

Suites (2014)

◆ Exercice 1

(Pondichéry, avril 2014) 1 point

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point si la réponse est exacte et correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Proposition 1 : Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

◆ Exercice 2

(Liban, mai 2014) 5 points

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

◆ Exercice 3

(Pondichéry, avril 2014) 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .
 Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n.$$

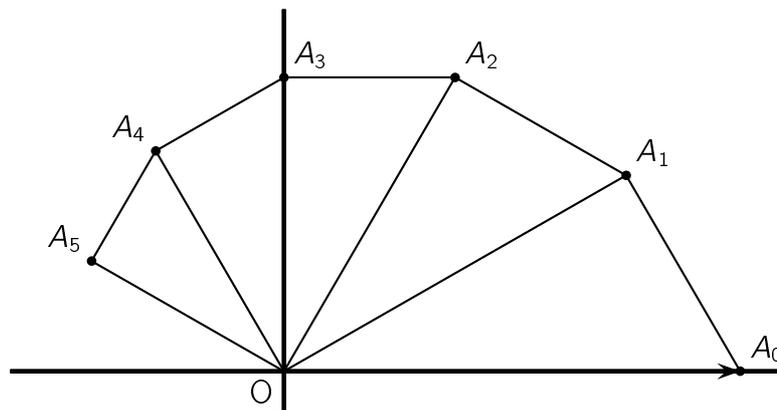
On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
2.
 - a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 - b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .
 - c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

- a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?
 - b. Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4.
 - a. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .
 - b. On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
 Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
 - c. Compléter la figure ci-dessous en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9 .
 Les traits de construction seront apparents.



Un volume constant de $2\,200\text{ m}^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient $1\,400\text{ m}^3$ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	: n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	: Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	: Tant que $a < 1\,100$, faire : Affecter à a la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	: Afficher n

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1\,320$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

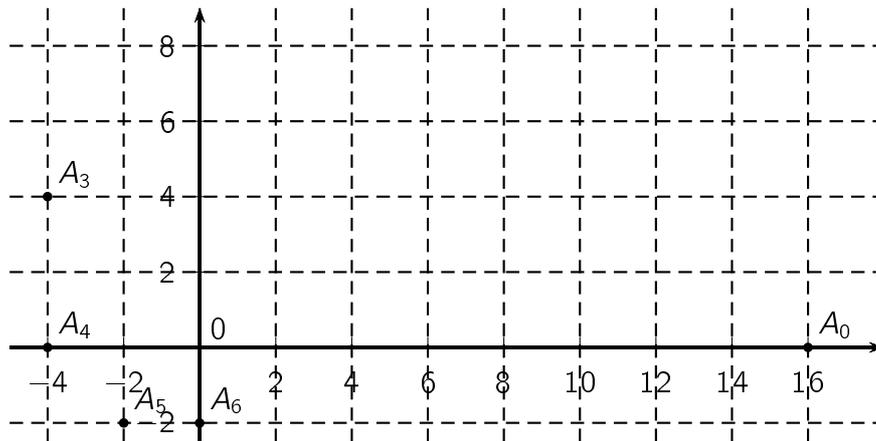
On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2}z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3 .
- b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique ci-dessous.



- c. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
 - d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
- b. Donner une expression de L_n en fonction de n .
- c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

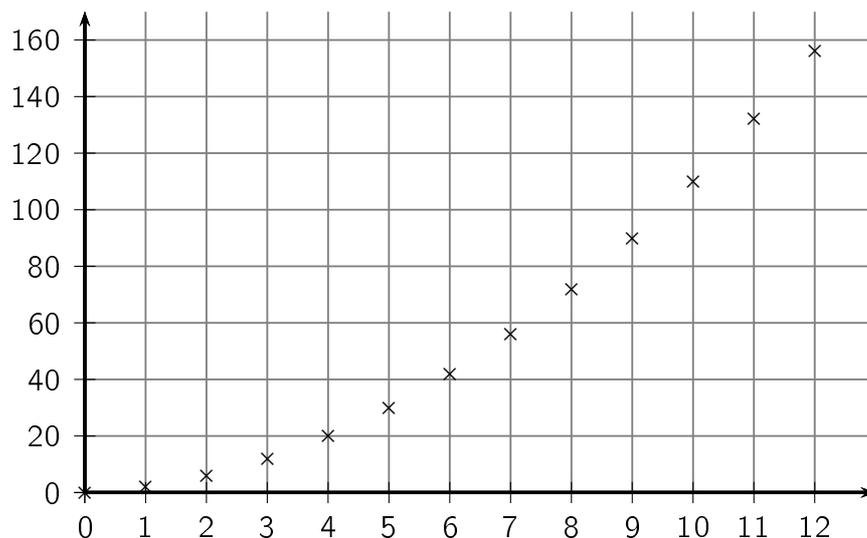
1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables : n est un entier naturel u est un réel	Variables : n est un entier naturel u est un réel
Entrée : Saisir la valeur de n	Entrée : Saisir la valeur de n
Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie : Afficher u	Sortie : Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



