de E. En effet, un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ de $E \otimes E^\star$ opère sur un vecteur $\underline{\boldsymbol{x}}$ pour donner le vecteur $\sigma^i{}_j\,(\underline{\boldsymbol{e}}^{*j}.\underline{\boldsymbol{x}}\,)\,\underline{\boldsymbol{e}}_i$. La dernière formule n'est autre que $M' = P^{-1}MP$ tirée de (Ramis et al., 1985). L'usage ne se limite pas à ce type de transformations, les trois autres étant d'emploi aussi fréquent et légitime, ce qui montre la généralisation qu'apporte la notion de tenseurs par rapport à la seule étude des endomorphismes d'espaces vectoriels.

Base réciproque

On appelle base réciproque ou parfois, abusivement, base duale[5] de $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ dans E, l'unique base $(\underline{\boldsymbol{e}}^i)_{i=1,n}$ de E telle que

$$\underline{\boldsymbol{e}}^i.\underline{\boldsymbol{e}}_j = \delta^i_j \tag{A.41}$$

On peut vérifier que cette propriété implique que la base réciproque n'est autre que

$$\underline{\boldsymbol{e}}^i = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^*.\underline{\boldsymbol{e}}^{*i} = g^{ij}\underline{\boldsymbol{e}}_j \tag{A.42}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^*.\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}).\underline{\boldsymbol{e}}_j &= (g^{kl}(\underline{\boldsymbol{e}}_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_l).\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}).\underline{\boldsymbol{e}}_j = (g^{kl} < \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_l > \underline{\boldsymbol{e}}_k).\underline{\boldsymbol{e}}_j \\ &= g^{ki}\underline{\boldsymbol{e}}_k.\underline{\boldsymbol{e}}_j = g^{ki}g_{kj} = g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j\end{aligned}$$

On peut maintenant exprimer les composantes d'un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}} \in E$ dans les deux bases introduites

$$\underline{\boldsymbol{v}} = v^i\underline{\boldsymbol{e}}_i = v_i\,\underline{\boldsymbol{e}}^i \tag{A.43}$$

Les composantes de $\underline{\boldsymbol{v}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}^i)_{i=1,n}$, notés v_i, se calculent de la manière suivante :

$$v_k = \underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{e}}_k = v^i\underline{\boldsymbol{e}}_i.\underline{\boldsymbol{e}}_k = v^i g_{ik} = g_{ki}v^i \tag{A.44}$$

Il faut remarquer que les v_i sont aussi les composantes de $\gamma(\underline{\boldsymbol{v}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{v}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i})_{i=1,n}$ de E^*. Par l'identification de E et de son dual, on oubliera dans la suite $\gamma(\underline{\boldsymbol{v}})$ mais on en gardera un souvenir à travers les composantes v_i de $\underline{\boldsymbol{v}}$ dans la base réciproque. On a vu en effet au travers de la relation (A.42) que la base réciproque n'est autre que l'image inverse de la base duale $(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i})_{i=1,n}$ de E^* par γ :

$$\gamma(\underline{\boldsymbol{e}}^i) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{e}}^i = \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \tag{A.45}$$

Pour caractériser les **vecteurs** de E, on dispose maintenant deux représentations : ses **composantes contravariantes** v^i dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$, et ses **composantes covariantes** v_i dans la base réciproque $(\underline{\boldsymbol{e}}^i)_{i=1,n}$.

La figure A.1 illustre dans le cas bidimensionnel les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}}$. La base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$ est normée mais non orthogonale : $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ font un angle de $\pi/2+\theta$. Les vecteurs de la base réciproque ont alors une norme égale à $1/\cos\theta$ et font un angle de $\pi/2-\theta$. Les projections sur les axes $\underline{\boldsymbol{e}}_1$ et $\underline{\boldsymbol{e}}_2$ parallèlement à ces vecteurs fournissent les composantes v^i, tandis que les projections orthogonales sur ces axes donnent les composantes $v_i = \underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{e}}_i$.

Les bases réciproques jouent en particulier un rôle essentiel en physique des solides (diffraction des rayons X, cristallographie, les vecteurs de la base initiale sont alors dictées par les directions atomiques qui n'ont pas toujours le bon goût de former un trièdre orthonormé).

Représentation des tenseurs euclidiens

Les tenseurs euclidiens sont identifiés aux tenseurs de E, $E \otimes E$, $E \otimes ... \otimes E$. En vertu de l'identification de E et de son dual, on fait l'économie des tenseurs faisant intervenir E^*. On verra que ce n'est pas une restriction car les éléments de E, $E \otimes E$, $E \otimes ... \otimes E$, permettent de construire tous les tenseurs possibles sur E. Les tenseurs euclidiens peuvent être représentés par leurs composantes selon la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ ou sa base réciproque $(\underline{\boldsymbol{e}}^i)_{i=1,n}$.

[5] On réserve l'expression base duale à une base de E^*.

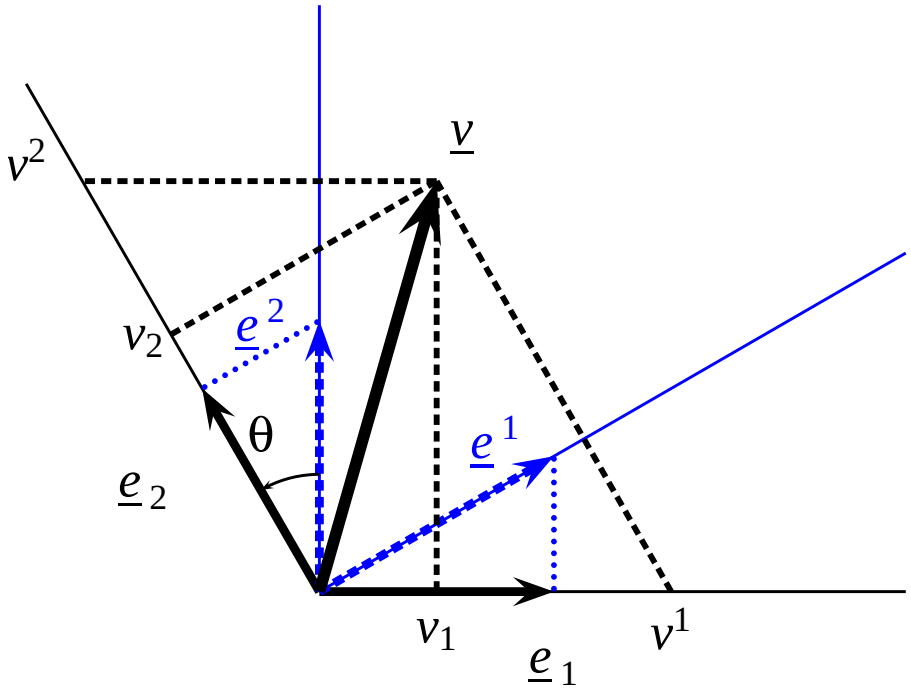


FIG. A.1 – Base initiale normée et sa base réciproque dans le cas bidimensionnel. Les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}}$ apparaissent comme des projections sur les axes initiaux.

Les tenseurs euclidiens d'ordre 1 s'écrivent

$$\underline{\boldsymbol{v}} = v^i \underline{\boldsymbol{e}}_i = v_i \underline{\boldsymbol{e}}^i, \quad v_i = g_{ij} v^j \tag{A.46}$$

Les tenseurs euclidiens d'ordre 2 s'écrivent

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T^{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = T_i{}^j \underline{\boldsymbol{e}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = T^i{}_j \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^j = T_{ij} \underline{\boldsymbol{e}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^j \tag{A.47}$$

avec les formules de changement de base

$$T_i{}^j = g_{ik} T^{kj}, \quad T^i{}_j = g_{kj} T^{ik}, \quad T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl} \tag{A.48}$$

Les $T^{ij}, T_{ij}, T_i{}^j, T^i{}_j$ sont les **composantes du même tenseur** $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ dans des bases différentes. Mais on peut associer à chaque jeu de composantes un nouveau tenseur en réintroduisant l'espace dual E^* :

$$v^i \longrightarrow \underline{\boldsymbol{v}} = v^i \underline{\boldsymbol{e}}_i \in E \tag{A.49}$$
$$v_i \longrightarrow \underline{\boldsymbol{v}}^* = v_i \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \in E^* \tag{A.50}$$
$$T^{ij} \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T^{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \in E \otimes E \tag{A.51}$$
$$T^i{}_j \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^{(1)} = T^i{}_j \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j} \in E \otimes E^* \tag{A.52}$$
$$T_i{}^j \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^{(2)} = T_i{}^j \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \in E^* \otimes E \tag{A.53}$$
$$T_{ij} \longrightarrow \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^* = T_{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{*j} \in E^* \otimes E^* \tag{A.54}$$

Un tenseur euclidien d'ordre 2 possède donc 4 représentants dans $E \otimes E, E \otimes E^*, E^* \otimes E, E^* \otimes E^*$. Dans la pratique, il suffit de travailler avec le premier représentant, quitte à utiliser des jeux de composantes différents selon le problème posé.

Le tenseur métrique possède lui aussi 4 types de composantes. Les composantes g^{ij} et leur inverse g_{ij} ont déjà été rencontrées. Il reste

$$g^i{}_j = g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \quad g_i{}^j = g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i \tag{A.55}$$

Les opérations de produit tensoriel et de contraction s'appliquent aux tenseurs euclidiens et sont couramment utilisées en physique et en mécanique. Ces opérations peuvent être effectuées à l'aide des composantes. Les règles de calcul sont rassemblées dans la table A.1.

On note $\underset{\sim}{\mathbf{1}}$ le tenseur euclidien unité, i.e. l'application linéaire identité sur E :

$$\underset{\sim}{\mathbf{1}} := \delta^i_j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^j = \delta^j_i\, \underline{\boldsymbol{e}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = g_{ij}\, \underline{\boldsymbol{e}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^j = g^{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \tag{A.56}$$

En mécanique des milieux continus, le tenseur des contraintes de traction selon une direction $\underline{\boldsymbol{d}}$ *est souvent représenté par le produit tensoriel*

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma\, \underline{\boldsymbol{d}} \otimes \underline{\boldsymbol{d}}$$

qui est d'ordre 2, 2–fois contravariant. On a traité jusqu'ici le tenseur des contraintes comme un tenseur d'ordre 2, 1–fois covariant, 1–fois contravariant. Pour faire le lien avec la représentation précédente de la traction, il faut remplacer $\underline{\boldsymbol{d}} \otimes \underline{\boldsymbol{d}}$ *par* $\gamma(\underline{\boldsymbol{d}}) \otimes \underline{\boldsymbol{d}}$. *Mais l'identification de E et de son dual rendent cette discussion caduque et l'on traitera donc le tenseur des contraintes comme un tenseur euclidien.*

Cas des bases orthonormées

Les formules de changement de base pour les tenseurs euclidiens sont les mêmes que celles décrites à la page 417 à condition de supprimer simplement les étoiles $*$. Lorsque la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ est orthonormée,

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i . \underline{\boldsymbol{e}}_j = \delta^j_i \tag{A.57}$$

Les bases initiale et réciproque sont alors identiques :

$$\underline{\boldsymbol{e}}^i = \underline{\boldsymbol{e}}_i, \tag{A.58}$$

Les composantes g_{ij} du produit scalaire dans une base orthonormée sont celles de l'identité :

$$g_{ij} = \delta^j_i = g^{ij} \tag{A.59}$$

Une conséquence fondamentale est que les 4 types de composantes d'un tenseur euclidien d'ordre 2 coïncident :

$$T^{ij} = T^i{}_j = T_i{}^j = T_{ij} \tag{A.60}$$

En base orthonormée, on ne se préoccupe plus de la position des indices. On les met toujours en bas et on somme sur tous les indices répétés. Les règles de calcul tensoriel se simplifient considérablement. Elles sont indiquées sur le table A.1. Dans ce tableau, la notation $[xx]$ signifie "la matrice des composantes du tenseur xx". Ainsi, $[\underline{\boldsymbol{a}}]$ est le vecteur colonne des composantes du vecteur $\underline{\boldsymbol{a}}$ et $[\underline{\boldsymbol{a}}]^T$ est donc un vecteur ligne. $[\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}]$ est la matrice 3×3 des composantes du tenseur euclidien $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$.

Tenseurs euclidiens d'ordre 2 symétriques

Un tenseur euclidien $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ d'ordre 2 est dit symétrique si

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \tag{A.61}$$

Il peut donc être vu comme un endomorphisme auto–adjoint ou comme une forme bilinéaire symétrique. L'algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques sur E de dimension 3 est de dimension 6.

Opérations sur les tenseurs dans une base quelconque
(sommation sur les indices répétés de variances distinctes)

$\underline{\boldsymbol{u}}\,.\underline{\boldsymbol{v}} = u^i v_i = u_i v^i$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{v}} = T^{ij} v_j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i = T_{ij} v^j\, \underline{\boldsymbol{e}}^i = T^i{}_j v^j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i = T_i{}^j v_j\, \underline{\boldsymbol{e}}^i$

$\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = v_i T^{ij}\, \underline{\boldsymbol{e}}_j = v^i T_{ij}\, \underline{\boldsymbol{e}}^j = v_i T^i{}_j\, \underline{\boldsymbol{e}}^j = v^i T_i{}^j\, \underline{\boldsymbol{e}}_j$

$\underline{\boldsymbol{u}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{v}} = u^i T_{ij} v^j = u_i T^i{}_j v^j = u^i T_i{}^j v_j = u_i T^{ij} v_j$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = A^{ij} B_{ij} = A^i{}_j B_i{}^j = A_i{}^j B^i{}_j = A_{ij} B^{ij}$

Opérations sur les tenseurs dans une base orthonormée
(sommation sur les indices répétés)

$\underline{\boldsymbol{u}}\,.\underline{\boldsymbol{v}} = u_i v_i = [\underline{\boldsymbol{u}}]^T\,[\underline{\boldsymbol{v}}]$

$\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}} = a_i b_j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad [\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}] = [\underline{\boldsymbol{a}}]\,[\underline{\boldsymbol{b}}]^T$

$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}})\,.\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{b}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}\;\underline{\boldsymbol{a}}, \quad \underline{\boldsymbol{u}}\,.(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}) = \underline{\boldsymbol{u}}\,.\underline{\boldsymbol{a}}\;\underline{\boldsymbol{b}}$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{v}} = T_{ij} v_j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{v}}] = [\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}]\,[\underline{\boldsymbol{v}}]$

$\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = v_i T_{ij}\, \underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad [\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}] = [\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}]^T\,[\underline{\boldsymbol{v}}]$

$\underline{\boldsymbol{u}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{v}} = u_i T_{ij} v_j = [\underline{\boldsymbol{u}}]^T\,[\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}]\,[\underline{\boldsymbol{v}}]$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = A_{ik} B_{kj}\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}] = [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}]\,[\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}]$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = A_{ij} B_{ij} = \text{trace}\,([\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}]\,[\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}]^T)$

TAB. A.1 – Récapitulatif : opérations sur les tenseurs euclidiens en base quelconque ou orthonormée. Dans le cas orthonormé, on indique aussi les opérations matricielles correspondantes.

A.1.3 Algèbre extérieure

Tenseurs d'ordre 2 antisymétriques

Un tenseur euclidien $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ d'ordre 2 est dit antisymétrique si

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}^T = -\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}, \quad W_{ji} = -W_{ij} \tag{A.62}$$

Pour simplifier, on se place dans une base orthonormée pour les expressions en composantes. Pour tout tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ d'ordre 2, il existe une décomposition unique en une partie symétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^s$ et une partie antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^a$ telles que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^s + \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^a \tag{A.63}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^s := \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\right) \tag{A.64}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^a := \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T\right) \tag{A.65}$$

On vérifiera que par construction

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^{sT} = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^s, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^{aT} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^a \tag{A.66}$$

D'autre part, on peut dire que $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^s$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^a$ sont "orthogonaux" dans le sens suivant :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^s : \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^a = 0 \tag{A.67}$$

On déduit de la décomposition (A.63) que la dimension de l'espace des tenseurs d'ordre 2 antisymétriques est 3.

