

NB : cette fiche reprend quelques techniques nécessaires : elle ne constitue pas un objectif, mais un pré-requis !

TODO : Taper en entier !

Calculer une somme ou un produit fini

On sait calculer des sommes et produits finis :

- à l'aide d'un raisonnement par récurrence,
- à l'aide d'un changement d'indice, ou d'un télescopage,
- en utilisant l'identité géométrique ou la formule du binôme de Newton (pour une somme).

Changements d'indice

On sait calculer la somme $\sum_{i=0}^{q-p} x_{p+i}$ à l'aide du changement d'indice $k := p + i$:

- (1) on pose $k = p + i$,
- (2) on remplace i par $k - p$ dans la somme,
- (3) on détermine les bornes pour k : lorsque i varie de 0 à $q - p$, k varie de p à q .

Exercice 1 : Soit $0 \leq p \leq n$, montrer que $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k} = \binom{p}{n}$.

Manipuler des inégalités

Encadrer une somme Pour majorer (resp. minorer, encadrer) la somme $\sum_{k=0}^n x_k$,

- (1) on considère $k \in \{0, \dots, n\}$, on majore (resp. minore, encadre) x_k par un M_k ,
- (2) on somme terme à terme ces majorations (resp. minoration, encadrements) $\sum_{k=0}^n x_k \leq \sum_{k=0}^n M_k$.

Exercice 2 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$.

Calculer une partie entière Pour calculer une partie entière, on revient souvent à la définition en encadrant le réel x par deux entiers consécutifs. Pour prouver $[x] = n$, on établit $n \leq x < n + 1$.

Majorer ou minorer la valeur absolue d'une somme On utilise souvent une des deux inégalités triangulaires.

Résoudre une équation polynomiale

Pour une équation de degré inférieur (ou égal) à 2, les formules classiques s'appliquent. Pour une équation de degré supérieur à 3, on cherchera à abaisser le degré de l'équation par une factorisation (racine évidente, identité remarquable etc) ou un changement d'inconnue.

Exercice 3 : Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $x^3 - 9x + \frac{20}{x}$.

Résoudre un système d'équations linéaires

On met en œuvre la méthode d'élimination de GAUSS.