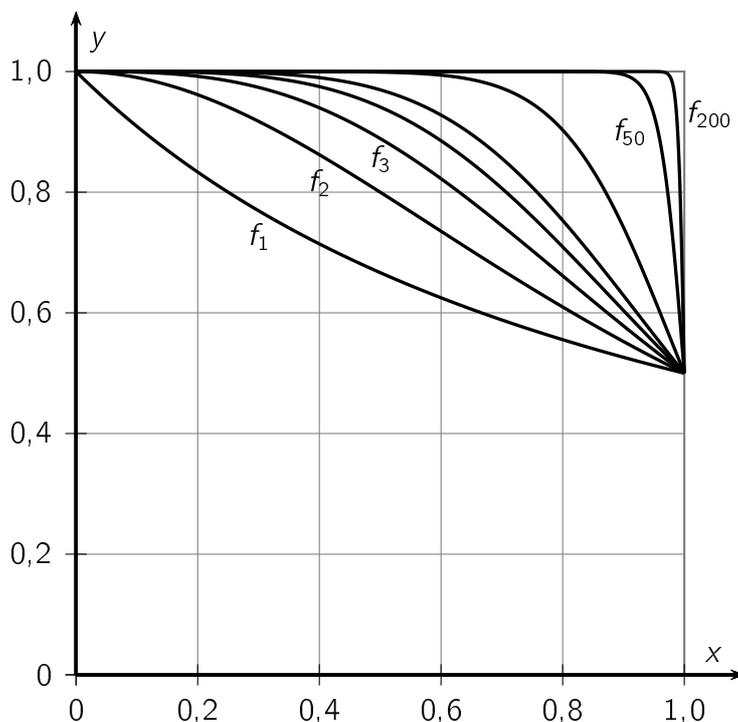
- a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
 - b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a , b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a , b et c à l'aide des informations fournies.
4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - b. On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n + 1)(n + 2)$.
 - c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_n \leq 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1 - x^n) dx$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables : n, p et k sont des entiers naturels
 x et I sont des réels

Initialisation : I prend la valeur 0

Traitement : Demander un entier $n \geq 1$
 Demander un entier $p \geq 1$
 Pour k allant de 0 à $p - 1$ faire :
 x prend la valeur $\frac{k}{p}$
 I prend la valeur $I + \frac{1}{1 + x^n} \times \frac{1}{p}$
 Fin Pour
 Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par \mathcal{C}_1 la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x + e^{-x}$.

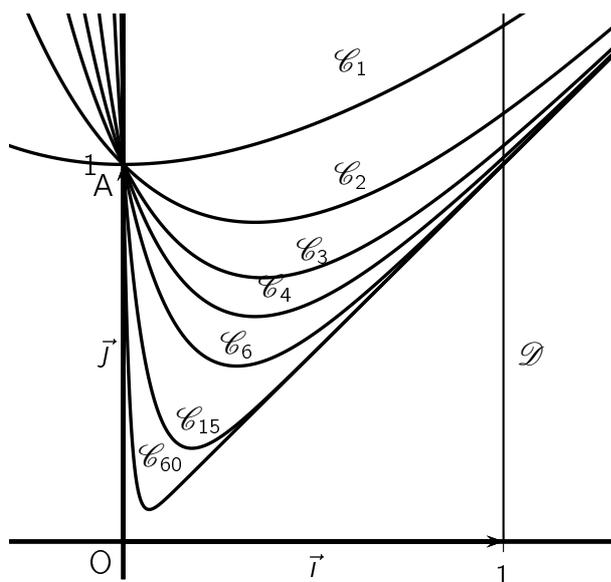
1. Justifier que \mathcal{C}_1 passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1 . On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , pour tout entier naturel n , on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x + e^{-nx}$.

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe \mathcal{C}_n pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite \mathcal{D} d'équation $x = 1$.



- a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .
 - b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx$.
En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.
 3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n) .

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{array} \right.$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

- b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .

Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
- b. En déduire, que pour tout entier naturel n , $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.
- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	