Un tenseur d'ordre 2 antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ peut être représenté de manière équivalente par le (pseudo)–vecteur $\underline{\overset{\times}{\boldsymbol{W}}}$ défini par

$$\underline{\overset{\times}{\boldsymbol{W}}} := -\frac{1}{2}\,\underset{\equiv}{\boldsymbol{\epsilon}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{W}} \tag{A.68}$$

On a introduit le tenseur d'ordre 3 des **permutations** $\underset{\equiv}{\boldsymbol{\epsilon}}$ dont la composante ϵ_{ijk} vaut 0 dès que deux au moins des indices sont égaux. Pour des indices (i,j,k) distincts, ϵ_{ijk} est le signe de la permutation (i,j,k) du triplet $(1,2,3)$. Il vaut 1 lorsque (i,j,k) est une permutation paire de $(1,2,3)$, et -1 pour une permutation impaire :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad (i,j,k)\,\text{est une permutation paire de}\ (1,2,3) \\ -1 \quad \text{si} \quad (i,j,k)\,\text{est une permutation impaire de}\ (1,2,3) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{A.69}$$

On a les identités remarquables suivantes

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{A.70}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km} \tag{A.71}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \tag{A.72}$$

On peut aussi exprimer le tenseur antisymétrique en fonction du vecteur axial $\underline{\overset{\times}{\boldsymbol{W}}}$ associé :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{W}} := -\underset{\approx}{\boldsymbol{\epsilon}}.\underline{\overset{\times}{\boldsymbol{W}}} \tag{A.73}$$

ce qui s'écrit sous forme matricelle

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}] = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & -W_{31} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ W_{31} & -W_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\overset{\times}{W}_3 & \overset{\times}{W}_2 \\ \overset{\times}{W}_3 & 0 & -\overset{\times}{W}_1 \\ -\overset{\times}{W}_2 & \overset{\times}{W}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.74}$$

Produit vectoriel

Soit $\underline{\boldsymbol{u}}$ et $\underline{\boldsymbol{v}}$ deux vecteurs de E. On appelle produit vectoriel de $\underline{\boldsymbol{u}}$ et $\underline{\boldsymbol{v}}$, noté $\underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{v}}$ le (pseudo)–vecteur défini par :

$$\underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{v}} := \underline{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}} : (\underline{\boldsymbol{u}} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}) = \epsilon_{ijk}\, u_j v_k\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{A.75}$$

Le produit vectoriel est donc relié au vecteur associé à la partie antisymétrique de $\underline{\boldsymbol{u}} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}$ par

$$(\underline{\boldsymbol{u}} \otimes \underline{\boldsymbol{v}})^a = -\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{u}} \wedge \underline{\boldsymbol{v}} \tag{A.76}$$

Les définitions (A.74) ont en fait été choisies pour que l'on puisse écrire la relation suivante pour tout vecteur $\underline{\boldsymbol{x}} \in E$ et tout tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}$ antisymétrique

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}.\underline{\boldsymbol{x}} = \overset{\times}{\underset{\sim}{\boldsymbol{W}}} \wedge \underline{\boldsymbol{x}}$$

Produit mixte et déterminant

Le produit mixte de trois vecteurs $\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}}$ est défini par

$$[\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{y}}, \underline{\boldsymbol{z}}] := \underline{\boldsymbol{x}}.(\underline{\boldsymbol{y}} \wedge \underline{\boldsymbol{z}}) = \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k \tag{A.77}$$

Il permet d'exprimer la trace et le déterminant du tenseur d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$

$$\text{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} := \frac{[\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3]}{[\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3]} \tag{A.78}$$

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} := \frac{[\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3]}{[\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3]} \tag{A.79}$$

En composantes, cela donne

$$\text{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \quad \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

A.1.4 Transformations orthogonales et rotations

Un tenseur d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ est dite orthogonal si

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} \tag{A.80}$$

Si en outre $\det \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = 1$, il s'agit d'une rotation. Il existe une multitude de représentations possibles pour les rotations. On introduit successivement les angles d'Euler et le vecteur rotation.

Rotations et produit vectoriel

Soient $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ une rotation et $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ deux vecteurs. Alors,

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.(\underline{\boldsymbol{a}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}}) = (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}) \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{b}}) \tag{A.81}$$

En effet, $\forall \underline{\boldsymbol{v}}$,

$$[\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{v}}] = ((\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}) \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{b}})).\underline{\boldsymbol{v}} \tag{A.82}$$

$$= (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}})[\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.\underline{\boldsymbol{v}}] = (\underline{\boldsymbol{a}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}}).(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T.\underline{\boldsymbol{v}}) = (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.(\underline{\boldsymbol{a}} \wedge \underline{\boldsymbol{b}})).\underline{\boldsymbol{v}} \tag{A.83}$$

En rapprochant (A.82) et (A.83) et en vertu de la linéarité des opérateurs employés, on obtient le résultat annoncé.

Angles d'Euler–Bunge

Soit $\mathcal{B} = (\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{\{i=1,3\}}$ une base orthonormée directe (BOND) de l'espace euclidien orienté de dimension 3. On désigne dans la suite de manière imagée par le mot **cristal** un trièdre direct de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux. L'orientation d'un cristal par rapport à un premier repérage est donnée par les trois angles

$$\phi_1, \Phi, \phi_2$$

d'après (Bunge, 1982).

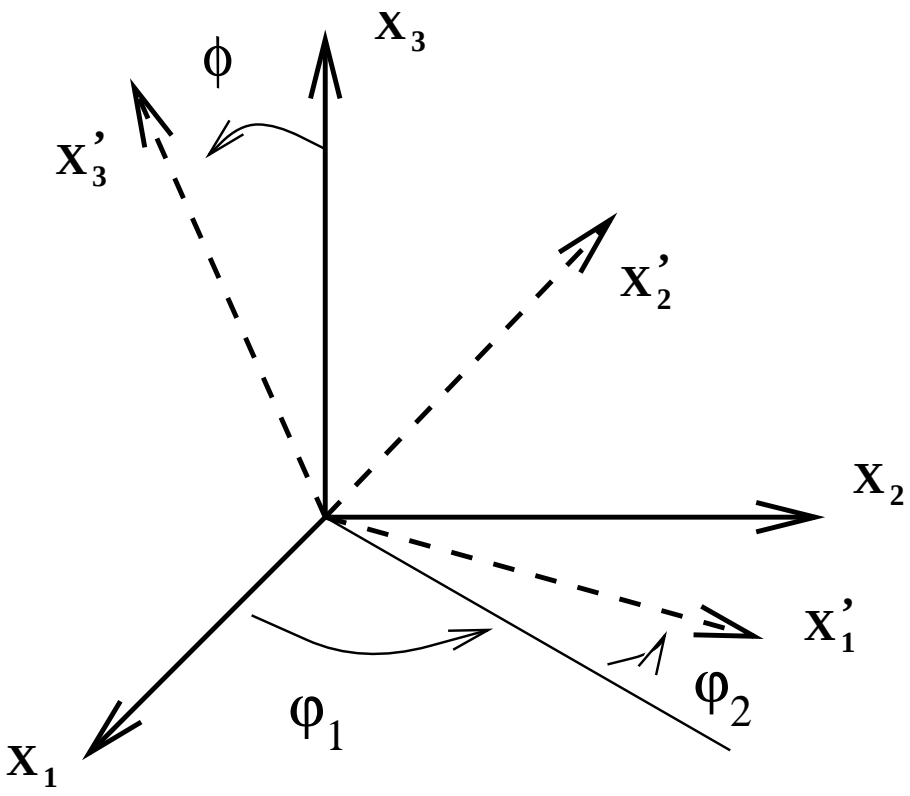


FIG. A.2 – Définitions des angles d'Euler.

Repérage initial : directions $X_1X_2X_3$ base $\mathcal{B} = (\underline{\boldsymbol{e}}_i)$
Cristal : directions $X'_1X'_2X'_3$ base $\mathcal{B}' = (\underline{\boldsymbol{e}}'_i)$
On considère la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ telle que

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underline{\boldsymbol{e}}_i$$

et la matrice de passage P telle que

$$[X']_{\mathcal{B}'} = [P][X]_{\mathcal{B}}$$

On a donc

$$[P] = [R^T]_{\mathcal{B}}$$

Pour passer des axes du premier repère à ceux du cristal, on peut considérer les opérations successives suivantes :

- rotation d'angle ϕ_1 autour de l'axe X_3 (**précession**)

$$X_1X_2X_3 \longrightarrow \hat{X}_1\hat{X}_2X_3$$

$$\mathcal{B} \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}$$

$$[P_1], \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_1$$

- rotation d'angle Φ autour de l'axe $\hat{X}_1$ (**nutation**)

$$\hat{X}_1\hat{X}_2X_3 \longrightarrow \hat{X}_1\check{X}_2X_3'$$

$$\hat{\mathcal{B}} \longrightarrow \check{\mathcal{B}}$$

$$P_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2$$

- rotation d'angle ϕ_2 autour de l'axe X_3' (**rotation propre**)

$$\hat{X}_1\check{X}_2X_3' \longrightarrow X_1'X_2'X_3'$$

$$\check{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{B}'$$

$$P_3, \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_3$$

On a :

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_3.\underline{\check{\boldsymbol{e}}}_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_3.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2.\underline{\hat{\boldsymbol{e}}}_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_3.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_1.\underline{\boldsymbol{e}}_i$$

$$[X'] = [P_3]\,[\check{X}] = [P_3]\,[P_2]\,[\hat{X}] = [P_3]\,[P_2]\,[P_1]\,[X]$$

d'où

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_3.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_1, \quad [P] = [P_3]\,[P_2]\,[P_1]$$

Remarquer que $P = \left[R_1^T\right]_{\mathcal{B}}\left[R_2^T\right]_{\mathcal{B}}\left[R_3^T\right]_{\mathcal{B}}$

$$[R_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & 0 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_1^T]$$

$$[R_2]_{\hat{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & -\sin\Phi \\ 0 & \sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} = [P_2^T]$$

$$[R_3]_{\check{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 & 0 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_3^T]$$

d'où

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2\cos\Phi & \sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2\cos\Phi & \sin\phi_2\sin\Phi \\ -\cos\phi_1\sin\phi_2 - \sin\phi_1\cos\phi_2\cos\Phi & -\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2\cos\Phi & \cos\phi_2\sin\Phi \\ \sin\phi_1\sin\Phi & -\cos\phi_1\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix}$$

Pour obtenir ce résultat en passant par les tenseurs de rotation, il faut exprimer les composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ dans $\mathcal{B}$ en faisant attention d'utiliser les composantes des $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_i$ dans la même base :

$$[R_2]_{\mathcal{B}} = [R_1]_{\mathcal{B}}[R_2]_{\hat{\mathcal{B}}}[R_1]^T{}_{\mathcal{B}}$$

$$[R_3]_{\mathcal{B}} = ([R_2]_{\mathcal{B}}[R_1]_{\mathcal{B}})[R_3]_{\check{\mathcal{B}}}([R_1]_{\mathcal{B}}[R_2]^T{}_{\mathcal{B}})$$

On trouve alors que

$$[R_3]_{\mathcal{B}}[R_2]_{\mathcal{B}}[R_1]_{\mathcal{B}} = [R_1]_{\mathcal{B}}[R_2]_{\hat{\mathcal{B}}}[R_3]_{\check{\mathcal{B}}} = [P^T]$$

i.e.,

$$[R]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2\cos\Phi & -\cos\phi_1\sin\phi_2 - \sin\phi_1\cos\phi_2\cos\Phi & \sin\phi_1\sin\Phi \\ \sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2\cos\Phi & -\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2\cos\Phi & -\cos\phi_1\sin\Phi \\ \sin\phi_2\sin\Phi & \cos\phi_2\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \tag{A.84}$$

Vecteur rotation

La rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ peut être représentée par le vecteur rotation

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}} = \theta\underline{\boldsymbol{n}}$$

où $\underline{\boldsymbol{n}}$ est l'axe de la rotation (unitaire) et θ l'angle de la rotation (en radian) et on a

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \cos\theta\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\underline{\boldsymbol{\Phi}}\otimes\underline{\boldsymbol{\Phi}} - \frac{\sin\theta}{\theta}\,\underset{\sim}{\underset{\equiv}{\boldsymbol{\epsilon}}}.\underline{\boldsymbol{\Phi}}$$

On peut montrer que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \exp(-\underset{\sim}{\underset{\equiv}{\boldsymbol{\epsilon}}}.\underline{\boldsymbol{\Phi}})$$

(représentation de Lie), ce qui donne

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\underset{\equiv}{\boldsymbol{\epsilon}}}.\underline{\boldsymbol{\Phi}}$$

lorsque l'angle de rotation est faible. On remarquera que l'axe de la rotation est donné par la partie antisymétrique de $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$:

$$\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{R}}} = -\frac{1}{2}\,\underset{\sim}{\underset{\equiv}{\boldsymbol{\epsilon}}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{klm}\,R_{lm}\,\underline{\boldsymbol{e}}_k = \sin\theta\underline{\boldsymbol{n}}$$

où l'on a défini le vecteur $\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{R}}}$ associé à la partie antisymétrique $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^a$ du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$. On trouvera également l'axe en cherchant le vecteur propre pour la valeur 1. L'angle quant à lui s'obtient par la trace

$$\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = 2\cos\theta + 1$$

Vitesse de rotation

Pour exprimer la vitesse de rotation définie par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{W}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T$$

on préfèrera utiliser le vecteur rotation plutôt que les angles d'Euler qui peuvent conduire à certaines indéterminations. On a :

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\Phi}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^{-1}.\overset{\times}{\underline{\boldsymbol{W}}}$$

où

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = \frac{\sin\theta}{\theta}\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} + \frac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\underline{\boldsymbol{\Phi}}\otimes\underline{\boldsymbol{\Phi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}\right)^2\,\underset{\sim}{\underset{\equiv}{\boldsymbol{\epsilon}}}.\underline{\boldsymbol{\Phi}}$$

La matrice associée est

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\sin\theta}{\theta} + \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_1^2 & \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_1\Phi_2 - \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\Phi_3 & \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_1\Phi_3 + \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\Phi_2 \\ \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_1\Phi_2 + \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\Phi_3 & \dfrac{\sin\theta}{\theta} + \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_2^2 & \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_2\Phi_3 - \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\Phi_1 \\ \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_1\Phi_3 - \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\Phi_2 & \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_2\Phi_3 + \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\Phi_1 & \dfrac{\sin\theta}{\theta} + \dfrac{1-\dfrac{\sin\theta}{\theta}}{\theta^2}\,\Phi_3^2 \end{bmatrix}$$

A.2 Analyse tensorielle

A.2.1 Champs de tenseurs

Soit Ω un ensemble de points de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, d'espace vectoriel associé E. On appelle champ de tenseur sur Ω toute application $T(M)$ de Ω sur l'espace des tenseurs. Il s'agit donc d'une application qui à tout point $M \in \Omega$ associe le tenseur $T(M)$ de $E \otimes ... \otimes E$, l'ordre du tenseur étant le même d'un point à un autre. En pratique, on demande à l'ensemble Ω de ne pas être tout à fait quelconque. Il doit s'agir au moins d'une variété différentiable, c'est–à–dire possédant en tout point (ou au moins "presque partout") un paramétrage local suffisamment régulier (différentiable presque partout). Les champs de tenseurs sont omniprésents en mécanique :

- **champ de scalaires.** La masse volumique $\rho(M)$ notée aussi $\rho(\underline{\boldsymbol{x}})$ où $\underline{\boldsymbol{x}}$ désigne le vecteur position du point $M \in \Omega$, est un champ de scalaires sur un corps matériel identifié à sa position Ω.
- **champ de vecteurs.** Les champs de vecteurs–position $\underline{\boldsymbol{x}}\,(M)$, de déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}\,(M)$, de vitesses $\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}})$ sont des exemples de champs de vecteurs définis sur le corps matériel Ω.
- **champ de tenseurs d'ordre 2.** Le champ des vitesses de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ et le champ des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ sont des exemples de champs de tenseurs d'ordre 2 définis sur le corps matériel Ω à tout instant.
- **champ de tenseurs d'ordre 4.** Les propriétés élastiques d'un milieu continu définissent un champ de tenseurs d'ordre 4 $\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}(M)$ sur le corps matériel Ω. Si le champ est **uniforme**, c'est–à–dire si $\underset{\approx}{\boldsymbol{\Lambda}}(M)$ prend la même valeur en tout point de Ω, le milieu continu est dit **homogène**. Il est dit **hétérogène** sinon.

