

Suites (2013)

◆ Exercice 1

(Pondichéry, avril 2013) 6 points

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

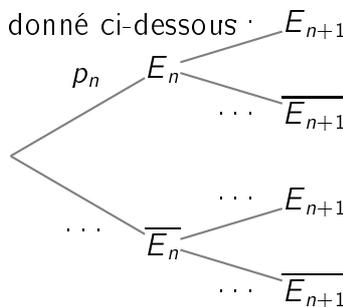
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

- Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
 - Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

- Compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



- Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r . En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- En déduire la limite de la suite (p_n) .
- On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur J + 1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

- a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X .

- b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x .

x	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

◆ Exercice 2

(Polynésie, juin 2013) 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$

- a. Calculer u_1 et u_2 .

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n$.
- On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
- Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
<p>Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v</p> <p>Fin algorithme</p>	<p>Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme : Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour</p> <p>Fin algorithme</p>	<p>Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels</p> <p>Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$ Fin pour Afficher v</p> <p>Fin algorithme</p>

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
 La suite (v_n) est-elle monotone ?
- c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n) , puis celle de (v_n) en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.
- Que permet de calculer cet algorithme ?
- Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.
 - Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 - Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
- On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
 - Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

◆ Exercice 6

(Antilles-Guyane, juin 2013) 5 points

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n , on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n) .

Partie A

1. Donner a_0 et b_0 .
2. Calculer z_1 , puis en déduire que $a_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```

Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                  Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur  $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$ 
    Affecter à B la valeur  $\frac{B}{3}$ 
FinPour
Afficher A
    
```

- a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

- b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n , exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n , et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n , et déterminer la limite de (b_n) .
3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Montrer que pour tout entier naturel n , $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$.

- b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

- c. Montrer que, pour tout entier naturel n , $|a_n| \leq u_n$.

En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$.
 On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$.
2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.
 b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$.
 On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\frac{1 + 0,5u}{0,5 + u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$.
 Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
 b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
 b. montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
 c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

◆ Exercice 8*(Métropole, juin 2013)* **5 points**

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1.
 - a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
 - b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_n \leq n + 3$.
 - b. Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
 - c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.
 - a. Exprimer S_n en fonction de n .
 - b. Déterminer la limite de la suite (T_n) .

◆ Exercice 9*(Métropole, septembre 2013)* **5 points**

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.
On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1.
 - a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
 - b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
 - c. Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
 - d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
 - a. Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. On admet que pour tout entier naturel $n, u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) .

◆ Exercice 10

(Nouvelle-Calédonie, novembre 2013) 5 points

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels K est un entier
Début :	Affecter 0 à K Affecter 2 à U Affecter 10 à V Saisir N Tant que $K < N$ Affecter $K + 1$ à K Affecter U à W Affecter $\frac{2U + V}{3}$ à U Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V Fin tant que Afficher U Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

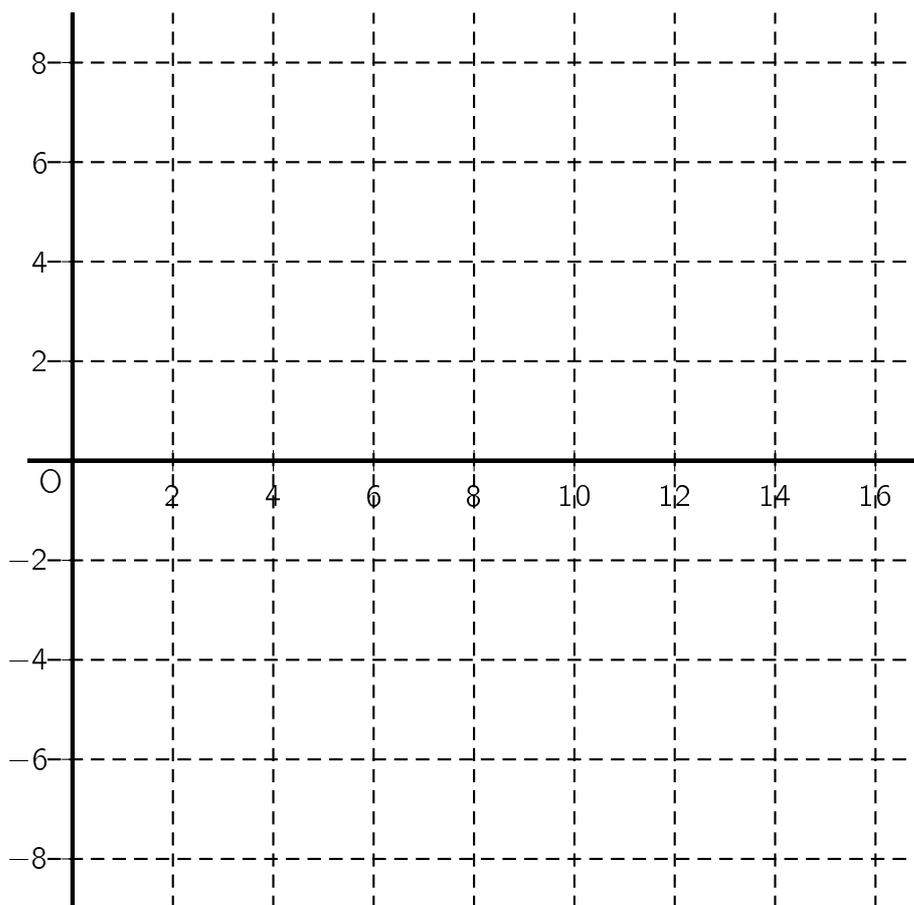
PARTIE B

1.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.
 - b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $w_n = 8 \left(\frac{5}{12}\right)^n$.
2.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
 - b. Dédire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.
 - c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
 - a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).
 - b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
 - c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure ci-dessous et tracer les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$.



3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3 .

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$.

- a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ell_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
- b. Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geq 1\,000$.