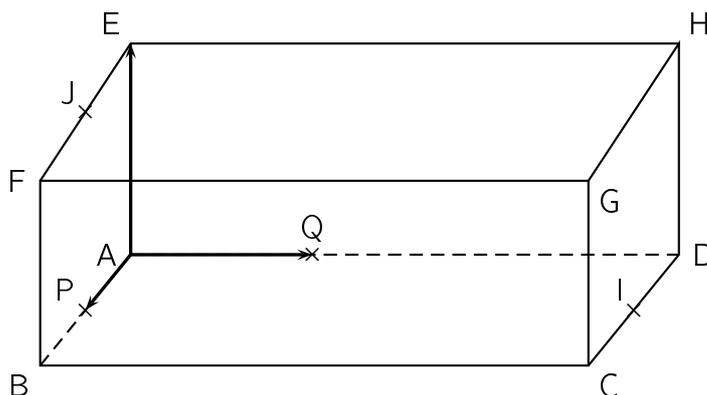


Géométrie dans l'espace (2014)

◆ Exercice 1

(Nouvelle-Calédonie, mars 2014) 5 points

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $AD = 3$ et $AE = 1$.
 On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
 On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE})$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].
3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
 Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].
4. **a.** Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

- c.** Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.
- d.** Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

◆ Exercice 2

(Pondichéry, avril 2014) 1 point

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point si la réponse est exacte et correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

\mathcal{P} et \mathcal{R} sont les plans d'équations respectives : $2x + 3y - z - 11 = 0$ et $x + y + 5z - 11 = 0$.

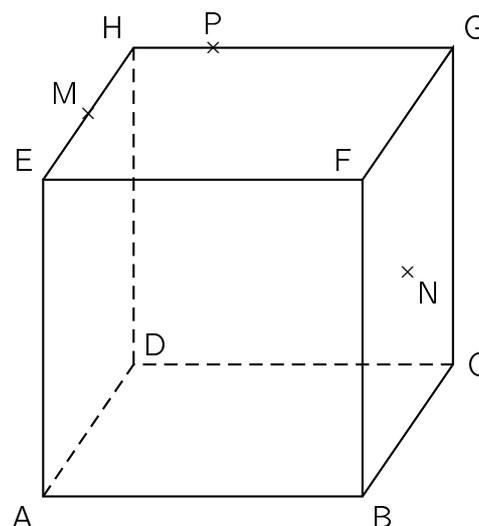
Proposition : Les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} se coupent perpendiculairement.

◆ Exercice 3

(Amérique du Nord, mai 2014) 4 points

On considère un cube ABCDEFCH donné ci-dessous.

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\vec{HP} = \frac{1}{4}\vec{HG}$.



Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
Construire le point L.
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
 - a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
 - b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $(1 ; 1 ; \frac{5}{8})$.
Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

◆ Exercice 4*(Liban, mai 2014)* **5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan \mathcal{P} d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite \mathcal{D} dont une représentation

$$\text{paramétrique est } \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $A(1 ; 1 ; 0)$, $B(3 ; 0 ; -1)$ et $C(7 ; 1 ; -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Proposition 2 :

Les droites \mathcal{D} et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :

Les droites \mathcal{D} et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :

La droite \mathcal{D} coupe le plan \mathcal{P} au point E de coordonnées $(8 ; -3 ; -4)$.

Proposition 5 :

Les plans \mathcal{P} et (ABC) sont parallèles.

◆ Exercice 5*(Centres étrangers, juin 2014)* **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1 ; 2 ; 7), \quad B(2 ; 0 ; 2), \quad C(3 ; 1 ; 3), \quad D(3 ; -6 ; 1) \text{ et } E(4 ; -8 ; -4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{u}(1 ; b ; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
 - a. Déterminer les valeurs de b et c telles que \vec{u} soit un vecteur normal au plan (ABC).
 - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + z - 4 = 0$.
 - c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3. On considère la droite \mathcal{D} de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

- a. La droite \mathcal{D} est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
 - b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (ABC).
4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

◆ Exercice 6

(Polynésie, juin 2014) 5 points

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5 ; -5 ; 2), B(-1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) \text{ et } D(6 ; 6 ; -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan (BCD).
5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où \mathcal{B} est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.
6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle \widehat{BAC} .

◆ Exercice 7

(Antilles-Guyane, juin 2014) 4 points

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1 ; 2 ; 5)$, $B(-1 ; 6 ; 4)$, $C(7 ; -10 ; 8)$ et $D(-1 ; 3 ; 4)$.

1. **Proposition 1** : Les points A, B et C définissent un plan.
2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.
Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.
3. **Proposition 3** : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z + 7 = 0$ et \mathcal{P}' le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.
Proposition 4 : Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.

Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1 ; -1 ; -1)$, $B(1 ; 1 ; 1)$, $C(0 ; 3 ; 1)$ et le plan \mathcal{P} d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1

Soit \mathcal{D}_1 la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$ passant par A.

Une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D}_1 est :

a.
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b.
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

c.
$$\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

d.
$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Question 2

Soit \mathcal{D}_2 la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a. La droite \mathcal{D}_2 et le plan \mathcal{P} ne sont pas sécants

b. La droite \mathcal{D}_2 est incluse dans le plan \mathcal{P} .

c. La droite \mathcal{D}_2 et le plan \mathcal{P} se coupent au point $E\left(\frac{1}{3} ; -\frac{7}{3} ; \frac{10}{3}\right)$.

d. La droite \mathcal{D}_2 et le plan \mathcal{P} se coupent au point $F\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{22}{3}\right)$.

Question 3

a. L'intersection du plan \mathcal{P} et du plan (ABC) est réduite à un point.

b. Le plan \mathcal{P} et le plan (ABC) sont confondus.

c. Le plan \mathcal{P} coupe le plan (ABC) selon une droite.

d. Le plan \mathcal{P} et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle \widehat{BAC} arrondie au dixième de degré est égale à :

a. $22,2^\circ$

b. $0,4^\circ$

c. $67,8^\circ$

d. $1,2^\circ$

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ de l'espace.

1. On désigne par \mathcal{P} le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).

On note H le point d'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite (DF).

- Donner les coordonnées des points D et F.
- Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
- Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .
- Calculer les coordonnées du point H.
- Démontrer que l'angle \widehat{EHG} est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\vec{DM} = t\vec{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique \widehat{EMG} .

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

- Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.
- Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
En déduire que $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
- Conclure.