L'analyse tensorielle consiste à étudier les variations d'un champ de tenseurs d'un point à un autre.

En chaque point on travaillera sur les composantes du tenseur défini en ce point. Il faut donc choisir une base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,3}$ de E. En toute généralité, il s'agira d'une **base mobile**, $(\underline{\boldsymbol{e}}_i(\underline{\boldsymbol{x}}\,))_{i=1,3}$, i.e. dépendant de la position $\underline{\boldsymbol{x}}\,$, les $\underline{\boldsymbol{e}}_i(\underline{\boldsymbol{x}}\,)$ constituant eux–mêmes des champs de vecteurs. Pour un système de coordonnées quelconques $M(q^i)$, les vecteurs de la base naturelle sont définis par

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial M}{\partial q^i} \tag{A.85}$$

Si les composantes sont cartésiennes, les coordonnées q^i sont notées x^i et les champs $\underline{\boldsymbol{e}}_i(M)$ sont uniformes. On aura besoin en général de coordonnées cylindriques, sphériques qui sont associées à des bases mobiles orthogonales.

A.2.2 Opérateurs différentiels

La dérivée d'un champ de tenseurs $T(\underline{\boldsymbol{x}})$ suivant un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}} \in E$ est définie comme la limite suivante :

$$D_{\underline{\boldsymbol{v}}} T = \lim_{\lambda \to 0} \frac{T(\underline{\boldsymbol{x}} + \lambda \underline{\boldsymbol{v}}) - T(\underline{\boldsymbol{x}})}{\lambda} \tag{A.86}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Lorsqu'elle existe, cette dérivée donne un champ de tenseurs du même type que $T(\underline{\boldsymbol{x}})$. Dans une base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i(\underline{\boldsymbol{x}}))_{i=1,3}$, on note

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = D_{\underline{\boldsymbol{e}}_i} T \tag{A.87}$$

La dérivée selon un vecteur permet de construire l'opérateur

Gradient d'un champ de tenseurs

Le gradient d'un champ de tenseurs $T(M)$ est l'opérateur

$$\boldsymbol{\nabla} T : \quad \underline{\boldsymbol{v}} \mapsto D_{\underline{\boldsymbol{v}}} T \tag{A.88}$$

Il est noté $\boldsymbol{\nabla} T$. On montre que c'est un opérateur linéaire par rapport à $\underline{\boldsymbol{v}}$ (cf. cours d'analyse des classes préparatoires, chapitre "application linéaire tangente"). C'est donc un champ de tenseur d'ordre $p+q+1$ si $p+q$ est l'ordre du champ de tenseur $T(M)$. Son action sur un vecteur s'écrit aussi

$$\boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{v}} = D_{\underline{\boldsymbol{v}}} T \tag{A.89}$$

En particulier, en appliquant le gradient de T aux vecteurs de bases $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$, on obtient

$$\boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{e}}_k = D_{\underline{\boldsymbol{e}}_k} T = \frac{\partial T}{\partial q^k} \tag{A.90}$$

$$\boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{v}} = v^k \frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{\partial T}{\partial q^k} < \underline{\boldsymbol{e}}^{*k}, \underline{\boldsymbol{v}} > \tag{A.91}$$

On en déduit la forme très générale suivante du champ de gradient d'un champ de tenseur :

$$\boldsymbol{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial q^k} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*k} \tag{A.92}$$

formule qui a l'avantage d'être valable pour tout système de coordonnées. Remarquer que **l'opérateur gradient augmente de 1 l'ordre du champ de tenseur initial**. Avec les conventions faites pour les tenseurs euclidiens, on peut faire l'économie de la base duale et travailler uniquement avec la base réciproque. On remplace alors simplement $\underline{\boldsymbol{e}}^{*k}$ par $\underline{\boldsymbol{e}}^{k}$ pour la définition du gradient d'un champ de tenseurs euclidiens.

On peut faire le lien avec la notion de différentielle introduite en classes préparatoires en introduisant la différentielle d'un champ de tenseurs par

$$dT = \boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{dM}} \tag{A.93}$$

Projetée sur une base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,3}$, cela signifie[6]

$$\underline{\boldsymbol{OM}} = x^i \underline{\boldsymbol{e}}_i, \quad \underline{\boldsymbol{dM}} = dx^i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{A.94}$$

[6] En particulier, on peut vérifier que

$$\boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{OM}} .\underline{\boldsymbol{dM}} = (\frac{\partial M}{\partial q^i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}).\underline{\boldsymbol{dM}} = \underline{\boldsymbol{e}}_i < \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{dM}} >= dx^i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i = \underline{\boldsymbol{dM}}$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x^i} < \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{dM}} >= \frac{\partial T}{\partial x^i}\, dx^i \tag{A.95}$$

et on reconnaît les formules usuelles du calcul différentiel.

Divergence

L'opérateur différentiel divergence abaisse de 1 l'ordre du champ de tenseur. Il est défini comme une contraction du tenseur gradient :

$$\operatorname{div} T := (\boldsymbol{\nabla} T)_c = \frac{\partial T}{\partial q^i}.\underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \tag{A.96}$$

Il suffit d'enlever l'étoile pour obtenir la définition de la divergence d'un champ de tenseurs euclidiens. Pour appliquer l'opérateur divergence à un tenseur T, il faut que l'ordre de $\boldsymbol{\nabla} T$ soit au moins 2 afin qu'on puisse le contracter. Il faut donc que T soit au moins d'ordre 1 (vecteur, covecteur).

Rotationnel

L'opérateur différentiel rotationnel conserve l'ordre du champ de tenseur. On en donne ici la définition dans le cas des tenseurs euclidiens à partir du produit vectoriel et du tenseur gradient :

$$\operatorname{rot} T := \frac{\partial T}{\partial q^i} \wedge \underline{\boldsymbol{e}}^{\,i} \tag{A.97}$$

Pour appliquer l'opérateur rotationnel (*curl* en anglais) à un tenseur T, il faut que T soit au moins d'ordre 1 pour pouvoir effectuer le produit vectoriel.

Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes orthonormées

Si le système de coordonnées est cartésien orthonormé, on vérifiera que les opérateurs différentiels prennent les formes simples suivantes :

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\underline{\boldsymbol{e}}_i = f_{,i}\underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{A.98}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial x_j} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = u_{i,j}\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \tag{A.99}$$

$$\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial x_j}.\underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\underline{\boldsymbol{e}}_i.\underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} \tag{A.100}$$

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial x_j}.\underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j}(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_k).\underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\,\underline{\boldsymbol{e}}_i = \sigma_{ij,j}\,\underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{A.101}$$

$$\operatorname{rot}\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial x_j} \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\underline{\boldsymbol{e}}_i \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_j = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\underline{\boldsymbol{e}}_k = \epsilon_{ijk}u_{i,j}\underline{\boldsymbol{e}}_k \tag{A.102}$$

$$\operatorname{rot}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}{\partial x_k} \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_k = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes (\underline{\boldsymbol{e}}_j \wedge \underline{\boldsymbol{e}}_k) = \epsilon_{mjk}A_{ij,k}\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_m \tag{A.103}$$

où l'on a introduit la notation fréquente en physique,

$$_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On définit aussi certaines combinaisons des opérateurs précédents. L'opérateur **laplacien** est introduit de manière intrinsèque comme la divergence du gradient. Dans le cas cartésien orthonormé, le laplacien d'une fonction scalaire s'écrit donc

$$\Delta f = \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla} f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{A.104}$$

Le laplacien n'est autre que la trace du second gradient de f :

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \tag{A.105}$$

Exemple : cas des coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont (r, θ, z) :

$$\underline{\boldsymbol{OM}} = r\underline{\boldsymbol{e}}_r + z\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.106}$$

$$\underline{\boldsymbol{dM}} = dr\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + rd\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + dz\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.107}$$

Les vecteurs de base sont :

$$\underline{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial r}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial z} \tag{A.108}$$

On calcule le gradient d'une fonction scalaire $f(r, \theta, z)$ en évaluant sa différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{A.109}$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial r}\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\ \frac{\partial f}{\partial z}\right] \begin{bmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{bmatrix} \tag{A.110}$$

$$= [\boldsymbol{\nabla} f]\,[\underline{\boldsymbol{dM}}] \tag{A.111}$$

ce qui permet d'identifier

$$[\boldsymbol{\nabla} f] = \left[\frac{\partial f}{\partial r}\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\ \frac{\partial f}{\partial z}\right] \tag{A.112}$$

On voit qu'il s'agit d'un covecteur mais on pourra l'identifier à un vecteur puisqu'on est dans le cadre euclidien (prendre le transposé de la matrice–ligne précédente).

La même démarche de construction du gradient est appliquée à un champ de vecteurs :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_r\underline{\boldsymbol{e}}_r + u_\theta\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + u_z\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.113}$$

$$\underline{\boldsymbol{du}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial r}dr + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial z}dz \tag{A.114}$$

$$= \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}dr + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}d\theta - u_\theta d\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z}dz\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}dr + u_r d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}dz\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}dr + \frac{\partial u_z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z}dz\right)\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.115}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(u_r + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{bmatrix} \tag{A.116}$$

ce qui permet d'identifier $[\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}}]$.

Une manière systématique d'exprimer les opérateurs différentiels dans le cas de systèmes de coordonnées $(q^i)_{i=1,3}$ non cartésiens consiste à revenir aux expressions intrinsèques (A.92) et (A.96) du gradient et de la divergence. Dans le cas des coordonnées cylindriques (r,θ,z), les vecteurs des bases canoniques directe et réciproque sont :

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1 := \underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_2 := r\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_3 := \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.117}$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}^1 := \underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^2 := \frac{1}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^3 := \underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.118}$$

La définition intrinsèque du gradient d'un champ de vecteur $\underline{\boldsymbol{u}}(r,\theta,z)$ est :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}} &= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial r}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}^1 + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial \theta}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}^2 + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial z}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}^3 \\ &= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial r}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial \theta}\otimes\frac{\underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{r} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial z}\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{A.119}$$

En développant $\underline{\boldsymbol{u}}$ selon (A.113) et en effectuant les dérivations suivant la règle de Leibniz, on obtient l'expression du gradient en cylindriques :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial u_z}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{u_r}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta - \frac{u_\theta}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \frac{\partial u_r}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z + \frac{\partial u_z}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{A.120}$$

Les composantes obtenues sont bien sûr identiques à la matrice (A.116).

La même méthodologie permet de déterminer sans ambiguïté la divergence d'un champ de tenseurs du second ordre $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ représenté en coordonnées cyclindriques :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= (\boldsymbol{\nabla}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_c = \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial q^i}.\underline{\boldsymbol{e}}^i \\ &= \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r}.\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \theta}.\frac{\underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{r} + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z}.\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{A.121}$$

En introduisant les composantes du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma_{rr}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r + \sigma_{\theta\theta}\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \sigma_{zz}\,\underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z + \sigma_{r\theta}\,(\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r) \\ &+ \sigma_{\theta z}\,(\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z + \underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta) + \sigma_{zr}\,(\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_z + \underline{\boldsymbol{e}}_z\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r)\end{aligned} \tag{A.122}$$

et le fait que

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial\theta} = \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \frac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial\theta} = -\underline{\boldsymbol{e}}_r$$

on calcule successivement[7]

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r}.\underline{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.123}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \theta}.\underline{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + (\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}\underline{\boldsymbol{e}}_r + 2\sigma_{r\theta}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}\underline{\boldsymbol{e}}_z + \sigma_{rz}\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{A.124}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z}.\underline{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_r \tag{A.125}$$

[7] Pour ne masquer aucune étape du calcul, on indique aussi que le fait que

$$(\underline{\boldsymbol{e}}_r\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_r).\underline{\boldsymbol{e}}_r = \underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad (\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\otimes\underline{\boldsymbol{e}}_\theta).\underline{\boldsymbol{e}}_r = 0, \quad \text{etc.}$$

est utilisé abondamment dans les calculs (A.123) à (A.125).

L'expression de la divergence de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ en coordonnées cylindriques en découle

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r\\ &= \left(\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\sigma_{r\theta}}{r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta\\ &= \left(\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{A.126}$$

Elle est d'un grand usage dans la résolutions de nombreux problèmes aux limites.

A.2.3 Intégration des champs de tenseurs

Théorème de la divergence

Théorème 22 (Théorème de la divergence) *Soit Ω une région bornée régulière*[8] *de l'espace $\mathcal{E}$ de frontière $\partial\Omega$, et soient $f, \underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ des champs de tenseurs respectivement d'ordre 0, 1 et 2, continus et possédant des dérivées premières sur Ω,*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla} f\, dv = \int_{\partial\Omega} f\underline{\boldsymbol{n}}\, ds, \quad \int_\Omega f_{,i}\, dv = \int_{\partial\Omega} f n_i\, ds \tag{A.127}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}}\, dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds, \quad \int_\Omega v_{i,i}\, dv = \int_{\partial\Omega} v_i n_i\, ds \tag{A.128}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\, dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds, \quad \int_\Omega T_{ij,j}\, dv = \int_{\partial\Omega} T_{ij} n_j\, ds \tag{A.129}$$

où $\underline{\boldsymbol{n}}$ est le champ de vecteur normal unitaire sortant sur $\partial\Omega$.

On a donné les expressions intrinsèques de ces théorèmes ainsi que leur traduction en composantes cartésiennes orthonormées. Ces relations sont souvent appelées formules de Gauss. On parlera dans ce cours simplement de théorèmes de la divergence.

Très important dans le calcul pratique en mécanique, ce théorème peut s'énoncer aussi de la manière symbolique et synthétique suivante :

$$\int_\Omega \bullet_{,i}\, dV = \int_{\partial\Omega} \bullet n_i\, ds \tag{A.130}$$

où le point $\bullet$ peut être remplacé par n'importe quelle composante de tenseur. Dès qu'une telle configuration est rencontrée dans un calcul, on pourra essayer d'appliquer cette règle qui pourra conduire au résultat souhaité ou amener des simplifications.

Les théorèmes de la divergence permettent un va–et–vient entre volume et surface d'une région de l'espace. En pratique, cela montre que des actions locales surfaciques (efforts surfaciques par exemple) sont fondamentalement liés à des actions volumiques (efforts internes). Ce point joue un rôle essentiel dans la représentation des efforts en mécanique (cf. chapitre 3).

Un va–et–vient similaire est possible entre une surface S et la ligne L sur laquelle elle s'appuie via les formules de Stokes, pour un champ de vecteurs $\underline{\boldsymbol{u}}$ et de tenseurs d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$:

$$\int_L \underline{\boldsymbol{u}}.\underline{\boldsymbol{dl}} = -\int_S (\operatorname{rot}\underline{\boldsymbol{u}}).\underline{\boldsymbol{n}}\, ds, \quad \int_L u_i\, dl_i = -\int_S \epsilon_{kij} u_{i,j} n_k ds \tag{A.131}$$

[8] On entend par là un domaine fermé dont le bord est lisse par morceaux et sur lequel peut être défini le vecteur unitaire de la normal extérieure $\underline{\boldsymbol{n}}$ en tout point, sauf éventuellement sur des arêtes ou des sommets. Une surface est lisse si le plan tangent y varie continûment.

$$\int_L \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{dl}} = -\int_S (\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underline{\boldsymbol{n}}\,ds, \quad \int_L A_{ij}\,dl_j = -\int_S \epsilon_{mjk} A_{ij,k} n_m ds \tag{A.132}$$

La formule (A.132) est une conséquence de (A.131). Pour le voir il faut appliquer (A.131) au vecteur de composantes $A^{(i)}_j = A_{ij}$ à i fixé.

