

Arbres binaires de recherche

Thomas Blanc

Terminale de l'école Alsacienne

22 novembre 2012

- 1 Introduction
 - Structures de rangements
 - Les arbres
- 2 Arbres binaires de recherche
 - Idée générale
- 3 Algorithmes sur les ABR
 - Maximum, minimum, successeur et prédécesseur
 - Fusion
 - Suppression
- 4 Pour aller plus loin
 - Défauts de la structure d'ABR
 - Autres structures de données

- 1 Introduction
 - Structures de rangements
 - Les arbres
- 2 Arbres binaires de recherche
 - Idée générale
- 3 Algorithmes sur les ABR
 - Maximum, minimum, successeur et prédécesseur
 - Fusion
 - Suppression
- 4 Pour aller plus loin
 - Défauts de la structure d'ABR
 - Autres structures de données

Comment ranger les données

Structures conteneurs

- Les listes
- Les tableaux
- Les tas

Comment faire une structure souple tout en gardant un accès rapide ?

Définitions

Arbre

Un arbre est une structure composée de nœuds. Tout nœud a un certain nombre de fils qui sont eux aussi des nœuds. Tout nœud a un seul parent sauf un qui n'en a pas et que l'on nomme racine.

Notions utiles

Arité : L'arité d'un nœud est le nombre de fils qu'il a. L'arité d'un arbre est l'arité maximale de ses nœuds.

Feuille : Une feuille est un nœud d'arité 0.

Hauteur : La hauteur d'un nœud est sa distance à la racine (qui a donc une hauteur 0). La hauteur d'un arbre est la hauteur maximale de l'arbre.

Forêt : Une forêt est un ensemble d'arbres.

Représentation en mémoire

Structure effective de l'arbre

On prend chaque nœud comme un couple comprenant d'un côté la valeur contenu dans le nœud, de l'autre une liste ou un tableau contenant les adresses mémoires des fils.

Cette structure peut aisément être étendue puisque, tout comme la liste, le nombre d'éléments de l'arbre n'est pas déterminé à l'avance, même si l'arité est fixée.

Dans certaines représentation, les nœuds ont aussi un pointeur vers leur père.

- 1 Introduction
 - Structures de rangements
 - Les arbres
- 2 Arbres binaires de recherche
 - Idée générale
- 3 Algorithmes sur les ABR
 - Maximum, minimum, successeur et prédécesseur
 - Fusion
 - Suppression
- 4 Pour aller plus loin
 - Défauts de la structure d'ABR
 - Autres structures de données

Recherche dichotomique

Principe de recherche

Comment trouver rapidement un mot dans le dictionnaire avec un minimum de questions dont les réponses sont oui ou non ?

Prendre le mot au milieu du dictionnaire, demander si le mot recherché est avant ou après, et recommencer sur la partie du dictionnaire non-encore éliminée.

La découverte du mot est alors en $O(\log n)$ où n est la taille du dictionnaire.

Arbre Binaire de Recherche

Définition

Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre d'arité 2 où pour tout nœud s étiqueté par le nombre n on a :

- Tous les nœuds dans le sous-arbre du fils gauche de s ont des étiquettes plus petites que n .
- Tous les nœuds dans le sous-arbre du fils droit de s ont des étiquettes plus grandes que n .

Recherche dans un ABR

Recherche

Si l'on cherche le nœud s étiqueté x . Le temps de recherche sera proportionnel à la hauteur du nœud s .

En effet, il suffit pour chaque nœud analysé de comparer l'étiquette à x , et de choisir en fonction si l'on descend à gauche ou à droite. Cette méthode permet aussi de mettre rapidement un nœud dans l'arbre, en ajoutant le nœud en dessous d'une feuille.

- 1 Introduction
 - Structures de rangements
 - Les arbres
- 2 Arbres binaires de recherche
 - Idée générale
- 3 Algorithmes sur les ABR
 - Maximum, minimum, successeur et prédécesseur
 - Fusion
 - Suppression
- 4 Pour aller plus loin
 - Défauts de la structure d'ABR
 - Autres structures de données

Trouver les éléments particuliers...

Maximum et minimum

Pour trouver le maximum (resp. minimum), il suffit de toujours descendre vers la droite (resp. la gauche).

Prédécesseur et successeur

Pour trouver le successeur (resp. prédécesseur) d'un élément x , il faut prendre le minimum (resp. le maximum) du sous-arbre contenant les éléments plus grands (resp. plus petits) que x .

Fusion d'ABR

Fusion de deux arbres

On aimerait fabriquer un ABR contenant l'union des éléments contenu dans deux ABR. Peut-on faire cela en un minimum d'étapes ?

Et si l'on sait que tous les éléments de l'arbre A sont plus petits que tous les éléments de l'arbre B ?

Suppression d'un élément

Comment supprimer un nœud ?

Supprimer une feuille est facile, mais si le nœud est au milieu de l'arbre ?

La réponse...

- 1 Introduction
 - Structures de rangements
 - Les arbres
- 2 Arbres binaires de recherche
 - Idée générale
- 3 Algorithmes sur les ABR
 - Maximum, minimum, successeur et prédécesseur
 - Fusion
 - Suppression
- 4 Pour aller plus loin
 - Défauts de la structure d'ABR
 - Autres structures de données

Un ABR peut avoir une grande hauteur

Problème de l'arbre filaire

Si les nœuds sont entrés dans l'arbre dans l'ordre, on aura un arbre en forme de liste. La recherche sera alors beaucoup moins efficace que prévu !

Notons que si les nœuds sont entrés au hasard, l'ABR sera équilibré avec une bonne probabilité.

Solutions

Il existe diverses méthodes pour s'assurer d'avoir un ABR équilibré. Elles consistent en général à retenir en plus de l'étiquette du nœud la hauteur de ses sous-arbre et de prendre cela en compte lorsque la hauteur est modifiée.

Faciliter la fusion

Structures de données avancées

On a vu que la fusion sur un ABR n'était pas évidente. Il existe des structures plus complexes encore qui permettent à la fois les mêmes performances en recherche et insertion, tout ayant une bonne vitesse de fusion.

On verra peut-être certaines de ces structures à la fin de l'année...