

Notions de bases d'informatique

Thomas Blanc

Terminale de l'école Alsacienne

27 septembre 2012

- 1 Un peu de théorie
 - La dénombrabilité
 - Le problème de la diagonale
 - Le problème de l'arrêt
- 2 Graphes et arbres
 - Les graphes
 - Les arbres
 - Quelques problèmes de graphe bien connus
- 3 Notions asymptotiques
 - Exponentielle et logarithme

Taille des infinis

Bienvenue dans l'hotel infini !

Taille des infinis

Bienvenue dans l'hôtel infini !

- $\mathbb{N} \cup \{-1\} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$

Taille des infinis

Bienvenue dans l'hôtel infini !

- $\mathbb{N} \cup \{-1\} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 2x$ si $x \geq 0$ et $-2x - 1$ sinon

Taille des infinis

Bienvenue dans l'hôtel infini !

- $\mathbb{N} \cup \{-1\} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$
- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 2x$ si $x \geq 0$ et $-2x - 1$ sinon
- $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} : C'est possible mais compliqué à écrire.$

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}
- Tous n-uplet, intersections ou unions finies d'ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}
- Tous n-uplet, intersections ou unions finies d'ensembles dénombrables
- Les chaînes de caractère, les programmes, n'importe quelle donnée en informatique

Ensembles dénombrables

Ensembles dénombrables

- \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}
- Tous n-uplet, intersections ou unions finies d'ensembles dénombrables
- Les chaînes de caractère, les programmes, n'importe quelle donnée en informatique
- On ne travaille qu'avec des dénombrables !

Faisons un grand tableau des fonctions

Le grand tableau

- Soit un grand tableau contenant toutes les suites $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
En abscisse, les suites. En ordonnée, les arguments :
 $t.(i).(j) = u_i(j)$

Faisons un grand tableau des fonctions

Le grand tableau

- Soit un grand tableau contenant toutes les suites $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
En abscisse, les suites. En ordonnée, les arguments :
 $t.(i).(j) = u_i(j)$
- Soit ω la suite telle que $\omega(i) = u_i(i) + 1$.

Faisons un grand tableau des fonctions

Le grand tableau

- Soit un grand tableau contenant toutes les suites $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
En abscisse, les suites. En ordonnée, les arguments :
 $t.(i).(j) = u_i(j)$
- Soit ω la suite telle que $\omega(i) = u_i(i) + 1$.
- Il est impossible qu' ω aie un indice !

Faisons un grand tableau des fonctions

Le grand tableau

- Soit un grand tableau contenant toutes les suites $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
En abscisse, les suites. En ordonnée, les arguments :
 $t.(i).(j) = u_i(j)$
- Soit ω la suite telle que $\omega(i) = u_i(i) + 1$.
- Il est impossible qu' ω aie un indice !
- Certaines fonctions ne sont pas calculables !

Peut-on prévoir l'arrêt d'un programme ?

Le programme Arrêt

Soit $Arret(M, w)$ la fonction prenant en entrée un programme M et un argument w .

$Arret(M, w)$ vaut true si l'exécution de M sur w termine, et false sinon.

Peut-on calculer $Arret(M, w)$ en un temps fini ?

Non, on ne peut pas

Le programme Ω

Soit $\Omega()$:

Si *Arret*($\Omega, ()$) Alors *Boucle_infinie*() Sinon *Fin*

Ω s'arrête t'il ? Paradoxe !

Rappel sur les graphes

- 1 Un peu de théorie
 - La dénombrabilité
 - Le problème de la diagonale
 - Le problème de l'arrêt
- 2 Graphes et arbres
 - Les graphes
 - Les arbres
 - Quelques problèmes de graphe bien connus
- 3 Notions asymptotiques
 - Exponentielle et logarithme

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Définition

Un graphe est un ensemble fini de sommets et d'arrêtes. Les arrêtes sont des couples de points.

L'ordre des points dans une arrête est important si le graphe est orienté. On peut étiqueter les sommets et/ou les arrêtes avec diverses informations.

Quelques définitions en plus

Définitions utiles

- Un chemin est une suite de sommets reliés un à un par une arête.
- Un cycle est un chemin ayant le même sommet comme début et comme fin.
- Un sous-graphe de G est un graphe contenant un sous ensemble des sommets et des arêtes de G .
- Une clique est un graphe avec une arête entre chaque sommets.

Qu'est-ce qu'un arbre ?

Définition

Un arbre est un graphe sans cycle.

Idée de racine

- On peut décider d'une racine pour chaque arbre.
- La profondeur d'un sommet (ou nœud) est alors sa distance à la racine.

Quelques problèmes

Problèmes d'algorithmique

- Voyageur de commerce
- Coloriage
- Chemin hamiltonien
- Arbre couvrant minimal

- 1 Un peu de théorie
 - La dénombrabilité
 - Le problème de la diagonale
 - Le problème de l'arrêt
- 2 Graphes et arbres
 - Les graphes
 - Les arbres
 - Quelques problèmes de graphe bien connus
- 3 Notions asymptotiques
 - Exponentielle et logarithme

Idée de la représentation asymptotique

Qu'est-ce qui est long

Dans un calcul, ce sont rarement les parties constantes qui prennent du temps. Avec l'accroissement permanent de la taille des données, on veut des calculs qui restent rapides malgré des données très grandes.

Notation O et Ω

Idée de la représentation asymptotique

Qu'est-ce qui est long

Dans un calcul, ce sont rarement les parties constantes qui prennent du temps. Avec l'accroissement permanent de la taille des données, on veut des calculs qui restent rapides malgré des données très grandes.

Notation O et Ω

- On dit qu'une fonction f est $O(g)$ si $\exists N, c \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tq.
 $\forall n \geq N f(n) \leq cg(n)$

Idée de la représentation asymptotique

Qu'est-ce qui est long

Dans un calcul, ce sont rarement les parties constantes qui prennent du temps. Avec l'accroissement permanent de la taille des données, on veut des calculs qui restent rapides malgré des données très grandes.

Notation O et Ω

- On dit qu'une fonction f est $O(g)$ si $\exists N, c \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tq.
 $\forall n \geq N f(n) \leq cg(n)$
- On dit qu'une fonction f est $\Omega(g)$ si g est $O(f)$.

Idée de la représentation asymptotique

Qu'est-ce qui est long

Dans un calcul, ce sont rarement les parties constantes qui prennent du temps. Avec l'accroissement permanent de la taille des données, on veut des calculs qui restent rapides malgré des données très grandes.

Notation O et Ω

- On dit qu'une fonction f est $O(g)$ si $\exists N, c \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ tq.
 $\forall n \geq N f(n) \leq cg(n)$
- On dit qu'une fonction f est $\Omega(g)$ si g est $O(f)$.
- On dit qu'une fonction est $\Theta(g)$ si f est $O(g)$ et f est $\Omega(g)$.

Le logarithme

Définition

Soit $\log_k(n)$ le nombre x tel que $x^k = n$.

Propriété

- \log croît plus lentement que tout polynôme.
- \log tend vers l'infini
- $\log(ab) = \log a + \log b$