A.3 Quelques résultats importants d'algèbre et analyse tensorielles en mécanique des milieux continus

A.3.1 Théorème de Cayley–Hamilton et invariants d'un tenseur

On rappelle le

Théorème 23 (Cayley–Hamilton) *Pour tout endomorphisme $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ sur E de dimension 3, le polynôme de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ suivant est nul*

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^3 - I_1\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2 + I_2\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - I_3\,\underset{\sim}{\mathbf{1}} = 0 \tag{A.133}$$

Ses coefficients I_i, appelés **invariants principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$**, *sont les coefficients du polynôme caractéristique de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$:*

$$\det(\lambda\underset{\sim}{\mathbf{1}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{A.134}$$

Preuve. Le théorème de Cayley–Hamilton est un résultat majeur de l'algèbre linéaire enseignée dans les classes préparatoires et n'est donc pas démontré ici (Ramis et al., 1985). Les coefficients du polynôme caractéristique peuvent s'exprimer en fonction de produits mixtes dans une base quelconque $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$ (cf. équation (2.37) pour la définition du produit mixte) :

$$\begin{aligned}
\det(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - \lambda\underset{\sim}{\mathbf{1}})[\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3] &= [(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - \lambda\underset{\sim}{\mathbf{1}}).\underline{\boldsymbol{e}}_1, (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - \lambda\underset{\sim}{\mathbf{1}}).\underline{\boldsymbol{e}}_2, (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - \lambda\underset{\sim}{\mathbf{1}}).\underline{\boldsymbol{e}}_3] \\
&= -\lambda^3[\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3] \\
&+ \lambda^2([\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3]) \\
&- \lambda([\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3]) \\
&+ [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3]
\end{aligned} \tag{A.135}$$

L'identification de l'équation précédente avec la relation (A.134) conduit à l'expression suivante des invariants principaux

$$I_1 = \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} := \frac{[\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3]}{[\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3]} \tag{A.136}$$

$$I_2 = \frac{[\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3]}{[\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3]}$$

$$I_3 = \det A := \frac{[\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3]}{[\underline{\boldsymbol{e}}_1,\underline{\boldsymbol{e}}_2,\underline{\boldsymbol{e}}_3]} \tag{A.137}$$

La valeur des coefficients du polynôme caractéristique ne dépend pas du choix de la base des $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$. □

Les invariants principaux I_2 et I_3 peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$I_1 = \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \tag{A.138}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})^2 - \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2) = \mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}\det\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \tag{A.139}$$

$$I_3 = \frac{1}{6}((\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})^3 - 3(\mathrm{trace}\,A)(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2) + 2(\mathrm{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^3)) \tag{A.140}$$

La seconde relation (A.139)b utilisant l'inverse de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ n'est bien sûr valable que dans le cas où $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est inversible. Le polynôme caractéristique admet (au moins dans $\mathbb{C}$) trois racines a_1, a_2, a_3. Les invariants principaux s'expriment en fonction de ces racines :

$$I_1 = a_1 + a_2 + a_3 \tag{A.141}$$
$$I_2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \tag{A.142}$$
$$I_3 = a_1a_2a_3 = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \tag{A.143}$$

Les expressions précédentes indiquent que les ensembles $\{a_1, a_2, a_3\}, \{I_1, I_2, I_3\}$ et $\{\text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}, \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2, \text{trace}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^3\}$ contiennent la même information et sont donc équivalents. Ils méritent le nom d'invariants puisque leurs valeurs ne dépendent pas de la base choisie. Ils sont équivalents à la connaissance des racines du polynôme caractéristique. A partir de là, on peut construire une multitude d'invariants comme autant de fonctions de ces trois racines.

A.3.2 Théorème de Poincaré

Théorème 24 (Poincaré) *Soit $\underline{\boldsymbol{\omega}} = P_i \underline{\boldsymbol{dx}}^i$ une 1–forme différentielle sur un ouvert simplement connexe (étoilé) d'un espace vectoriel de dimension finie, alors*

$$\left(\underline{\boldsymbol{\omega}} \text{ est exacte, i.e. } \exists f, \textit{tel que } \underline{\boldsymbol{\omega}} = df, \textit{i.e. } \forall i,\ P_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \Longleftrightarrow \forall i, j, \quad \frac{\partial P_i}{\partial x^j} = \frac{\partial P_j}{\partial x^i}$$

A.3.3 La différentielle de la fonction inverse sur les tenseurs d'ordre 2

Théorème 25 *Différentielle de l'inverse des tenseurs d'ordre 2 La différentielle de l'application* inv : $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \mapsto \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}$ *sur l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 inversibles vaut*

$$d(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}) = -\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{dA}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1} \tag{A.144}$$

Preuve. Le résultat s'établit formellement de la manière suivante

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1} = \underset{\sim}{1} \Longrightarrow d(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{dA}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1} + \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.d(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}) = 0$$

ce qui entraîne

$$d(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}) = -\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}.\underset{\sim}{\boldsymbol{dA}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1} \tag{A.145}$$

le résultat annoncé. □

A.3.4 La différentielle du déterminant d'un tenseur du second ordre inversible

Théorème 26 (Différentielle du déterminant d'un tenseur d'ordre 2) *La différentielle de l'application déterminant sur les tenseurs du second ordre inversible $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ vaut*

$$\frac{d \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}{d \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})\, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-T} \tag{A.146}$$

Preuve. On revient à la définition de l'application linéaire tangente de la fonction *déterminant* considérée :

$$\det(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{dA}}) - \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \frac{d \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}{d A_{pq}} dA_{pq} + o(\underset{\sim}{\boldsymbol{dA}}) \tag{A.147}$$

On multiplie cette équation par le déterminant de 3 vecteurs quelconques $[\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3]$:

$$\begin{aligned}
& (\det(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) - \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})[\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] \\
= \; & [(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underline{\boldsymbol{v}}_1, (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underline{\boldsymbol{v}}_2, (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underline{\boldsymbol{v}}_3] - [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_3] \\
= \; & [\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_1, \boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_2, \boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_3] + o(\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \\
= \; & (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \left([\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}.\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}.\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}.\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_3] \right) + o(\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \\
= \; & (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \operatorname{trace} (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}.\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})[\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] + o(\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \qquad \text{(A.148)}
\end{aligned}$$

Il reste à faire l'identification suivante

$$\operatorname{trace} (\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1}.\boldsymbol{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = A^{-1}_{pq} dA_{qp} = A^{-T}_{pq} dA_{pq}$$

de sorte que

$$\frac{d \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}{d\, A_{pq}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) A^{-T}_{pq} \qquad \text{(A.149)}$$

ce qui conduit au résultat annoncé[9]. □
Au passage on a utilisé le résultat d'algèbre linéaire suivant

$$\forall \underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3, \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underline{\boldsymbol{v}}_3] = (\operatorname{trace} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})[\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] \qquad \text{(A.150)}$$

La démonstration se fait en trois temps en utilisant une base orthonormée $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)$:

- Pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$ et $\underline{\boldsymbol{v}}_i = \underline{\boldsymbol{e}}_i$,

$$\begin{aligned}
[(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3] \; + \; & [\underline{\boldsymbol{e}}_1, (\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3] + [\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, (\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{e}}_3] \\
= \; & a_i b_1 [\underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_3] + a_i b_2 [\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_3] + a_i b_3 [\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2, \underline{\boldsymbol{e}}_i] \\
= \; & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \underline{\boldsymbol{a}} \,.\, \underline{\boldsymbol{b}} = \operatorname{trace} (\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}) \qquad \text{(A.151)}
\end{aligned}$$

- Pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$ et les $\underline{\boldsymbol{v}}_i$ quelconques,

$$\begin{aligned}
& [(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underline{\boldsymbol{v}}_1, (\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] + [\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, (\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{v}}_3] \\
= \; & v^1_i v^2_j v^3_k \left([(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_j, \underline{\boldsymbol{e}}_k] + [\underline{\boldsymbol{e}}_i, (\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{e}}_j, \underline{\boldsymbol{e}}_k] + [\underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_j, (\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{e}}_k] \right) \\
= \; & (\operatorname{trace} \underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}})[\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \underline{\boldsymbol{v}}_3] \qquad \text{(A.152)}
\end{aligned}$$

- Le cas général pour $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = A_{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j$ et des $\underline{\boldsymbol{v}}_i$ quelconques découle alors du résultat précédent et de la linéarité des opérations introduites.

A.4 Théorèmes de représentation

On envisage des fonctions réelles ou tensorielles de variables réelles ou tensorielles. On exploite les propriétés d'invariance de ces fonctions lorsqu'on applique des opérations de symétrie à leurs arguments.

[9] On en déduit le résultat suivant utile en mécanique

$$\overbrace{\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}^{\bullet} = \frac{d(\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})}{d\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-T} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = (\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \operatorname{trace} (\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{-1})$$

Appliqué au jacobien du gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, ce résultat fournit la formule de la variation de volume (2.219).

A.4.1 Rappels sur les groupes de symétrie

Les opérations de symétrie consistent de manière générale à appliquer au système une transformation linéaire inversible. Un ensemble G muni du produit $\cdot$ possède une structure de **groupe** si et seulement si :

1. $A, B \in G \Longrightarrow A.B \in G$
2. $A, B, C \in G \Longrightarrow A.(B.C) = (A.B).C$
3. Il existe un élément identité $1 \in G$ tel que $1.A = A.1 = A$
4. $\forall A \in G, \exists A^{-1} \in G$, appelé inverse de A, tel que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = 1$

Les tenseurs d'ordre 2 inversibles sur un espace euclidien E ont une structure de groupe et constituent le **groupe linéaire** $GL(E)$. Le groupe linéaire général possède de nombreux sous–groupes :

- **Le groupe spécial linéaire** $GL^+(E)$ contient les tenseurs d'ordre 2 inversibles à déterminant positif :
$$GL^+(E) = \{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \in GL(E), \quad \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} > 0\} \tag{A.153}$$
Le signe du déterminant d'une application linéaire indique si l'opération change l'orientation d'un trièdre ou la conserve. Le groupe $GL^+(E)$ rassemble les tenseurs inversibles qui **préservent l'orientation**. Noter que l'ensemble des tenseurs inversibles à déterminant négatif n'a pas de structure de groupe puisqu'il ne contient pas l'identité.
- **Le groupe unimodulaire** $\mathcal{U}(E)$ rassemble les tenseurs inversibles dont la valeur absolue du déterminant vaut 1 :
$$\mathcal{U}(E) = \{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \in GL(E), \quad |\det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}| = 1\} \tag{A.154}$$
- **Le groupe spécial unimodulaire** $\mathcal{U}^+(E)$:
$$\mathcal{U}^+(E) = \{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \in GL(E), \quad \det \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = 1\} \tag{A.155}$$
- **Le groupe orthogonal** $GO(E)$ contient les transformations orthogonales $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ définies comme les applications linéaires qui **préservent le produit scalaire** :
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO(E) \Longleftrightarrow (\forall \underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}} \in E, (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{u}}).(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{v}}) = \underline{\boldsymbol{u}}.\underline{\boldsymbol{v}}) \Longleftrightarrow (\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GL(E) \text{ et } \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) \tag{A.156}$$
Noter que les transformations orthogonales $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ vérifient $|\det \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}| = 1$.
- **Le groupe spécial orthogonal** $GO^+(E)$ est l'ensemble des **rotations** de E. Une rotation est un tenseur orthogonal à déterminant positif :
$$GO^+(E) = \{\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO(E), \det \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = 1\} \tag{A.157}$$
- **Les groupes ou classes cristallographiques** $Cristal(E) \subset GO^+(E)$ sont des sous–groupes du groupe spécial orthogonal. Ils contiennent donc exclusivement des rotations[10]. En cristallographie, on distingue 32 groupes de symétrie (ponctuelle) regroupés en 6 systèmes d'orientation des réseaux (Phan and Podvin, 2003). Les 6 systèmes d'orientation regroupent les 14 réseaux de Bravais, données dans le tableau A.2. Ces groupes sont en général des **groupes finis** car il contiennent un nombre fini d'éléments, à savoir des rotations par rapport à des axes très particuliers et des valeurs d'angles finies et commensurables. Seules les classes d'isotropie et isotropie transverse sont des groupes continus.

[10] En cristallographie, on garde $Cristal(E) \subset GO(E)$ puisque les **miroirs**, symétries par rapport à des plans, qui sont des transformations linéaires à déterminant négatif, jouent un rôle important. On se contente ici de considérer les rotations, car cette approche est suffisante en mécanique tant que les symétries centrales n'y jouent aucun rôle.

On a clairement l'imbrication suivante

$$Cristal(E) \subset GO^+(E) \subset \begin{matrix} GO(E) \\ \mathcal{U}^+(E) \end{matrix} \subset \mathcal{U}(E) \subset GL(E) \tag{A.158}$$

On rappelle que le groupe linéaire $GL(E)$ est engendré par le groupe unimodulaire et les homothéties $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}} = \alpha \underset{\sim}{\mathbf{1}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

On peut se demander s'il existe un groupe de transformations contenant les rotations mais aussi d'autres transformations unimodulaires à déterminant positif. La réponse est négative et résulte du

Théorème 27 (Maximalité du groupe spécial orthogonal) *Le groupe spécial orthogonal est maximal dans le groupe spécial unimodulaire, i.e.*

$$GO^+(E) \subset G \subset \mathcal{U}^+(E) \Longrightarrow (G = GO^+(E) \quad \text{ou} \quad G = \mathcal{U}^+(E)) \tag{A.159}$$

Preuve. Ce résultat dû à Noll (1965) est important dans l'analyse des comportements de fluides et solides conduite au chapitre 6. On en trouvera une esquisse de démonstration dans (Bertram, 2005). □

A.4.2 Fonctions isotropes

On considère des fonctions dont les variables peuvent être des scalaires a, des vecteurs $\underline{\boldsymbol{a}} \in E$ ou des tenseurs euclidiens d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. Ces fonctions peuvent être à valeurs réelles (elles seront alors notées $f(a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$), à valeurs vectorielles (notées $\underline{\boldsymbol{f}}(a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$) ou à valeurs tensorielles d'ordre 2 (notées $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$).

Définition. Une fonction $f, \underline{\boldsymbol{f}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}$ des arguments $(a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ est dite **isotrope** si, $\forall a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ et $\forall \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO(E)$

$$f(a, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = f(a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \tag{A.160}$$

$$\underline{\boldsymbol{f}}(a, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{f}}(a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) \tag{A.161}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(a, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(a, \underline{\boldsymbol{a}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T \tag{A.162}$$

Ces définitions imposent des conditions drastiques sur la forme des fonctions mises en jeu que l'on va établir successivement selon l'ordre du tenseur argument. Noter que, *a priori*, les conditions d'isotropie portent sur toutes les transformations orthogonales $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ et pas seulement sur les rotations. On se restreint d'abord au cas où les fonctions ne dépendent que d'un seul argument. On ne s'attarde pas sur les fonctions d'une variable scalaire puisque la définition précédente n'implique aucune restriction. On considère d'abord les fonctions à variable vectorielle :

Théorème 28 (Fonction isotrope d'une variable vectorielle) *Les fonctions $f, \underline{\boldsymbol{f}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}$ d'une variable vectorielle $\underline{\boldsymbol{a}}$ sont isotropes si et seulement si on a respectivement*

$$f(\underline{\boldsymbol{a}}) = h(\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}}) \tag{A.163}$$

$$\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}) = h(\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}})\underline{\boldsymbol{a}} \tag{A.164}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}) = f_0(\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}})\underset{\sim}{\mathbf{1}} + f_1(\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}})\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{a}} \tag{A.165}$$

La représentation (A.165) n'est valable que pour des fonctions tensorielles $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}$ **symétriques**, *cas auquel on se restreint ici.*

SYSTÈME	SYMÉTRIE MINIMALE DU CRISTAL	SYMÉTRIE DU RÉSEAU	CARACTÉRISTIQUES DU PRIMITIF	REPÈRE CONVENTIONNEL	PRIMITIF	DEUX FACES OPPOSÉES CENTRÉES	CENTRÉ (OU RHOMBOEDRIQUE)	FACES CENTRÉES
TRICLINIQUE (anorthique)	aucune	$\bar{1}$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma$ $a \neq b \neq c$		P			
MONOCLINIQUE (clinorhombique)	un élément binaire	$\frac{2}{m}$	Première orientation : $\alpha = \beta = 90° \neq \gamma$ $a \neq b \neq c$		P	B		
			Deuxième orientation : $\alpha = \gamma = 90° \neq \beta$ $a \neq b \neq c$		P	C		
ORTHORHOMBIQUE	trois éléments binaires trirectangulaires	$\frac{2}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$ $a \neq b \neq c$		P	C	I	F
QUADRATIQUE (tetragonal)	un axe 4 ou $\bar{4}$	$\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$ $a = b \neq c$		P		I	
HEXAGONAL	un axe 3	P : $\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$ R : $\bar{3}\frac{2}{m}$	$\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 120°$ $a = b \neq c$		P		R	
CUBIQUE	quatre axes 3 et trois miroirs ou trois axes 2 trirectangulaires	$m3m$	$\alpha = \beta = \gamma = 90°$ $a = b = c$		P		I	F

TAB. A.2 – Systèmes et modes de réseaux : les 14 réseaux de Bravais (tableau tiré de (Phan and Podvin, 2003)).

Preuve. Soit $\underline{\boldsymbol{a}} \in E$, pour tout autre vecteur $\underline{\boldsymbol{b}}$ de même norme que $\underline{\boldsymbol{a}}$ (i.e. $\underline{\boldsymbol{b}}.\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}}$), il existe une rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ telle que $\underline{\boldsymbol{b}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}$. Si f est isotrope, alors

$$f(\underline{\boldsymbol{b}}) = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}) = f(\underline{\boldsymbol{a}})$$

d'après la définition (A.160). Par suite, $f(\underline{\boldsymbol{a}})$ ne dépend que de la norme de $\underline{\boldsymbol{a}}$ et non de sa direction. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de la forme $h(\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}})$ est isotrope. Cela établit la relation (A.163).

Pour établir la représentation (A.164) des fonctions vectorielles à variable vectorielle isotropes, on commence par remarquer que pour $\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{0}}$, on doit avoir pour toute rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$:

$$\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{0}}) = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{0}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{0}}) \Longrightarrow \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{0}}) = \underline{\boldsymbol{0}}$$

ce qui est compatible avec la représentation (A.164). Ensuite, pour $\underline{\boldsymbol{a}} \neq 0$, il existe un vecteur $\underline{\boldsymbol{b}}$ orthogonal à $\underline{\boldsymbol{a}}$ tel que $f(\underline{\boldsymbol{a}})$ s'écrive

$$f(\underline{\boldsymbol{a}}) = \alpha\underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} \tag{A.166}$$

Appliquons alors à $\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}})$ la rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi}_{\underline{\boldsymbol{a}}}$ d'angle π autour de l'axe $\underline{\boldsymbol{a}}$. Clairement, $\underline{\boldsymbol{a}}$ est inchangé et $\underline{\boldsymbol{b}}$ se transforme en $-\underline{\boldsymbol{b}}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi}_{\underline{\boldsymbol{a}}}.\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}) &= \underline{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi}_{\underline{\boldsymbol{a}}}.\underline{\boldsymbol{a}}) = \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}) \\ &= \alpha\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi}_{\underline{\boldsymbol{a}}}.\underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^{\pi}_{\underline{\boldsymbol{a}}}.\underline{\boldsymbol{b}} = \alpha\underline{\boldsymbol{a}} - \beta\underline{\boldsymbol{b}} \end{aligned}$$

En rapprochant les deux équations précédentes avec (A.166), on en déduit que $\beta = 0$. α doit alors être une fonction scalaire isotrope de $\underline{\boldsymbol{a}}$, ce qui conduit à la représentation (A.164). Réciproquement, une telle représentation conduit bien à une fonction isotrope.

Enfin, pour la dernière identité, on introduit la fonction vectorielle

$$\underline{\boldsymbol{g}}(\underline{\boldsymbol{a}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}).\underline{\boldsymbol{a}}$$

On calcule alors pour une transformation orthogonale $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$

$$\underline{\boldsymbol{g}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}).(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}).\underline{\boldsymbol{a}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{g}}(\underline{\boldsymbol{a}})$$

de sorte que $\underline{\boldsymbol{g}}(\underline{\boldsymbol{a}})$ est une fonction vectorielle isotrope qui admet donc la représentation (A.164) :

$$\underline{\boldsymbol{g}}(\underline{\boldsymbol{a}}) = h(\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}})\underline{\boldsymbol{a}}$$

Cela signifie ni plus ni moins que $\underline{\boldsymbol{a}}$ est un vecteur propre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}})$. Comme $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}})$ est supposé être un tenseur d'ordre 2 symétrique, il admet la décomposition spectrale

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}) = h(\underline{\boldsymbol{a}}.\underline{\boldsymbol{a}})\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{a}} + \beta\underline{\boldsymbol{b}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}} + \gamma\underline{\boldsymbol{c}} \otimes \underline{\boldsymbol{c}}$$

où les vecteurs propres $\underline{\boldsymbol{b}}$ et $\underline{\boldsymbol{c}}$ sont unitaires, et les $(\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{c}})$ deux à deux orthogonaux. On considère alors la transformation orthogonale $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ telle que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{a}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{c}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{c}} = -\underline{\boldsymbol{b}}$$

En appliquant la relation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{a}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^{T} = \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{a}})$, on montre que $\beta = \gamma$. Par suite on peut construire la représentation (A.165). On finit en vérifiant que la fonction (A.165) est bien isotrope. □

Dans le cours de mécanique des milieux continus, on travaille plutôt avec des fonctions de variables tensorielles d'ordre 2 comme les contraintes ou les déformations. On se limite d'ailleurs souvent à des tenseurs symétriques $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. Il faut donc le

Théorème 29 (Théorème de Rivlin et Ericksen) *Les fonctions isotropes à valeurs réelles, vectorielles ou tensorielles symétriques d'ordre 2 dépendant de la variable tensorielle symétrique d'ordre 2* $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ *ont la représentation suivante*

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = h(a_1, a_2, a_3) \tag{A.167}$$

$$\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = 0 \tag{A.168}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \alpha_1 \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \alpha_2 \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2 \tag{A.169}$$

où les a_i *sont les valeurs propres de* $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ *et les* h, α_i *des fonctions quelconques des invariants principaux de* $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ *ou des fonctions symétriques des valeurs propres de* $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.

Preuve. Les invariants d'un tenseur d'ordre 2 symétrique ont été définis au paragraphe 4.2.1. A nouveau, la preuve que ces conditions sont suffisantes et définissent bien des fonctions isotropes de l'argument $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est directe en vérifiant que, pour tout $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO(E)$:

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}), \quad \underline{\boldsymbol{f}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$$

On s'attache plutôt ici au caractère nécessaire de ces conditions. Soient $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}$ deux tenseurs d'ordre 2 symétriques ayant les même valeurs propres a_i. Ils sont diagonalisables sous la forme

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_i, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, \underline{\boldsymbol{d}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{d}}_i$$

où les vecteurs propres unitaires soient reliés par une transformation orthogonale $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} \in GO(E)$ telle que $\underline{\boldsymbol{d}}_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}_i$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{B}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$. Alors

$$f(\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}) = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = f(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$$

On en déduit que la fonction f ne dépend pas des directions propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ mais seulement de ses valeurs propres. Il reste à garantir que cette fonction $h(a_1, a_2, a_3)$ ne privilégie aucune valeur propre par rapport aux autres en la prenant symétrique par rapport à ces trois arguments, ou bien, de manière équivalente, en la considérant comment fonction des trois invariants I_1, I_2, I_3 du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. Ceci établit la représentation (A.168). Au lieu de parler de fonction scalaire de la variable tensorielle, on parlera plutôt d'invariant scalaire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.

En écrivant $\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ avec $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = -\underset{\sim}{\mathbf{1}}$, on trouve $\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = 0, \forall \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. C'est la condition (A.168). Il n'existe donc pas de fonction vectorielle à variable tensorielle d'ordre 2 (même non symétrique d'ailleurs) autre que la fonction constante égale au vecteur nul.

La démonstration de la représentation (A.169) est plus délicate. On va d'abord montrer que tout vecteur propre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ (symétrique) est aussi vecteur propre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ pour une fonction isotrope $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}$. Soient $\underline{\boldsymbol{e}}_i$ les vecteurs propres unitaires et deux à deux orthogonaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. On construit la transformation orthogonale $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ telle que

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}_1, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}_2 = -\underline{\boldsymbol{e}}_2, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}_3 = -\underline{\boldsymbol{e}}_3$$

On vérifiera que cette transformation est telle que $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ en appliquant $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$ de part et d'autre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_i$. Par suite

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T$$

d'où

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$$

et donc

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underline{\boldsymbol{e}}_1$$

Etant donné le choix de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}$, ceci n'est possible que si $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}).\underline{\boldsymbol{e}}_1$ est colinéaire à $\underline{\boldsymbol{e}}_1$. On montre ainsi tour à tour que chaque $\underline{\boldsymbol{e}}_i$ est un vecteur propre de $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$. Par conséquent, $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ se diagonalise en

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}) = \sum_{i=1}^{3} b_i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_i \tag{A.170}$$

Il est alors possible de déterminer $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ en fonction des b_i tels que le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ donné par l'équation (A.170) se mette sous la forme (A.169). Les α_i sont solutions du système

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} \alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_1^2\alpha_2 = b_1 \\ \alpha_0 + a_2\alpha_1 + a_2^2\alpha_2 = b_2 \\ \alpha_0 + a_3\alpha_1 + a_3^2\alpha_2 = b_3 \end{cases} \tag{A.171}$$

dont le déterminant égal à $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$ est non nul lorsque les valeurs propres a_i sont distinctes. Les α_i sont des fonctions de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. La condition d'isotropie de $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}$ s'écrit

$$\alpha_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T)\underset{\sim}{\boldsymbol{1}} + \alpha_1(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T)\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \alpha_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T)\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2 = \alpha_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})\underset{\sim}{\boldsymbol{1}} + \alpha_1(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \alpha_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2$$

Comme les trois tenseurs $\{\underset{\sim}{\boldsymbol{1}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2\}$ sont linéairement indépendants[11], on en déduit que les fonctions $\alpha_i(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ sont isotropes :

$$\alpha_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \alpha_0(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}), \quad \alpha_1(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \alpha_1(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}), \quad \alpha_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}^T) = \alpha_2(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$$

Elles sont donc des fonctions symétriques des valeurs propres ou fonctions arbitraires des invariant principaux de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. Lorsque $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ possède deux valeurs propres distinctes, on montre que $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ a aussi deux valeurs propres distinctes de sorte que l'on peut prendre $\alpha_2 = 0$ dans la représentation (A.169). Lorsque les trois valeurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ sont identiques, tous les vecteurs non nuls sont vecteurs propres de $\underset{\sim}{\boldsymbol{f}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$ aussi de sorte que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. □

[11] En effet, $\alpha_0\underset{\sim}{\boldsymbol{1}} + \alpha_1\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \alpha_2\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^2 = 0$ implique que les α_i sont solutions du système $(\mathcal{S})$ avec $b_i = 0$ (système homogène). Comme les a_i sont distincts, on en déduit que les α_i sont nuls.

Annexe B

Formulation des lois de conservation

Il est possible de formuler les lois de conservation d'une manière plus formelle mais systématique. C'est l'objet de cette annexe. Les équations de bilan font le point sur des grandeurs physiques globales définies comme des intégrales sur des volumes qui dépendent en général du temps. L'objet des théorèmes de transport est d'évaluer la variation temporelle de ces intégrales.

B.1 Forme générale d'une équation de bilan

Les lois fondamentales de la mécanique portant sur des grandeurs tensorielles f peuvent s'exprimer sous la forme générale suivante

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} f\,dv = \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{q}}_f.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds + \int_{\mathcal{D}_t} \sigma_f\,dv \tag{B.1}$$

pour tout sous–domaine régulier $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ d'un corps matériel $\mathcal{M}$ dans la configuration actuelle, possédant le champ de vecteur normal $\underline{\boldsymbol{n}}$ unitaire et orienté vers l'extérieur de $\mathcal{D}_t$. Les quantités f et σ_f sont des champs de tenseurs d'ordre m et $\underline{\boldsymbol{q}}_f$ un champ de tenseur d'ordre $m+1$. La relation stipule que la variation temporelle de la quantité f sur le domaine $\mathcal{D}_t$ est due au **flux** de $\underline{\boldsymbol{q}}_f$ à travers la surface $\partial\mathcal{D}_t$ et au terme **source** volumique σ_f. L'apport volumique σ_f peut provenir de sources extérieures ou à une production interne associée au mouvement du corps.

La forme générale (B.1) d'équation de bilan fait en fait explicitement appel à l'hypothèse d'une densité surface ne dépendant que de la normale $\underline{\boldsymbol{n}}$ à la surface $\partial\mathcal{D}$, ce qui constitue une restriction de la formulation qui s'avère suffisante dans la pratique. Dans le cas des efforts mécanique appliqués à un corps matériel, on a vu que cette hypothèse correspond au postulat de Cauchy (3.3.2).

Si le corps $\mathcal{M}$ est isolé (pas de flux $\underline{\boldsymbol{q}}_f$) et en absence de sources ($\sigma_f = 0$), la quantité totale de f est donc constante. On dit qu'elle est est conservée et (B.1) s'appelle **loi de conservation**. Il reste à expliciter la variation de la quantité totale de f en utilisant en particulier les théorèmes de transport.

B.2 Théorèmes de transport (forme intégrale)

B.2.1 Cas d'une fonction f continue

On souhaite suivre une quantité au cours du temps sur un *volume de contrôle* $V(t)$, non nécessairement matériel.

Théorème 30 (Equation de transport dite de Reynolds) *Soit $V(t)$ une région régulière de l'espace $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ et w_n la vitesse normale sortante au point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial V(t)$. Alors, pour toute champ de tenseur continu $f(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ admettant une dérivée temporelle, on a*

$$\frac{d}{dt}\int_V f\, dv = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial V} f\, w_n\, ds \tag{B.2}$$

Preuve. Par définition

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_V f\, dv &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{V(t+h)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h)\, dv - \int_{V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{V(t+h)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h)\, dv - \int_{V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h)\, dv\right) \\
&+ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h)\, dv - \int_{V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h)\, dv + \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv
\end{aligned} \tag{B.3}$$

La région $V(t+h) - V(t)$ est balayée par ∂V dans l'intervalle de temps $[t, t+h]$ (cf. figure B.1a). Autrement dit, elle peut être découpée en petits volumes $\Delta v(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ égaux à

$$\Delta v(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = w_n(\underline{\boldsymbol{x}}, t) h \Delta s \tag{B.4}$$

En conséquence le premier terme de (B.3) devient

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h)\, dv &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h) w_n(\underline{\boldsymbol{x}}, t) h ds \\
&= \lim_{h\to 0}\int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t+h) w_n(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, ds \\
&= \int_{\partial V(t)} f(\underline{\boldsymbol{x}}, t) w_n(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, ds
\end{aligned}$$

ce qui prouve la relation (B.2). □

On remarque que la vitesse de propagation d'une surface géométrique est par définition un champ de vecteur défini le long de $\mathcal{S}$ colinéaire à la normale en tout point. En effet cette vitesse est, par définition, la limite du vecteur $\overline{\boldsymbol{M_t M_{t+\Delta t}}}/\Delta t$ où M_t est sur $\mathcal{S}(t)$ et $M_{t+\Delta t}$ est l'intersection de la droite colinéaire à $\underline{\boldsymbol{n}}(t)$ passant par M_t.

B.2.2 Cas d'un volume matériel

Un cas particulier est celui d'un volume matériel $\mathcal{D}_t$, c'est–à–dire dont le bord est toujours constitué des mêmes points matériels. Dans ce cas la vitesse normale sortante d'un point du bord coïncide avec la vitesse normale du point matériel correspondant :

$$w_n(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \dot{\underline{\boldsymbol{x}}}.\underline{\boldsymbol{n}} = \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t).\underline{\boldsymbol{n}} \tag{B.5}$$

où $\underline{\boldsymbol{n}}$ est la normale sortante au point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \partial V(t)$ Le théorème (B.2) prend alors la forme

$$\frac{d}{dt}\int_V f\, dv = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial V} f\, \underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds \tag{B.6}$$

La démonstration peut se faire d'une manière différente de la précédente en se ramenant à un domaine fixe matériel de référence. En effet, le domaine matériel $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ est une région de la configuration actuelle d'un corps matériel $\mathcal{M}$ et on peut lui associer le domaine $\mathcal{D}_0$ correspondant sur la configuration de référence. De même la densité $f(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$ est représentée par $F(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t)$ sur Ω_0. On peut alors effectuer le changement de variable $\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}\,, t)$ dans l'intégrale à calculer et introduire le jacobien correspondant

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} f\,dv &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} F\,J dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} (\dot{F}J + F\dot{J}) dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \dot{f}\,dv + \int_{\mathcal{D}_t} f(\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}})\,dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\frac{\partial f}{\partial t} + (\operatorname{grad} f).\underline{\boldsymbol{v}} + f(\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}}))\,dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div}(f\underline{\boldsymbol{v}})\,dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}_t} f\,\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds
\end{aligned} \tag{B.7}$$

où l'on a utilisé la formule de la dérivée matérielle (2.175), la formule d'évolution du jacobien (2.217) et finalement le théorème de la divergence (A.129).

Formellement, le résultat précédent permet de mettre en évidence une règle pratique très efficace de calcul de la dérivée d'une intégrale sur un domaine mobile. Il "suffit" de dériver sous le signe intégrale en pensant à dériver aussi l'élément de volume dv. En effet, on peut constater formellement que cette règle conduit au même résultat que le théorème (B.6) :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} f\,dv = \int_{\mathcal{D}_t} \overset{\bullet}{\overbrace{f dv}} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f}dv + f\overset{\bullet}{\overbrace{dv}}) \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f} + f\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{v}})dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}_t} f\,\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds
\end{aligned} \tag{B.9}$$

où (2.217) a été utilisé à nouveau. C'est cette règle que l'on a utilisée dans l'établissement des équations de bilan des grandeurs physiques quantité de mouvement et énergie.

B.2.3 Cas d'un volume présentant une surface singulière

Sur la figure B.1b, on envisage l'existence au sein d'un domaine matériel $\mathcal{D}$ d'une **surface** orientée $\mathcal{S}$ **singulière** pour le champ $f(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$. On entend par là que f est continue sur $\mathcal{D} - \mathcal{S}$ mais présente une **discontinuité** au travers de $\mathcal{S}$. Le **saut de** f est défini comme

$$[\![f]\!] := f^+ - f^- \tag{B.10}$$

où f^+ et f^- sont les limites à droite et à gauche respectivement en un point de $\mathcal{S}$, i.e. en venant de $\mathcal{D}^+$ et de $\mathcal{D}^-$. La propriété de continuité de part et d'autre de $\mathcal{S}$ garantit que ces limites

à droite et gauche de $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ ne dépendent pas du trajet dans $\mathcal{D}^+$ ou $\mathcal{D}^-$ respectivement pris pour atteindre $\underline{\boldsymbol{x}}$. Les frontières $(\partial\mathcal{D})^+$ et $(\partial\mathcal{D})^-$ sont définis de telle sorte que le contour de $\mathcal{D}$ soit la réunion de ces deux bords

$$\partial\mathcal{D} = (\partial\mathcal{D})^+ \cup (\partial\mathcal{D})^- \tag{B.11}$$

On a alors le

Théorème 31 (Equation de transport avec surface singulière) *Soit $\mathcal{D}(t)$ un domaine matériel de l'espace et $\mathcal{S}(t)$ une surface singulière pour le champ de tenseurs f continu sur le reste de $\mathcal{D}$. Alors*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} f\,dv = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}} f\,\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds - \int_{\mathcal{S}} [\![f]\!]\,w_n\,ds \tag{B.12}$$

où w_n est la vitesse normale sortante d'un point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ et $[\![f]\!]$ le saut de f à travers $\mathcal{S}$.

Preuve. On applique successivement le théorème de transport (B.2) aux domaines $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$ en remarquant que chaque domaine possède une frontière matérielle $(\partial\mathcal{D})^\pm$ et la surface non nécessairement matérielle $\mathcal{S}$ dont la propagation est pilotée par la vitesse normale w_n :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^+} f\,dv = \int_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{(\partial\mathcal{D})^+} f\,\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds + \int_{\mathcal{S}} f^+\,(-w_n)\,ds \tag{B.13}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}^-} f\,dv = \int_{\mathcal{D}^-} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{(\partial\mathcal{D})^-} f\,\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds + \int_{\mathcal{S}} f^-\,w_n\,ds \tag{B.14}$$

La somme des deux équations précédentes fournit exactement le théorème 31. □

B.3 Forme locale des équations de bilan : équations de champ et équations aux discontinuités

Dès lors, la forme générale de l'équation de bilan (B.1) d'une quantité f sur un domaine matériel $\mathcal{D}$ traversé par une surface singulière $\mathcal{S}$ s'écrit

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial\mathcal{D}} f\underline{\boldsymbol{v}}\,.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds - \int_{\mathcal{S}} [\![f]\!] w_n\,ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{q}}_f.\underline{\boldsymbol{n}}\,ds + \int_{\mathcal{D}} \sigma_f\,dv \tag{B.15}$$

Les points $\underline{\boldsymbol{x}}$ pour lesquels tous les tenseurs impliqués sont continus sont dits **réguliers**. Les points $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ sont dits **singuliers**

On considère d'abord des domaines $\mathcal{D}$ n'interceptant pas la surface $\mathcal{S}$. Pour de tels ensembles de points réguliers, l'équation (B.1) devient

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\,(f\underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\boldsymbol{q}}_f) - \sigma_f \right) dv = 0 \tag{B.16}$$

où l'on a utilisé une fois de plus le théorème de la divergence (A.129). La quantité $f\underline{\boldsymbol{v}}$ (ou $\underline{\boldsymbol{f}} \otimes \underline{\boldsymbol{v}}$ si f est un vecteur par exemple, plus généralement un tenseur d'ordre quelconque) s'appelle **flux convectif** de f. L'intégrande étant continu et l'équation étant valable pour tout tel sous-domaine $\mathcal{D}$, il doit s'annuler en tout point $\underline{\boldsymbol{x}}$. On obtient la forme locale de l'équation de bilan valable en tout point régulier de Ω_t :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\,(f\underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\boldsymbol{q}}_f) - \sigma_f = 0 \tag{B.17}$$

Une autre forme possible équivalente est bien sûr

$$\dot{f} + f\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{v}} - \mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{q}}_f - \sigma_f = 0 \tag{B.18}$$

On considère ensuite un point singulier $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$. Pour cela, on prend un domaine $\mathcal{D}$ qui constitue un voisinage de $\underline{\boldsymbol{x}}$ et qui contient la portion de surface

$$s = \mathcal{D} \cap \mathcal{S} \tag{B.19}$$

On va calculer la limite de (B.15) lorsque $(\mathcal{D})^+$ et $(\mathcal{D})^-$ tendent vers s d'une façon telle que le volume de $\mathcal{D}$ tende vers 0 tandis que s reste inchangée (cf. figure B.1c). Si $\partial f/\partial t$ et σ_f sont bornés sur $\mathcal{D}$, alors les intégrales de volume dans (B.15) disparaissent à la limite et il ne reste plus que

$$\int_s \Big([\![f(\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}} - w_n)]\!] - [\![\underline{\boldsymbol{q}}_f]\!].\underline{\boldsymbol{n}} \Big)\, ds = 0 \tag{B.20}$$

Valable pour toute portion de surface s et pour tout $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$, l'équation précédente implique que l'intégrande doit s'annuler en tout point $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ (sauf éventuellement sur un sous–ensemble de $\mathcal{S}$ de mesure nulle). On obtient les équations locales de saut à travers une surface singulière :

$$[\![f(\underline{\boldsymbol{v}}.\underline{\boldsymbol{n}} - w_n)]\!] - [\![\underline{\boldsymbol{q}}_f]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{B.21}$$

Ces conditions sont appelées **équations de Rankine–Hugoniot**.

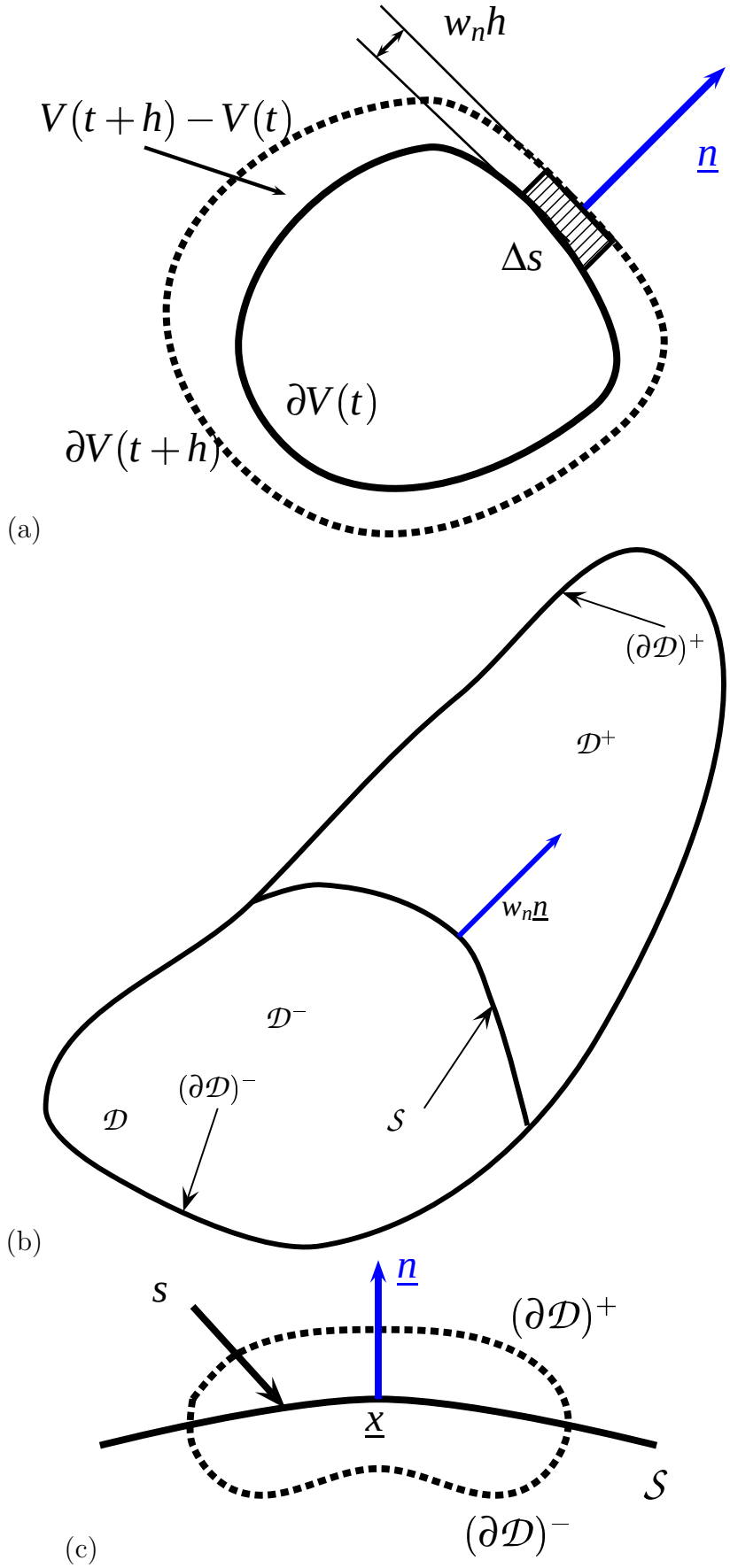


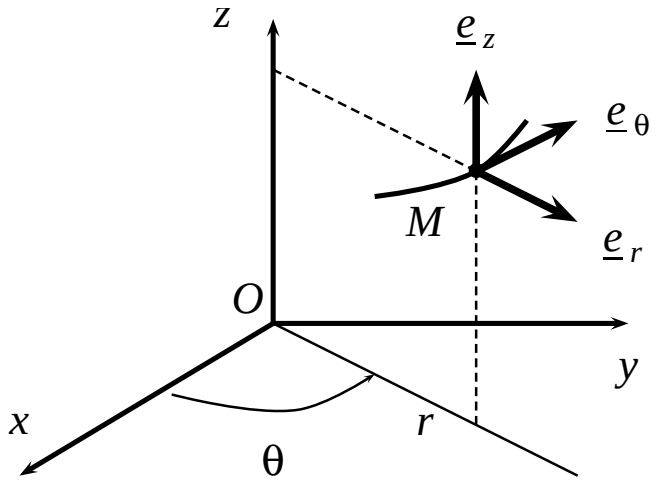
FIG. B.1 – Etablissement des théorèmes de transport : (a) Domaine V à frontière mobile, (b) propagation d'une surface singulière $\mathcal{S}$ dans un domaine $\mathcal{D}$, (c) voisinage $\mathcal{D}$ d'un point singulier $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{S}$ pour l'établissement des conditions de discontinuité.

Annexe C

Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cylindriques et sphériques

C.1 Coordonnées cylindriques

C.1.1 Définition des coordonnées



$$\underline{\boldsymbol{OM}} = r\underline{\boldsymbol{e}}_r + z\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{C.1}$$

$$\underline{\boldsymbol{dM}} = dr\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + rd\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + dz\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{C.2}$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial r}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial z} \tag{C.3}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial r} = 0, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial r} = 0, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_z}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \theta} = \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{\boldsymbol{e}}_r, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_z}{\partial \theta} = 0, \\ \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial z} = 0, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_z}{\partial z} = 0, \end{array}\right. \tag{C.4}$$

C.1.2 Champ scalaire

champ scalaire

$$f(r, \theta, z)$$

gradient

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{C.5}$$

laplacien

$$\Delta = \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{C.6}$$

C.1.3 Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_r(r,\theta,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + u_\theta(r,\theta,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + u_z(r,\theta,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z$$

gradient

$$[\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

divergence

$$\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{C.8}$$

laplacien

$$\Delta\underline{\boldsymbol{u}} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}}) = (\Delta u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2})\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + (\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2})\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \Delta u_z\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{C.9}$$

C.1.4 Champ de tenseurs d'ordre 2

champ de tenseurs

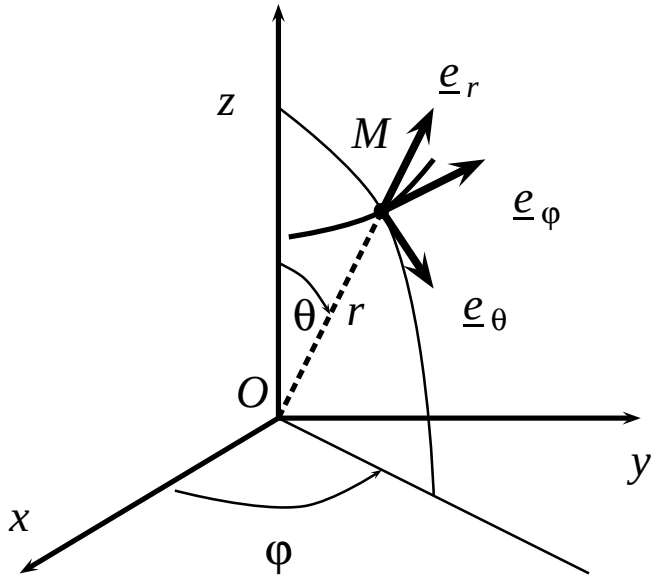
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T_{ij}(r,\theta,z)\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j$$

divergence

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_z \end{aligned} \tag{C.10}$$

C.2 Coordonnées sphériques

C.2.1 Définition des coordonnées



coordonnées (r, θ, φ)

$$\underline{\boldsymbol{OM}} = r\underline{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\underline{\boldsymbol{dM}} = dr\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + rd\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{C.11}$$

vecteurs de base

$$\underline{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial r}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial \varphi} \tag{C.12}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial r} = 0, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial r} = 0, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \theta} = \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{\boldsymbol{e}}_r, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \\ \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi, & \dfrac{\partial \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_r - \cos\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \end{array}\right. \tag{C.13}$$

C.2.2 Champ scalaire

champ scalaire

$$f(\underline{\boldsymbol{OM}}) = f(r, \theta, \varphi) \tag{C.14}$$

gradient

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{C.15}$$

laplacien

$$\Delta f = \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla} f) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{cotan}\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{C.16}$$

C.2.3 Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$\underline{\boldsymbol{u}} = u_r(r,\theta,\varphi)\underline{\boldsymbol{e}}_r + u_\theta(r,\theta,\varphi)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + u_\varphi(r,\theta,\varphi)\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{C.17}$$

gradient dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_r, \underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi)$

$$\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi\right) \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \operatorname{cotan}\theta\, u_\varphi\right) \\ \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \operatorname{cotan}\theta\, u_\theta + u_r\right) \end{bmatrix} \tag{C.18}$$

divergence

$$\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \operatorname{cotan}\theta\,\frac{u_\theta}{r} + 2\frac{u_r}{r} \tag{C.19}$$

laplacien

$$\begin{aligned} \Delta\underline{\boldsymbol{u}} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla}\underline{\boldsymbol{u}}) &= \left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2}(u_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi})\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi})\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \left(\Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}(\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \operatorname{cotan}\theta\,\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{2\sin\theta})\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \end{aligned} \tag{C.20}$$

C.2.4 Champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{OM}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(r,\theta,\varphi) = T_{ij}(r,\theta,\varphi)\,\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j \tag{C.21}$$

divergence

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta}\operatorname{cotan}\theta)\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}((T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})\operatorname{cotan}\theta + 3T_{r\theta})\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}(3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi}\operatorname{cotan}\theta)\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \end{aligned} \tag{C.22}$$

Eléments bibliographiques par thèmes

Ouvrages de mécanique des milieux continus en langue française

Ciarlet, P.G. (1986). *Elasticité tridimensionnelle.* Masson, Paris.

Duvaut, G. (1998). *Mécanique des milieux continus*. Dunod, Paris.

Germain, P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus T.I./Théorie générale*. Masson, Paris.

Germain, P. (1986). *Mécanique, tomes I et II*. Ellipses, Paris.

Germain, P. et Muller, P. (1995). *Introduction a la mecanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1995.

Mandel, J. (1966–1994). *Cours de mecanique des milieux continus*. Editions Jacques Gabay, Paris.

Salençon, J. (2002). *Mécanique des milieux continus, tomes I à III*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique.

Truesdell, C. (1974). *Introduction a la mecanique rationnelle des milieux continus*. Masson, Paris.

Ouvrages de mécanique des milieux continus en langue étrangère

Bertram, A. (2005). *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*. Springer, Berlin.

Bertram, A. (1989). *Axiomatische Einfuehrung in die Kontinuumsmechanik*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Haupt, P. (2000). *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag.

Liu, I.-S. (2002). *Continuum mechanics*. Springer.

Ogden, R. (1997). *Non–linear elastic deformations*. Dover, New York.

Ziegler, F. (1995). *Mechanics of solids and fluids*. Springer Verlag.

Aspects physiques et thermodynamiques

Fer, F. (1970). *Thermodynamique macroscopique.* Gordon & Breach.

Müller, I. (1985). *Thermodynamics*. Pitman Publishing Limited, London.

Phillips, R. (2001). *Crystals, defects and microstructures : Modeling across scales*. Cambridge University Press.

Teodosiu, C. (1982). *Elastic models of crystal defects*. Springer Verlag, Berlin.

Aspects mathématiques

Abraham, R., Marsden, J.E., Ratiu, T. (1988). *Manifolds, tensor analysis and applications*. Springer verlag, Applied mathematical sciences 75.

Brillouin, L. (1938–1987). *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Editions Jacques Gabay, Paris.

Cartan, H. (1985). *Cours de calcul differentiel*. Hermann, Paris.

Legrand, G. (1971). *Algèbre linéaire et multilinéaire et géométrie différentielle*. Masson et Cie, Paris.

Lichnerowicz, A. (1946–1987). *Eléments de calcul tensoriel*. Edition Jacques Gabay, Paris.

Schwartz, L. (1975). *Les tenseurs*. Hermann, Paris.

Aspects historiques

Dugas, R. (1959–1996). *Histoire de la mécanique*. Editions Jacques Gabay, Paris.

Mach, E. (1933). *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt. Edition française : La Mécanique, Exposé historique et critique de son développement, éditions Jacques Gabay, Paris, 1987.

Timoshenko, S.P. (1953–1983). *History of strength of materials*. Dover.

Mécanique et matériaux

Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L. et Forest, S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès, Paris.

François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. (1991). *Comportement mécanique des matériaux. Volume 1 : élasticité et élastoplasticité*. Hermès, Paris.

François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. (1993). *Comportement mécanique des matériaux. Volume 2 : endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Hermès, Paris.

Müller, I et Strehlow, P. (2004). *Rubber and rubber ballons : Paradigms and thermodynamics*. Springer, Berlin.

Mécanique des structures

Avril, J. (1974). *Encyclopédie Vishay d'analyse des contraintes*. Vishay–Micromesures, Paris.

Géradin, M. et Rixen, D. (1993) *Théorie des vibrations*. Masson, Paris.

Bibliographie

Amestoy M. (2004). *Mécanique des milieux continus déformables : recueil de problèmes*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Amestoy M. and Damamme G. (2003). *Mécanique des Milieux Continus II*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Amestoy M. and Leblond J.-B. (1992). *Crack paths in plane situations–II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors*. International Journal of Solids and Structures, vol. 29, pp 465–501.

Arroyo M. and Belytschko T. (2002). *An atomistic-based finite deformation membrane for single layer crystalline films*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 50, pp 1941–1977.

Ashby M.F. (2000). *Choix des matériaux en conception mécanique*. Dunod, Paris.

Ashby M.F. and Jones D.R.H. (1980). *"Engineering materials", vol.1 : An Introduction to their Properties and Applications*. Pergamon Press.

Ashby M.F. and Jones D.R.H. (1991). *Matériaux, vol. 1 et 2*. Dunod.

Bascoul A. and Maso J.C. (1981). *Influence des gradients de contraintes ou déformations sur le seuil d'écoulement plastique d'un acier*. Journal de Mécanique Appliquée, vol. 5, pp 375–403.

Béranger G., Duffaut F., Morlet J., and Thiers J.F. (1996). *The iron–nickel alloys : A hundred years after the discovery of invar*. SOS Free Stock.

Beremin F. M. (1983). *A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel*. Metallurgical and Materials Transactions A, vol. 14, pp 2277–2287.

Berthelot J.-M. (1999). *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. Technique et Documentation, Paris.

Bertram A. (2005). *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*. Springer.

Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., and Forest S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*. ISBN 2-7462-0268-9, EAN13 9782746202689, 445 p., Hermès, France.

Brun L. (1991). *Introduction à la thermodynamique des Matériaux*. Cours de l'Ecole Polytechnique.

Bunge H.J. (1982). *Texture Analysis in Materials Science*. Butterworths.

Cahn R.W. (2001). *The coming of materials science*. Pergamon.

Cailletaud G. (2003). *Mécanique des Matériaux Solides, 3122*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Cailletaud G., Coupez T., Feyel F., and Kern M. (2004). *Eléments Finis, S2733*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Cardona Jean-Marc (2000). *Comportement et durée de vie des pièces multiperforées : application aux aubes de turbine.* Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

Chan N. and Evans K.E. (1997). *Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams.* Journal of Materials Science, vol. 32, pp 5725–5736.

Coleman B.D. and Noll W. (1963). *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity.* Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 13, pp 167–178.

de Groot S.R. and Mazur P. (1962–1984). *Non–equilibrium thermodynamics.* North Holland–Dover.

Dell'Isola F. and Seppecher P. (1995). *The relationship between edge contact forces, double forces and intersticial working allowed by the principle of virtual power.* C.R. Acad. Sci. Paris IIb, vol. 321, pp 303–308.

Dugas R. (1959-1996). *Histoire de la mécanique.* Editions Jacques Gabay, Paris.

Erdogan F. and Sih G.C. (1963). *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear.* Journal of Basic Engineering, vol. 85, pp 519–527.

Eringen A.C. and Maugin G.A. (1990). *Electrodynamics of continua (2 vol.).* Springer, Berlin.

Fargue D. (2004a). *Abrégé de thermodynamique.* Ecole des Mines de Paris–Les Presses.

Fargue D. (2004b). *Thermodynamique, 2411.* Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Fer F. (1970). *Thermodynamique macroscopique, tomes 1 et 2.* Gordon & Breach.

Filippini M. (2000). *Stress gradient calculations at notches.* International Journal of Fatigue, vol. 22, pp 397–409.

Fivel M. and Forest S. (2004a). *Plasticité cristalline et transition d'échelle : cas du monocristal.* Techniques de l'Ingénieur, M4016, 23 pages.

Fivel M. and Forest S. (2004b). *Plasticité cristalline et transition d'échelle : cas du polycristal.* Techniques de l'Ingénieur, M4017, 11 pages.

Forest S. (2006). *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes.* Les Presses de l'Ecole des Mines de Paris, ISBN : 2-911762-67-3, 200 pages.

François D., Pineau A., and Zaoui A. (1993). *Comportement mécanique des matériaux. Volume 2 : viscoplasticité, endommagement, rupture.* Hermès.

Freund L.B. and Suresh S. (2003). *Thin Film Materials.* Cambridge University Press.

Friedel J. (1964). *Dislocations.* Pergamon.

Germain P. (1973a). *Cours de mécanique des milieux continus T.I./Théorie générale.* Masson, Paris.

Germain P. (1973b). *La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient.* J. de Mécanique, vol. 12, pp 235–274.

Germain P. (1986). *Mécanique, tomes I et II.* Ellipses, Paris.

Haupt P. (2000). *Continuum Mechanics and Theory of Materials.* Springer Verlag.

Hill R. (1968). *On constitutive inequalities for simple materials.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 16, pp 229–242.

Hill R. (1978). *Aspects of invariance in solid mechanics.* Advances in Applied Mechanics, vol. 18, pp 1–75.

Hirth J.P. and Lothe J. (1982). *Theory of Dislocations.* Wiley Intersciences.

Inglis C.E. (1913). *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.* Transactions of the Institution of Naval Architects, vol. 55, pp 219–230.

Jaoul B. (2008). *Etude de la plasticité et application aux métaux.* Les Presses des Mines, Paris.

Kachanov M., Shafiro B., and Tsukrov I. (2003). *Handbook of Elasticity Solutions.* Kluwer Academic Publishers.

Ladevèze P. (1983). *Sur le principe de Saint–Venant en élasticité.* Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 1, pp 161–184.

Lahellec N., Bordreuil C., and Hochard C. (2005). *Etude de la rupture fragile d'un stratifié quasi–isotrope à plis tissés : mise en évidence d'une longueur interne.* Comptes Rendus Mécanique, vol. 333, pp 293–298.

Lakes R.S. (1987). *Foam structures with a negative Poisson's ratio.* Science, vol. 235, pp 1038–1040.

Leblond J.-B. (1989). *Crack paths in plane situations–I. General form of the expansion of the stress intensity factors.* International Journal of Solids and Structures, vol. 25, pp 1311–1325.

Leblond J.-B. (2003). *Mécanique de la rupture fragile et ductile.* Hermès.

Legrand G. (1971). *Algèbre linéaire et multilinéaire et géométrie différentielle.* Masson et Cie, Paris.

Legrand G. (2003). *Algèbre tensorielle, 3101.* Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Leguillon D. (2002). *Strength or toughness ? A criterion for crack onset at a notch.* European Journal of Mechanics A/solids, vol. 21, pp 61–72.

Liu I-S. (2002). *Continuum Mechanics.* Springer.

Love A.E.H. (1927–1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Dover, New York.

Maisonneuve F. (2003). *Mathématique 1, Calcul Différentiel, 1121.* Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Mandel J. (1966). *Cours de mécanique des milieux continus – Tomes I et II.* Gauthier–Villars / réédition 1994, J. Gabay.

Mandel J. (1966–1994). *Cours de mécanique des milieux continus.* Editions Jacques Gabay, Paris.

Martienssen W. and Warlimont H. (2005). *Springer Handbook of condensed matter and materials data.* Springer.

Maugin G.A. (1980). *The method of virtual power in continuum mechanics : Application to coupled fields.* Acta Mechanica, vol. 35, pp 1–70.

Mazière Matthieu (2007). *Burst of turboengine disks.* Phd, Ecole des Mines de Paris.

McClintock F.A. and Argon A.S. (1966). *Mechanical behavior of materials.* Addison–Wesley.

Miannay D.P. (1995). *Mécanique de la rupture.* Editions de Physique.

Mindlin R.D. (1962). *Influence of couple–stresses on stress concentrations.* Experimental Mechanics, vol. 3, pp 1–7.

Müller I. (1985). *Thermodynamics.* Pitman Publishing Limited, London.

Mura T. (1987). *Micromechanics of defects in solids.* Martinus Nijhoff.

Noll W. (1959). *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics.* In : Proceedings of the Berkeley Symposium on the axiomatic method, pp 226–281. Amsterdam.

Noll W. and Virga E.G. (1990). *On edge interactions and surface tension.* Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 111, pp 1–31.

Nye J.F. (1957–1985). *Physical properties of crystals.* Oxford Science Publications.

Ogden R.W. (1984–1997). *Non–linear elastic deformations.* Dover, New York.

Phan K.D. and Podvin P. (2003). *Cristallographie géométrique, S2333.* Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Pilkey W.D. (1997). *Peterson's Stress Concentration Factors.* Wiley.

Prigogine I. (1968–1996). *Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles.* Dunod–Gabay.

Ramis E., Deschamps C., and Odoux J. (1985). *Cours de mathématiques spéciales, 1. Algèbre.* Masson, Paris.

Rau C.A. and Burck L.H. (1971). *Fatigue of nickel-base superalloy sheets containing various diameter small holes.* Engineering Fracture Mechanics, vol. 2, pp 211–220.

Rekatch V. (1980). *Problèmes de la théorie de l'élasticité.* Editions de Moscou.

Rivlin R.S. (1969). *Red herrings and sundry unidentified fish in non-linear mechanics.* Technical report, Centre for the Application of Mathematics, Lehigh University, Technical Report No. CAM-100-9.

Romig A.D., Dugger M.T., and McWhorter P.J. (2003). *Materials issues in microelectromechanical devices : science, engineering, manufacturability and reliability.* Acta Materialia, vol. 51, pp 5837–5866.

Rougée P. (1997). *Mécanique des Grandes Transformations.* Springer Verlag.

Saint-Venant A. (1853). *De la torsion des prismes.* Comptes–Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, vol. 14, pp 253–560.

Sanford R.J. and Thompson B.J. (1997). *Selected papers on foundations of linear elastic fracture mechanics.* The Society for Experimental Mechanics, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Washington, USA.

Simmons G. and Wang Herbert (1971). *Single crystal elastic constants and calculated aggregate properties : a Handbook.* The M.I.T. Press, Cambridge, Massachussetts and London, England.

Stoney G.G. (1909). *The tension of metallic films deposited by electrolysis.* Proceedings of the Royal Society London, vol. A82, pp 172–175.

Szabó I. (1985). *Höhere technische Mechanik.* Springer–Verlag.

Teodosiu C. (1982). *Elastic models of crystal defects.* Springer Verlag, Berlin.

Tijani M. (2004). *Calcul des Structures, semaine européenne.* Cours de l'Ecole des Mines de Paris.

Timoshenko S.P. (1953-1983). *History of strength of materials.* Dover.

Timoshenko S. and Goodier J.N. (1970). *Theory of elasticity.* McGraw–Hill International Editions.

Toupin R. (1965). *Saint–Venant's principle.* Archives of Rational Mechanics and Analysis, vol. 18, pp 83–96.

Trotignon J.P. (1997). *Précis de construction mécanique, tomes 1 à 3.* AFNOR, Nathan, Paris.

Truesdell C. (1974). *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus.* Masson, Paris.

Truesdell C. (1977). *A first course in rational continuum mechanics.* Academic Press.

Truesdell C. and Noll W. (1965). *The non-linear field theories of mechanics.* Handbuch der Physik, edited by S. Flügge, réédition Springer Verlag 1994.

Truesdell C.A. and Toupin R.A. (1960). *Handbuch der Physik, S. Flügge, editor, vol. 3*, chapter The classical field theories, pp 226–793. Springer verlag, Berlin.

Voigt W. (1898). *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung.* Verlag von Veit & Comp., Leipzig.

Volterra V. (1907). *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.* Annal. Sci. de l'Ecole Norm. Supér., vol. 24, pp 401–517.

Xiao H. and Bruhns, O.T. Meyers A. (1997). *Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate.* Acta Mechanica, vol. 124, pp 89–105.

Yang W., Cheng L., and Hwang K.C. (1992). *Objective corotational rates and shear oscillation.* Int. J. Plasticity, vol. 8, pp 643–656.

Yang W., Li Z.M., Shi W., Xie B.H., and Yang M.B. (2004). *On auxetic materials.* Journal of Materials Science, vol. 39, pp 3269–3279.

Index

Accélération, 59, 70
Acier, 182
Action locale, 123
Adiabatique, 187
Airy, 216
Alésage, 311
Allongement, 36
Almansi, 37
Alumine, 182
Aluminium, 182, 266
Amortisseur, 118
Angle de glissement, 37
Anisotropie, 130, 131, 148
Antisymétrique, 61
Arbre en rotation, 311, 343
Aube
    de turbine, 311
Auxétique, 180
Axe
    principal, 39

Béton, 182
Base, 101, 417
    convective, 28
Beltrami, 196, 336
    équations de, 196, 336
Bicouche, 255
Bifurcation
    de fissure, 376
Bilame, 255
Bilan
    équation de, 71, 445, 448
Biomécanique, 6
Biomatériaux, 6
Biot, 38
    déformation de, 38
Bois, 182
Boussinesq, 98
Branchement
    de fissure, 376
Burgers, 389, 405

Céramique, 172, 182
Caoutchouc, 182
Capillarité, 74
Casimir, 144
Castigliano, 405
Cauchy, 32, 76, 80
    contraintes de, 80
    lemme de, 77
    postulat de, 77
    première loi de, 82
    seconde loi de, 83
    tétraèdre de, 80
    théorème de, 77, 79
Cauchy–Green, 32
Cavité, 388
    sphérique, 347
Cayley–Hamilton, 102, 436
Cercles de Mohr, 104
Chaleur, 185
    massique, 166, 188
    spécifique, 166
Champ
    d'accélération, 58, 59, 70
    de vitesses, 58
Changement
    de base, 101, 416, 417
    de configuration de référence, 29
    de référentiel, 28
Charge d'Euler, 205
Choc
    onde de, 91, 93, 94
Cinématique, 24
Cisaillement, 103, 176
    maximal, 106
Cission, 103
Classe
    cristallographique, 438
Clivage, 113
Coin, 389
Coleman–Noll, 154
Compatibilité, 51, 249, 389, 403

Compatible
champ de déformation, 51
Comportement
élastique, 118
élastoplastique, 112, 118
cyclique, 120
plastique, 112, 118
viscoplastique, 118
visqueux, 118
Compressibilité, 176
Concentration
de contrainte, 347
Condition
de saut, 91, 447
Conditions
de compatibilité, 51
Conduction thermique, 142, 187
Conductivité
thermique, 181
Configuration, 23
actuelle, 24
de référence, 24, 29
initiale, 24
intermédiaire, 24
naturelle, 148
sans distorsion, 131, 148
Connexité, 403
Conservation
de l'énergie, 86
de la masse, 71
loi de, 71, 445, 448
Constitutive equations, 117
Contact, 193
Continuité, 24, 71
Contraction
double, 416
simple, 416
Contrainte, 74
équivalente, 115
de cisaillement, 103
normale, 103
normale maximale, 113
plane, 352
tangentielle, 103
vecteur, 77
Contraintes
auto–équilibrées, 290
d'épitaxie, 267
initiales, 290
nominales, 98
planes, 214
résiduelles, 290
Convectif, 29, 58, 95, 449
Convention
d'Einstein, 412
Convexité, 159
Coordonnées
elliptiques, 366, 370
matérielles entraînées, 28
Coque, 47
Corotationnel, 68
Corps
matériel, 23
rigide, 33, 69, 117
Cosserat, 83
milieu de, 356
Couette, 343
Couplage
thermoélastique, 182
Couples
de contraintes, 356
Courbure, 264
Covecteur, 30
Cristal, 406
liquide, 132
Critère, 112
de rupture, 376
de Tresca, 114
de von Mises, 115
Cubique, 149
Cuivre, 182
Curie
principe de, 173
Curl, 431
Cycle, 155

D'Alembert, 86
Décomposition
polaire, 31, 244
spectrale, 39
Défaut cristallin, 406
Déformation
d'Almansi, 37
de Green–Lagrange, 37
grande, 42
homogène, 49
infinitésimale, 165, 237
irréversible, 167

libre, 249
nulle, 50, 69
permanente, 167
petite, 42, 237
plane, 214, 362
principale, 39
pure, 32, 129
Déplacement, 25
Dérivée
eulérienne, 58, 71, 95, 445
lagrangienne, 58, 71
matérielle, 58, 95, 445
particulaire, 58, 71, 95, 445
temporelle, 58, 71
Désaccord paramétrique, 267
Déterminant, 102, 435, 437
Déterminisme, 121
Déviateur, 113
Degré, 123
Densité
de masse, 71
Diamant, 182
Dilatation
thermique, 167, 181
Dimensionnement, 42
Direction
principale, 39
Dirichlet, 193
Disclinaison, 406
Discontinuité, 91, 447
Dislocation, 389, 406
Disque
de turbine, 311
Dissipation, 139
Distorsion, 131, 221
Divergence, 434
d'un champ de tenseurs, 431
théorème de, 434
Ductile, 310
Ductilité, 114
Dynamique, 81

Ecoulement
de Couette, 343
plastique, 112
Effet
bilame, 255
d'échelle, 357
de taille, 357
Effort
à distance, 73
de champ, 73
de contact, 73
extérieur, 73
Elément
de fibre matérielle, 26
de surface, 30
de volume, 30, 46, 64
Elasticité, 118
anisotrope, 148
cubique, 149
isotrope linéaire, 167
Elastoplasticité, 112, 118
Ellipsoïde :des dilatations, 225
Elliptique
trou, 366
Elliptiques
coordonnées, 366, 370
Endurance, 120, 388
Energie, 86
cinétique, 86
complémentaire, 159
interne, 86, 188
libre, 139
Entropie, 153
Epitaxie, 267
Equation
aux discontinuités, 91, 447
de fermeture, 117
de la chaleur, 185
Equiprésence, 137
Ericksen, J.L., 442
Espace
tangent, 26
Etat
naturel, 168
quasi–naturel, 168
Eulérien, 39, 56
Euler, 26, 205
Extension, 34, 50

Facteur
d'intensité de contrainte, 379, 381, 383
de concentration de contrainte, 347, 352
Fatigue, 120, 388
Fermeture, 117
Fiabilité, 42
Fibre

matérielle, 26
neutre, 236
Fil, 47
Film, 267
Fission, 24, 238
Fissure, 376, 379, 380
Flambage, 192, 205
Flambement, 205
Flexion
circulaire, 234
pure, 47
simple, 205
Fluide, 130, 131
élastique, 151
anisotrope, 132
de Reiner–Rivlin, 135
newtonien, 135
visqueux, 132, 135
Flux
convectif, 95, 449
d'entropie, 135
de chaleur, 87
Fonction
d'Airy, 216, 347
de contrainte, 347
de contraintes, 216
isotrope, 439
Fonctionnelle mémoire, 121
Force
de contact, 73
extérieur, 73
Forme
réduite, 129
Formes réduites des lois de comportement, 129
Formulation
variationnelle, 86
Formule
de Castigliano, 405
de Nanson, 30
de Stoney, 264
Fourier, 87, 142, 187
Fragile, 113
Frettage, 290
Fusion, 24, 238

Galiléen, 21
Gauchissement, 300
Gauss
formules de, 434
Glissement, 34, 37, 50, 222, 244
Grad, 28
grad, 28
Gradient
d'un champ de tenseurs, 430
de la transformation, 26
de propriété, 192
des vitesses, 59
Green, 32, 298
Green–Lagrange, 37
Groupe, 438
cristallographique, 438
de symétrie, 438
des symétries matérielles, 126
linéaire, 438
orthogonal, 438
spécial linéaire, 438
spécial orthogonal, 438
spécial unimodulaire, 438
unimodulaire, 438
Guillaume, 262

Hétérogène, 125, 429
Hamel, 37
Harmonique
fonction, 298
Hencky, 38
déformation de , 38
Histoire, 121
Homogène, 32, 125, 429
Hoop stress, 352
Hugoniot, 95, 449
Hypothèse
des petites perturbations, 192

Imparité, 77
Incompressibilité, 161, 180
Incompressible, 30, 64
Indifférence
matérielle, 123
Indifférence matérielle, 125
Inertie
de flexion, 205
de torsion, 304
Inextensibilité, 164
Ingénieur
cisaillement de, 34
contrainte de l', 98
Inglis, C.E., 366

Interaction
électromagnétique, 73
gravitationnelle, 73
Invar, 262
Invariance
de forme, 124
par changement de référentiel, 56
Invariant, 56, 100, 102, 436
principal d'un tenseur, 102, 436
Irrotationnel, 59
Isentropique, 187, 188
Isochore, 30, 46, 64
Isotherme, 188
Isotropie, 112, 439

Jacobien, 30, 46, 64, 95, 445

Kirchhoff, 98, 99, 152

Lagrange, 24
Lagrangien, 39, 56
Laiton, 262
Lamé
coefficients de, 167
Laplacien, 336, 432
Lemme
d'imparité, 77
de Cauchy, 77
Liaison
unilatérale, 193
Liaison interne, 161
Ligne
d'émission, 24
de courant, 58, 243
Linéaire géométrique (théorie), 42
Linéarisation, 383
Local, 123
Logarithmique
déformation, 38
Loi
d'état, 153
de comportement, 117
de comportement mécanique, 117
de comportement thermique, 135
de la dynamique, 81
de la statique, 83
Longueur
caractéristique, 356
interne, 356

Mécanique
de la rupture, 380
du vivant, 6
Mémoire, 121
Ménisque, 74
Métal, 172, 182
Machine
tournante, 311
Magnésium, 182
Magnétostriction, 249
Mandel, 99, 223
contraintes de, 99
Masse, 71
volumique, 71
Matériau
auxétique, 180
ductile, 114, 310
fragile, 113
incompressible, 30, 64
Matrice
de passage, 417
Maxwell, 119
MEMS, 264
Mesure, théorie de la, 71
Micropolaire, 83
Microsystèmes, 264
Milieu
de degré n, 123
hétérogène, 125
homogène, 125
matériellement simple, 123
micropolaire, 83
Mises
critère de von, 115
Mises, R. von, 115
Misfit, 267
Mixte, 28, 56
Mode I,II, 380
Module
d'élasticité, 156
de cisaillement, 176
de compressibilité, 176
isentropique, 188
isotherme, 188
Mohr, 104
Moment
cinétique, 72
Monocristal, 172
Mousse, 180

Mouvement
de corps rigide, 33, 69, 117
permanent, 59
stationnaire, 59

Nabla, 28
Nanson, 30
Naturel
état, 168
Navier, C.L.M.H., 135
Navier–Stokes, 135
Neumann, 193, 297
Nickel, 182, 322
Noll, W., 127, 439
Nominal, 98
Non local, 123

O(h^2), 44, 210, 254
o(h), 44, 210, 254
Objectif, 56, 100
Objectivité, 56, 68, 100, 123, 137
Onde
de choc, 91, 93, 94
Onsager, 144
Opérateur
gradient, 28
laplacien, 432
nabla, 28
Orthogonal, 61
Os trabéculaire, 6

Paraboloïde, 210, 254
Paradoxe et rupture, 381
Partie
déviatorique, 113
sphérique, 113
Patin, 118
Permanent, 59
Permutation, 83
Phénoménologique, 117
Piézoélectricité, 249
Piola, 98, 99, 152
Piola–Kirchhoff
premier tenseur de, 98
second tenseur de, 99, 152
Piston, 118
Plaque, 47
mince, 237
trouée, 347
Plasticité, 112, 118, 355

Point
matériel, 23
régulier, 95, 449
singulier, 95, 449
Poiseuille, 118
Polaire, 83
Polaire, décomposition, 31
Polymère, 182
Polynôme
caractéristique, 102, 436
Polyuréthanne, 182
Porosité, 388
Postulat
de Cauchy, 77
Potentiel
convexe, 159
de dissipation, 144
Poutre, 47
Pression, 113
externe, 273
interne, 273
Principe
d'entropie, 135
d'indifférence matérielle, 123, 125
d'objectivité, 123, 137
de Curie, 173
de l'action locale, 123
de Saint–Venant, 211
des puissances virtuelles, 84
du déterminisme, 121
premier, 86
second, 153
Problème
de Dirichlet, 193
de Neumann, 193, 297
Processus
thermodynamique, 140
Production
d'entropie, 135
Produit
contracté, 416
doublement contracté, 416
mixte, 29
tensoriel, 414
vectoriel, 29, 425

Quantité de mouvement, 72
Quasi–naturel
état, 168

Réaction, 163
Réciprocité, 144
Réduction des lois de comportement, 129
Référentiel, 20
  corotationnel, 68
  en rotation propre, 68
  local objectif, 68
Régime
  adiabatique, 187
  permanent, 187
Réservoir, 273
Règle
  de Noll, 127
Raideur, 118
Rankine, 95, 449
Rankine–Hugoniot, 95, 449
Reiner–Rivlin, 135
Représentation
  de Mohr, 104
  théorème de, 437
Ressort, 118
Reynolds, 445
Rhéologie, 117
Rigide, 33, 69, 117
Rigidité
  de flexion, 210
  de torsion, 303
Rivlin, R., 442
Rotation, 425
  petite, 42, 237
  propre, 32, 40, 68, 228
Rotationnel, 59, 403, 431
Rupture, 112, 113, 309, 380
  fragile, 355

Saint–Venant, 211
Saut, 91, 447
Second gradient, 123
Second principe, 135, 153
Semi–fluide, 132
Shear, 37
Silicium, 266
Simple, 123
Simplement connexe, 403
Singularité
  des contraintes, 379, 383
  du gradient, 238
  du gradient de la transformation, 238
SMC, 132
Solide, 130, 131
  élastique isotrope, 150
  anisotrope, 131, 148
Sollicitation
  uniaxiale, 107
Souplesse, 118
Sphère
  creuse, 238
  osculatrice, 210, 254, 335
Stabilité, 161
Stationnaire, 59
Statique, 83
Stokes, 87
  formules de, 434
Stokes, G.G., 135
Stoney, 264
Stretch, 36
Stretch tensor, 32
Substrat, 267
Surface, 30
Symétrie, 438
  brisure de, 128
  majeure, 147, 156
  matérielle, 126
  mineure, 156

Ténacité, 383
Tétraèdre
  de Cauchy, 80
Tangent, 26
Taux
  d'allongement relatif, 62
  de déformation, 59
  de glissement angulaire, 62
  de rotation, 59
Tenseur
  antisymétrique, 61, 424
  d'élasticité, 156
  de Cauchy–Green, 32
  des dilatations, 32
  des permutations, 83
  eulérien, 39, 56
  invariant, 56
  lagrangien, 39, 56
  mixte, 28, 56
  objectif, 56
  orthogonal, 61
  symétrique, 424
Tenseurs, 411

Théorème
de Green, 298
de la divergence, 434
Théorie
asymptotique, 383
Théorie du second gradient, 123
Thermocouple, 185
Thermodynamique, 86, 135
Thermographie infra–rouge, 185
Titane, 182
Torseur
des efforts appliqués, 73
dynamique, 72
Torsion, 297
Tourbillon, 59, 239
Trace, 102, 435
Traction, 107
plane, 362
simple, 107, 201
Trajectoire, 24, 243
Trajet de déformation, 155
Transformation, 24
finie, 24, 42, 221
galiléenne, 21
homogène, 32
infinitésimale, 42
isochore, 30, 46, 64
Transformation de phase, 249
Transmué, 131
Transport
équation de, 95, 445
convectif, 29
d'une surface, 30
Transposition, 415
Travaux
virtuels, 199
Tresca
critère de, 114
Tresca, H., 114
Triclinique, 173
Trou
circulaire, 347
elliptique, 347, 366
Tube
mince, 280, 309
sous pression, 273
Turbine, 311

Uniaxial, 107
Unilatéral, 193
Uranium, 182

Variables
d'Euler, 26
de Lagrange, 24
Variance, 101, 417
Vecteur
axial, 424
contrainte, 74
de Burgers, 389, 405
objectif, 68
surface, 30
tourbillon, 59
Verre, 182
Virtuel
puissance, 84
travail, 84
Vis, 389
Viscoélasticité, 118
Viscoplasticité, 118
Viscosité, 118, 132
Vitesse, 58
de déformation, 59
Voigt, W., 170
Volterra, 389
Volume, 30, 46, 64
élémentaire représentatif, 8, 118
Vorticimètre, 239

Wafer, 266

Zinc, 182